



**HAL**  
open science

# Cumul de fatigue sous sollicitation aléatoire - Fatigue failure analysis under random loading

Christian Soize

► **To cite this version:**

Christian Soize. Cumul de fatigue sous sollicitation aléatoire - Fatigue failure analysis under random loading. Revue Construction Métallique - CTICM, 1979, 16 (4), pp.3-22. hal-00807420

**HAL Id: hal-00807420**

**<https://hal.science/hal-00807420>**

Submitted on 3 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# CUMUL DE FATIGUE

## SOUS SOLLICITATION ALÉATOIRE

par C. SOIZE

### 1. — INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de donner un aperçu des principales méthodes qui sont utilisées à l'heure actuelle au niveau des études de projets pour la vérification de la tenue à la fatigue d'une structure ou d'un de ses éléments constitutifs, lorsque cette dernière est assujettie à des actions extérieures, fonctions du temps, qui sont modélisées par des processus stochastiques.

Nous avons essayé de présenter les résultats pratiques avec une certaine rigueur, afin de mettre en évidence les différentes hypothèses sur lesquelles ils sont basés.

### 2. — PRÉLIMINAIRES

La prévision de la durée de vie d'une structure ou de l'un de ses éléments, d'un assemblage ou d'un détail d'une pièce mécanique, soumis à des phénomènes de fatigue dus à des chargements cycliques, nécessite tout d'abord, de la part de l'ingénieur, de faire un choix d'un état limite qui sera le « critère de ruine ». Ce choix est difficile à faire dans de nombreuses situations et dépend de nombreux facteurs [6]. Pour les problèmes de fatigue, le critère de ruine n'est pas unique mais est lié aux grandes étapes que l'on rencontre dans le processus de fatigue et qui sont au nombre de trois.

1. — **La première étape** est « l'initiation de fissure ». Dans tous les développements, qui suivent, nous définissons l'initiation de fissure comme le moment à partir duquel débute une propagation « mesurable » d'une fissure, c'est-à-dire qu'il se forme une fissure « *macroscopique* » de fatigue. Cette notion d'initiation de fissure macroscopique est à opposer à la fissuration microscopique. En effet, il y a toujours une microfissuration autour des « défauts » initiaux qui sont la cause des problèmes de fatigue. Or pendant le premier stade de la fatigue, c'est-à-dire entre l'instant initial de chargement et l'instant d'initiation d'une « macrofissure », l'évolution des microfissures n'est pas facilement détectable sans technique destructive, et ceci jusqu'au temps « d'initiation » qui correspond à une certaine « organisation » de la microfissuration et qui, privilégiant une certaine fissure, donne naissance à une macrofissure dont on pourra suivre la propagation.

Il est à noter que pour certains problèmes de fatigue à très grand nombre de cycles, pour lesquels les variations de contrainte sont faibles en des points jugés potentiellement critiques pour des phénomènes de fatigue, le temps d'initiation d'une fissure macroscopique peut représenter une très grande partie de la durée de vie. Mais cette situation est assez peu fréquente et généralement la durée de vie est assurée par le temps de propagation lente de la fissure macroscopique après son initiation.

2. — **La seconde étape** que nous considérerons dans le processus d'endommagement de fatigue est la « propagation lente » d'une fissure macroscopique. Cette propagation lente ne peut se faire que si le matériau présente certaines propriétés de ductilité. Comme nous l'avons dit en 2-2, cette seconde étape peut représenter dans certains cas une contribution importante de la durée de vie.

3. — **La troisième étape** correspond à la « propagation brutale » de la fissure conduisant à la rupture.

4. — Dans la pratique, un élément de structure, un assemblage, ou une pièce mécanique ne contient généralement pas de fissure macroscopique à la mise en service. Si la pièce ou l'élément est soumis à des sollicitations cycliques, il peut se produire l'initiation d'une fissure macroscopique au sens où nous l'avons défini en 2-1.

Par conséquent, si l'ingénieur choisit comme critère de ruine le temps d'initiation d'une fissure macroscopique, pour préserver une pièce mécanique des phénomènes de fatigue il lui faudra une information quantitative sur le temps « d'initiation ». Par contre, si le critère de ruine choisi n'est pas l'initiation, ou si le temps d'initiation est négligeable, il lui faudra alors une information sur la vitesse de propagation de la macrofissure. Dans ce cas, la prévision de la durée de vie à la fatigue nécessitera la connaissance du nombre total de cycles nécessaires à l'initiation d'une fissure macroscopique, puis à sa propagation jusqu'à rupture, ou bien jusqu'à une certaine longueur limite de fissure donnée à l'avance et considérée comme état limite.

5. — D'un point de vue de la mécanique, il existe à l'heure actuelle deux approches pour la vérification à la fatigue d'une pièce mécanique ou d'un élément de structure (pour le moment nous n'entrons pas dans le détail) :

— l'une, dite classique, est globale et est basée sur l'utilisation de lois de *cumul* purement empiriques et de lois d'*endommagement* données par des courbes expérimentales de fatigue, dites courbes *S-N*;

— l'autre est basée sur les résultats de la mécanique de la rupture et fait appel d'une part à la théorie et d'autre part à l'expérience.

• Le recours à la mécanique de la rupture pour la prévision de tenue à la fatigue des ouvrages est sans nul doute bien plus satisfaisante d'un point de vue scientifique que la démarche classique. En effet, ses bases reposent sur la mécanique des milieux continus et elle permet ainsi d'analyser, de comprendre et de mieux expliquer les phénomènes complexes de la fatigue. Malheureusement, si elle est capable de fournir dans de nombreux cas, et dans l'état actuel des connaissances, des renseignements quantitatifs sur la seconde et la troisième étape du processus d'endommagement par fatigue, c'est-à-dire sur la propagation lente d'une fissure macroscopique et sur la propagation brutale de la fissure qui conduit à la rupture, il semble qu'elle se révèle encore difficile d'application pour résoudre le problème de l'initiation d'une fissure macroscopique de fatigue. D'autre part, comme il a été montré dans [7], l'utilisation de la mécanique de la rupture à la connaissance des phénomènes de fatigue est absolument fondamentale, mais elle reste un outil qui est surtout de recherche et qui est encore assez mal adapté à de nombreuses situations pratiques auxquelles sont confrontés les ingénieurs des bureaux d'études. Même du point de vue réglementaire, seul le règlement du DNV Norvégien donne quelques prescriptions basées sur la mécanique de la rupture.

• C'est pour cette raison que l'approche « classique » est utilisée aujourd'hui par les ingénieurs, car pour de nombreux cas, ils ne disposent en fait et pour le moment d'aucun autre moyen théorique pour la prévision du comportement à la fatigue. Cependant, on sait que cette méthode ne donne pas toujours une idée convenable de la réalité et est même parfois en désaccord total avec la théorie. Nous reviendrons par la suite sur ce point.

6. — On peut déjà se rendre compte des difficultés auxquelles l'ingénieur va se heurter pour étudier la tenue à la fatigue d'une structure s'il ne veut pas, ou ne peut pas, vérifier expérimentalement la tenue à la fatigue de la structure réelle. Par exemple, pour une plate-forme pétrolière « offshore » du type « jacket », c'est-à-dire où la structure est constituée

d'un treillis métallique fixé au fond de la mer, se trouvant dans des hauteurs d'eau d'une centaine de mètres et dans des conditions d'environnement particulièrement sévères (c'est le cas de la mer du Nord), certains nœuds critiques de la structure doivent être vérifiés à la fatigue sous les actions répétées de la houle. Or, s'il peut être envisageable d'étudier expérimentalement la tenue à la fatigue d'un de ces nœuds en grandeur réelle, bien que cela ne soit pas toujours possible et de toute manière extrêmement coûteux, on ne saura pas toujours reproduire expérimentalement tout l'historique des sollicitations auxquelles il sera soumis pendant sa durée de vie présumée. Ainsi pour ce type de structure, les nœuds constituent la jonction de plusieurs tubes (3, 4, 5 et parfois 6). L'historique des sollicitations appliquées à ce type de nœud est extrêmement complexe compte tenu du fait que la structure est spatiale, que le nœud peut être un assemblage compliqué, que les actions qui le sollicitent sont dues à des effets tels que ceux de la houle et qui ne peuvent pas, pour des calculs à la fatigue, être modélisés simplement par des fonctions périodiques déterministes etc... La solution expérimentale serait donc d'essayer la construction réelle dans son site, ce qui n'est pas envisageable, pour chaque construction.

Bien évidemment, il y a des cas particuliers pour lesquels, pour des raisons de sécurité (cas de certains éléments constitutifs d'équipement des centrales nucléaires, de matériels aéronautiques etc...), les essais à la fatigue peuvent être effectués sur une version grandeur réelle de l'élément ou de la structure, même si les essais sont destructifs et très onéreux. Dans cette configuration, il n'y a plus à vraiment parler d'un besoin de modélisation pour l'ingénieur, puisqu'il a fait la preuve de la tenue par l'expérience. Néanmoins, il n'est pas toujours évident que la modélisation ne puisse pas apporter des renseignements complémentaires à l'expérience, compte tenu de la remarque que nous avons formulée précédemment en ce qui concerne les possibilités limitées de la reproduction expérimentale d'un historique des sollicitations dues à un environnement complexe sur une longue période de temps.

7. — L'ingénieur est donc souvent conduit à utiliser des modélisations au niveau des études d'un projet, pour essayer de prévoir la durée de vie à la fatigue de tel ou tel élément d'une structure. Parmi les difficultés rencontrées il y a le choix du critère de ruine, le choix de l'approche mécanique utilisée (approche par la mécanique de la rupture ou approche « classique »). S'il est nécessaire d'inclure la période d'initiation de fissuration dans les calculs, ce qui est un cas fréquent, le choix est relativement rapide puisqu'on ne dispose en pratique, comme nous l'avons remarqué, que de l'approche « classique ». Le choix de l'approche étant déterminé, la difficulté essentielle qui apparaît alors est son utilisation à des cas réels de constructions pour lesquelles les sollicitations sont des fonctions du temps quelconques, non périodiques, de moyenne non nulle, d'amplitude variable etc... et qui de plus peuvent ne pas être déterministes, mais aléatoires et sont donc modélisées par des processus stochastiques.

En effet, les deux approches : « classique » et mécanique de la rupture ont surtout été étudiées et développées pour des sollicitations de fréquence et d'amplitude constantes. Il faut donc adapter ces approches d'un point de vue de la mécanique de la fatigue à ce type de sollicitations. Ces adaptations sont souvent faites à l'heure actuelle par des généralisations, sans doute abusives, de certains résultats.

Donnons quelques exemples pour lesquels les modélisations de certains effets de l'environnement sur une « construction » sont faites par processus stochastiques en vue de vérifier la tenue à la fatigue de certains de ses éléments. Il est à noter que ces actions de l'environnement qui donnent lieu à des phénomènes de fatigue engendrent généralement

aussi des effets dynamiques qui sont très souvent prépondérants. Par conséquent, il est nécessaire de résoudre un problème de dynamique aléatoire avant d'aborder l'étude de la tenue à la fatigue, ce qui n'est pas pour simplifier le problème. Il s'agit par exemple des effets de la houle sur les structures en mer. Ces structures peuvent être destinées à la recherche ou à l'exploitation pétrolière. Ce sera ainsi des plates-formes fixes ou flottantes, des éléments de stockage, des risers, etc... Cela peut être aussi des éléments d'usine flottante ou des navires de grandes dimensions etc...

Un autre domaine d'application est l'étude des effets du vent sur certaines structures souples de génie civil. En effet, au voisinage du sol la modélisation du champ de vitesse de la turbulence par un champ stochastique est mieux adaptée pour décrire la réalité physique de ce phénomène. Il en sera de même de l'effet de la turbulence atmosphérique sur un avion en vol etc...

Enfin, comme dernier exemple, citons les effets répétés de séismes sur une construction, pour lesquels on peut être amené dans certaines circonstances à modéliser l'accélération du sol par un processus stochastique.

8. — Le problème que nous aborderons ici est celui de la vérification de la tenue à la fatigue sous sollicitations aléatoires. Nous essaierons ainsi de voir comment ces problèmes sont abordés et résolus à l'heure actuelle. Nous supposons ici que les calculs de mécanique aléatoire sous-jacents qui se trouvent forcément à l'amont des calculs de fatigue, pour les constructions réelles, sont résolus. Par conséquent, les processus stochastiques qui décrivent les sollicitations de l'élément vérifié à la fatigue, et qui résultent normalement d'un calcul général de mécanique aléatoire de toute la structure ou du système mécanique, sont supposés être une donnée de notre problème, c'est-à-dire qu'ils sont par définition parfaitement décrits d'un point de vue probabiliste. Notons toutefois que cette hypothèse est loin d'être vérifiée dans de nombreux cas pratiques, compte tenu de la complexité de certains problèmes de mécanique aléatoire qui n'ont pas reçu de solution à ce jour. Les processus sollicitations ne sont alors définis que partiellement d'un point de vue probabiliste et il est parfois difficile sinon impossible d'obtenir l'information nécessaire pour mener à bien un calcul de fatigue sous sollicitations aléatoires.

Ainsi ce problème, dans sa réalité d'application, mis à part le problème mécanique de la fatigue dont nous venons de parler, est extrêmement difficile et ne peut être résolu que dans des cas particuliers ou au prix de nombreuses simplifications et approximations.

Avant d'aborder le problème de l'étude de la tenue à la fatigue sous sollicitation aléatoire, nous donnerons quelques rappels, pour clarifier l'exposé, sur le principe de l'approche « classique » et sur le principe de l'approche par la mécanique de la rupture.

### 3. — QUELQUES DÉFINITIONS UTILES

1. — Dans la suite nous noterons  $\sigma(t)$  une contrainte à l'instant  $t$  appliquée en un certain point d'un élément du système mécanique étudié à la fatigue, système qui est sollicité par des actions extérieures fonctions du temps. Cette contrainte sera la contrainte utilisée dans le calcul à la fatigue.

2. — Par convention, une contrainte négative (resp. positive) correspondra à une contrainte de compression (resp. de traction).

3. — Soit  $T \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  désignant l'ensemble des nombres réels. Nous supposons que la fonction contrainte  $\sigma$  est un élément de  $C^1(T, \mathbb{R})$  dans les trois définitions qui suivent.

### 4. — Définition d'un pic et d'un creux de contrainte

Un pic de contrainte  $S_M$  (resp. un creux de contrainte  $S_m$ ) sera défini comme la valeur d'un maximum local (resp. d'un minimum local) de la fonction  $t \mapsto \sigma(t)$ , ce pic (resp. ce creux) pouvant être positif ou négatif.

### 5. — Définition d'un demi-cycle d'amplitude ou de variation de contrainte (fig. 1)

Un demi-cycle d'amplitude  $S$  de contrainte (resp. de variation de contrainte  $S'$ ) d'une part sera défini par le temps qui sépare deux extrema locaux successifs de valeurs  $S_M$  et  $S_m$  et d'autre part est tel que l'amplitude  $S$  de contrainte soit égale à  $S_M$  (resp. que la variation de contrainte  $S'$  soit égale à  $S_M - S_m$ ).

