



HAL
open science

Histoires de formes trilinéaires et de vecteurs test

Louise Nyssen

► **To cite this version:**

Louise Nyssen. Histoires de formes trilinéaires et de vecteurs test. Cohomologie l-adique et corps de nombres 10-14 d ecembre 2007, Apr 2007, CIRM, Marseille, France. pp.129-153. hal-00806005

HAL Id: hal-00806005

<https://hal.science/hal-00806005>

Submitted on 29 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HISTOIRES DE FORMES TRILINÉAIRES ET DE VECTEURS TEST

par

Louise Nyssen

Résumé. — Si F est un corps local et G le groupe $\mathrm{GL}_2(F)$, on considère trois représentations admissibles et irréductibles π_1, π_2 et π_3 de G , dans des espaces vectoriels V_1, V_2 et V_3 de dimension infinie sur \mathbb{C} . La dimension de l'espace

$$L = \mathrm{Hom}_G(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \mathbb{C})$$

des formes linéaires G -invariantes est 0 ou 1. Si c'est 1, on dispose d'une forme linéaire ℓ non nulle dans L , pour laquelle on cherche un vecteur test, c'est-à-dire un vecteur qui n'est pas dans le noyau de ℓ . La théorie nous assure l'existence d'un grand nombre de ces vecteurs, mais il s'agit ici d'en décrire un explicitement.

Après les rappels nécessaires sur les représentations, on expliquera dans quels cas on peut trouver des vecteurs test. On donnera ensuite quelques applications à l'étude des fonctions L .

Abstract (About trilinear forms and test vectors). — Let F be a local field and G be $\mathrm{GL}_2(F)$. Let $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ and (π_3, V_3) be three admissible, irreducible, infinite dimensional representations of G . The space of trilinear, G -invariant forms

$$L = \mathrm{Hom}_G(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \mathbb{C})$$

has dimension 0 or 1. When it is 1, there is a non zero linear form ℓ in L , and one wants to find a test vector for ℓ , that is, a vector which is not in the kernel of ℓ . Theoretically, there are many test vectors. The point is to get an explicit one. The first part of this paper is a survey about test vectors : how to get the dimension of L and which explicit test vectors are already known. The second part describes some applications to L -functions.

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F67, 11F70.

Cet article a été rédigé à la suite du colloque *Cohomologie l -adique et corps de nombres* organisé au CIRM du 10 au 14 décembre 2007 par Philippe Blanc que je tiens à remercier pour cette semaine de travail agréable et enrichissante. Je remercie également Christian Maire qui s'est chargé de la présente publication.

1. Introduction

Si F est un corps local et G le groupe $\mathrm{GL}_2(F)$, on considère trois représentations admissibles et irréductibles π_1, π_2 et π_3 de G , dans des espaces vectoriels V_1, V_2 et V_3 de dimension infinie sur \mathbb{C} , pour s'intéresser à l'espace des formes linéaires G -invariantes sur $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$

$$L = \mathrm{Hom}_G(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \mathbb{C}).$$

Pour toute forme linéaire ℓ de L , tout élément g de G et tout triplet d'éléments (v, v', v'') de $V_1 \times V_2 \times V_3$

$$\ell(\pi_1(g)v \otimes \pi_2(g)v' \otimes \pi_3(g)v'') = \ell(v \otimes v' \otimes v'').$$

La dimension de cet espace est 0 ou 1. Lorsqu'elle vaut 1, on dispose d'une forme non nulle dans L , définie à un scalaire près, et on cherche un élément v de $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ qui ne soit pas dans son noyau. On l'appelle vecteur test car on peut écrire, pour toute forme linéaire ℓ de L

$$\ell \neq 0 \text{ dans } L \iff \ell(v) \neq 0 \text{ dans } \mathbb{C}$$

On commencera par traiter, dans les parties 2 et 3, le cas où F est un corps p -adique. La partie 2 est consacrée à des rappels sur les représentations. Dans la partie 3, on détaille les résultats sur la dimension de L , et on décrit les vecteurs test dans quelques cas. Il s'agit des travaux de Diprenda Prasad dans [P], Gross et Prasad dans [G-P], prolongés dans [N].

