



HAL
open science

Particules polyédriques

Frédéric Dubois

► **To cite this version:**

Frédéric Dubois. Particules polyédriques. Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires, Hermes - Lavoisier, pp.261-290, 2010, 978-2-7462-2976-1. hal-00807346

HAL Id: hal-00807346

<https://hal.science/hal-00807346>

Submitted on 29 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Particules polyédriques

Frédéric DUBOIS

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil
UM2, Place E. Bataillon, 34095 Montpellier
Cedex 05

extrait de

Modélisation numérique discrète des matériaux
granulaires

Farhang RADJAI and Frédéric DUBOIS
Hermès-Lavoisier ISBN 978-2-7462-2976-1

-

—

Table des matières

Chapitre 1. Particules polyédriques	11
Frédéric DUBOIS	
1.1. Introduction	11
1.2. Dynamique de corps rigides et paramétrages	13
1.3. Description géométrique des objets	14
1.4. Détection du contact	16
1.4.1. Introduction	16
1.4.2. Etapes de la détection	16
1.4.3. Recherche de proximité	17
1.4.4. Détection approximative	19
1.4.5. Détection du contact entre deux polyèdres convexes	20
1.4.6. Détection du contact entre deux polyèdres non convexes	27
1.5. Mise en oeuvre numériques	27
1.5.1. Introduction	27
1.5.2. Quelques bibliothèques existantes pour la détection de contact	27
1.5.3. Quelques problèmes liés aux stratégies de résolution	28
1.5.4. Les choix faits dans LMGC90	29
1.6. Quelques exemples	30
1.6.1. Maçonneries	30
1.6.2. Massifs Rocheux	30
1.6.3. Ballast	30
1.7. Conclusion	31
1.8. Bibliographie	31

Chapitre 1

Particules polyédriques

1.1. Introduction

Dès lors qu'on s'intéresse à la simulation d'objets en interaction se pose le choix d'un modèle numérique représentatif et de techniques de traitement adaptées à la stratégie de résolution du problème (Dynamique Moléculaire, Dynamique des contacts ou Event Driven, etc.).

Parmi ces choix on trouve le modèle de comportement volumique des corps qui pour des corps rigides se limite au paramétrage de la cinématique, la description géométrique des enveloppes des objets concernés, la description phénoménologique du comportement au contact, la technique de détection du contact, et la stratégie de résolution qui englobe la gestion de la marche en temps, la méthode d'intégration numérique, et la méthode de résolution du problème de contact.

Tout est donc une question de choix de modèles, de techniques numériques et de stratégie de résolution. Modèles et stratégies sont par ailleurs rarement découplés.

Un certain nombre d'aspects sont abordés dans cet ouvrage, et ce chapitre se concentre plus sur les spécificités et les sophistications nécessaires à la modélisation des collections d'objets de formes complexes par des polyèdres.

Lorsqu'on s'intéresse à la modélisation des milieux granulaires le choix de la description des enveloppes des objets en interaction se pose de façon récurrente dès lors qu'on s'éloigne des matériaux modèles. Une description géométrique exacte de ces enveloppes (autant que faire se peut) peut sembler un choix naturel, mais va s'avérer être au final un choix très naïf de par la nature multi-échelle voire fractale de ces surfaces (A VOIR des ref montmitonnet) bien sûr, mais surtout pour l'intérêt d'une

Chapitre rédigé par Frédéric DUBOIS.

telle description sur les phénomènes simulés. A l’opposé une description grossière de la géométrie des enveloppes des objets en interaction va nécessiter d’adapter la phénoménologie de la loi de contact pour essayer de modéliser correctement le problème physique.

Pour illustrer ce propos il suffit d’étudier la littérature sur la modélisation de matériaux granulaires constitués de grains non sphériques :

- certains seront tentés d’approcher la forme des grains par des sphères et d’introduire une sophistication supplémentaire dans le modèle pour essayer de reproduire la phénoménologie du matériau : loi d’interaction avec prise en compte du moment de roulement [EST 08], cinématique modifiée des grains par le blocage de leurs rotations [CAL 03], etc ;

- d’autres seront tentés d’utiliser des grains composés d’un assemblage de sphères (cluster ou clump), approchés par des sphéroïdes [LEE 03] ou des sphérolignes [POU 05], etc ;

- d’autres enfin utiliseront des polyèdres.

Il est important de signaler que la littérature concernant la modélisation du contact entre objets de formes polyédriques (ou autres) est très riche et que cela reste un sujet de recherche actif qui concerne différentes communautés liées à la :

- modélisation des matériaux et des structures, généralement par éléments finis,
- modélisation des mécanismes, de la robotique,
- réalité virtuelle, l’animation (physically based animation), l’haptique,
- mécanique des milieux granulaires.

Comme nous allons le voir, tous ces travaux ne sont pas directement exploitables car les matériaux granulaires ont certaines spécificités :

- ce sont des collections importantes et denses d’objets, ce qui implique un grand nombre de contacts potentiels (paires de voisins), 1000 pour les petits exemples et 300.000 pour les échantillons représentatifs,

- un grand nombre de contacts sont actifs (force non nulle) simultanément ;

- sauf cas particulier il est nécessaire de simuler le problème en dynamique dans la mesure où chaque objet est libre de mouvement. Il convient de prendre certaines précautions numériques dans la mesure où les objets sont soumis à des contraintes cinématiques “raides” ;

- la solution du système n’est pas nécessairement unique.

Dans ce chapitre, comme dans le reste de ce livre, on se limite au cas des objets rigides. Toutefois une bonne partie de ce qui sera évoqué est transposable au cas des objets déformables.

La problématique abordée dans ce qui suit est la suivante. On considère un système composé de N objets rigides en 3D. Chaque objet est représenté par un jeu de coordonnées généralisées $q(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$ permettant de décrire sa configuration actuelle. Le corps rigide i va occuper un domaine $\Omega_i(t) \in \mathbb{R}^3$ dans sa configuration actuelle qu'on peut définir par rapport à sa configuration initiale comme $\Omega_i(t) = \varphi(t, q(t))\Omega_i(t_0)$. Sans entrer dans les détails de la zoologie des différentes lois d'interaction utilisées pour la modélisation des milieux granulaires on sait qu'il est nécessaire de savoir calculer la distance signée $g(t, q(t))$ entre deux objets $\Omega_i(t)$ et $\Omega_j(t)$. En cas de séparation cette distance est positive, en cas d'interpénétration cette distance est négative, elle sera nulle si il y a contact affleurant. En plus de cette distance il est aussi nécessaire de pouvoir définir un repère local au contact et un certain nombre d'autres grandeurs.

Le contenu de ce chapitre se décompose en trois types de sections relatives :

- à la modélisation du problème : dynamique de corps rigides et paramétrages (choix de $q(t, q(t))$), la description géométrique des objets (choix de $\delta\Omega(t)$) et la détection du contact (calcul de $g(t, q(t))$),
- aux spécificités qu'introduit la modélisation de particules polyédriques dans les stratégies de résolution, et plus particulièrement avec des méthodes à capture d'évènements,
- à l'illustrations par des résultats obtenus avec le code de calcul `Imgc90` (du bois&jean)

1.2. Dynamique de corps rigides et paramétrages

Le formalisme utilisé classiquement pour les milieux granulaires est celui de Newton et Euler. Les vitesses d'un objet rigide sont choisies comme la vitesse de translation du centre de gravité notée $v_G = \dot{x}_G$ et un vecteur vitesse angulaire Ω exprimé dans le repère principal d'inertie attaché au solide. En notant R la matrice de rotation du référentiel global vers le référentiel attaché au solide on a la relation :

$$\tilde{\Omega} = R^T \dot{R}$$

où on a noté $\tilde{\Omega}x = \Omega \times x$.