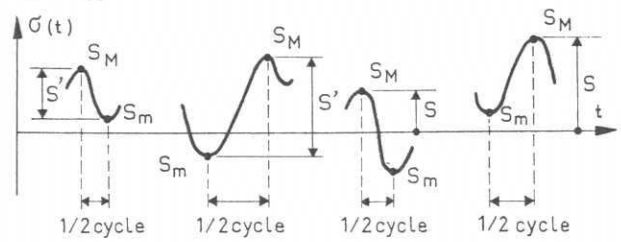


Fig. 1 — Demi-cycle d'amplitude et de variation de contrainte

### 6. — Définition d'un cycle d'amplitude ou de variation de contrainte (fig. 2)

Un cycle d'amplitude  $S$  de contrainte (resp. de variation de contrainte  $S'$ ) sera défini d'une part par le temps qui sépare deux maxima locaux successifs dont la valeur du premier est  $S_M$  et la valeur du second  $S_M'$  (le minimum local intermédiaire ayant une valeur  $S_m$ ), et d'autre part est tel que l'amplitude  $S$  de contrainte soit égale à  $S_M$  (resp. que la variation de contrainte  $S'$  soit égale à  $S_M - S_m$ ).

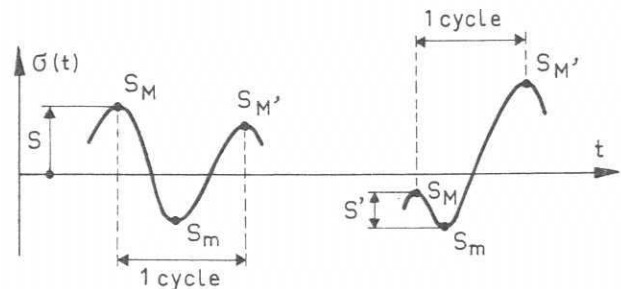


Fig. 2 — Cycle d'amplitude et de variation de contrainte

**Remarque.** — Si  $t \mapsto \sigma(t)$  est une fonction sinusoïdale de période  $T$  et d'amplitude  $S$ , alors un demi-cycle est caractérisé par  $T/2$ , un cycle par  $T$ , l'amplitude de contrainte est  $S$ , la variation de contrainte  $S' = 2S$ , tous les pics de contrainte (resp. des creux de contrainte) sont égaux et tels que  $S_M = S$  (resp.  $S_m = -S$ ) (fig. 3).

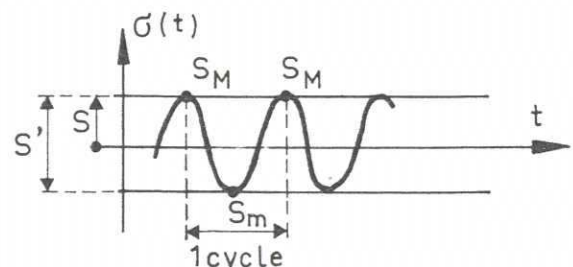


Fig. 3 — Cycle sinusoïdal d'amplitude constante

#### 4. — RAPPEL DE L'APPROCHE « CLASSIQUE » DE LA FATIGUE

Nous nous intéresserons ici à la fatigue à longue durée de vie, c'est-à-dire à un grand nombre de cycles.

##### 4.1. — La fatigue à cycle constant : les courbes S-N

L'approche « classique » de l'étude de la tenue à la fatigue à cycle constant est basée sur l'utilisation de courbes dites S-N. Elles permettent de déterminer une durée de vie dans des conditions bien précises.

###### 1. — Définition d'une courbe S-N

Une courbe S-N donne, lorsqu'une pièce déterminée est soumise à un chargement à cycles constants d'amplitude  $S$ , le nombre de cycles  $N$  nécessaire pour atteindre un certain état limite.

###### 2. — Remarques sur la détermination des courbes S-N

Les courbes S-N sont établies expérimentalement et dépendent de très nombreux facteurs. Elles dépendent de l'état limite considéré, des paramètres de la sollicitation (fréquence, type de contrainte, coefficient de concentration de contrainte, éventuellement de la contrainte moyenne etc...), des paramètres de l'environnement (température, pression, corrosion etc...), des caractéristiques du matériau (nature, composition etc...).

Compte tenu de tous les facteurs parmi lesquels l'influence de certains n'est pas encore connue ou du moins mal maîtrisée, les résultats expérimentaux sont assez dispersés et les courbes S-N dont on dispose en pratique pour faire les études résultent en fait d'ajustement statistique. Néanmoins, ces courbes S-N, « moyennes », de projet, sont définies en tenant compte des principaux facteurs suivants :

— Une courbe S-N est associée à un matériau et à un certain état limite qui peut être : soit l'initiation d'une fissure macroscopique, soit la rupture. Il est à noter que pour de nombreuses courbes S-N, ce paramètre n'est pas toujours clairement défini.

— En ce qui concerne la sollicitation  $S$ , une courbe S-N est exprimée généralement soit en fonction d'une amplitude de contrainte  $S$ , soit en fonction d'une variation de contrainte  $S'$ . Dans la pratique, la contrainte  $S$  associée à  $\sigma(t)$  est soit une contrainte réelle, soit une contrainte nominale. Dans la terminologie utilisée ici, nous appelons contrainte réelle la contrainte due au chargement et obtenue par la mécanique des milieux continus, et contrainte nominale la contrainte due au chargement mais obtenue par une approximation de la mécanique des milieux continus (résistance des matériaux). Le rapport de ces deux contraintes est par définition le coefficient de concentration de contrainte  $k_t$ .

— Certaines courbes S-N tiennent compte de la contrainte moyenne. Elles se présentent alors le plus souvent sous la forme d'un diagramme de Goodman et Smith. Encore que des travaux expérimentaux très récents [16] aient montré l'effet négligeable de la contrainte moyenne sur la durée de vie eu égard aux dispersions expérimentales.

#### 3. — Quelques expressions analytiques des courbes S-N de projet

Le modèle analytique classique des courbes S-N de projet est donné par la fonction  $S \mapsto N(S) = AS^{-a}$  définie sur  $(S_0, +\infty)$ , avec  $A$  et  $a$  deux constantes réelles positives, où  $S$  est l'amplitude de contrainte (ou bien la variation de contrainte;  $S$  est alors remplacé par  $S'$ ), et  $S_0$  est un seuil limite de  $S$ , positif ou nul. Si  $S_0$  est différent de zéro, il n'y a pas de dommage pour  $S < S_0$ .  $S_0$  apparaît alors comme étant une limite d'endurance.

##### Remarques

a) Les constantes  $A$  et  $a$  sont empiriques et résultent de l'ajustement statistique des résultats expérimentaux obtenus pour un détail ou un assemblage déterminé.

b) Cette forme analytique est généralement considérée comme valable pour la fatigue à grand nombre de cycles (c'est-à-dire supérieur à  $10^4$ ). Pour la fatigue oligocyclique, il est nécessaire d'avoir recours à d'autres formulations qui font intervenir par exemple l'amplitude des déformations plastiques.

c) Pour certains types de détails ou d'assemblages, lors des essais expérimentaux, l'état limite considéré ne se produit pas après un très grand nombre de cycles. On est alors limité par la durée des essais. Deux solutions sont alors classiquement utilisées. La première consiste à prendre un seuil  $S_0$  différent de zéro, en dessous duquel il n'y a plus d'endommagement possible.

Cette conclusion ne donne pas en fait une bonne idée de la réalité, comme cela a été démontré à l'aide de la mécanique de la rupture. L'autre solution consiste à rejeter cette idée d'asymptote et à prolonger la courbe jusqu'au niveau  $S_0 = 0$ . Il semble que cette solution soit encore plus hasardeuse.

d) On utilise parfois comme représentation de  $N(S)$  une généralisation de 4,1-3. Soit  $S_1, S_2, \dots, S_n$  une partition finie de  $(S_0, +\infty)$  telle que  $S_0 < S_1 < S_2 < \dots < S_{n-1} < S_n = +\infty$ .

Alors, pour tout  $j \in \{1, n\}$ , on a :  $S \mapsto N(S) = A_j S^{-a_j}$  si  $S_{j-1} \leq S < S_j$  (cela revient à prendre un graphe linéaire par morceaux dans des axes  $\text{Log } N, \text{Log } S$ ).

e) Exemple des courbes de fatigue de l'AWS (fig. 4).

New Tubular Structures

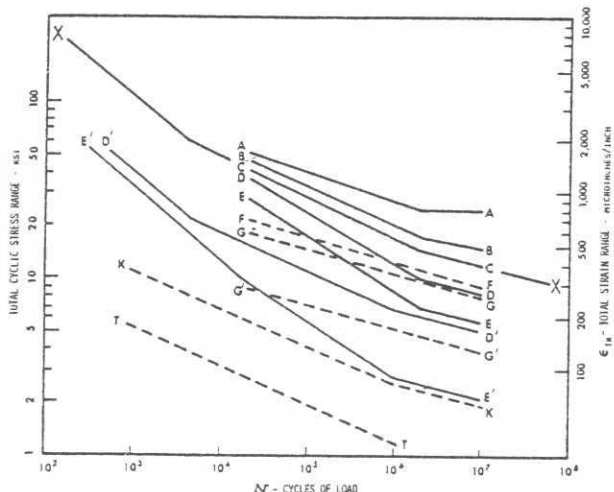


Fig. 4 — Chaque courbe correspond à un détail particulier

## 4.2. – Fatigue à cycles variables

Les courbes  $S-N$  permettent de calculer la durée de vie lorsqu'une pièce est soumise à des cycles constants. Dans la pratique, les chargements sont très souvent à cycles variables. Nous supposons, pour le moment, que les chargements sont déterministes. Dans ces conditions, comment peut-on prévoir la durée de vie à la fatigue?

Dans l'approche classique, on utilise des lois de cumul empiriques et des lois d'endommagement qui sont obtenues expérimentalement, car il n'existe pas à l'heure actuelle de modèle théorique pleinement satisfaisant pour tous les cas, comme nous l'avons expliqué dans les préliminaires.

Il existe plusieurs types de lois de cumul [12] plus ou moins compliquées et il n'y a pas de théorie approchée rationnelle pour préférer l'une plus que l'autre. Ainsi, d'une manière quasi générale le consensus s'est fait sur l'acceptation de la loi la plus simple, qui est une loi de cumul linéaire : la loi de Palmgren-Miner.

### 1. – La loi du dommage cumulé de Palmgren-Miner

Considérons une pièce mécanique soumise à un chargement cyclique composé d'un nombre fini de blocs à cycles constants de contrainte, le  $i^{\text{ème}}$  bloc étant défini par le nombre  $n_i$  de cycles constants d'amplitude  $S_i$  de contrainte (ou de variation de contrainte  $S'_i$  (fig. 5).

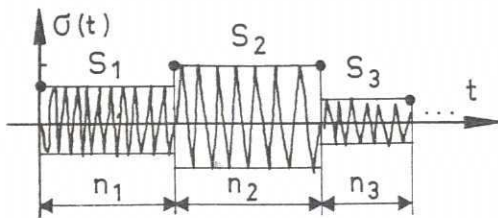


Fig. 5 – Illustration d'un chargement cyclique par blocs

Soit  $N(S)$  la courbe  $S-N$  relative à la pièce mécanique considérée, courbe qui est associée à un certain état limite. Nous poserons  $N_i = N(S_i)$  (ou bien  $N_i = N(S'_i)$  si la variation de contrainte  $S'_i$  est utilisée).

### 2. – Hypothèses de base de la loi de Palmgren-Miner

Le dommage  $D_i$ , produit par le  $i^{\text{ème}}$  bloc à cycles constants, s'il était appliqué seul, est linéaire par rapport au nombre de cycles et s'écrit  $D_i = n_i/N_i$ .

L'accumulation de dommages lorsque la pièce est soumise à une séquence de blocs différents est obtenue en sommant les dommages partiels  $D_i$ , les blocs étant supposés ne pas avoir d'influence les uns sur les autres et leur ordre d'application étant indifférent.

L'état limite pour la fatigue est atteint lorsque le dommage total  $D$  est supérieur ou égal à 1.

### 3. – Formulation discrète de la loi de Palmgren-Miner

Compte tenu des hypothèses énoncées en 4.2-2, la loi du dommage cumulé s'écrit :

$$D = \sum_i D_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \quad (1)$$

où la somme sur l'indice  $i$  est étendue à tous les blocs et où  $D$  est le dommage total cumulé subi par la pièce. L'état limite considéré pour la fatigue sera atteint si  $D \geq 1$ .

### 4. – Formulation continue de la loi de Palmgren-Miner

Nous donnons cette formulation en amplitude de contrainte  $S_i$  (pour la formulation en variation de contrainte, il suffit de remplacer  $S$  par  $S'$ ). Les hypothèses sont identiques à celles énoncées dans 4.2-2, mais maintenant l'amplitude  $S$  des cycles de contraintes varie continuellement. Dans ces conditions la loi du dommage cumulé s'écrit :

$$D = \int_{S_0}^{+\infty} \frac{n(S) dS}{N(S)} \quad (2)$$

où  $n(S) dS$  est le nombre de cycles d'amplitude de contrainte compris entre  $S$  et  $S + dS$ ,  $S \mapsto N(S)$  la courbe  $S-N$  associée à un certain état limite de fatigue,  $S_0$  un seuil d'amplitude de contrainte positif ou nul en dessous duquel la contribution au dommage est nulle et enfin  $D$  est le dommage total cumulé qui a été défini précédemment.

### 5. – Critiques de la loi de Palmgren-Miner

La loi de Palmgren-Miner est en désaccord certain avec l'expérience et avec la théorie de la mécanique de la rupture pour la prévision de la rupture d'une pièce, c'est-à-dire lorsque l'état limite considéré correspond à la phase finale de la propagation brutale d'une fissure. Nous ne nous étendrons pas sur ce point, car c'est un fait actuellement reconnu de tous et démontré par de très nombreux travaux expérimentaux et théoriques. Il y a de très nombreuses raisons à ceci, mais la principale est, tout simplement, qu'une loi de cumul linéaire qui ne tient pas compte, de plus, de l'interaction entre les différents niveaux d'amplitude de la contrainte, ne peut prévoir correctement la seconde et la troisième étape du processus de fatigue, c'est-à-dire la phase de propagation lente d'une fissure macroscopique et la phase de rupture. Néanmoins, malgré ces critiques qui sont fondées, cette loi est très largement utilisée.

Généralement, il est reconnu qu'il y a de très nombreux cas pour lesquels  $D$  est supérieur à 1 au moment de la rupture, ce qui fait que l'utilisation de cette loi au cours des études d'un projet est conservatrice puisqu'elle va dans le sens de la sécurité. En fait, bien que ce dernier argument soit tout à fait discutable du point de vue de la connaissance que l'on a de ce phénomène, il apparaît actuellement que la loi de Palmgren-Miner donne d'assez bons résultats quand l'état limite choisi n'est plus la phase de rupture, mais la première étape du processus de fatigue, c'est-à-dire la phase d'initiation d'une fissure macroscopique. Par conséquent cette loi semble bien mieux adaptée à la prévision de l'initiation de fissure macroscopique, prévision que la mécanique de la rupture n'est pas encore capable de fournir. Il est donc normal que pour le stade de rupture on trouve bien  $D$  supérieur à l'unité. Néanmoins, il est à noter que la loi de Palmgren-Miner donne une assez bonne prévision de l'initiation d'une fissure macroscopique pour des chargements pas « trop variables ». Malheureusement, rien ne permet de conclure actuellement sur la validité de la loi de Palmgren-Miner pour des chargements très variables, comme le sont certaines trajectoires de processus stochastiques. Nous reviendrons sur ce point.

**5. — RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS**  
**SUR L'APPROCHE DE LA FATIGUE**  
**PAR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE**

1. — Nous ne parlerons pas ici du problème de la fatigue-corrosion.

2. — Nous avons vu que la durée de vie d'une pièce vis-à-vis des phénomènes de fatigue était liée à l'initiation de fissure, puis à sa propagation jusqu'à ce qu'elle atteigne des dimensions critiques capables de provoquer une rupture brutale.