Ensuite, on traitera le cas où F est archimédien. C'est l'objet de la partie 4, qui décrit les travaux de de Prasad dans [P], complétés par Loke dans [L].

Les parties 5 et 6 sont consacrées à des applications des résultats précédents. Après avoir décrit dans 5 une version globale du problème, on s'intéressera dans 6, aux fonctions L : on évoquera d'abord les travaux de Harris et Kudla sur la conjecture de Jacquet dans [H-K1] et [H-K2], puis on expliquera comment on utilise les vecteurs test pour estimer le comportement de certaines fonctions L au voisinage de la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$: ce sont les travaux de Bernstein et Reznikov dans [B-R 1], [B-R 2] et [R] d'une part, Michel et Venkatesh dans [M-V] et [V], d'autre part.

2. Rappels sur les représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$ lorsque F est un corps p -adique

Considérons d'abord le cas où F est une extension finie de \mathbb{Q}_p , pour un nombre premier p . On note \mathcal{O}_F l'anneau des entiers, π_F une uniformisante et q le cardinal du corps résiduel. On note $|\cdot|$ la valeur absolue sur F , normalisée pour que $|\pi_F| = q^{-1}$. On considère le groupe $G = \mathrm{GL}_2(F)$ et $K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ qui est un sous-groupe compact maximal de G . Dans cette section, on se contente d'énoncer les quelques définitions et

propriétés des représentations admissibles de G qui nous seront utiles dans la suite. Pour un exposé complet et détaillé, on renvoie à **[B-H]**.

2.1. Induction. — Soit (ρ, W) une représentation d'un sous-groupe fermé H de G et Δ_H le caractère modulaire de H . Soit $\text{Ind}_H^G(\rho)$ l'espace des fonctions f de G dans W satisfaisant les conditions suivantes :

- pour tout élément h de H et tout élément g de G ,

$$f(hg) = \Delta_H(h)^{-\frac{1}{2}} \rho(h)(f(g))$$

- il existe un sous-groupe ouvert K_f de G tel que pour tout élément k de K_f , et tout élément g de G ,

$$f(kg) = f(g).$$

On fait agir G sur $\text{Ind}_H^G(\rho)$ par translation à droite. On obtient ainsi une représentation qu'on appelle l'induite de ρ de H à G . Avec la condition supplémentaire que f soit à support compact, on obtient l'induite compacte, notée $\text{ind}_H^G(\rho)$. Lorsque $H \setminus G$ est compact, il n'y a pas de différence entre les deux.

Avec le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures de G on utilise $\Delta_B^{-1} = \delta$ où pour tout élément b de B de la forme $b = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, $\delta(b) = \left| \frac{x}{z} \right|$. Avec le sous-groupe T des matrices diagonales de G , Δ_T est trivial. On trouvera plus de détails sur les représentations induites dans **[B-Z]**.

2.2. Représentations admissibles irréductibles de G . — Soit π une représentation irréductible et admissible de G dans un \mathbb{C} -espace vectoriel V . Elle possède un caractère central, c'est à dire qu'il existe un caractère $\omega : F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que, pour tout élément x de F et tout vecteur v de V

$$\pi\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right)v = \omega(x)v.$$

Si elle est de dimension finie, elle est nécessairement de dimension 1, c'est-à-dire qu'il existe un caractère $\chi : F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que, pour tout élément g de G

$$\pi(g) = \chi(\det(g)).$$

Pour obtenir les représentations admissibles irréductibles de G de dimension infinie, on utilise l'induction parabolique. Soient μ et μ' deux caractères de F^\times . On note $\text{Ind}_B^G(\mu, \mu')$ la représentation obtenue en induisant le caractère

$$\begin{cases} B & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} & \longmapsto & \mu(x)\mu'(z) \end{cases}$$

C'est une représentation admissible de G .