Dans ce cas on peut écrire les équations de Newton-Euler (principe fondamentale de la dynamique), en l'absence de forces de contact, comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} M\dot{v}_G = F_{ext} \\ I\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega = M_{ext} \\ \dot{x}_G = v_G \\ \dot{R} = R\tilde{\Omega} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où $M = mId_{3 \times 3}$ est la matrice de masse (diagonale et constante), m la masse, I la matrice d'inertie (diagonale et constante).

Ce choix de paramétrage pour les coordonnées généralisées $q = [x_G, R]$ et les vitesses $v = [v_G, \Omega]$ peut ne pas sembler être le plus judicieux en terme de nombre de variables nécessaires, de manipulation et d'intégration numérique. Généralement la matrice de rotation découle du choix d'un paramétrage de l'orientation des objets, i.e. $R = R(\Theta)$. On trouve dans la littérature [CRI 97, IBR 97, G' 01] un grand nombre de possibilités, comme par exemple les angles d'Euler ou de Cardan, les quaternions, etc. Dans la pratique il n'est que très rarement nécessaire de calculer explicitement des angles et donc travailler avec le paramétrage imparfait précédent est un moindre mal.

Pour finir sur cet aspect, il est important de remarquer que dans le cas d'un solide de forme quelconque les équations 1.1 sont non linéaires ; ça ne serait pas le cas avec des sphères. Pour éviter ce problème on aurait pu exprimer les équations la vitesse angulaire dans le repère global $\omega = R\Omega$, toutefois dans ce cas la matrice d'inertie ne serait plus ni constante dans le temps, ni diagonale.

1.3. Description géométrique des objets

Lorsqu'on cherche à modéliser des objets de forme complexe deux approches sont couramment utilisées :

- modélisation volumique (CSG pour “Constructive Solid Geometry”).

Cette technique de modélisation géométrique représente un objet solide comme une combinaison de volumes simples (cylindre, sphère, cône, tore, etc.) à l'aide d'opérateurs géométriques booléens (union, intersection, soustraction, etc.). D'une certaine façon le cluster de sphères utilisé dans les milieux granulaires peut être vu comme un modèle CSG. Les objets décrits par cette technique ont des frontières “parfaites” car on connaît précisément les équations décrivant la surface du volume ; on pourra en particulier calculer distance, normale et plan tangent. Les possibilités de cette approche reste pourtant limitées par la forme des objets simples qui rendent la modélisation très lourde voire impossible.

- modélisation surfacique (Brep pour “Boundary Representation”).

C'est une technique de modélisation des solides consistant à représenter la peau des objets géométriques en « cousant » des carreaux géométriques restreints, portés par des surfaces canoniques (en général des surfaces B-splines, des Bézier, des NURBS). Chaque carreau est défini par une application d'un domaine paramétrique plan vers l'espace tridimensionnel. Un modèle B-rep est composé de deux types d'informations : topologique et géométrique (surfaces, courbes et points). Les principaux objets topologiques étant les faces, les bords (edge) et les vertices. Une face est une partie bornée d'une surface (une restriction) ; un bord est une partie bornée d'une courbe et un vertex s'appuie sur un point. Une modélisation B-rep peut être obtenue à partir d'une modélisation CSG (la conversion inverse étant généralement impossible). Cette

technique de représentation de la frontière des objets est très utilisée en CAO, toutefois est s'avère encore peu répandue en modélisation du contact car cela nécessite de calculer de façon efficace la distance à une surface paramétrée [JOH 04].

Une façon de s'affranchir des limitations des approches précédentes consiste à modéliser l'objet par un polyèdre obtenu à partir d'un maillage de sa surface ou de son volume (pour des détails pratiques voir par exemple [LAU 05, GEU 09]). Par la suite on entend par polyèdres aussi bien des objets simples (tétraèdre, cube) que des objets plus complexes, potentiellement non convexes, décrits par une surface triangulée fermée, conforme, etc.

Afin de pouvoir manipuler des surfaces polyédriques il est précieux de disposer de structures de données adéquates permettant de décrire la surface notamment pour pouvoir retrouver toutes les faces ou les arêtes adjacentes à un sommet, les faces bordant une arête et les arêtes entourant une face ou encore les faces adjacentes à une face. Il existe un certain nombre de structures [LIN 93, BER 04], toutefois la structure half-edge semble très bien adaptée [ALU 05].

Un avantage pratique à disposer d'une description polyédrique d'un objet est qu'il est possible de l'utiliser pour en calculer la position du centre d'inertie (OG), la masse (m) et la matrice d'inertie (I) dans un repère orthonormé (R) positionné en O . Deux approches sont possibles :

– soit on dispose d'un maillage volumique auquel cas on calcule la position du centre d'inertie (OG^e), la masse (m^e) et la matrice d'inertie (I^e) de chaque élément dans le repère orthonormé (R) positionné en G^e (détails dans [TON 04, SAU 04]) et ensuite on utilise les relations classiques :

$$m = \sum_e m^e \quad (1.2)$$

$$mOG = \sum_e m^e OG^e \quad (1.3)$$

$$I = \sum_e I^e + md_R(O, G^e)^2 \quad (1.4)$$

où $d_R(O, G^e)$ est une matrice diagonale contenant la distance entre les axes du repère R positionné en O et G^e ,

– soit on dispose uniquement d'un maillage de peau et on utilise des intégrales de surfaces pour calculer masse et matrice d'inertie [MIR 96a, EBE 09].

Remarque: dans certains cas (mauvaise qualité de la CAO par exemple), le maillage de la surface perd certaines propriétés topologiques et on parle plutôt de soupe de polygones. Ce cas sort du cadre de ce chapitre. **Remarque:** afin, notamment, d'enrichir

les propriété de continuité des surfaces des objets polyédriques il a été introduit les sphéropolyèdres [POU 05, GAL 08]. Les surfaces de ces objets sont obtenues en balayant ces éléments (face, arête, sommet) avec des sphères (on parle aussi de SSV, “Swept Sphere Volume”). Plus précisément il sont construits comme la somme de Minkowski de deux ensembles de points :

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\} \quad (1.5)$$

Remarque: Parmi les travaux récent sur la détection du contact entre objets de formes complexes il existe une approche, basée sur la manipulation de nuages de points, qui permet d’englober toutes les descriptions possibles [KLE 05]. Cette approche présente en plus l’avantage de pouvoir manipuler des mesures provenant de scanner laser 3D.

1.4. Détection du contact

1.4.1. Introduction

Les informations qu’on attend d’une méthode de détection de contact sont variées et dépendent étroitement des lois d’interaction utilisées et de la stratégie de résolution employée.

Typiquement dans une formulation du contact en déplacement on aura besoin de connaître la distance entre objets, dans une formulation du contact en vitesse (event driven, dynamique des contacts avec loi en vitesse) on aura besoin de connaître les objets qui se touchent ou s’interpénètrent sans avoir besoin de connaître la profondeur d’interpénétration, alors que celle ci sera indispensable dans une formulation avec raideur (dynamique moléculaire).

On peut être intéressé de savoir si deux objets se touchent (au sens d’affleurant) et où ils se touchent, si ils s’interpénètrent et quelle est la distance d’interpénétration et enfin si ils sont séparés et de quelle distance. Les techniques de détection de contact, on parle aussi de détection de collision, visent donc à calculer des distances entre objets (séparation, recouvrement) mais aussi les lieux d’application des forces de contact, les repères locaux, etc. La littérature relative à la détection du contact est extrêmement vaste. Si on cherche un panorama des méthodes disponibles il existe un certain nombre d’articles [LIN 98, JIM 01, TES 05], de thèses [KLE 05, OND 06, ERL 04] et d’ouvrages [BER 04, ERI 05] sur le sujet.

1.4.2. Etapes de la détection

La détection du contact représente une partie décisive de la modélisation d’un milieu granulaire que l’on traite par phases successives pour réduire le cout en temps de calcul due à une certaine complexité algorithmique :

– phase de recherche de proximité (“broad phase”) : c’est une étape de détection grossière permettant de trouver les couples d’objets voisins susceptibles d’entrer en contact. Cette étape est généralement basée sur une description simplifiée des objets par un volume englobant.