Le nombre de cycles à la rupture est donc lié à ces trois étapes. Nous n'insisterons pas sur l'aspect « initiation » que nous avons déjà largement évoqué. Par contre, la mécanique de la rupture permet d'étudier avec beaucoup de rigueur la phase de propagation lente d'une fissure existante et la phase de rupture brutale.

3. — Pour les matériaux ductiles, il semble que la propagation d'une fissure soit largement contrôlée par la déformation plastique de la région en front de fissure. Dans le cadre de la théorie linéaire élastique de la rupture, on montre que l'évolution d'une fissure est caractérisée principalement par le facteur d'intensité de contrainte  $K$ , ce facteur étant lié à l'amplitude de la contrainte appliquée, à la longueur de la fissure et à la géométrie de l'éprouvette.

4. — Il est à noter que l'utilisation de la théorie élastique de la rupture sera d'autant mieux justifiée que la zone plastique créée en front de fissure sera petite.

Néanmoins, à l'heure actuelle il y a des tentatives pour tenir compte des effets non linéaires en incluant dans le facteur d'intensité de contrainte un facteur de correction plastique.

En tout état de cause, les résultats qui sont directement utilisables sont ceux qui sont basés sur la mécanique élastique de la rupture. Nous nous placerons donc par la suite dans le cadre de cette théorie.

5. — Au cours d'un cycle de fatigue, la contrainte appliquée  $\sigma(t)$  varie entre  $S_M$  et  $S_m$  et la variation de contrainte pour le cycle est  $S' = S_M - S_m$ . Le facteur d'intensité de contrainte varie alors entre une valeur maximum  $K_M$  et une valeur minimum  $K_m$ . La variation pour ce cycle du facteur d'intensité de contrainte est notée  $\Delta K$  et s'écrit  $\Delta K = K_M - K_m$ .

6. — Il a été montré, en particulier par Paris, que la vitesse de fissuration  $\frac{da}{dN}$  (au cours du processus de fatigue pour une pièce dont la géométrie est donnée) vitesse qui est exprimée comme l'accroissement de la longueur «  $a$  » de fissure par cycle, était surtout fonction de  $\Delta K$ ; les autres paramètres, tels que la valeur maximale  $K_M$  du facteur d'intensité de contrainte ou sa valeur moyenne, étaient beaucoup moins influents.

7. — Seuil de non propagation d'une fissure

Il existe généralement un seuil de non propagation de la fissure qui est caractérisé par une valeur limite notée  $\Delta K_L$  de  $\Delta K$ . Ainsi, si  $\Delta K \leq \Delta K_L$ , il y a non propagation de la fissure pour le cycle considéré.

8. — Seuil de propagation brutale de la fissure

Si au cours d'un cycle la valeur maximale  $K_M$  du facteur d'intensité de contrainte atteint la valeur  $K_C$  appelée valeur critique du facteur d'intensité de contrainte, il y a propagation brutale de la fissure qui entraîne la rupture.

5,1. — Calcul de la durée de vie à cycles constants

1. — Position du problème

Le problème qui se pose est le suivant : connaissant la longueur initiale  $a_i$  d'une fissure, comment peut-on calculer le nombre de cycles constants  $N_f$  qu'il est nécessaire d'appliquer pour obtenir une longueur de fissure  $a_f$ . Si  $a_f$  correspond à la longueur  $a_{CR}$  critique de la fissure, associée à la valeur critique  $K_{IC}$ ,  $N_f$  sera le nombre de cycles constants à rupture. Pour pouvoir aborder ce problème, il est nécessaire de connaître la loi de propagation lente d'une fissure.

2. — Loi de propagation lente d'une fissure à cycles constants

Il existe de nombreuses lois de propagation lente d'une fissure à cycles constants, plus ou moins compliquées, qui s'écrivent généralement à l'aide d'un ou de plusieurs paramètres suivants :  $\Delta K$ ,  $R = K_M/K_m$ ,  $K_M$ ,  $K_m$ ,  $K_{CR}$ ,  $\bar{K} = (K_M + K_m)/2$ , paramètres mécaniques du matériau, et à l'aide de constantes.

Il n'est pas encore possible de savoir à l'heure actuelle quelle est la plus générale. Néanmoins, il semble que la loi de Paris soit de loin la plus utilisée et qu'elle ait été corroborée par de nombreux travaux.

3. — Formulation de la loi de Paris

La vitesse de propagation lente d'une fissure à cycles constants s'écrit :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (3)$$

avec  $C$  et  $m$  deux constantes qui dépendent du matériau,  $\Delta K$  la variation du facteur d'intensité de contrainte au cours d'un cycle, et enfin  $\frac{da}{dN}$  la vitesse de propagation de la longueur «  $a$  » de la fissure.

4. — Calcul de la durée de vie proprement dite

Il s'agit de résoudre le problème défini en 5,1-1. Pour cela, nous nous plaçons dans les hypothèses suivantes :

5. — On reste dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture.

6. — On utilise la loi de Paris (3).

Compte tenu de l'hypothèse 5,1-5 dont la limite d'application a été commentée en 5-4, on montre par le calcul que le facteur d'intensité de contrainte s'écrit :

$$K = \alpha(a) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (4)$$

avec  $\sigma$  la contrainte nominale appliquée, «  $a$  » la longueur de la fissure et  $\alpha$  une fonction de la longueur de fissure et de la géométrie.

Compte tenu de 5-5, au cours d'un cycle on aura :

$$\Delta K = \alpha(a) \cdot S' \cdot \sqrt{\pi a} \quad (5)$$

Par intégration de (3) et compte tenu de 5,1-1, on obtient :

$$N_f = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K)^m} \quad (6)$$

soit, en substituant (5) dans (6) :

$$N_f S'^m = \frac{1}{C} \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{\alpha^m(a) \cdot (\pi a)^{m/2}} \quad (7)$$

### 7. - Cas particulier

Quand  $\alpha$  est constant sur l'ensemble des cycles et en négligeant  $1/a_f$  devant  $1/a_i$ , (7) s'écrit :

$$N_f = \frac{1}{C \alpha^m \left( \frac{m}{2} - 1 \right) a_i^{m/2 - 1} \pi^{m/2}} \cdot S'^{-m} \quad (8)$$

La relation (8) est analogue à une courbe S-N.

### 5.2. - Calcul de la durée de vie à cycles variables

Ce problème est beaucoup plus difficile, car l'accroissement de fissuration provoqué au cours d'un cycle est fonction du cycle précédent. Il y a interaction entre les cycles. L'expérience montre qu'il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'interaction entre les cycles, si la variation  $\Delta K$  du facteur d'intensité de contrainte est lente d'un cycle à l'autre (c'est ce qui se produit dans le cas des chargements à cycles constants pour lesquels la loi de Paris a été établie).

Par contre, s'il y a une variation brutale de  $\Delta K$  entre deux cycles, due à une variation importante de  $S'$ , on ne peut plus négliger l'interaction entre cycles. Dans ce dernier cas, il est nécessaire de faire intervenir des « délais » et donc de corriger la loi de Paris. Dans cette configuration, seule une intégration cycle par cycle peut être envisageable.

On peut se rendre compte dès maintenant des difficultés que l'on peut rencontrer pour un chargement aléatoire! En tout état de cause, il semble qu'il y ait encore de nombreux problèmes qui n'ont pas été résolus, pour appliquer d'une manière efficace les concepts de la mécanique de la rupture au problème de la fatigue avec chargement à cycles variables.

## 6. - ÉTUDE DE LA FATIGUE

### SOUS SOLLICITATIONS ALÉATOIRES

1. - Nous avons rappelé sommairement les deux approches mécaniques qui peuvent être utilisées pour les études de fatigue. Il s'agit d'étudier maintenant comment ces résultats peuvent être utilisés pour l'étude de la fatigue sous sollicitations aléatoires, c'est-à-dire lorsque la contrainte appliquée  $t \mapsto \sigma(t)$ , qui est une fonction de temps, est non seulement à cycles variables mais n'est plus déterministe.  $\sigma(t)$

est maintenant modélisée par un processus stochastique ayant certaines propriétés à définir. A un instant  $t$ ,  $\sigma(t)$  est une variable aléatoire que nous noterons  $\sigma_t$ .

2. - Nous n'envisagerons ici que le cas des processus continus et n'aborderons pas le cas des processus ponctuels. Il est à noter que le cas des processus continus représente une très large classe de problèmes de fatigue : effets de la houle sur les structures en mer, effets de la turbulence atmosphérique sur certaines structures souples de génie civil ou sur des matériels aéronautiques, problème de machines vibrantes, matériels roulants etc...

3. - Les outils mathématiques nécessaires à la résolution de ce type de problème relèvent de la théorie des probabilités et des processus et particulièrement des résultats relatifs à la régularité et à la statistique des trajectoires des processus stochastiques. Ces problèmes, dans le cas général, sont extrêmement difficiles et beaucoup d'entre eux ne sont pas encore résolus à ce jour.

Nous étudierons successivement la fatigue sous sollicitations aléatoires en utilisant l'approche « classique » de la fatigue, puis l'approche par la mécanique de la rupture, mais auparavant nous allons donner les hypothèses que nous utiliserons en ce qui concerne le processus contrainte ( $\sigma_t$ ).

### 6.1. - Préliminaires et hypothèses utilisées sur le processus stochastique « contrainte »

Par la suite, nous supposons que le processus contrainte ( $\sigma_t$ ) vérifie les hypothèses suivantes :

#### 6.1.1. - Hypothèses

1. - Le processus ( $\sigma_t$ ) est indexé sur  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
2. - ( $\sigma_t$ ) est un processus continu.
3. - Le processus ( $\sigma_t$ ) est deux fois dérivable en moyenne quadratique sur  $\mathcal{T}$ . Le processus « dérivée première » (resp. « dérivée seconde ») est noté ( $\dot{\sigma}_t$ ) (resp. ( $\ddot{\sigma}_t$ )).
4. - Les processus ( $\sigma_t$ ), ( $\dot{\sigma}_t$ ) et ( $\ddot{\sigma}_t$ ) sont des processus ayant leurs trajectoires presque sûrement continues sur  $\mathcal{T}$ .
5. - Pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , la variable aléatoire  $\dot{\sigma}_t$  est une variable aléatoire du second ordre. D'autre part, ( $\sigma_t$ ) doit vérifier des hypothèses générales que nous supposons ici vérifiées [31 bis].
6. - On supposera que le processus ( $\sigma_t$ ) est centré, c'est-à-dire que sa fonction moyenne  $t \mapsto m_\sigma(t) = \mathcal{E}(\sigma_t)$  est identiquement nulle,  $\mathcal{E}$  désignant l'espérance mathématique. (Si ( $\sigma_t$ ) n'est pas centré, il suffirait de le centrer en considérant le processus centré ( $\sigma_t - m_\sigma(t)$ )).

#### 6.1.2. - Définitions, notations et préliminaires

1. - Soit  $[0, T] \subset \mathcal{T}$  le temps d'observation. On définit les variables  $n_m(S)$ ,  $n_m(S, t)$ ,  $N_m$  et  $N_0^+$  telles que :

- le nombre de maxima locaux compris entre  $S$  et  $S + dS$  du



processus  $(\sigma_t)$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est  $n_m(S, t) dS dt$  et sur le temps d'observation  $[0, T]$  est :

$$n_m(S) dS = \int_0^T n_m(S, t) dt dS$$

- le nombre total de maxima locaux du processus  $(\sigma_t)$  sur le temps d'observation  $[0, T]$  est  $N_m$
- le nombre total de passages par zéro du processus  $(\sigma_t)$  avec dérivée positive sur le temps d'observation  $[0, T]$  est  $N_0^+$ .

2. – Pour  $t$  et  $S$  fixés,  $n_m(S)$ ,  $n_m(S, t)$  sont des variables aléatoires ainsi que  $N_m$  et  $N_0^+$ . Compte tenu des hypothèses 6,11, la moyenne  $\bar{n}_m(S, t) = \mathcal{E}(n_m(S, t))$  est définie, et si  $T$  est borné, ce que nous supposons par la suite, les moyennes  $\bar{n}_m(S) = \mathcal{E}(n_m(S))$ ,  $\bar{N}_m = \mathcal{E}(N_m)$  et  $\bar{N}_0^+ = \mathcal{E}(N_0^+)$  sont aussi définies.

3. – Nous définirons un paramètre de largeur de bande  $\varepsilon$  du processus  $(\sigma_t)$  par la relation :

$$\varepsilon = (1 - (\bar{N}_0^+ / \bar{N}_m)^2)^{1/2}$$

où  $\bar{N}_0^+$  et  $\bar{N}_m$  sont définis en 6,12-2.

**Remarque.** –  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Si  $\bar{N}_0^+ = \bar{N}_m$ , c'est-à-dire si en moyenne le nombre de passages par zéro avec dérivée positive est égal au nombre de maxima locaux,  $\varepsilon = 0$ . Plus généralement si  $\varepsilon$  est voisin de zéro par valeur supérieure, le processus est dit à bande étroite. On a des trajectoires du type suivant (fig. 6).

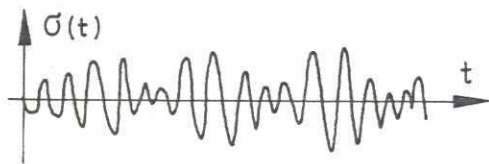


Fig. 6 – Trajectoire d'un processus à bande étroite

Pour ce type de trajectoire, on a une notion de « cycle ». Par contre, si  $\varepsilon$  est voisin de 1 par valeur inférieure, alors en moyenne le nombre de maxima locaux est très supérieur au nombre de passages par zéro avec dérivée positive. Le processus est dit à bande large et ses trajectoires sont du type suivant (fig. 7).

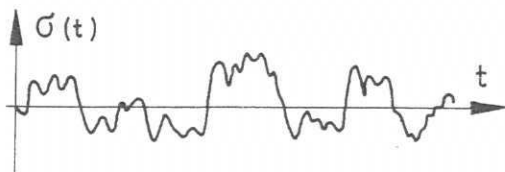


Fig. 7 – Trajectoire d'un processus à bande large

Pour ce type de trajectoire, il est difficile de définir la notion de « cycle ».

4. – Si le processus  $(\sigma_t)$  indexé sur  $\mathbb{R}$  est stationnaire, nous introduirons les grandeurs et notations suivantes :

- nous noterons  $\mu_\sigma$  la mesure spectrale du processus  $(\sigma_t)$  liée

à sa fonction d'autocorrélation  $\tau \mapsto R_\sigma(\tau) = \mathcal{E}(\sigma_{t+\tau} \sigma_t)$  par la relation :

$$R_\sigma(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\omega\tau) d\mu_\sigma(\omega) \quad \text{avec} \quad i = \sqrt{-1}.$$

- les moments spectraux  $M_k$  d'ordre  $k$  pour  $k \in \mathbb{N}$  sont définis, s'ils existent, par la relation :

$$M_k = \int_{\mathbb{R}} \omega^k d\mu_\sigma(\omega)$$

5. – Il est à remarquer que si le processus  $(\sigma_t)$  est stationnaire, compte tenu de l'hypothèse 6,11-5 les moments spectraux  $M_0$ ,  $M_2$  et  $M_4$  sont définis,  $\bar{n}_m(S, t)$  est indépendant de  $t$  et  $\varepsilon$  est indépendant de  $T$ .

## 6,2. – Fatigue sous sollicitations aléatoires en utilisant l'approche « classique » de la fatigue

Nous étudierons tout d'abord le cas général qui permet de bien définir le problème, puis nous étudierons plusieurs cas particuliers.

### 6,21. – Étude du cas général

#### 1. – Les hypothèses

– Nous nous plaçons ici dans le cadre de la fatigue à grand nombre de cycles, c'est-à-dire à longue durée de vie.

– Nous utiliserons les résultats et hypothèses données au paragraphe 4, en ce qui concerne l'approche « classique » de la fatigue.

– Le processus contrainte  $(\sigma_t)$  vérifie les hypothèses 6,11, mais nous supposons pour le moment que  $(\sigma_t)$  n'est pas forcément stationnaire, que ce processus est à bande large ou à bande étroite, que sa loi de probabilité n'est pas forcément gaussienne.

#### 2. – Interprétation probabiliste de la formulation de la loi de

##### Palmgren-Miner

Le premier problème qui se pose est de donner une signification pour le cas aléatoire à l'expression (2) du dommage cumulé qui s'écrit :

$$D = \int_{S_0}^{+\infty} N^{-1}(S) n(S) dS$$

En effet, dans cette dernière expression et pour l'approche déterministe,  $n(S) dS$  représente le nombre de cycles d'amplitude  $S$  de contrainte comprise entre  $S$  et  $S + dS$  pendant le temps d'observation  $[0, T]$ . Deux cas se présentent suivant que le processus contrainte  $(\sigma_t)$  est à bande large ou à bande étroite.

#### 3. – Premier cas. – Le processus contrainte est à bande étroite

Dans ces conditions, les trajectoires du processus permettent de faire une interprétation directe en nombre de

« cycles » et compte tenu des hypothèses 4,2-2,  $n(S)dS$  représentera le nombre des maxima locaux compris entre  $S$  et  $S + dS$  du processus contrainte ( $\sigma_t$ ) sur le temps d'observation  $[0, T]$ .

En reprenant les notations 6,12-1, la loi du dommage cumulé s'écrit dans ces conditions :

$$D = \int_{S_0}^{+\infty} \frac{n_m(S)dS}{N(S)} \quad (9)$$

Pour tout  $S$  fixé de  $(S_0, +\infty)$ ,  $n_m(S)$  est une variable aléatoire,  $S_0$  et  $S \mapsto N(S)$  sont deux grandeurs déterministes supposées connues pour un problème de fatigue bien posé. En conséquence, le dommage cumulé est une variable aléatoire qui se déduit du processus  $(n_{mS})_S$  indexé sur  $(S_0, +\infty)$  par la transformation (9).

#### 4. — Deuxième cas. — *Le processus contrainte est à bande large*

Alors, les trajectoires du processus ne font plus apparaître des « cycles » et il est nécessaire d'interpréter la formulation initiale (2).

Les différentes interprétations qui ont été données jusqu'à présent de la loi de Palmgren-Miner, dans le cas d'un processus contrainte à bande large, sont directement liées à la « méthode de comptage » des caractéristiques d'une trajectoire de ( $\sigma_t$ ) (pic et creux de contrainte, demi-cycle d'amplitude ou de variation de contrainte etc...).

De nombreuses méthodes existent et ont été établies lors d'essais expérimentaux de fatigue sous sollicitations aléatoires pour essayer de déterminer les mieux adaptées au critère d'endommagement. Nous n'allons pas donner ici toutes ces méthodes, mais rappeler les principales qui semblent donner les meilleurs résultats.

#### 5. — *La méthode de comptage de la « goutte d'eau » Rain-flow (fig. 8)*

Cette méthode a l'avantage de prendre en compte toutes les séquences de chargement. Elle prend en compte des « cycles et des demi-cycles », mais pas au sens où nous les avons définis au paragraphe 3. Néanmoins, elle n'est pas simple et il ne semble pas possible de trouver une formulation analytique qui se prête à l'utilisation de résultats connus sur les statistiques des trajectoires d'un processus stochastique ou même de résultats que l'on pourrait obtenir dans un prochain avenir. Elle ne peut donc être utilisée que numériquement sur une trajectoire déterminée d'un processus. Par conséquent, elle est nécessairement couplée à une technique de simulation numérique relative au processus stochastique. Dans de nombreux cas pratiques (processus non stationnaire, longue période d'observation etc...), cela conduit à des calculs encore inabordables dans la pratique.

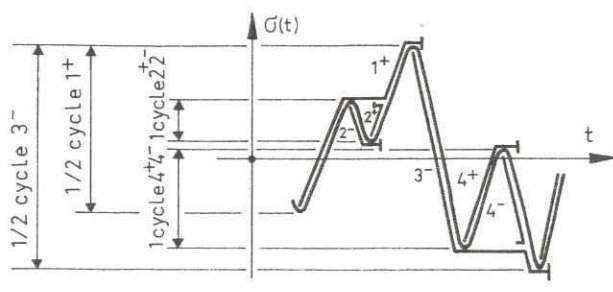


Fig. 8 — Méthode de comptage Rain-flow

#### 6. — *La méthode de comptage des pics (fig. 9)*

Un pic de contrainte a été défini en 3-4. Dans cette méthode on ne compte que les maxima positifs et les minima négatifs. Les autres extrema ne sont pas comptés. Pratiquement, on associe à chaque pic positif  $S$  de contrainte un cycle d'amplitude  $S$  de contrainte. Cette technique de comptage se prête particulièrement bien à l'utilisation des résultats analytiques concernant les statistiques des trajectoires d'un processus.

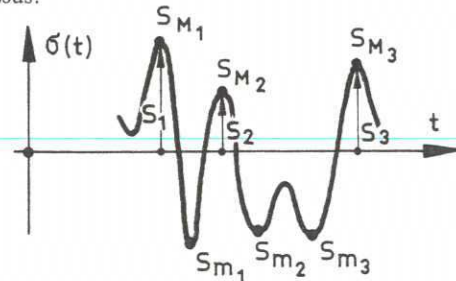


Fig. 9 — Méthode de comptage des pics

#### 7. — *Méthode de comptage des demi-cycles de variation de contrainte*

La définition d'un demi-cycle de variation de contrainte est celle qui a été donnée en 3-5. Chaque demi-cycle est caractérisé par une variation de contrainte  $S'$  (fig. 10).

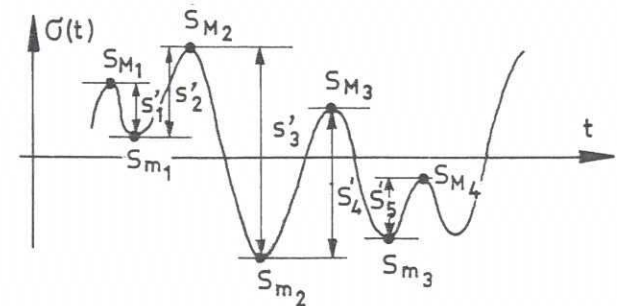


Fig. 10 — Méthode de comptage des demi-cycles de variation de contrainte

Cette méthode prend en compte les variations réelles de contrainte, mais ne permet pas de conserver la position de chacune des variations. Néanmoins, elle peut encore se prêter à l'utilisation de formulations analytiques concernant les statistiques sur les trajectoires.

#### 8. — *Méthode de comptage des demi-cycles de variation de contrainte avec moyenne*

Cette technique de comptage permet « d'améliorer » la précédente 6,21-7 en associant à chaque demi-cycle de variation de contrainte  $S' = S_M - S_m$  la valeur moyenne du cycle  $m_S = (S_M + S_m)/2$  qui permet alors de conserver la position de chaque variation. Il semble que seules des techniques numériques, couplées à des simulations, puissent aboutir avec cette méthode.

#### 9. — *Méthode de comptage des cycles moyens*

Un cycle moyen est défini par le temps qui sépare deux passages par zéro avec dérivée positive. La variation de contrainte  $S'$  pour ce cycle moyen est définie par le maximum des maxima locaux et le minimum des minima locaux sur ce

cycle moyen (fig. 11). Cette méthode semble difficile à mettre en œuvre dans le cas général, si l'on veut utiliser des résultats analytiques concernant les trajectoires.

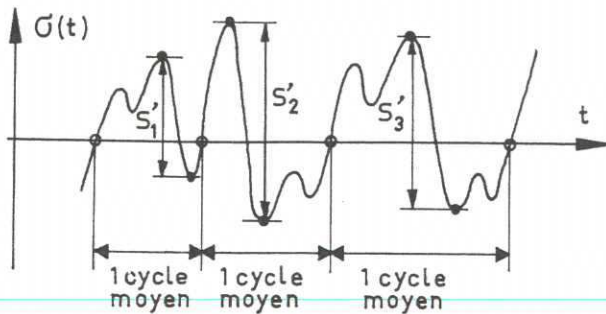


Fig. 11 — Méthode de comptage des cycles moyens

## 10. — Remarques sur les méthodes de comptage

a) Dans le cas d'un processus à bande étroite, les méthodes de comptage 6,21-6, 6,21-7 et 6,21-9 sont équivalentes mais formulées en cycle d'amplitude de contrainte pour 6,21-6, en demi-cycle de variations de contrainte pour 6,21-7 et enfin en cycle de variations de contrainte pour 6,21-9.

b) On ne dispose pas à l'heure actuelle d'un assez grand nombre d'essais expérimentaux de fatigue sous sollicitations aléatoires à bande large pour pouvoir conclure raisonnablement sur le choix d'une méthode. Par exemple, les conclusions de l'étude [54] font ressortir que parmi les méthodes de comptage citées précédemment et pour les essais qui ont été effectués, les méthodes qui ont donné les meilleurs résultats sont 6,21-6 et 6,21-9. Par contre d'autres études [13] [28] concluent que la méthode 6,21-5 est sans doute la mieux adaptée.

c) Pratiquement, pour les problèmes de fatigue à grand nombre de cycles sous sollicitations aléatoires à bande large, on est confronté à deux problèmes :

- le premier est l'incertitude sur la méthode de comptage à utiliser;
- le second est que pour la quasi-totalité des méthodes de comptage, on ne sait pas résoudre dans le cas général et par voie analytique le problème aléatoire associé. Il faut donc passer par des techniques de simulation et de comptage numérique, qui sont très lourdes et difficiles, sinon impossibles, à mettre en œuvre dans de nombreuses situations réelles.

d) En reprenant les notations de 3-5, 3-6 et 6,12-1, l'expression du dommage cumulé (2) s'écrit pour les deux méthodes de comptage 6,21-6 et 6,21-7 :

- pour 6,21-6 :

$$D = \int_{S_0}^{+\infty} (N(S))^{-1} n_m(S) dS$$

où  $n_m(S) dS$  représente le nombre de maxima locaux compris entre  $S$  et  $S + dS$  du processus  $(\sigma_t)$  pendant le temps d'observation  $[0, T]$ ;

- pour 6,21-7 :

$$D = \int_{S_0}^{+\infty} (2N(S'))^{-1} n(S') dS'$$

où  $N(S')$  est la courbe  $S - N$  exprimée en cycle de variation de contrainte, et  $n(S') dS'$  le nombre de demi-cycles de variation de contrainte compris entre  $S'$  et  $S' + dS'$ .

Pour tout  $S$ , (resp.  $S'$ ) fixé de  $(S_0, +\infty)$  (resp.  $(S'_0, +\infty)$ )  $n_m(S)$  (resp.  $n(S')$ ) est une variable aléatoire. Par conséquent,  $D$  est une variable aléatoire qui se déduit des processus  $(n_m(S))_S$  et  $(n(S'))_{S'}$  indexés respectivement sur  $(S_0, +\infty)$  et  $(S'_0, +\infty)$  par une relation linéaire.

## 11. — Le problème probabiliste associé à la formulation de la loi de Palmgren-Miner

Pour les deux cas envisagés, c'est-à-dire le processus contrainte  $(\sigma_t)$  à bande large ou à bande étroite, l'interprétation probabiliste de la loi de Palmgren-Miner conduit à calculer pour un temps d'observation donné  $[0, T]$  le dommage cumulé  $D$  qui est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Le problème probabiliste associé consiste donc à déterminer la loi de probabilité de  $D$ .

## 12. — Remarques

a) Nous avons supposé ici que  $T$  est une donnée fixée et nous cherchons la probabilité pour que  $D$  soit supérieur à un certain niveau  $D^*$  (1 par exemple) sur le temps d'observation  $[0, T]$ . Nous aurions pu évidemment considérer le problème inverse, c'est-à-dire en se donnant une valeur fixée  $D^*$  de  $D$ , considérer le temps  $T$  comme une variable aléatoire. Il faudrait alors déterminer la loi de probabilité pour que la durée de vie  $T$ , associée au critère de ruine  $D = D^*$ , soit supérieure à une valeur donnée  $T^*$ . Nous n'aborderons pas ici le problème sous ce dernier aspect, car d'un point de vue probabiliste il est encore plus difficile. De toute manière, comme nous allons le voir, on ne sait pratiquement résoudre ni l'un ni l'autre dans le cas général. Dans les quelques cas particuliers où l'on arrive à calculer quelques caractéristiques numériques, les deux approches sont alors équivalentes.

b) Dans le cas général, et même dans la quasi-totalité des cas particuliers courants que nous développerons par la suite, on ne sait pas déterminer la loi de probabilité de  $D$  par voie analytique. On peut tout au plus espérer obtenir une estimation statistique de cette loi par utilisation des techniques de simulation numérique, mais comme nous l'avons déjà fait remarquer, cette approche est très lourde et difficilement envisageable en pratique pour de nombreux problèmes. Cette situation est due au fait que pour les méthodes de comptage envisagées et compte tenu de l'expression de la loi de Palmgren-Miner, il est nécessaire pour déterminer la loi de  $D$  de connaître les lois de certains processus associés aux trajectoires du processus  $(\sigma_t)$  (tels que  $(n_m(S))_S$  par exemple), et malheureusement ce dernier problème est très loin d'être résolu théoriquement et « constructivement ».

Ainsi, faute de pouvoir construire la loi de  $D$ , on se contente de calculer les caractéristiques numériques de la variable aléatoire  $D$ , c'est-à-dire ses moments. Évidemment, s'il était possible de calculer tous les moments, ou au moins de les calculer jusqu'à un ordre élevé, on pourrait approcher la loi. Malheureusement il est déjà très souvent difficile de déterminer constructivement le moment d'ordre un, c'est-à-dire le dommage moyen  $\bar{D}$ . Dans de très rares cas, le stationnaire gaussien par exemple, on peut calculer le moment d'ordre deux, mais pratiquement il est difficile d'aller plus loin.

c) Dans ce qui suit, nous donnons quelques résultats concernant le calcul du dommage moyen  $\bar{D}$ . Il faut reconnaître que les ingénieurs des bureaux d'étude se contentent à l'heure actuelle, et faute de mieux, de cette unique caractéristique numérique, ce qui est — il faut le reconnaître — une information assez partielle.

**6,22.** — *Calcul du dommage moyen*

**6,221.** — *Cas général*

Nous donnerons tout d'abord quelques résultats lorsque le processus contrainte  $(\sigma_t)$  a une loi de probabilité quelconque et qu'il n'est pas stationnaire. Ensuite nous étudierons le traitement de certains processus non stationnaires et enfin nous donnerons les résultats sur le cas gaussien stationnaire.