– phase de détection approximative (“narrow phase”) : c’est une étape permettant d’affiner la liste de voisinage pour les objets les plus simples et pour les plus compliqués de préciser quelles parties sont susceptibles d’entrer en contact.

– phase de détection du contact (“contact determination”) : c’est à cette étape que l’on opère les détections entre paires de primitives de bas niveau avec par exemple : localisation des points de contact, détermination des repères locaux nécessaires à l’écriture des lois de contact, etc. Suivant la stratégie numérique envisagée les informations recherchées ne seront pas nécessairement les mêmes la localisation des points potentiels de contact ou le calcul de l’intersection, et donc d’une profondeur d’interpénétration, des surfaces en contact.

Le choix d’une technique plutôt qu’une autre peut dépendre de la stratégie de résolution.

1.4.3. Recherche de proximité

Cette étape vise à créer rapidement une liste d’objets voisins. Elle se base sur une recherche de proximité entre volumes englobants des objets. Comme illustré sur la figure 1.1, il existe de nombreux types de volumes englobants ou BV (Bounding Volume) : sphère, boîte alignée sur les axes ou AABB (axis aligned bounding box), boîte alignée sur l’objet ou OBB (oriented bounding box), polytope ou kDOP (k discrete orientation polytope), enveloppe convexe, etc.

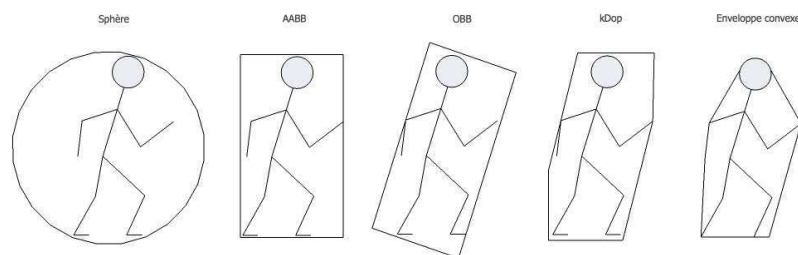


Figure 1.1. Quelques types de volumes englobants

Globalement trois types d’approches sont utilisées :

– recherche par positionnement dans une grille subdivisant l’espace occupé par l’ensemble des objets du milieu [MIR 96b]). Cette approche nécessite une approximation de la géométrie des objets par leur sphère englobante. L’approche classique dans les milieux granulaires utilise une grille uniforme dont la taille est calculée à partir du plus gros grain de l’échantillon. Une fois positionné les particules dans la grille (les boîtes), on teste si les particules d’une même boîte ou des boîtes voisines sont proches. Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre et elle marche bien

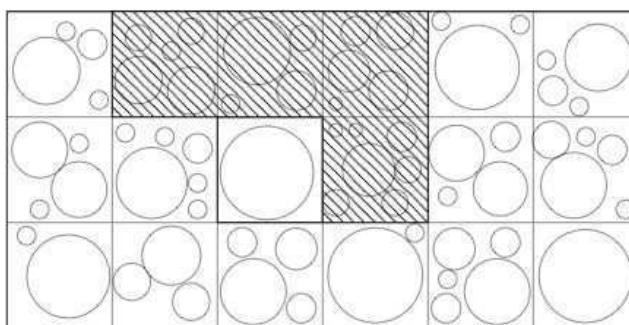


Figure 1.2. Recherche de proximité par la méthode des boîtes

dans le cas d’échantillon compacts. Un premier défaut de cette méthode est que la taille de la grille peut être inutilement importante dans certaines configurations géométriques. Ce défaut peut être corrigé grâce à un stockage adapté (linked-cell, voir par exemple [MUN 04]). Un second défaut apparaît lorsque la granulométrie est très étalée. Dans ce cas une par approche hiérarchique peut améliorer les choses. Dans cette situation d’autres techniques de subdivision de l’espace (octree, kd-tree, bsp-tree, etc) peuvent mieux fonctionner (voir [OND 06] pour une discussion). Toutefois étant plus coûteuses que les techniques de grilles uniformes elles ne sont pas beaucoup utilisées.

– recherche des intersections des projections des objets sur les axes (méthode “sort and sweep” [BAR 90] ou “sweep and prune” [COH 95]). Cette approche nécessite une approximation des objets par AABB. Dans un premier temps on projette les boîtes englobantes sur les axes de coordonnées (figure 1.3). Pour chaque axe on trie les intervalles de projection par ordre d’apparition (“sort”). Ensuite on balaie l’axe concerné (“sweep”) et on met à jour une liste d’intervalles actifs : un intervalle entre dans cette liste quand on rencontre son début et en sort quand on rencontre sa fin. A chaque fois qu’un nouvel intervalle entre dans la liste il est en interaction avec tous les intervalles déjà dans la liste, on incrémente donc la liste des interactions vues suivant l’axe concerné. La liste de voisinage sera l’intersection des listes construites sur chaque axe. Cette approche fonctionne bien même si elle n’est pas si simple à mettre en oeuvre. Son principale défaut apparaît lorsque l’échantillon est très crasé suivant une

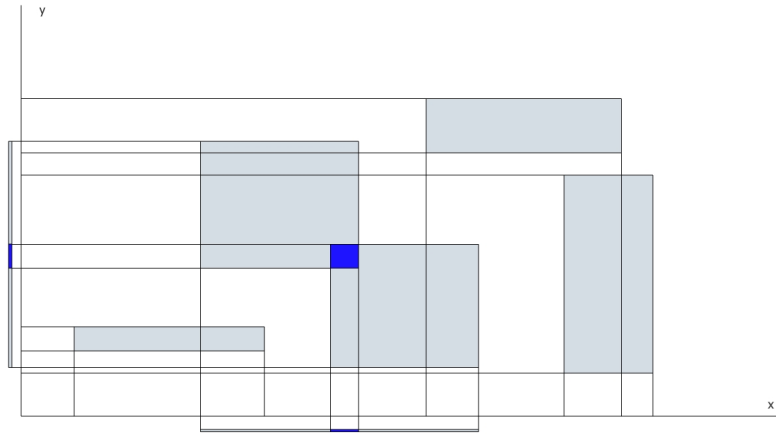


Figure 1.3. Recherche de proximité par la méthode “sweep and prune”

direction (phénomène de “clustering”). Pour des optimisations de cette technique voir [ZOM 02].

- triangulation à partir des positions des particules. Cette technique nécessite de connaître la position du centre des sphères englobantes des particules [FER 02].

1.4.4. Détection approximative

Cette approche travaille sur des couples d’objets détectés à l’étape précédente et essaie d’affiner les choses en rejetant certains cas simples par exemple.

Dans le cas d’objets simples et convexes il est courant d’utiliser une deuxième fois les techniques précédentes en augmentant le niveau de détail.

Dans le cas d’objets plus complexes (grand nombre de facettes) ou non convexes il est courant de créer une hiérarchie de volumes englobants (BVH pour boundary volume hierarchy) figure 1.1. Il s’agit de partitionner l’ensemble des primitives (face, sommet) composant l’objet dans des volumes englobants. On construit de façon progressive un arbre, où les feuilles ne contiennent plus qu’une primitive ou un ensemble fixé de primitives. Chaque noeud dans l’arbre contient un sous-ensemble de noeud et un volume englobant ce sous-ensemble. La recherche approximative se fera grâce à des tests BV-BV. On peut citer [HUB 95] pour l’utilisation de sphères, [BER 97, GOT 96] pour l’utilisation de boîtes alignées, [KLO 98] pour l’utilisation de k-DOP et enfin [BAR 96] pour l’utilisation de l’enveloppe convexe.

Il existe d’autres approches utilisant une subdivision spatiale de l’objet. On peut utiliser

octree, bsp-tree.

Enfin on peut citer des techniques basées sur des champs de distance [TES 05].