**1.** — *Proposition*

Sous les hypothèses **6,21-1** et si le dommage cumulé  $D$  sur le temps d'observation  $[0, T]$  est donné par l'expression :

$$D = \int_{S_0}^{+\infty} (N(S))^{-1} n_m(S) dS,$$

avec  $N(S)$  défini en **4,1-3** et où  $n_m(S)$  est la variable aléatoire telle que  $n_m(S) dS$  représente le nombre de maxima locaux du processus contrainte  $(\sigma_t)$ , compris entre  $S$  et  $S + dS$  sur le temps d'observation  $[0, T]$ , alors le dommage moyen noté  $\bar{D}$  s'écrit :

$$\bar{D} = \int_0^T \int_{S_0}^{+\infty} (N(S))^{-1} \int_{-\infty}^0 |z| f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}(S, 0, z, t) dz dS dt \quad (10)$$

où  $f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}(x, y, z, t)$  est la densité de probabilité sur  $\mathbb{R}^3$  par rapport à la mesure de **Lebesgue**  $dx dy dz$  de la loi conjointe à l'instant  $t$  des variables aléatoires  $\sigma_t, \dot{\sigma}_t$  et  $\ddot{\sigma}_t$ .

**2.** — *Remarques*

a) Le résultat (10) s'obtient immédiatement, en remarquant que :

$$\bar{D} = \varepsilon(D) = \int_{S_0}^{+\infty} (N(S))^{-1} \varepsilon(n_m(S)) dS$$

D'autre part, compte tenu des hypothèses **6,11** incluses dans **6,21-1**, la moyenne  $\bar{n}_m(S) = \varepsilon(n_m(S))$  de la variable aléatoire  $n_m(S)$  s'écrit [11] [3 bis] :

$$\bar{n}_m(S) dS = \int_0^T \int_{-\infty}^0 |z| f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}(S, 0, z, t) dz dt dS$$

b) L'expression (10) du dommage moyen sur  $[0, T]$  n'est valable que si le processus contrainte  $(\sigma_t)$  est à bande étroite ou s'il est à bande large mais en utilisant alors la méthode de comptage des pics **6,21-6**.

c) Enfin, le calcul de (10) nécessite la connaissance de  $f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}$  relative au processus contrainte  $(\sigma_t)$ . Cette grandeur est très souvent difficile à obtenir dans les cas pratiques d'application.

**3.** — *Lemme*

On se place sous les hypothèses **6,11**.

Soit  $g(S', t) dS'$  la probabilité pour que, ayant un extremum local (maximum ou resp. minimum) à l'instant  $t$  du processus  $(\sigma_t)$ , le prochain extremum (minimum ou resp. maximum) soit tel que la valeur absolue de la différence algébrique des valeurs de ces deux extrema tombe dans l'intervalle  $(S'$  et  $S' + dS')$ .

Soit  $k(a, a', t, t + \tau) da da' d\tau$  la probabilité pour que, ayant un extremum local (maximum ou resp. minimum) à l'instant  $t$  du processus  $(\sigma_t)$ , ayant sa valeur dans l'intervalle  $(a, a + da)$ , le prochain extremum (minimum ou resp. maximum) apparaisse dans l'intervalle de temps  $(\tau, \tau + d\tau)$  et avec sa valeur dans l'intervalle  $(a', a' + da')$ . Alors on a la relation :

a) pour tout  $t, g(S', t) = 0 \forall S' < 0$  et pour tout  $S' \geq 0$  :

$$g(S', t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} [k(a, a - S', t, t + \tau) + k(a, a + S', t, t + \tau)] d\tau da$$

**4.** — *Preuve de 6,221-3*

Soit  $h(a, a', t) da da'$  la probabilité pour que, ayant un extremum local de  $(\sigma_t)$  à l'instant  $t$ , qui ait sa valeur dans l'intervalle  $(a, a + da)$ , le prochain extremum tombe dans l'intervalle  $(a', a' + da')$ . Alors on a la relation évidente :

$$h(a, a', t) = \int_0^{+\infty} k(a, a', t, t + \tau) d\tau$$

Faisons le changement de variable  $a = a + H$  et intégrons sur  $a$ ; on obtient :

$$\begin{aligned} p(H, t) dH &= \int_{\mathbb{R}} h(a, a + H, t) da = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} k(a, a + H, t, t + \tau) d\tau da \end{aligned}$$

Or  $S' = |H|$ . Par conséquent pour  $S' \geq 0$ , on obtient :

$$g(S', t) dS' = (p(-S', t) + p(S', t)) dS'$$

d'où le résultat **6,221-3a**.

**5.** — *Proposition*

On se place sous les hypothèses **6,21-1** et on suppose que le dommage cumulé  $D$ , sur le temps d'observation  $[0, T]$ , obtenu à partir de la méthode de comptage **6,21-7** des demi-cycles de variation de contrainte, compte tenu de **6,21-10 d**, s'écrit :

$$D = \int_{S_0}^{+\infty} (2N(S'))^{-1} n(S') dS'$$

où  $N(S')$  est la courbe  $S - N$  exprimée en cycles de variation de contrainte et  $n(S') dS'$  le nombre de demi-cycles de variation de contrainte compris entre  $S'$  et  $S' + dS'$  sur le temps d'observation  $[0, T]$ . Alors une approximation du dommage moyen  $\bar{D}$  peut être calculée par la relation :

$$\bar{D} = \int_0^T \bar{N}_m(t) \int_{S_0}^{+\infty} (N(S'))^{-1} g(S', t) dS' dt$$

avec :

$$\bar{N}_m(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^-} |z| f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}(x, 0, z, t) dz dx$$

et où  $f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}$  a été défini en **6,221-1** et  $g(S', t)$  en **6,221-3**.

## 6. — Remarque

Dans le cas général il est très difficile de déterminer  $g(S', t)$ , car cette grandeur est liée à  $k(a, a', t, t + \tau)$ , d'après 6,221-3 a et on ne sait calculer dans l'état actuel des connaissances que des approximations de  $g$  dans certains cas particuliers [3].

## 7. — Preuve de 6,221-5

Pour  $t$  fixé, on note  $N_m(t)$  la variable aléatoire représentant le nombre total de maxima locaux du processus  $(\sigma_i)$  par unité de temps. En reprenant les notations précédentes et le résultat rappelé dans la remarque a) de 6,221-2 on a :

$$\overline{n_m(S, t)} = \int_{\mathbb{R}^-} |z| f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}(S, 0, z, t) dz$$

Par définition  $N_m(t) = \int_{\mathbb{R}} n_m(S, t) dS$ , d'où la relation de la proposition. Le dommage  $D$  peut s'écrire :

$$D = \int_0^T \int_{S_0}^{+\infty} (2N(S'))^{-1} n(S', t) dS' dt$$

où  $n(S', t) dS' dt$  représente le nombre de demi-cycles de variation de contrainte compris entre  $S'$  et  $S' + dS'$  dans l'intervalle de temps  $(t, t + dt)$ . A  $t$  fixé, on note  $M(t)$  la variable aléatoire représentant le nombre de demi-cycles de variation de contrainte par unité de temps. On a  $\overline{M(t)} = 2\overline{N_m(t)}$ .

Soit  $q(S', t | m) dS'$  la probabilité conditionnelle pour que, ayant un extremum local à l'instant  $t$  du processus  $(\sigma_i)$ , le prochain extremum soit tel que la distance de ces deux extrema soit comprise entre  $S'$  et  $S' + dS'$  et ceci si le nombre de demi-cycles par unité de temps est égal à  $m$ . Soit  $r(m, t) dm$  la loi de probabilité de  $M(t)$  à l'instant  $t$ . Alors :

$$\overline{n(S', t)} = \int_{\mathbb{R}^+} m q(S', t | m) r(m, t) dm.$$

Si l'on fait l'approximation  $q(S', t | m)$  indépendant de  $m$ , et si l'on pose  $q(S', t | m) = g(S', t)$ , on obtient :

$$\overline{n(S', t)} = g(S', t) \overline{M(t)} = 2\overline{N_m(t)} g(S', t).$$

D'où le résultat 6,221-6.

## 6,222. — Traitement particulier pour certains processus non stationnaires

### 1. — Position du problème

Pour l'étude de la fatigue à longue durée de vie, le processus  $(\sigma_i)$  est très souvent non stationnaire dans les cas réels, puisque l'on peut être amené à considérer un temps d'observation qui se chiffre parfois en années. C'est le cas par exemple des effets de la houle sur les structures en mer ou les effets du vent sur les structures souples de génie civil. Or le processus contrainte  $(\sigma_i)$  résulte de la transformation par un système mécanique d'un processus « d'entrée ». Pour les effets de la houle, ce processus « d'entrée » sera l'élévation de la surface libre de l'eau  $\eta(t, M)$  qui est un processus indexé en temps et en espace.

Dans le cas du vent, ce processus sera le champ de vitesse du vent  $V(t, M)$  indexé aussi en temps et en espace. Si ces deux processus ne sont pas stationnaires en temps sur une longue période d'observation, par contre il a été montré que dans de nombreux cas ils étaient localement stationnaires sur de courtes périodes de temps (10 minutes à 1 heure pour le vent, 2 à 6 heures pour la houle).

En fait, ce qui est souvent connu c'est un modèle probabiliste qui est bien décrit pour des conditions de stationnarité locale. Évidemment ces conditions de stationnarité sont obtenues lorsque certains paramètres dits « à court terme » sont fixés. Ces paramètres conditionnent tout le modèle probabiliste à court terme.

Par exemple, pour le modèle du vent aléatoire, les paramètres qui conditionnent le modèle probabiliste de  $V$  sont un paramètre de rugosité globale du site et une vitesse moyenne  $\underline{V}$  de référence, la moyenne étant prise sur le temps pour lequel le processus  $V(t, M)$  est stationnaire en temps (10 minutes à 1 heure). Ainsi pour le vent, le paramètre à court terme sera  $\underline{V}$  car il est supposé généralement que le paramètre de rugosité ne change pas dans le temps.

Pour la houle, les paramètres à court terme qui conditionnent le modèle probabiliste sont généralement une hauteur moyenne significative de la houle, une période moyenne apparente et une direction principale de propagation de la houle, les moyennes étant prises sur une durée pour laquelle  $\eta(t, M)$  est stationnaire en temps. Ces paramètres à court terme définissent ce que l'on appelle un état de mer à court terme.

Si les paramètres à court terme sont fixés, alors la description probabiliste des processus « d'entrée » est connue et on est en mesure d'aborder les études de mécanique aléatoire qui conduisent à la détermination des caractéristiques probabilistes des processus observations qui sont alors stationnaires (tels que le processus contrainte  $(\sigma_i)$  pour le problème de fatigue), caractéristiques qui sont conditionnées par les paramètres à court terme.

Ces paramètres à court terme qui sont supposés fixés dans un premier temps sont en fait modélisés par des variables aléatoires, ce qui permet d'obtenir le modèle probabiliste à long terme. Par conséquent, il est nécessaire de connaître les lois de probabilité à long terme de ces paramètres à court terme. Il est alors possible de déterminer les caractéristiques probabilistes à long terme des processus observations.

Nous allons maintenant nous placer dans la situation que nous venons de décrire pour le calcul à long terme du dommage cumulé.

### 2. — Notations et hypothèses

a) Soit  $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  ayant une loi de probabilité qui est donnée par sa fonction de répartition  $F_Q(q)$  définie sur  $\mathcal{D}$  avec  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ .

b) Soit  $(\sigma_i)$  le processus contrainte qui est supposé être conditionné par  $Q$ . Sur le temps d'observation  $[0, T]$ ,  $(\sigma_i)$  est non stationnaire. Pour toute valeur fixée  $q \in \mathcal{D}$  de la variable aléatoire  $Q$ , le processus  $(\sigma_i)$  est supposé être localement stationnaire et on le prolonge par un processus stationnaire sur  $\mathbb{R}$ . On suppose en outre que pour  $q$  fixé, le processus  $(\sigma_i)$  est parfaitement décrit d'un point de vue probabiliste.

c) Enfin, on suppose d'une part que  $Q$  modélise des états à court terme,  $q = (q_1, \dots, q_n)$  étant les paramètres à court terme et d'autre part que  $F_Q(q) = \text{Prob}(Q_1 \leq q_1, \dots, Q_n \leq q_n)$  donne la probabilité d'occurrence sur  $[0, T]$  des états à court terme.

### 3. — Proposition

Sous les hypothèses de 6,222-2, le dommage total moyen  $\bar{D}$  sur le temps d'observation  $[0, T]$  s'écrit :

$$\bar{D} = T \int_{\mathcal{D}} \overline{\Delta(q)} dF_Q(q) \quad (11)$$

où  $\overline{\Delta(q)}$  est le dommage moyen par unité de temps pour un état à court terme fixé  $q$ .

### 4. — Remarques

a) Dans la pratique on est souvent amené à considérer un nombre fini  $I$  d'états à court terme. Le  $i^{\text{ème}}$  état à court terme est caractérisé par une valeur  $q^{(i)} = (q_1^{(i)}, \dots, q_n^{(i)})$  de  $\mathcal{Q}$  et a une probabilité d'occurrence  $P_i$  sur  $[0, T]$ . Dans ces conditions la formulation continue (11) devient :

$$\bar{D} = T \sum_{i=1}^I \overline{\Delta(q^{(i)})} P_i$$

b) Sous les hypothèses de la proposition 6,221-1,  $\overline{\Delta(q)}$  s'écrit :

$$\overline{\Delta(q)} = \int_{S_0}^{+\infty} (N(S))^{-1} \int_{-\infty}^0 |z| f_{\sigma\sigma\sigma}(S, 0, z|q) dz dS$$

La densité de probabilité  $f_{\sigma\sigma\sigma}$  n'est plus fonction du temps, mais est conditionnée par  $q$ .

c) De même, sous les hypothèses de la proposition 6,221-5,  $\overline{\Delta(q)}$  s'écrit :

$$\overline{\Delta(q)} = N_m(q) \int_{S_0}^{+\infty} (N(S'))^{-1} g(S'|q) dS'$$

avec :

$$N_m(q) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^-} z|z| f_{\sigma\sigma\sigma}(x, 0, z|q) dz dx$$

La densité de probabilité  $g$  n'est plus fonction du temps mais est conditionnée par  $q$ . Elle s'écrit, compte tenu de 6,221-3a, pour  $S' \geq 0$  :

$$g(S'|q) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} [k(a, a - S', \tau|q) + k(a, a + S', \tau|q)] d\tau da$$

d) La démonstration de (11) est immédiate, puisque  $T dF_Q(q)$  représente la fraction du temps de  $[0, T]$  pendant lequel l'état à court terme  $q$  est présent.

### 6,223. — Cas stationnaire gaussien

#### 1. — Hypothèses

On suppose que le processus contraint  $(\sigma_t)$  indexé sur  $\mathbb{R}$  est stationnaire, gaussien et vérifie en outre les hypothèses 6,11.

#### 2. — Lemme

Sous les hypothèses 6,223-1 on a :

$$\int_{-\infty}^0 |z| f_{\sigma\sigma\sigma}(S, 0, z) dz = \bar{v}_m \frac{1}{\sqrt{M_0}} \alpha\left(\frac{S}{\sqrt{M_0}}, \varepsilon\right) \quad (12)$$

avec :  $\bar{v}_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M_4}{M_2}}$ , où  $M_0, M_2, M_4$  sont les moments spectraux de  $(\sigma_t)$  définis en 6,12-4;

$$\alpha(\chi, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varepsilon \exp\left(-\frac{\chi^2}{2\varepsilon^2}\right) + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \chi \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\frac{\chi}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right\} \quad (13)$$

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{M_2^2}{M_0 M_4}\right)^{1/2} \quad (14)$$

### 3. — Preuve de 6,223-2

Ce résultat a été établi sous cette forme et pour la première fois dans [27] à l'aide des travaux de S. O. Rice [39]. La démonstration est simple. Le processus  $(\sigma_t)$  étant gaussien stationnaire centré, pour  $t$  fixé le vecteur aléatoire  $y = (\sigma_t, \dot{\sigma}_t, \ddot{\sigma}_t)$  sur  $\mathbb{R}^3$  est gaussien et la matrice symétrique  $[C_y]$  de son opérateur de covariance est telle que  $[C_y]_{11} = M_0$ ,  $[C_y]_{22} = -[C_y]_{13} = M_2$ ,  $[C_y]_{33} = M_4$ ,  $[C_y]_{12} = [C_y]_{23} = 0$ .