Certaines de ses décompositions en BVH peuvent être effectuées une fois pour toute au début du calcul ce qui les rend encore plus efficace.

1.4.5. Détection du contact entre deux polyèdres convexes

Plutôt que de rentrer directement dans le vif du sujet concernant les méthodes de détection, il semble plus judicieux de discuter les différentes situations que peut rencontrer un algorithme de détection (contact exacte (affleurant), le contact séparé, le contact interpénétré) et de voir comment les méthodes numériques ont été construites pour les gérer.

En admettant qu'il soit possible de se retrouver dans la situation du contact exacte (affleurant), les situations seront les suivantes : un point de contact (figure 1.4), une ligne de contact (figure 1.5) et une surface de contact (figure 1.6).

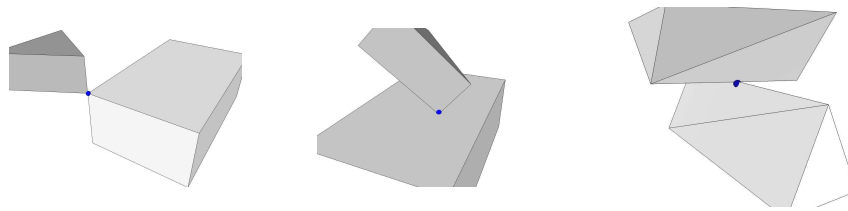


Figure 1.4. situations générant un point de contact

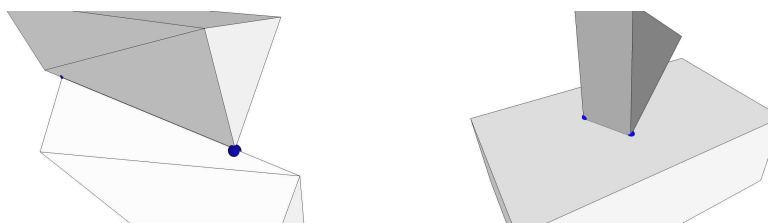


Figure 1.5. situations générant une ligne de contact

Ce premier jeu d'exemples très simples met en évidence plusieurs problèmes :

– Tout d'abord comment représenter les contacts linéiques et surfaciques ?

Le choix classique est de supposer que traiter le problème avec un nombre fini de



Figure 1.6. situations générant une surface de contact

points de contacts (voir figures 1.4, 1.5 et 1.6) est équivalent. Des arguments de concavité “fictive” des lignes ou des surfaces comme proposés par Moreau peuvent être avancés [MOR 03]. Dans la réalité la situation est beaucoup plus complexe et génère des problèmes d’unicité locale de solution qu’on peut essayer de résoudre en introduisant des relations supplémentaires entre points de contact. [MOR 03, PER 07].

– Ensuite combien de points de contact sont nécessaires ?

Sans modification de la phénoménologie des lois d’interaction, un contact linéique pourra a minima être représenté par deux points, un contact surfacique par trois points. Sur la figure 1.6 à gauche on constate qu’il faudrait choisir 3 points parmi les 6. Une autre solution consiste à garder tous les points et à laisser la méthode numérique gérer la situation. Toutefois cette dernière solution pose d’autres problèmes comme la gestion de la persistance des données entre deux incréments successifs d’une résolution.

– Enfin où placer ces points de contact ?

Si on réduit le nombre de points de contact on peut se demander si il est utile qu’ils soient choisis parmi les points de la figure 1.6 ou alors à l’intérieur du polygone délimité par ces points.

Quoi qu’il en soit, d’un point de vue pratique, on suppose que cette hypothèse est valide. On constate alors que les différentes situations (figures 1.4, 1.5 et 1.6) peuvent se limiter à chercher un ensemble réduit de types de contact, par exemple : sommet/sommet, sommet/arête, sommet/face et arête/arête [LIN 93].

Ce choix fait, on voit apparaître le problème de la définition de la normale qui n’est pas unique dans certains cas dégénérés (sommet/sommet, sommet/arête, arête/arête) ce qui va poser un certain nombre de questions pour la définition des repères locaux et donc le calcul des lois de contact.

La situation du contact affleurant est particulière et pratiquement assez peu rencontrée. En fait la première situation à bien maîtriser est la détection du contact séparé. Une première idée de méthode vient de la constatation que si deux polyèdres convexes sont séparés (ou affleurants) alors il existe un plan séparateur, c’est à dire un plan tel

que chaque objet soit dans un demi espace distinct délimité par ce plan. Dans de nombreuses situations ce plan séparateur n'est pas unique. Si il existe, il peut être choisi comme une face d'un des deux polyèdres ou comme parallèle à deux arêtes, chacune appartenant à un polygone différent, et contenant une de ces deux arêtes (la normale au plan sera le produit vectoriel des directions des deux arêtes) [BAR 90].

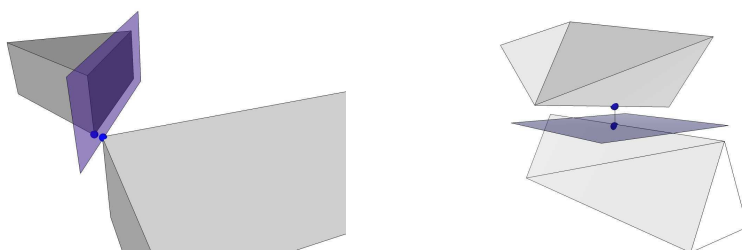


Figure 1.7. illustrations de la notion de plan séparateur

Trouver un plan séparateur par cette technique permet de statuer sur le fait que deux objets ne s'interpénètrent pas. La méthode de l'axe séparateur (on parle aussi de shadow-overlap) est une approche duale à celle du plan séparateur et on n'en parlera pas ici (voir [EBE 01, SAU 04] pour des détails). Dans le cas du contact séparé cette méthode ne donne aucune information sur la distance minimale entre les deux objets. Dans le cas du contact interpénétré on peut obtenir des informations en calculant l'intersection des faces des deux objets [M⁹⁷, O'R 98, GUI 03]. Cette approche est utilisée par la SNCF pour ses calculs sur le Ballast [SAU 04]. Il est à noter que des méthodes de détection performantes de la communauté éléments finis peuvent aussi être exploitées pour la détection entre surfaces triangulées [LAU 02].

D'une façon un peu différente Cundall a exploité cette idée de plan séparateur (common-plane) pour évaluer la distance entre deux polyèdres A et B [CUN 88]. On note G_A (resp G_B) le centre d'inertie de A (resp. B) et X_A (resp. X_B) l'ensemble de ses sommets. On définit un plan P passant par l'intercentre $M = \frac{G_A + G_B}{2}$ des deux polyèdres et de normale n ainsi que deux distances signées :

$$d^+ = \min\{n \cdot MX : X \in X_A\} \quad (1.6)$$

$$d^- = \max\{n \cdot MX : X \in X_B\} \quad (1.7)$$

Le principe de la méthode consiste à chercher n qui maximise $d^+ - d^-$. L'approche est itérative. On initialise le processus avec une normale donnée (l'intercentre, une normale précédente, etc). On procède à la maximisation par perturbation de la normale

[CUN 88]. Un énorme avantage de cette technique est qu'elle fournit une normale (celle du plan) même dans les cas dégénérés. Par contre elle est assez lente et nécessite de nombreuses optimisations pour être efficace avec les milieux granulaires polyédriques [NEZ 04, PER 07]. Elle fonctionne aussi en cas d'interpénétration. Cette approche a été utilisée pour des calculs de maçonneries et de massifs rocheux fracturés [PER 07, RAF 08].

Si on souhaite obtenir la distance minimale entre objets de façon plus précise il peut être intéressant de faire appel aux régions de Voronoï qui permettent de partitionner l'espace autour d'un polyèdre convexe. Grâce à cette idée on peut, pour un point donné en dehors du polyèdre savoir avec quel élément du polyèdre (sommet, arête, face) il est le plus proche.