La densité de probabilité sur  $\mathbb{R}^3$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx dy dz$ , du vecteur aléatoire  $y$ , est indépendante de  $t$  et s'écrit :

$$f_{\sigma\sigma\sigma}(x, y, z) = (2\pi)^{-3/2} (\det[C_y])^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} Y^T [C_y] Y\right)$$

où  $Y$  est la matrice colonne  $(1 \times 3)$  d'éléments  $(x, y, z)$ . Il suffit alors de calculer le membre de gauche de (12) pour obtenir le résultat.

### 4. — Remarque

Compte tenu des résultats de S. O. Rice [39],  $\bar{v}_m = (2\pi)^{-1} (M_4/M_2)^{1/2}$  représente le nombre moyen de maxima locaux par unité de temps du processus  $(\sigma_t)$  et  $\bar{v}_0^+ = (2\pi)^{-1} (M_2/M_0)^{1/2}$  le nombre moyen de passages par zéro avec dérivée positive du processus  $(\sigma_t)$ . Compte tenu des notations introduites en 6,12-2 et le processus  $(\sigma_t)$  étant stationnaire, on a  $\bar{N}_m = T\bar{v}_m$  et  $\bar{N}_0^+ = T\bar{v}_0^+$ . Ainsi, d'après 6,12-3 le paramètre :

$$\varepsilon = \left(1 - (\bar{N}_0^+/\bar{N}_m)^2\right)^{1/2} = \left(1 - (\bar{v}_0^+/\bar{v}_m)^2\right)^{1/2} = \left(1 - M_2^2/(M_0 M_4)\right)^{1/2}$$

représente bien le paramètre de largeur de bande. D'autre part,  $\alpha(\chi, \varepsilon) d\chi$  représente la probabilité pour que, à l'instant  $t$ , on ait un maximum local du processus  $(M_0^{-1/2} \sigma_t)$ , compris entre  $\chi$  et  $\chi + d\chi$ .

### 5. — Proposition

Sous les hypothèses de la proposition 6,221-1 et des hypothèses 6,221-3, le dommage moyen  $\bar{D}$  sur le temps d'observation  $[0, T]$  s'écrit :

$$\bar{D} = \bar{v}_m T \int_{S_0/\sqrt{M_0}, N(\chi/\sqrt{M_0})}^{+\infty} \frac{\alpha(\chi, \varepsilon) d\chi}{N(\chi/\sqrt{M_0})} \quad (15)$$

avec  $\bar{v}_m, M_0, \varepsilon$  et  $\alpha(\chi, \varepsilon)$  définis en 6,223-2.

## 6. — Preuve de 6,223-5

Le processus  $(\sigma_t)$  étant stationnaire, la relation (10) s'écrit :

$$\bar{D} = T \int_{S_0}^{+\infty} (N(S))^{-1} \int_{-\infty}^0 |z| f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}(S, 0, z) dz dS.$$

car  $f_{\sigma\dot{\sigma}\ddot{\sigma}}$  est alors indépendante du temps  $t$ . Il suffit alors de substituer dans cette dernière relation le résultat (12) et de faire le changement de variable d'intégration  $S = \chi \sqrt{M_0}$  pour obtenir le résultat.

## 7. — Corrolaire

Sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 6,223-5 et en supposant de plus que la courbe  $S-N$  ait la forme 4,1-3 :  $S \rightarrow N(S) = AS^{-a}$  et soit définie sur  $[0, +\infty]$ , c'est-à-dire que  $S_0 = 0$ , alors le dommage cumulé moyen  $\bar{D}$  sur  $[0, T]$  s'écrit :

$$\bar{D} = \frac{T}{2\pi} M_2^{1/2} M_0^{\frac{a-1}{2}} \frac{2^{a/2} \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right)}{A} \frac{\beta(a, \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (16)$$

où :

$$x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$$

est la fonction d'Euler et  $\beta(a, \varepsilon)$  est définie par :

$$\beta(a, \varepsilon) = \frac{1}{2^{a/2} \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right)} \int_0^{+\infty} \chi^a \alpha(\chi, \varepsilon) d\chi \quad (17)$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , c'est-à-dire si le processus contrainte  $(\sigma_t)$  est à bande étroite, alors :

$$\bar{D} = \frac{T}{2\pi} M_2^{1/2} M_0^{\frac{a-1}{2}} \frac{2^{a/2} \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right)}{A} \quad (18)$$

## 8. — Preuve de 6,223-7

La relation (14) peut s'écrire :

$$(M_4/M_2)^{1/2} = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} (M_2/M_0)^{1/2}.$$

D'autre part compte tenu des hypothèses de 6,223-7, la relation (15) devient :

$$\bar{D} = \frac{T}{2} \left(\frac{M_4}{M_2}\right)^{1/2} \frac{M_0^{a/2}}{A} \int_0^{+\infty} \chi^a \alpha(\chi, \varepsilon) d\chi$$

d'où le résultat (16) compte tenu de (17).

Pour montrer (18), il suffit de remarquer que, lorsque  $\varepsilon = 0$ ,  $\beta(a, 0) = 1$ . En effet d'après (13) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \chi^a \alpha(\chi, 0) d\chi &= \\ &= \int_0^{+\infty} \chi^{a+1} \frac{1}{4} \exp(-\chi^2/2) d\chi = 2^{a/2} \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

## 9. — Remarques

a) La relation (18) est très souvent utilisée dans les calculs pratiques. Néanmoins, il faut être conscient du très grand nombre d'hypothèses qu'elle suppose satisfaites, comme on a pu s'en rendre compte.

b) Les auteurs de [56] ont trouvé numériquement que pour les valeurs usuelles du paramètre  $a$ , correspondant à des problèmes réels de fatigue,  $\beta(a, \varepsilon)$  était très peu fonction de  $a$  et pouvait être approximée par  $\beta(a, \varepsilon) \simeq \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ . D'après ces auteurs, cette dernière approximation sous-estime la vraie valeur de  $\beta(a, \varepsilon)$  de 8 % pour  $a = 3$  et  $\varepsilon = 0,866$ , mais pour les grandes valeurs de  $a$ , qui correspondent aux cas réels, et pour des valeurs de  $\varepsilon$  pas trop proches de 1, l'erreur est beaucoup plus petite. Ainsi pour  $a \geq 5$  et  $\varepsilon < 0,71$ , on trouve que l'erreur est inférieure à 1 %. Cela se traduit par le fait que dans de nombreux cas où le processus  $(\sigma_t)$  est à bande large, on peut en fait se contenter, avec une approximation raisonnable, de l'expression (18) de la bande étroite au lieu de (16).

## 6.3. — Fatigue sous sollicitations aléatoires en utilisant l'approche par la mécanique de la rupture

### 1. — Les hypothèses

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre de la fatigue sous sollicitations aléatoires mais en utilisant l'approche par la mécanique de la rupture. Nous utiliserons donc les résultats, hypothèses et notations du paragraphe 5.

### 2. — Les difficultés de l'interprétation probabiliste de l'approche par la mécanique de la rupture

Le processus contrainte  $(\sigma_t)$  étant un processus stochastique, on se trouve dans le cas de la fatigue à cycles variables. Or comme nous l'avons expliqué brièvement au paragraphe 5,2, il semble pour le moment assez difficile d'appliquer les concepts de la mécanique de la rupture dans ce cas. De plus d'un point de vue probabiliste, les difficultés rencontrées sont encore plus grandes que pour l'approche classique, car les lois de fissuration proposées, telles que la loi de Paris par exemple, ne sont pas adaptées à une formulation par processus. En effet elles sont formulées cycle par cycle et sont non linéaires. On ne peut donc pas, par simple investigation intellectuelle, transformer ces lois empiriques, valables à cycles constants, pour les adapter au cas des chargements aléatoires. Il faudrait une formulation en temps qui soit adaptée et vérifiée expérimentalement ou théoriquement. Il y a plusieurs manières d'envisager le problème. Nous en donnerons deux.

a) La première consiste à utiliser la mécanique de la rupture pour déterminer l'équivalent des courbes  $S-N$  de l'approche classique, lorsqu'on se trouve dans la phase de fatigue qui correspond à la propagation lente d'une fissure macroscopique, et de les utiliser pour des chargements aléatoires. On est alors ramené à l'exposé précédent. Évidemment, il y a de nombreuses questions qui se posent et qui restent pour le moment sans réponse. Ainsi, si ces courbes sont établies à partir d'une loi de propagation de fissure qui est valable pour des chargements à cycles constants (c'est le cas des résultats (7) et 5,1-7 par exemple), comment peut-on les utiliser pour des chargements aléatoires? faut-il introduire de nouveau une loi d'endommagement ou bien les modifier pour prendre en compte directement le caractère aléatoire du chargement. Certains auteurs préconisent d'utiliser, lorsque le processus contrainte  $(\sigma_t)$  est stationnaire et à bande étroite, la loi de Paris, en remplaçant dans celle-ci la variation du facteur d'intensité de contrainte, qui est alors aléatoire, par

son écart type. On obtient alors une courbe  $S-N$  qui donne la durée de vie moyenne à partir de la connaissance de l'écart-type de la variation de contrainte. Mais que se passe-t-il si le processus ( $\sigma_t$ ) est non stationnaire, à bande large etc... D'autre part on tombe sur le même écueil que dans l'approche classique : on ne détermine qu'une caractéristique numérique de la variable aléatoire « durée de vie », c'est la moyenne.

b) Une seconde approche consiste à utiliser toute l'information qu'apporte d'un point de vue mécanique la mécanique de la rupture, par exemple la prise en compte de l'interaction entre les cycles. La méthode consiste à effectuer une intégration numérique cycle par cycle de la loi de fissuration. Ceci suppose évidemment que d'une part la loi de fissuration soit toujours valable pour des cycles variables quelconques, et d'autre part que la méthode de comptage utilisée sur les trajectoires du processus contrainte fasse apparaître une notion de cycle. Que se passe-t-il si le processus est à bande très large? Malheureusement, si cette méthode semble assez satisfaisante d'un point de vue mécanique, elle nécessite l'utilisation de simulations numériques, et si l'intégration doit être faite sur une assez longue période de temps, les calculs deviennent très vite inabordables.

## 7. — EXEMPLE.

### FATIGUE DES PLATES-FORMES

#### A EMBASE POIDS

#### SOUMISES A LA HOULE ALÉATOIRE

L'exemple présenté ci-après résulte de travaux qui sont développés dans [37] [38].

#### 7.1. — Le problème de la fatigue des plates-formes à embase

##### poids

Nous nous intéressons ici aux plates-formes fixes du type poids, dont la stabilité est assurée par leur propre poids, ce qui signifie que la plus grande partie de leurs éléments immergés sont de grandes dimensions (caissons, colonnes de grand diamètre). Cela implique des conséquences très importantes au niveau de la détermination des efforts hydrodynamiques dus à la houle. Il est nécessaire d'utiliser une théorie de diffraction pour leur calcul. Pour les grandes plates-formes de géométrie a priori quelconque, cette théorie hydrodynamique relève pour sa résolution de formulations relativement complexes, ce qui conduit à ces calculs numériques volumineux qui ne peuvent être abordés qu'à l'aide de l'informatique.

Les plates-formes du type poids réalisées à ce jour sont en béton, néanmoins il existe des projets en métal. Mais dans tous les cas, le pont (deck) de la plate-forme est métallique. Pour certaines, le pont intervient dans la rigidité d'ensemble. Pour ce type de plate-forme se pose le problème de la tenue à la fatigue du pont métallique et plus particulièrement pour les éléments de structure qui réalisent la jonction entre les colonnes et le pont. Bien évidemment, il peut y avoir aussi fatigue en certains points de la structure immergée, qu'elle soit en béton ou en métal. Le seul moyen de traiter correctement ce problème de fatigue, et particulièrement celui du pont, est de considérer la plate-forme dans son ensemble, c'est-à-dire

prendre en compte l'interaction du sol avec la structure et considérer l'ensemble de la structure constituée de la partie immergée et du pont.

Les causes de fatigue sont dues aux effets de la houle. En effet, les forces hydrodynamiques engendrées par la houle sont alternées et mettent en mouvement la plate-forme qui se déforme. Il est alors indispensable de prendre en compte les effets dynamiques, car les variations de contrainte qui produisent la fatigue dans certaines pièces sont fonction d'une part des caractéristiques de la houle incidente et des caractéristiques hydrodynamiques de la plate-forme, d'autre part de la réponse dynamique de la structure qui intègre dans le temps ces forces hydrodynamiques.

Le problème de la tenue à la fatigue se matérialise normalement par une durée de vie de la plate-forme. Cela signifie qu'il faut considérer tous les états de mer significatifs que rencontrera la plate-forme durant son existence.

Par ailleurs les effets dynamiques influent énormément sur les résultats des calculs à la fatigue. En conséquence, il n'est pas très vraisemblable, compte tenu de la nature physique de la houle réelle, d'utiliser une modélisation déterministe de la houle. C'est pour cela que l'on utilise une modélisation aléatoire. Cet aspect est reconnu à ce jour comme le plus adapté à la résolution du problème de fatigue des structures en mer. Les raisons en sont simples : pour un état de mer à court terme donné, l'élévation de la surface libre de la mer est relativement désorganisée, et les relevés expérimentaux montrent qu'il y a de l'énergie non seulement pour une fréquence mais dans toute une bande de fréquence. D'où l'intérêt d'utiliser un modèle aléatoire, qui prend bien en compte la répartition énergétique de la houle en fonction des fréquences, ce qui permet de traiter correctement le problème dynamique, donc le problème de fatigue.

Finalement, la résolution complète d'un problème de fatigue des plates-formes du type poids soumises à la houle aléatoire conduit à effectuer toute une chaîne de calculs dont les principales étapes sont les suivantes :

1. — Calculs dynamiques en analyse modale de toute la plate-forme (en y incluant le pont et l'interaction sol-structure) en la considérant comme une structure spatiale (ce qui conduit généralement à un grand nombre de degrés de liberté et à des calculs importants). En première approximation, on suppose que la structure est à comportement linéaire et que l'interaction sol-structure peut être linéarisée.

2. — Calculs hydrodynamiques en utilisant une théorie de diffraction pour un grand nombre de houles élémentaires et pour plusieurs directions afin de construire les fonctions de transfert hydrodynamiques (ce qui conduit à des calculs très volumineux). Pour le type de plate-forme considéré ici, les forces hydrodynamiques de traînée sont négligeables devant les autres.

3. — Calcul de dynamique aléatoire de la plate-forme pour tous les états de mer à court terme que rencontrera la plate-forme durant sa vie. Ces calculs utilisent les résultats du 1) et du 2) précédents, ce qui nécessite le transfert d'un très gros volume d'informations diversifiées puis un traitement numérique conséquent.

4. — Enfin, il faut effectuer la vérification de la tenue à la fatigue de la structure en certains points jugés critiques. Ceci nécessite l'utilisation des résultats des traitements effectués au 3) et la donnée d'une part des probabilités d'occurrence des états de mer à court terme et d'autre part des coefficients de concentration de contrainte des assemblages vérifiés.

Cette chaîne de calculs est illustrée par le schéma de la figure 12.