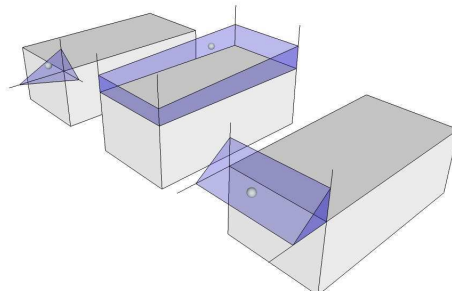


Figure 1.8. régions de Voronoï

Grâce à cette idée des algorithmes itératifs visant à déterminer [LIN 91, LIN 93] la plus petite distance entre des éléments (sommet, arête, face) de deux polyèdres ont été proposés. À cause de la convexité cette distance sera la distance minimale entre 2 objets. Cette technique, qui à l'origine ne traitait que les contacts séparés ou affleurants, a été étendue aux situations avec interpénétration [MIR 98]. Cette méthode a été utilisée dans des simulations de milieux granulaires polyédriques pour trouver un plan séparateur [NEZ 06]. En effet une fois le plus court chemin trouvé entre deux objets on peut utiliser la bissectrice à cette axe comme plan séparateur.

Une autre technique de recherche a été proposée par [GIL 88]. Elle est utilisable pour n'importe quel objet convexe. Elle utilise la notion de :

– fonction support d'un objet C , qui pour un vecteur donné (v) fait correspondre un point de C tel que :

$$s_C(v) \in C \text{ et } v \cdot s_C(v) = \max\{v \cdot x : x \in C\} \quad (1.8)$$

– combinaison convexe d’un ensemble de points X :

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (1.9)$$

– point le plus proche de l’origine d’un convexe Q :

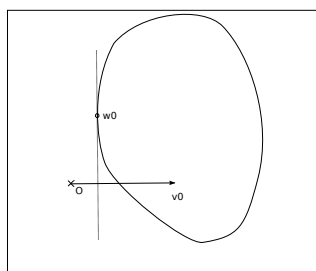
$$v(Q) \in Q \text{ et } \|v(Q)\| = \min\{\|x\| : x \in Q\} \quad (1.10)$$

Dans un premier temps on peut calculer la distance minimale d’un convexe C à l’origine par la méthode de descente suivante (voir figure 1.9) :

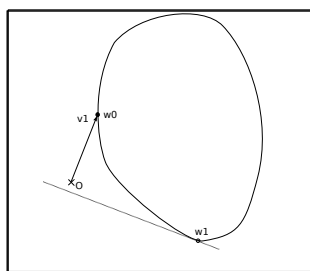
– on initialise en prenant un vecteur v_0 pointant vers un point du convexe C , un initialisant un ensemble de point $W_0 = \emptyset$ et on calcule $w_0 = s_C(-v_0)$

– à chaque itération k on calcule $v_k = v(\text{conv}(W_{k-1} \cup w_{k-1}))$, W_k comme étant le plus ensemble X de $W_{k-1} \cup w_{k-1}$ tel que $v_k \in \text{conv}(X)$ et $w_k = s_C(-v_k)$

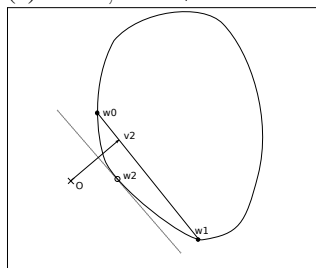
– on arrête quand par exemple $\|v_k\|$ ne varie plus (voir [BER 04] pour une discussion).



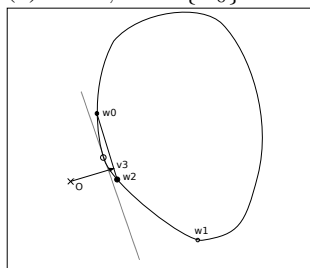
(a) $k = 0, W = \emptyset$



(b) $k = 1, W = \{w_0\}$



(c) $k = 2, W = \{w_0, w_1\}$



(d) $k = 3, W = \{w_0, w_1, w_2\}$

Figure 1.9. quelques itérations de la méthode GJK

Pour utiliser cette méthode il suffit de constater que calculer la distance entre deux objets convexes A et B revient à calculer la distance à l’origine du convexe C créé par

leur différence de Minkowski :

$$d(A, B) = \min\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\} = v(A \ominus B) \quad (1.11)$$

Pratiquement il n'est pas nécessaire de construire explicitement le convexe obtenu par différence de Minkowski, mais juste de savoir évaluer la fonction support sur ce convexe. Pour calculer cette grandeur on utilise le résultat suivant :

$$s_{A \ominus B}(v) = s_A(v) - s_B(-v) \quad (1.12)$$

Et donc il sera uniquement nécessaire de savoir calculer la fonction support pour chaque convexe. Dans le cas des polytopes les points supports sont les sommets du polytope ce qui facilite le calcul de la fonction support et assure que l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations. Cette méthode a été étendue au cas de contact avec interpénétration [JOU 97, BER 04]. Cette méthode est utilisée dans le code Grain de l'IFP [PET 01].

Nous venons de voir l'essentiel des méthodes existantes. Même si elles avaient été conçues pour un autre usage elles ont toutes été étendues aux cas avec interpénétrations afin de fournir la profondeur d'interpénétration, à savoir la plus petite translation de corps rigides qu'il faut faire pour mettre les objets en contact affleurant.

Naturellement on est tenté d'utiliser l'orientation de ce vecteur comme normale au contact. Toutefois il convient de rester prudent quand au sens mécanique de cette grandeur, plus particulièrement dans les situations "dégénérées" (figure 1.13 à gauche). Pour palier à ce problème de définition de la normale, certains proposent d'utiliser

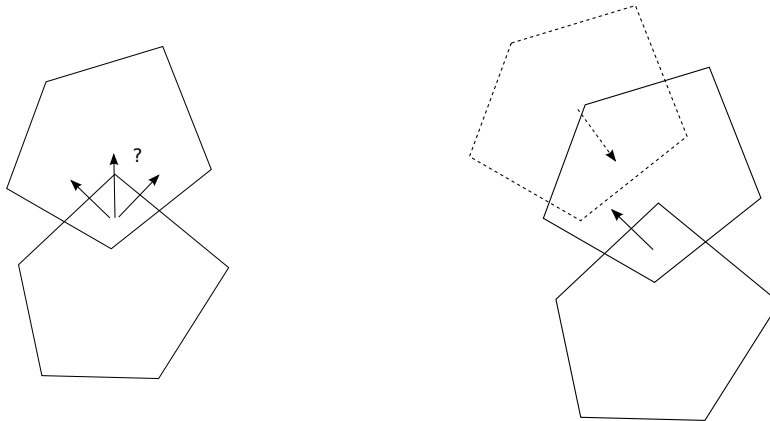


Figure 1.10. la cohérence spatiale comme solution à la définition de la normale

des techniques de minimisation d'énergie [FEN 04]. Il semble tout de même que la solution se trouve dans une utilisation de la causalité des interpénétrations ce qui implique de se servir de la cohérence temporelle des trajectoires discrétisées des objets. Plus précisément connaissant une solution non interpénétrée et une vitesse on peut "sélectionner" une normale (figure 1.13 à droite). Si on souhaite limiter les interpénétrations on peut adapter la taille du pas de temps [ACA 08] ou revenir dans le temps jusqu'à une situation de contact affleurant [BAR 89, BAR 90]. On voit très bien que suivant la stratégie de résolution on devra adopter une approche plutôt qu'une autre.

Une fois définis la distance entre objets et la normale il reste à déterminer la position des points de contact (lieux d'application des forces de contact). Seules les situations des zones de contact linéique et surfacique posent problèmes. L'approche suivante permet de construire ces points :

- construire un plan séparateur (au sens de Cundall) entre les objets A et B .
- projeter l'ensemble X_A^ϵ (resp. X_B^ϵ) des sommets de A (resp. B) les plus proches à une tolérance ϵ donnée (figure 1.11 (a))
- construire l'enveloppe convexe de X_A^ϵ et X_B^ϵ (figure 1.11 (b))
- calculer l'intersection de ces enveloppes convexes (figure 1.11 (c))
- positionner des points dans cette enveloppe convexe (figure 1.11 (d)) et recalculer les distances (figure 1.11 (f))

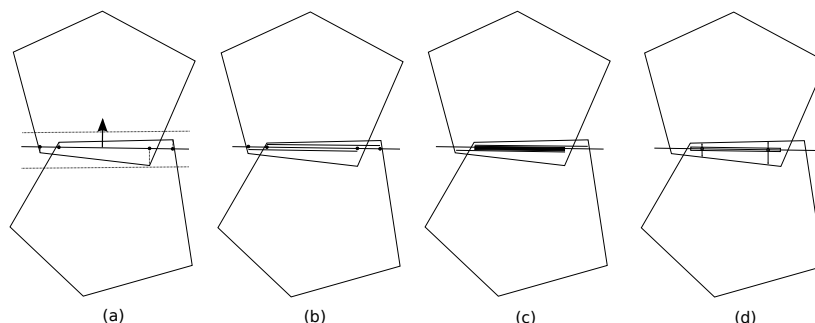


Figure 1.11. étapes du positionnement des points de contact

Pour finir il est important de signaler que Merlhiot [MER 07] propose une solution élégante pour traiter le contact entre objets polyédriques basée sur les sphéropolygones. Cette approche utilise les mêmes outils de calcul de distance mais permet d'obtenir une définition unique de la normale ainsi que sa continuité le long des surfaces. Cette technique a été exploitée pour la modélisation des milieux granulaires [PET 01, GAL 08].

1.4.6. Détection du contact entre deux polyèdres non convexes

La détection du contact entre polyèdres non convexes est complexe. La plupart des approches utilisent une décomposition en une hiérarchie de volumes englobants comme présenté dans la section 1.4.4. Une fois que le contact entre deux volumes englobants est détecté on peut évaluer le contact entre les faces contenues dans les volumes englobants comme expliqué dans la section 1.4.5.

Partant du constat que les algorithmes de détection entre polyèdres convexes sont performants et éprouvés il semble naturel d'essayer de les exploiter. La méthode consiste donc à remplacer les objets non convexes par des clusters d'objets convexes, soit manuellement pour les cas les plus simples, soit en utilisant des techniques de découpage automatique [LIE 08, RAT 09].

1.5. Mise en oeuvre numériques

1.5.1. Introduction

La prise en compte de particules polyédriques dans un logiciel de modélisation des milieux granulaire ne présente pas de difficultés techniques insurmontables. La principale difficulté technique provient de la détection du contact. Nous allons donner par la suite une liste de bibliothèques existantes qui permettent de régler en partie ce problème (section 1.5.2). La seconde catégorie de difficultés provient plus de l'adéquation entre le rapport de contact sortant de la méthode de détection et le modèle numérique employé pour modéliser le problème (section 1.5.3).

Pour conclure ce chapitre nous présenterons quelques choix faits dans le logiciel *Imgc90* (section 1.5.4).

1.5.2. Quelques bibliothèques existantes pour la détection de contact

Un grand nombre de bibliothèques exploitant les algorithmes décrits précédemment est disponible sur le WEB en "open source" :

- I-collide [COH 95] : Cette bibliothèque est basée sur l'algorithme de Lin-Canny qui exploite les régions de Voronoï [LIN 91, LIN 93]. Cette bibliothèque est capable de prendre en compte un grand nombre d'objets convexes ou polyconvexes quelle que soit la méthode de "sweep and prune" et exploite la cohérence temporelle.

http://www.cs.unc.edu/~geom/I_COLLIDE.html

- V-clip [MIR 98]. Il s'appuie sur une extension de l'algorithme de Lin-Canny qui permet notamment de gérer les interpénétrations. Il ne traite que la collision entre une paire d'objets.

<http://www.cs.sunysb.edu/~algorithm/implementation/V-CLIP/distrib/>

– RAPID [GOT 96]. Cette librairie calcule le contact entre une paire d’objets décrits par des polygones non structurés (“polygon soups”). Elle est basée sur un découpage en une hiérarchie de volumes englobants OBB (OBBTree). Elle est adaptée à traiter des géométries avec un très grand nombre de facettes.
<http://www.cs.unc.edu/~geom/OBB/OBBT.html>

– SOLID [BER 04]. Cette librairie est basée sur la méthode GJK et utilise un découpage en une hiérarchie de volumes englobants AABB. Il permet de traiter des collections d’objets rigides ou déformables.
<http://www.win.tue.nl/cs/~gino/solid/>

– V-collide [HUD 97]. Cette librairie utilise la détection grossière de I-collide et le calcul d’intersection de RAPID.
http://www.cs.unc.edu/~geom/V_COLLIDE.html

– PQP [LAR 00]. Cette librairie travaille avec des objets non structurés et est basé sur une hiérarchie de volume englobants sphéro-rectangle.
<http://www.cs.unc.edu/~geom/SSV>

– CollDet est une librairie très complète qui englobe différentes méthodes évoquées précédemment.
<http://cg.in.tu-clausthal.de/research/collidet/index.shtml>

On pourra trouver des informations complémentaires sur ce site :
<http://gamma.cs.unc.edu/research/collision/packages.html>

1.5.3. *Quelques problèmes liés aux stratégies de résolution*

Différents paradigmes de stratégies de résolution existent et sont présentés dans cet ouvrage. Sans rentrer dans le détail de ces méthodes on trouvera ci dessous quelques problèmes spécifiques à la modélisation de particules polyédriques.

– méthode statique et quasi-statique (chapitre 1). A part le calcul de la configuration de contact et la prise en compte de contacts multiples entre deux objets, l’introduction de particules polyédriques ne semble pas devoir nécessiter de quelconques précautions supplémentaires,

– méthode avec explicitation de la contrainte (chapitre 2). Dans cette approche les forces de contact sont proportionnelles à l’interpénétration. Les résultats de cette méthode seront donc particulièrement sensibles au calcul de l’interpénétration et de la normale. Introduire plusieurs points de contact pour modéliser des contacts linéiques ou surfaciques nécessite une certaine prudence quand à leur nombre, leur localisation et à la rigidité qui leur est affecté [ZAV 09]. Le choix de rigidités trop faible rend l’utilisation de particules polyédriques caduque car l’effet de forme ne sera pas correctement modélisé. Le choix de rigidités importantes risque d’introduire des oscillations parasites aux interfaces. Au demeurant il semble difficile de donner un sens physique à cette rigidité.

– schémas à capture d'évènements (chapitre 3). Cette approche, comme la précédente, est sensible au choix de la normale. Si cette approche est utilisée avec une loi de contact en vitesse, seuls les contacts affleurants et interpénétrés sont pris en compte et le calcul du contact nécessite uniquement de connaître la normale aux points de contact. C'est ce qui fait la force de ce type de loi qui présente le défaut de ne pas maîtriser l'interpénétration lors de collisions. L'interpénétration cumulée dans le système n'est contrôlée que par la taille du pas de temps. Si cette approche est utilisée avec une loi de contact en déplacement il est nécessaire, par rapport à l'approche en vitesse, de calculer correctement la distance entre objets séparés pour arriver à maîtriser l'interpénétration (indépendamment du choix du pas de temps). Une particularité de cette approche est que le choix de la configuration dans laquelle calculer le contact n'est pas unique. On peut utiliser la configuration connue en début de pas ou utiliser une configuration à mi-pas de la technique de "leap-frog" proposée par Moreau [MOR 03].

– schémas à détection d'évènements (chapitre 4). Dans cette approche la seule difficulté est de calculer précisément l'instant d'un contact affleurant afin d'ordonner correctement les collisions.