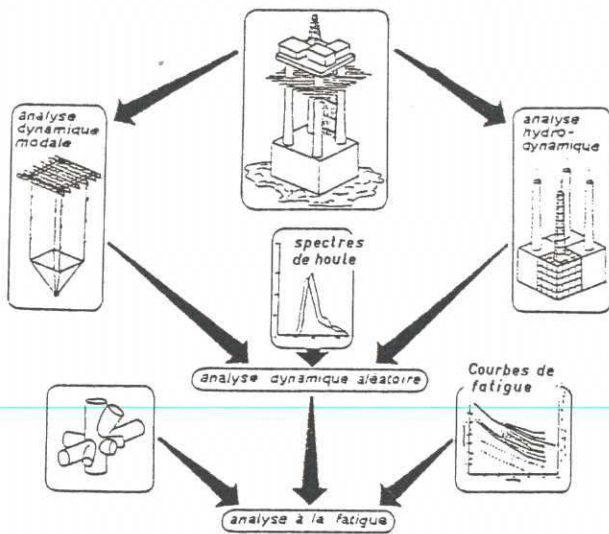


Fig. 12 — Organisation des étapes de calcul

## 7.2. — Les hypothèses de calcul et les modélisations utilisées

### 7.2.1. — Modélisation de la plate-forme pour les calculs de structure

Pour tous les calculs de structure relatifs à la plate-forme, c'est-à-dire analyse dynamique en réponse libre, réponse aléatoire sous la houle aléatoire, calcul à la fatigue et détermination de la durée de vie, il y a lieu de modéliser la plate-forme. La modélisation est tri-dimensionnelle et faite par la méthode des éléments finis. Le comportement du sol est simulé par un système de ressorts amortisseurs. Généralement, pour les plates-formes du type poids, plusieurs parties peuvent être distinguées. Le pont de la plate-forme est modélisé par des éléments poutres et/ou des éléments finis. Pour la partie immergée, s'il y a des colonnes, elles seront modélisées par des éléments poutres, le caisson, lui, sera modélisé par des éléments poutres très rigides. On désigne par  $B$  le nœud structure qui simule le comportement du sol. On définit un repère général orthonormé  $xyz$  dans lequel la structure est définie. Ce repère a pour origine  $B$  et l'axe  $By$  est vertical, ascendant. La direction  $X_\theta$  d'une houle élémentaire par rapport à la plate-forme est repérée par un angle  $\theta$ , comme le montre la figure 13.

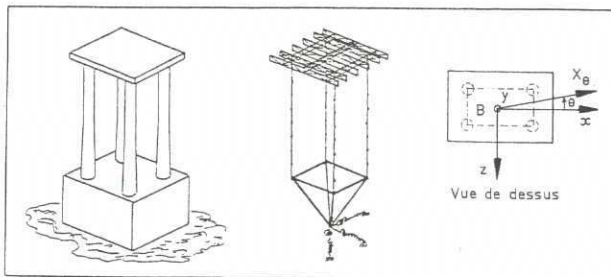


Fig. 13 — Modèle pour les calculs de structure

### 7.2.2. — Modèle de la houle à court terme [50]

Ainsi que nous l'avons expliqué au paragraphe 6.222, l'élévation  $\eta_t$  de la surface libre de l'eau est un processus non stationnaire à long terme. On considère alors des états de mer à court terme pour lesquels le processus  $(\eta_t)$  est stationnaire.

L'état de mer à court terme peut être caractérisé par trois paramètres : la hauteur significative de la houle  $\overline{H}_{1/3}$ , la période moyenne apparente  $T_\eta$  et la direction principale  $\theta$  de la propagation de la houle avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

La donnée du  $i^{\text{ème}}$  état de mer à court terme revient à se donner une valeur numérique de chacun de ces paramètres :  $q^{(i)} = (\overline{H}_{1/3}, T_\eta, \theta)$ . Pour un état de mer formé (à court terme), on peut modéliser correctement l'élévation  $\eta$  de la surface libre par un processus stochastique, centré, du second ordre, stationnaire en temps et gaussien. Le processus  $(\eta_{tM})$  est donc complètement caractérisé par la fonction de densité spectrale bidimensionnelle  $G(\omega, \theta | q^{(i)})$  définie pour les pulsations  $\omega \in (0, +\infty)$  et  $\theta \in (0, 2\pi)$ .  $G(\omega, \theta | q^{(i)})$  est le spectre de la houle dimensionnel de l'état de mer à court terme  $q^{(i)}$ , et :

$$W(\omega | q^{(i)}) = \int_0^{2\pi} G(\omega, \theta | q^{(i)}) d\theta$$

est le spectre unidimensionnel associé.

Les moments spectraux d'ordre  $k$  sont définis par :

$$\mathcal{M}_k(q^{(i)}) = \int_0^{+\infty} \omega^k W(\omega | q^{(i)}) d\omega$$

Pratiquement,  $\mathcal{M}_0$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_4$  sont définis et compte tenu de l'hypothèse gaussienne stationnaire, on montre que  $T_\eta = 2\pi(\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_2)^{1/2}$  et  $\overline{H}_{1/3} = 2C(\varepsilon)\mathcal{M}_0^{1/2}$ , avec  $\varepsilon = (1 - \mathcal{M}_2/(\mathcal{M}_0\mathcal{M}_4))^{1/2}$  la largeur de bande. Pour  $\varepsilon = 0$ , c'est-à-dire pour une largeur de bande étroite,  $C(\varepsilon) = 2$ . Les deux spectres unidimensionnels de houle qui sont très utilisés pour la mer du Nord par exemple sont le spectre de Pierson-Moskowitz modifié et le spectre Jonswap.

### 7.2.3. — Modèle hydrodynamique

Le problème hydrodynamique met en œuvre une discrétisation, en partie différente de celle utilisée pour les analyses de structure, afin de tenir compte des effets de diffraction qui ne peuvent jamais être négligés sur les plates-formes poids.

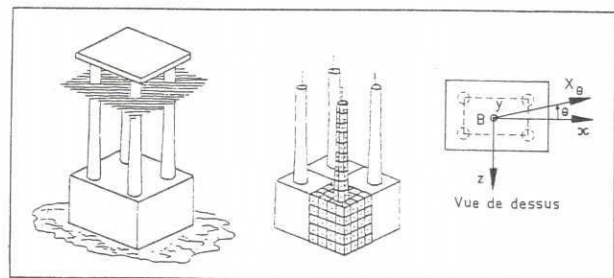


Fig. 14 — Modèle pour les calculs hydrodynamiques

Sur tous les éléments où la diffraction est prise en compte, les efforts sont calculés par intégration de la pression hydrodynamique sur la surface mouillée de ces éléments.

Si  $H$  est la hauteur crête à creux d'une houle élémentaire, dont la direction de propagation fait un angle  $\theta$  avec  $Ox$ , dont la pulsation est  $\omega$  et le nombre d'ondes  $k$ , le modèle utilisé est une houle d'Airy telle que :

$$\eta(x, z, t, \theta) = (H/2) \cos(kx \cos \theta - kz \sin \theta - \omega t)$$

Le potentiel des vitesses  $\Phi_W$  correspondant à cette houle incidente vérifie les conditions de Laplace dans le fluide, la condition de glissement sur le fond de la mer ( $y = 0$ ) et la condition de surface libre linéarisée. En outre, si  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $D$  la profondeur d'eau, le nombre d'ondes est lié à  $\omega$  par la relation  $gk \operatorname{th}(kD) = \omega^2$  qui traduit le caractère dispersif de la propagation et qui permet de vérifier la condition de surface libre linéarisée.

Aux effets de diffraction est associé un potentiel  $\Phi_S$  qui doit satisfaire les mêmes équations que  $\Phi_W$  et de plus une condition de glissement sur la surface des éléments mouillés et une condition dite de radiation loin de la plate-forme pour assurer l'unicité de la solution.  $\Phi_W$  étant harmonique, on cherche une solution de la forme  $\Phi_S = \operatorname{Ré} \{ \varphi_S \exp(-i\omega t) \}$ , où  $\varphi_S(x, y, z)$  doit vérifier :

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_S &= 0 \text{ dans le fluide} \\ \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} &= 0 \text{ pour } y = 0 \\ g \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} - \omega^2 \varphi_S &= 0 \text{ pour } y = D \\ \frac{\partial \varphi_S}{\partial n} &= - \frac{\partial \varphi_W}{\partial n} \text{ sur la partie mouillée de la plate-forme} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial \varphi_S}{\partial R} - i \frac{\omega^2}{g} \varphi_S \right) &= 0 \text{ la condition de radiation} \end{aligned} \right\} (19)$$

où l'on a posé :

$$\Phi_W = \operatorname{Ré} \{ \varphi_W \exp(-i\omega t) \}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad R = (x^2 + z^2)^{1/2},$$

$\Delta$  l'opérateur **Laplacien** et  $\frac{\partial}{\partial n}$  le symbole de la dérivée normale.

La solution de ce système (19) peut être représentée par une répartition de sources sur la surface mouillée des parties où il y a de la diffraction. Une telle source d'intensité unité vérifie l'ensemble des équations à l'exception de l'équation de Laplace au point où elle est située et de la condition de glissement. Le potentiel de cette source unité est représenté à l'aide d'une fonction de **Green**, d'expression générale compliquée et à valeurs complexes. Lorsque la pulsation  $\omega$  de la houle prend des valeurs assez grandes ou assez petites, des équivalents asymptotiques à valeurs réelles peuvent être utilisés avantageusement. La condition de glissement sur la surface mouillée est vérifiée en assignant une répartition continue de sources  $f$  sur cette surface, solution d'une équation intégrale dite de **Fredholm** de seconde espèce. On peut alors calculer en tout point le potentiel de diffraction  $\varphi_S$ , et le potentiel total  $\Phi = \Phi_W + \Phi_S$  est alors connu. Les forces sont alors obtenues en intégrant la pression égale à  $\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  où  $\rho$  est la masse volumique de l'eau.

### 7,3. — Dynamique déterministe de la plate-forme — Calcul de la fonction de transfert de la structure

La modélisation adoptée est celle décrite au paragraphe 7,21. L'amortissement visqueux est la somme de l'amortissement structural, de l'amortissement hydrodynamique et de

l'amortissement du sol. On suppose que l'on peut se ramener pour les calculs dynamiques à la détermination d'un taux d'amortissement critique pour chaque mode de vibration, ce taux d'amortissement critique étant constant et donc indépendant de la pulsation.

On suppose que le système a  $n$  degrés de liberté. Soit  $[M]$  la matrice de masse de la structure et  $[M_a]$  la matrice des masses ajoutées due aux déplacements de la plate-forme dans l'eau. On supposera aussi que cette matrice est constante et indépendante de la pulsation du mouvement. On peut prendre comme première approximation la masse du fluide déplacée. On note  $[K]$  la matrice de rigidité,  $[C]$  la matrice d'amortissement,  $[\mathcal{M}] = [M] + [M_a]$  la matrice résultante des masses,  $X$  la matrice colonne des déplacements des nœuds (en spatial) dans le repère général  $xyz$ ,  $F_t$  la matrice colonne des forces extérieures appliquées aux nœuds dans le repère général  $xyz$  (les seules forces appliquées sont les forces hydrodynamiques dues à la houle). L'équation de dynamique s'écrit :

$$[\mathcal{M}]\ddot{X} + [C]\dot{X} + [K]X = F.$$

Pour le calcul à la fatigue, on s'intéresse à une contrainte ( $\sigma_t$ ) scalaire, en un point de la structure. On suppose que cette contrainte est une fonction linéaire du champ de déplacement  $X_t$ . Alors la matrice de l'opérateur de transfert associée au filtre linéaire :  $F_t \rightarrow \sigma_t$  est une fonction  $\omega \mapsto [H(\omega)]$  définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs matricielles ( $1 \times n$ ) et dont les éléments sont à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Compte tenu des hypothèses,  $[H(\omega)]$  se calcule indirectement en utilisant la base modale, ce qui permet de ne conserver que les modes propres de vibration qui sont significatifs.

### 7,4. — Fonction de transfert des forces hydrodynamiques

Les fonctions de transfert des forces hydrodynamiques sont construites à partir de houles élémentaires, chacune étant caractérisée par le couple  $(\theta, \omega)$  et par son amplitude  $(H/2)$  égale à l'unité. Le problème étant linéaire, compte tenu du modèle hydrodynamique 7,23, les forces hydrodynamiques sont proportionnelles à l'amplitude de la houle. Les fonctions de transfert des forces hydrodynamiques sont représentées par une matrice colonne  $(n \times 1)$  complexe notée  $T_Q(\omega, \theta)$ . Les éléments de cette matrice colonne sont les fonctions de transfert des composantes dans le repère général des forces hydrodynamiques appliquées aux nœuds de la structure immergée. Les éléments correspondant à des degrés de liberté où il n'y a pas de forces hydrodynamiques sont identiquement nuls.

### 7,5. — Fonction de transfert élévation de la surface libre — contrainte

La fonction de transfert élévation de la surface libre  $\eta$  — contrainte  $\sigma$ , est la fonction  $(\theta, \omega) \mapsto T_\sigma(\omega, \theta)$  définie sur  $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telle que :

$$T_\sigma(\omega, \theta) = [H(\omega)]T_Q(\omega, \theta)$$

7.6. — Fonction de densité spectrale du processus  
contrainte ( $\sigma_t$ ) et moments spectraux

Pour un état de mer à court terme donné caractérisé par  $q^{(i)}$  et le spectre dimensionnel  $G_\eta(\omega, \theta | q^{(i)})$ , le processus ( $\eta_t$ ) étant centré stationnaire, gaussien et les transformations étant toutes linéaires, le processus ( $\sigma_t$ ) sera centré, stationnaire et gaussien. D'autre part, nous supposons que ( $\sigma_t$ ) vérifie toutes les hypothèses 6,11. (Ces hypothèses sont vérifiées dans les cas réels). Le processus ( $\sigma_t$ ) étant centré, stationnaire, gaussien, il est complètement décrit par sa fonction de densité spectrale  $\omega \mapsto W_\sigma(\omega | q^{(i)})$  définie sur  $(0, +\infty)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et qui est telle que :

$$W_\sigma(\omega | q^{(i)}) = \int_0^{2\pi} |T_\sigma(\omega, \theta)|^2 G_\eta(\omega, \theta | q^{(i)}) d\theta$$

Les moments spectraux d'ordre  $k \in \{0, 2, 4\}$  peuvent alors être calculés par la relation :

$$M_k(q^{(i)}) = \int_0^{+\infty} \omega^k W_\sigma(\omega | q^{(i)}) d\omega$$

7.7. — Calcul à la fatigue

La vérification à la fatigue en un point de la structure est faite en utilisant l'approche classique. En ce point la contrainte considérée est  $\sigma_t$ .

Pour un état de mer à court terme défini par  $q^{(i)}$ , le processus contrainte ( $\sigma_t$ ) vérifie les hypothèses de la proposition 6,223-5. Si l'on utilise la méthode de comptage des pics, on se trouve alors dans le cadre d'application de la proposition 6,223-5, et le dommage moyen cumulé  $\Delta(q^{(i)})$  par unité de temps s'écrit d'après (15) :

$$\overline{\Delta(q^{(i)})} = \overline{v_m(q^{(i)})} \int_{S_{01}\sqrt{M_0(q^{(i)})}}^{+\infty} \frac{\alpha(\chi, \varepsilon(q^{(i)})) d\chi}{N(\chi \sqrt{M_0(q^{(i)})})}$$

avec :

$$\overline{v_m(q^{(i)})} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{M_4(q^{(i)})}{M_2(q^{(i)})} \right)^{1/2}$$

$$\varepsilon(q^{(i)}) = \left( 1 - \frac{M_2^2(q^{(i)})}{M_0(q^{(i)})M_4(q^{(i)})} \right)^{1/2}$$

et  $\alpha(\chi, \varepsilon)$  donnée par (13).