Une autre spécificité des particules polyédriques est que le terme non linéaire de l'équation d'Euler 1.1 ne disparaît pas. Dans les milieux granulaires denses, où les vitesses de rotation sont assez faibles, il semble légitime de l'explicitier au second membre.

Un dernier problème technique va apparaître si on utilise des lois d'interaction nécessitant la persistance de certaines données, comme les lois cohésives. Dans ce cas il est nécessaire de prendre certaines précautions pour être capable de suivre les points de contact persistants d'un pas sur l'autre surtout lorsqu'ils sont multiples entre deux objets.

1.5.4. Les choix faits dans LMGC90

La prise en compte des particules polyédrique a été introduite dans lmgc90 [DUB 03] lors de la thèse de G. Saussine [SAU 04]. De nombreux enrichissements ont été apportés par la suite, dont certains lors de la thèse de R. Pérales [PER 07]. On va présenter dans cette section certains choix particuliers.

Comme on l'a évoqué dans la section 1.2 on peut calculer l'orientation des objets grâce à la matrice de rotation R sans utiliser de paramétrage spécifique. Toutefois il faut être capable d'"intégrer" la vitesse de rotation Ω pour mettre à jour cette matrice à chaque pas de temps. Deux méthodes sont proposées dans lmgc90 :

– si la vitesse de rotation est très faible on peut estimer que chaque vecteur e_i^t du repère principale d'inertie sera modifié par l'incrément de rotation en $\Delta t \Omega$ suivant la

relation :

$$e_i^{t+\Delta t} = e_i^t + \Delta t \Omega \times e_i^t \quad (1.13)$$

Cette approche nécessite toutefois des re-orthogonalisation du repère principale d'inertie pour éviter les dérives.

– si la vitesse de rotation n'est pas négligeable on utilise l'algorithme proposé par Hughes et al. [HUG 80] qui préserve l'ortho-normalisation du repère principal d'inertie.

Concernant la détection du contact on procède de la façon suivante :

- recherche de proximité : construction d'une liste de voisinage par une méthode des boites,
- détection approximative : on essaie d'éliminer les contacts par une technique d'axe séparateur ("shadow-overlap")
- détection de contact : deux méthodes sont utilisées : intersection de faces triangulaires [?] ou plan séparateur (au sens de Cundall) [PER 07]

On peut signaler qu'une importance particulière a été apporté au découpage modulaire de ce code afin de pouvoir mixer corps rigides et déformables, objets de géométries complexes, lois de comportement diverses, etc.

1.6. Quelques exemples

1.6.1. *Maçonneries*

Ce premier exemple reprend les résultats d'une expérience par C. Fort à l'ESM2. Elle consiste à soumettre un mur composé de blocs en bois à un tassement différentiel. Le mur est composé de 105 blocs répartis sur 10 couches. 95 blocs ont pour dimension $H = 4.9$ cm, $L = 12.4$ cm et $l = 6.2$ cm, 10 ont une longueur (L) deux fois plus petite. Les résultats numériques ont été obtenu en prenant un coefficient de frottement de 0.6 entre blocs et de 0.7 entre blocs et fondation. On constate qu'ils sont en totale adéquation avec l'expérience.

Ce deuxième exemple montre que la méthode est capable de prendre en compte des très grands systèmes.

1.6.2. *Massifs Rocheux*

1.6.3. *Ballast*

quelques mots sur la spécificité des rhéologies SLR

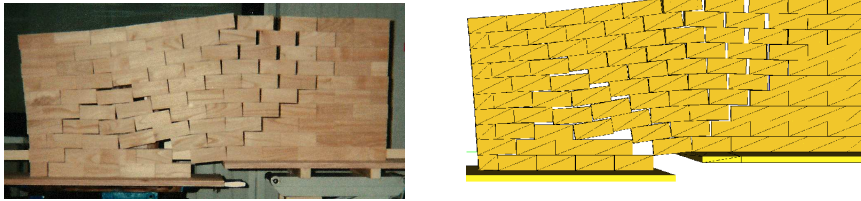


Figure 1.12. cas test de comparaison expérience simulation

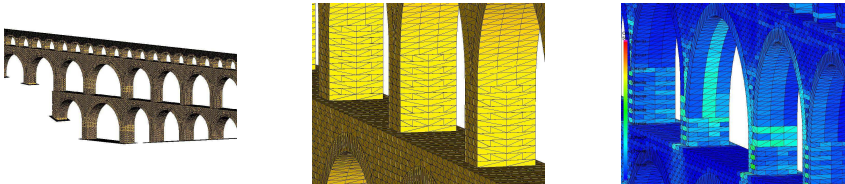


Figure 1.13. modélisation du pont du gard

1.7. Conclusion

Remerciements : Gilles Saussine, Mathieu Renouf, Vincent Acary, Emilien Azéma, Robert Pérales, Ali Rafiee, Brahim Chetouane.

1.8. Bibliographie

- [ACA 08] ACARY V., BROGLIATO B., *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems : applications in mechanics and electronics*, Springer Verlag, 2008.
- [ALU 05] ALUMBAUGH T. J., JIAO X., « Compact Array-Based Mesh Data Structures », SPRINGER-VERLAG, Ed., *14th International Meshing Roundtable*, p. 485-504, 2005.
- [BAR 89] BARAFF D., « Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies », *Computer Graphics*, vol. 23 :3, p. 223-232, 1989.
- [BAR 90] BARAFF D., « Curved surfaces and coherence for non-penetrating rigid body simulation », *Computer Graphics*, vol. 24, p. 19-28, 1990.
- [BAR 96] BARBER C. B., DOBKIN D., HUHDANPAA H., « The quickhull algorithm for convex hull », *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 22, p. 469-483, 1996.
- [BER 97] VAN DEN BERGEN G., « Efficient collision detection of complex deformable models using AABB trees », *Journal of Graphic Tools*, vol. 4 :2, p. 1-13, 1997.

- [BER 04] VAN DEN BERGEN G., *Collision detection in interactive 3D environments*, Morgan Kaufmann Publishers, Elsevier, 2004.
- [CAL 03] CALVETTI F., « Limitations and Perspectives of the Micromechanical Modelling of Granular Materials », *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 37, p. 485-495, 2003.
- [COH 95] COHEN J., LIN M. C., MANOCHA D., PONAMGI M. K., « I-COLLIDE : an interactive and exact collision detection system for large-scale environments », *ACM Interactive 3D Graphics Conf*, 1995.
- [CRI 97] CRIESFIELD M. A., *Non-linear finite element analysis of solids and structures : Advanced topics*, Wiley, 1997.
- [CUN 88] CUNDALL P. A., « Formulation of a three-dimensional distinct element model. Part I : A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. », *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, vol. 25 :3, p. 107-116, 1988.
- [DUB 03] DUBOIS F., JEAN M., « LMGC90 une plateforme de développement dédiée à la modélisation des problèmes d'interaction », *sixième colloque national en calcul des structures*, vol. 1, p. 111-118, 2003.
- [EBE 01] EBERLY D., « Intersection of convex objets : the method of separating axes », 2001.
- [EBE 09] EBERLY D., « Polyhedral Mass Properties », 2009.
- [ERI 05] ERICSON C., *Real Time Collision Detection*, Morgan Kaufmann Publishers, Elsevier, 2005.
- [ERL 04] ERLEBEN K., *Stable, Robust and Versatile Multibody Dynamics Animation*, PhD thesis, Université de Copenhague, Danemark, 2004.
- [EST 08] ESTRADA MEJ A N., * tude numérique du cisaillement des géomatériaux granulaires coh sifs : passage micro-macro, microstructure, et application   la modélisation de glissements de terrain*, PhD thesis, Université de Montpellier 2, 2008.
- [FEN 04] FENG Y. T., OWEN D., « A 2D polygon/polygon contact model : algorithmic aspects », *Engineering Computations*, vol. 21, p. 265-277, 2004.
- [FER 02] FERREZ J., LIEBLING T. M., « Robust 3D dynamic triangulations for collision detection in DEM simulations of granular materials », *EPFL Supercomputing Review*, vol. 13, p. 41-48, 2002.
- [G' 01] G RADIN M., CARDONA A., *Flexible Multibody Dynamics : A finite element approach*, Wiley, 2001.
- [GAL 08] GALINDO-TORRES S.-A., ALONSO-MARROQUIN F., WANG Y., « 3D Molecular dynamics simulations using spheropolytopes », <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0811.3060>, 2008.
- [GEU 09] GEUZAIN C., REMACLE J.-F., « Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79 :11, p. 1309-1331, 2009.

- [GIL 88] GILBERT E., JOHNSON D., KEETHI S., « A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space », *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, p. 193-203, 1988.
- [GOT 96] GOTTSCHALK S., LIN M. C., MANOCHA D., « OBBTree : a hierarchical structure for rapid interference detection », *Computer Graphics*, vol. 30, p. 171-180, 1996.
- [GUI 03] GUIGUE P., DEVILLERS O., « A fast and robust triangle-triangle overlap test using orientation predicates », *Journal of Graphic Tools*, vol. 8, p. 39-52, 2003.
- [HUB 95] HUBBARD P., « Real-time collision detection and time-critical computing », *Workshop on simulation and interaction in virtual environments*, 1995.
- [HUD 97] HUDSON T., LIN M., COHEN J., GOTTSCHALK S., MANOCHA D., « V-COLLIDE : Accelerated Collision Detection for VRML », *Proc. of VRML'97*, 1997.
- [HUG 80] HUGHES T., WINGET J., « Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformations analysis », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 15, p. 1862-1867, 1980.
- [IBR 97] IBRAHIMBEGOVIĆ A., « On the choice of finite rotation parameters », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 149, p. 49-71, 1997.
- [JIM 01] JIMÉNEZ P., THOMAS F., TORRAS C., « 3D collision detect : A survey », *Computer and Graphics*, vol. 25 :2, p. 269-285, 2001.
- [JOH 04] JOHNSON D., COHEN E., « Unified Distance Queries in a Heterogeneous Model Environment », *ASME Design Engineering Technical Conferences*, 2004.
- [JOU 97] JOUKHADAR A., Simulation dynamique et applications robotiques, PhD thesis, INPG, 1997.
- [KLE 05] KLEIN J., Efficient collision detection for point and polygon based models, PhD thesis, Université de Paderborn, Allemagne, 2005.
- [KLO 98] KLOSOWSKI J., HELD M., MITCHELL J., SOWIZRAL H., ZIKAN K., « Efficient collision detection using bounding volume hierarchies of k-dop », *T-VCG*, 1998.
- [LAR 00] LARSEN E., GOTTSCHALK S., LIN M., MANOCHA D., « Fast distance queries with rectangular swept sphere volumes », *IEEE international conference on robotics and automation*, 2000.
- [LAU 02] LAURSEN T., *Computational Contact and Impact Mechanics : Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*, Springer Verlag, 2002.
- [LAU 05] LAUG P., « Topologie et maillage des surfaces paramétrées à partir d'une modélisation B-Rep », *17^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 2005.
- [LEE 03] LEE Y., YANG C.-T., CHIEN C.-S., « A 3D ellipsoid-based model for packing of granular particles », *Int. J. Comput. Appl. Technol.*, vol. 17 :3, p. 148-155, 2003.
- [LIE 08] LIEN J.-M., AMATO N. M., « Approximate convex decomposition of polyhedra and its applications », *Computer Aided Geometric Design*, vol. 25, p. 503-522, 2008.
- [LIN 91] LIN M. C., CANNY J., « A fast algorithm for incremental distance calculation », *IEEE Conference on Robotics and Automation*, 1991.

- [LIN 93] LIN M., Efficient Collision Detection For Animation and Robotics, PhD thesis, University of California, Berkeley, 1993.
- [LIN 98] LIN M. C., GOTTSCHALK S., « Collision detection between geometric models : A survey », *IMA Conference on Mathematics of Surfaces*, p. 33-52, 1998.
- [MÖ 97] MÖLLER T., « A fast triangle-triangle intersection test », *Journal of Graphic Tools*, vol. 2, p. 25-30, 1997.
- [MER 07] MERLHIOT X., « A robust, efficient and time-stepping compatible collision detection method for non-smooth contact between rigid bodies of arbitrary shape », *Multibody Dynamics, Eccomas Thematic Conference*, 2007.
- [MIR 96a] MIRTICH B., « Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties », *journal of graphics tools*, vol. 1 :2, p. 31–50, 1996.
- [MIR 96b] MIRTICH B., Impulse-based dynamic simulation of rigid body systems, PhD thesis, Université de Californie, Berkeley, 1996.
- [MIR 98] MIRTICH B., « V-Clip : fast and robust polyhedral collision detection », *ACM Trans. Graph*, 1998.
- [MOR 03] MOREAU J. J., « Modélisation et simulation de matériaux granulaires », *35e Congrès National d'Analyse Numérique*, 2003.
- [MUN 04] MUNJIZA A., *The combined finite-discrete element method*, Wiley, 2004.
- [NEZ 04] NEZAMI E. G., HASHASH Y. M. A., ZHAO D., GHABOUSSI J., « A fast contact detection algorithm for 3-D discrete element method », *Computers and Geotechnics*, vol. 31, p. 575-597, 2004.
- [NEZ 06] NEZAMI E. G., HASHASH Y. M. A., ZHAO D., GHABOUSSI J., « Shortest link methode for contact detection in discrete element method », *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 30, p. 783-801, 2006.
- [OND 06] ONDERIK J., Physically based animation of rigid bodies, Master's thesis, Comenius University, Bratislava, Slovakia, 2006.
- [O'R 98] O'ROURKE J., *Computational geometry in C*, Cambridge university press, 1998.
- [PER 07] PERALES R., Modélisation du comportement mécanique par éléments discrets des ouvrages maçonnés tridimensionnels. Contribution à la définition d'éléments de contacts surfaciques., PhD thesis, Université de Montpellier 2, 2007.
- [PET 01] PETIT D., PRADEL F., FERRER G., MEIMON Y., « Shape effect of grain in a granular flow », *Powders and grains*, 2001.
- [POU 05] POURNIN L., WEBER M., TSUKAHARA M., FERREZ J.-A., RAMAIOLI M., LIEBLING T. M., « Three-dimensional distinct element simulation of spherocylinder crystallization », *Granular Matter*, vol. 7, n°doi :10.1007/s10035-004-0188-4, p. 119-126, 2005.
- [RAF 08] RAFIEE A., Contribution à l'étude de la stabilité des massifs rocheux fracturés : caractérisation de la fracturation in situ, géostatistique et mécanique des milieux discrets, PhD thesis, Université de Montpellier 2, 2008.
- [RAT 09] RATCLIFF J., « Convex Decomposition Library », 2009.

- [SAU 04] SAUSSINE G., Contribution À la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast, PhD thesis, Université de Montpellier 2, 2004.
- [TES 05] TESCHNER M., KIMMERLE S., HEIDELBERGER B., ZACHMANN G., RAGHUPATHI L., FUHRMANN A., CANI M.-P., FAURE F., STRASSER W., VOLINO P., « Collision detection for deformable objects », *Computer Graphics Forum*, vol. 24 :1, p. 61-81, 2005.
- [TON 04] TONON F., « Explicit Exact Formulas for the 3-D Tetrahedron Inertia Tensor in Terms of its Vertex Coordinates », *Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 1, p. 8-11, 2004.
- [ZAV 09] ZAVARISE G., DE LORENZIS L., « A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 79 :4, p. 379-416, 2009.
- [ZOM 02] ZOMORODIAN A., EDELSBRUNNER H., « Fast Software for Box Intersection », *Comput. Geom. Theory Appl.*, vol. 12, p. 143-172, 2002.