Soit  $I$  le nombre d'états de mer à court terme considéré sur une année et soit  $P_i$  le pourcentage du temps annuel pendant lequel l'état de mer est  $q^{(i)}$ . Alors compte tenu de 6,222-4a, le dommage moyen annuel  $\overline{D}_1$  s'écrit :

$$\overline{D}_1 = \sum_{i=1}^I \frac{P_i}{100} \times (365 \times 24 \times 3600) \cdot \overline{\Delta q^{(i)}}$$

En supposant que les années sont indépendantes, la durée de vie moyenne  $\overline{T}_L$  exprimée en années, pour laquelle le critère de ruine associé est que le dommage total  $D = 1$ , est telle que  $\overline{T}_L = 1/\overline{D}_1$ .

8. — CONCLUSIONS

Le calcul du cumul de fatigue sous sollicitations aléatoires est un problème réel rencontré dans des projets. Il est réel parce qu'en pratique de nombreux systèmes mécaniques, pour lesquels le risque d'apparition de phénomènes de fatigue n'est pas négligeable, sont sollicités par des actions extérieures dues à un environnement complexe, actions qui doivent être modélisées dans certains cas par des processus stochastiques.

Dans ce type de problème, il ne faut pas perdre de vue que la fatigue sous sollicitations aléatoires se trouve généralement à l'extrémité de toute une chaîne de phénomènes qui transitent dans le système mécanique, et qui se traduit d'un point de vue de la modélisation par tout un ensemble de calculs de mécanique aléatoire qui doit permettre, normalement, de fournir les données relatives à la description du modèle du processus « d'entrée » de la fatigue.

Par conséquent, si les modèles mécaniques du cumul de la fatigue ne sont pas adaptés à ces modélisations, on se place dans l'impossibilité de résoudre le problème posé. Cette adaptation doit se trouver à deux niveaux :

— d'une part, le modèle mécanique doit être valable pour des sollicitations aléatoires, que ce soit des processus à bande large ou à bande étroite.

— d'autre part, la formulation des « outils » de la mécanique de la fatigue doit être adaptée aux modélisations mathématiques de la théorie des processus stochastiques, sinon il n'y a pas beaucoup d'espoirs de pouvoir résoudre le problème posé. Ainsi pour les deux approches de la fatigue, on est obligé à l'heure actuelle de faire des interprétations probabilistes qui ne sont pas toujours justifiées. Dans cet ordre d'idée, il faut reconnaître que l'approche « classique » n'est pas trop mal adaptée, car elle permet pour certaines méthodes de comptage une formulation directe en terme de résultats sur les trajectoires des processus. Bien évidemment, cet argument n'est en rien décisif en ce qui concerne la validité de l'approche classique. Par contre, ce n'est pas le cas de l'approche par la mécanique de la rupture qui utilise des lois de propagation de fissure qui ne sont pas adaptées, ni non plus de l'approche « classique » si une méthode de comptage telle que le « rain-flow » est utilisée.

La mécanique de la rupture est sans nul doute la bonne approche pour comprendre les phénomènes de fatigue. Néanmoins, à l'heure actuelle, l'approche classique est quasiment la seule utilisée au niveau des études de projets, car bien que défailante sur le plan mécanique, elle reste pour le moment le seul outil adapté aux calculs de la fatigue à longue durée de vie sous sollicitations aléatoires. Malgré cela, la mise en œuvre pratique de l'approche « classique » est souvent mise en échec, car on peut se trouver dans l'impossibilité de fournir les données probabilistes nécessaires aux calculs. On doit alors se contenter d'une information partielle sur la durée de vie, telle que la durée de vie moyenne. Nous avons donné une illustration de ceci dans l'exemple du paragraphe 7. Malheureusement, dans beaucoup de cas on ne se trouve même pas dans la situation de pouvoir obtenir une information partielle. C'est le cas par exemple de la fatigue des « jackets » des plates-formes marines soumis aux effets répétés de la houle. Pour ce type de structure, il y a des effets non linéaires prépondérants (non linéarités dues aux forces hydrodynamiques, non linéarités dues à l'interaction sol-structure etc...) et on ne sait pas résoudre à ce jour d'une manière constructive, sauf au prix de simplifications, le problème stochastique associé. Évidemment, on peut pallier cela en faisant appel à des techniques de simulations numériques. Mais là encore les calculs sont si lourds que l'on se trouve souvent dans l'obligation de simplifier le modèle pour diminuer le volume des calculs.

En conclusion, il semble qu'il y ait encore un assez grand effort de recherches à faire dans ce domaine du cumul de fatigue sous sollicitations aléatoires, mais ces recherches doivent être orientées en fonction du contexte général de ce problème si l'on veut espérer aboutir à des résultats utilisables dans la pratique.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Ang A. H. S.** : *Bases for Reliability Approach to Structural Fatigue*. 2nd International Conference on Structural Safety and Reliability, Munich, Germany, 19-21 septembre 1977.
- [2] *American Welding Society Structural Welding Code*. AWS DI. 1-72, 1972.
- [3] **Beer F. P. et Rice, J. R.** : *On the Distribution of Rises and Falls in a Continuous Random Process*. Trans. of the ASME, juin 1965.
- [3 bis] **Besson L. J.** : *Note au compte rendu de l'Académie des Sciences*. (A paraître en 1979.)
- [4] **Bolotin V. V.** : *Statistical Methods in Structural Mechanics*. Holden Day, 1969.
- [5] **Boss'76** : *Conférence internationale sur le comportement des plates-formes marines à l'Institut norvégien de Technologie*, 1976. « Fatigue Behaviour », pp. 634-704, Proceedings, Vol. 1 et 2.
- [6] **Brozzetti J. et Krée P.** : *Sécurité des constructions métalliques — Analyse des diverses approches*. Rapport scientifique n° 8005-1, février 1979.
- [7] **Brozzetti J. et Hutin J. P.** : *Étude de l'endommagement dû à la fatigue. Structures en mer*. Troisième partie, pp. 663-789, CNEXO-CTICM, septembre 1976.
- [8] **Byers et al.** : *Fatigue and Fracture Reliability*. ASCE Specialty Conference on « Probabilistic Mechanics and Structural Reliability », 10-12 janvier 1979, Tucson, USA.
- [9] **Counihan J.** : *Review Paper Adiabatic Atmospheric Boundary Layers*. A Review and Analysis of Data from Period 1880-1972, Atmospheric Environment, Vol. 9 pp. 871-905, Pergamon Press, 1975.
- [10] **CNEXO-CTICM** : *Structures en mer — Dimensionnement, fabrication, comportement des structures en acier*, septembre 1976.
- [11] **Cramer H. et Leadbetter M. R.** : *Stationary and Related Stochastic Processes*. John Wiley and Sons, Inc. New York, 1967.
- [12] **Dubuc J., Thang Quoc Bui, Bazergui, A. et Biron, A.** : *Unified Theory of Cumulative Damage in Metal Fatigue*. WRC Bulletin, n° 162 juin 1971.
- [13] **Dowling N. E.** : *Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories*. Journal of Materials, Vol. 7, N° 1, mars 1972.
- [14] **Ellingwood B.** : *Probabilistic Assessment of Low Cycle Fatigue Behaviour of Structural Welds*. Journal of Pressure Vessel Technology, ASME, Paper 75, PVP29, février 1976.
- [15] **Fisher et al.** : *Effect of Weldments on the Fatigue Strength of Steel Beams*. N° 102, Highway Research Board, 1970.
- [16] **Fisher et al.** : *Fatigue Strengths of Steel Beams with Welded Stiffeners and Attachements*. N° 147, Highway Research Board, 1974.
- [17] **Freudenthal A.** : *Reliability Analysis Based on Time to the First Failure, Aircraft Fatigue*. Pergamon Press, Londres, 1972.
- [18] **Gilles A.** : *Fondements de la mécanique de la rupture des métaux et ses extensions*. Annales des Ponts et Chaussées, n° 11, mars-avril 1970.
- [19] **Godeau A. J. et Deleuil G. E.** : *Dynamic Response and Fatigue Analysis of Fixed Offshore Structures*. Offshore Technology Conference, OTC, 1975.
- [20] **Hillberry B. M.** : *Fatigue Life of 2024-T3 Aluminium Alloy under Narrow and Broad Band Random Loading*. Effects of Environment and Complex Loading on Fatigue Life, ASTM STP 462, 1970.
- [21] **Itagaki H. et Shinozuka M.** : *Application of the Monte-Carlo Technique to Fatigue-Failure Analysis under Random Loading*. Probabilistic Aspects of Fatigue, ASTM STP 511, American Society for Testing and Materials, pp. 168-184, 1972.
- [22] **Krée P.** : *Méthodes d'analyse en dimension infinie pour étudier les phénomènes aléatoires*. Colloque de Mathématiques, Rio de Janeiro, juillet 1977.
- [23] **Krée P.** : *Utilisation des probabilités et des statistiques pour l'évaluation de la sécurité des ouvrages*, publié dans la collection UTI-CISCO, Eyrolles, Paris, 1976.
- [24] **Krée P.** : *Mécanique aléatoire*. Séminaire P. Krée, Institut Henri Poincaré, Paris, 1ère année 1978/1979.
- [25] **Leadbetter M. R.** : *On Crossings of Levels and Curves by a Wide Class of Stochastic Processes*. Annales of Math. Stat., Vol. 37, 1966.
- [26] **Lin Y.** : *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. McGraw-Hill, 1967.
- [27] **Longuet-Higgins M. S. et Cartwright D. E.** : *The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function*. Proc. Roy. Soc. of London, Series A, vol. 237, 1956.

- [28] **Matsuishi M. et Endo T.** : *Fatigue of Metals Subjected to Varying Stress*. Japan Society of Mechanical Engineers, Fukuoka, Japon, 1968.
- [29] **Madox N. R. et Wildenstein A. N.** : *A Spectral Fatigue Analysis for Offshore Structures*. Offshore Technology Conference, OTC, 1975.
- [30] **Madox N. R.** : *Fatigue Analysis for Deep Water Fixed Bottom Platforms*. Offshore Technology Conference, OTC, 1974.
- [31] **Maddox S. J.** : *The Effect of Mean Stress on Fatigue, Crack Propagation*. A literature Review. International Journal of Fracture, Vol. 11, n° 3, juin 1975.
- [31 bis] **Marcus M. B.** : *Level crossings of a stochastic process with absolutely continuous sample paths*. Ann. of Probability, Vol. 5 1977 n° 1 page 52-71.
- [32] **Miner M. A.** : *Cumulative Damage in Fatigue*. Transactions in the ASME, vol. 67, 1945.
- [33] **Munse W. H.** : *Predicting the Fatigue Behaviour of Weldments for Random Loads*. Offshore Technology Conference, OTC, 1978.
- [34] **Payne A. O.** : *A Reliability Approach to the Fatigue of Structures*. Probabilistic Aspects of Fatigue, ASTM, STP 511, American Society for Testing and Materials, pp. 106-155, 1972.
- [35] **Penzien J.** : *Three Dimensional Dynamic Analysis of Fixed Offshore Platforms*. International Symposium on Numerical Methods in Offshore Engineering, Swansea, 10-15 janvier 1977.
- [36] **ASCE** : *Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*. Proceedings of the Specialty Conference, Tucson, USA, 10-12 janvier 1979.
- [37] **Renard P. et Soize C.** : *Système intégré pour la vérification à la fatigue des plates-formes à embase poids soumises à la houle aléatoire*. Journées de l'Association Française des Ponts et Charpentes, Thème II : Constructions Offshore, 6-7 juin 1979.
- [38] **Renard P. et Soize C.** : *Calcul des structures marines, fatigue des plates-formes poids « FASTOR-CTICM »*. Rapport scientifique CTICM n° 11.002-1, avril 1978.
- [39] **Rice S. O.** : *Mathematical Analysis of Random Noise*. Bell System Technical Journal, Vol. 18, 1944, Vol. 19, 1945.
- [40] **Rice J. R.** : *Theoretical Prediction of Some Statistical Characteristics of Random Loadings Relevant to Fatigue and Fracture*. Lehigh University, Ph.D., Univ. Microfilms Inc., Ann. Arbor. Mich. USA, 1964.
- [41] **Sanz G.** : *La rupture des aciers*. 1) *La rupture fragile*. 2) *La mécanique de la rupture*. Institut de Recherches de la Sidérurgie, Saint-Germain-en-Laye, France.
- [42] **Saunders S. C.** : *On the Probabilistic Determination of Scatter Factors Using Miner's Rule in Fatigue Life Studies*. Probabilistic Aspects of Fatigue, ASTM STP 511, American Society for Testing and Materials, pp. 185-203, 1972.
- [43] **Schijve J.** : *Observations on the Prediction of Fatigue Crack Growth under Variable Amplitude Loading*. Fatigue Crack Growth under Spectrum Loads, ASTM STP 595, 1976.
- [44] **Schilling C. C. et Klippstein K.** : *Fatigue of Steel Beams by Simulated Bridge Traffic*. Journal of the Structural Division ST8 ASCE, août 1977.
- [45] **Soize C.** : *Transformation quadratique d'un processus gaussien et application à la dynamique stochastique*. Journal de Mécanique, Vol. 15 n° 5, 1976.
- [46] **Soize C.** : *Calcul des structures à barres soumises au vent aléatoire*, Construction Métallique, N° 1 – 1977.
- [47] **Soize C.** : *Gust Loading Factors with Nonlinear Pressure Terms*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, N° ST6, Proc. Papers 13844, pp. 991 à 1007, juin 1978.
- [48] **Soize C.** : *Dynamique stochastique des structures élastiques soumises aux charges de vent*. Thèse de doctorat de 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, juin 1975.
- [49] **Soize C.** : *Résolution de deux problèmes de mécanique aléatoire*. Thèse de doctorat d'état ès-physique, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, juin 1979.
- [50] **Soize C.** : *Modèles de la houle aléatoire*. Structures en mer, pp. 86-129, CNEXO-CTICM, septembre 1976.
- [51] **Soize C.** : *Mécanique aléatoire et applications à la dynamique des structures*. École Centrale des Arts et Manufactures, 3ème année d'études. Mécanique des Sols, 1978-1979.
- [52] **Soize C.** : *Calcul des structures fixes et flottantes soumises à la houle aléatoire*. Structures en mer, pp. 234-400, CNEXO-CTICM, septembre 1976.
- [53] **Srinivasan S. K.** : *Stochastic Models for Fatigue Failure of Materials*, Solid Mechanics Archives, Vol. 1, 0, 1976.
- [54] **Stratting J.** : *Failure and Stochastic Loadings*. Thèse, Delft, Hollande, 1973.
- [55] **Tada H. et al.** : *Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del. Research Corporation, Helbertown, Pa., USA, 1973.
- [56] **Wirsching P. H. et Haugen E. B.** : *Probabilistic Design for Random Fatigue Loads*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASME, EM6, décembre 1973.
- [57] **Wirsching P. H. et Shehata A. M.** : *Fatigue under Wide Band Random Stresses Using the Rain-flow Method*. Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, juillet 1977.
- [58] **Yang J. N.** : *Statistics of Random Loading Relevant to Fatigue*. Journal of the Engineering Mechanics Division, EM3, ASCE, juin 1974.
- [59] **Yang J. N. et Trapp W. J.** : *Reliability Analysis of Aircraft Structures under Random Loading and Periodic Inspection*. AIAA Journal, Vol. 12, n° 12, décembre 1974.