- Si $\frac{\mu}{\mu'} \neq |\cdot|^\pm 1$ elle est aussi irréductible. On dit qu'elle appartient à la série principale.
- Sinon, elle possède un unique sous-quotient irréductible de dimension infinie, qu'on note V . Il est de codimension 1. On dit que la représentation ainsi obtenue est une représentation spéciale. En particulier, on note St (pour Steinberg) la représentation spéciale obtenue comme le quotient de $\text{Ind}_B^G(|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, |\cdot|^{\frac{1}{2}})$ par l'espace des fonctions constantes sur G .

Les représentations admissibles irréductibles de G de dimension infinie qui ne s'obtiennent pas de cette façon sont dites cuspidales. Cette définition semble artificielle : de fait, il existe d'autres manières de caractériser les représentations cuspidales, mais comme elles interviendront assez peu dans cet exposé, nous ne détaillerons pas d'avantage. Quand une représentation est spéciale ou cuspidale, on dit qu'elle appartient à la série discrète.

2.3. Correspondance de Jacquet-Langlands. — Soit D_F l'algèbre des quaternions de centre F , et D_F^\times le groupe des éléments inversibles de D_F . La correspondance de Jacquet-Langlands est une correspondance bijective entre les représentations de la série discrète de G et les représentations irréductibles de D_F^\times . Si (π, V) est une représentation de la série discrète de G , on notera (π', V') la représentation associée par la correspondance de Jacquet-Langlands.

2.4. Ramification et nouveau vecteur. — Nous allons définir le conducteur d'un caractère et celui d'une représentation de dimension infinie. Soit χ un caractère de F^\times .

- Si $\chi(\mathcal{O}_F^\times) = \{1\}$, on dit que χ est non ramifié.
- Autrement, la suite décroissante de sous-groupes compacts de F^\times

$$\mathcal{O}_F^\times \supset 1 + \pi_F \mathcal{O}_F \supset \cdots \supset 1 + \pi_F^n \mathcal{O}_F \supset 1 + \pi_F^{n+1} \mathcal{O}_F \supset \cdots$$

fournit un plus petit entier n tel que

$$\chi(1 + \pi_F^n \mathcal{O}_F) = \{1\}$$

On dit que le caractère est ramifié et que cet entier est son conducteur.

Soit (π, V) une représentation admissibles irréductible de G , de dimension infinie et de caractère central ω . La suite décroissante de sous-groupes compacts de G

$$K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n \supset K_{n+1} \cdots$$

avec

$$K_0 = K = \text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$$

et pour tout entier $n \geq 1$,

$$K_n = \Gamma_0(\pi_F^n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K \mid c \in \pi_F^n \mathcal{O}_F \right\}$$

fournit une suite croissante de sous-espaces vectoriels de V

$$V^0 = V^K$$

et pour tout entier $n \geq 1$,

$$V^n = \{v \in V \mid \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_n, \pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)v = \omega(a)v \}$$

Il existe un plus petit entier n pour lequel l'espace vectoriel V^n n'est pas réduit à $\{0\}$. Il est alors de dimension 1. Tout générateur de V^n s'appelle un nouveau vecteur de la représentation, et n s'appelle le conducteur de la représentation. On dit que π est ramifiée si $n \geq 1$. Si $n = 0$, on dit qu'elle est non ramifiée ou sphérique. On trouvera des détails sur les nouveaux vecteurs dans [C] et [G].

Si π appartient à la série principale, elle est induite à partir de deux caractères μ et μ' , de conducteurs m et m' . Le conducteur de π est alors $m + m'$.

Si π est une représentation spéciale, il existe un caractère η de F^\times tel que π est isomorphe à $\eta \otimes \text{St}$. Le conducteur de π vaut 1 si η est non ramifié, deux fois le conducteur de η sinon.

Si π est cuspidale, son conducteur est supérieur à deux.

2.5. Contragrédiente. — Soit (π, V) une représentation admissible irréductible de G . L'espace V^* des formes linéaires sur V est lui-même une représentation de G . Pour tout élément g de G , tout vecteur v de V et toute forme linéaire φ de V^* , l'action de g sur φ , notée $\tilde{\pi}(g)$ est donnée par

$$\langle \tilde{\pi}(g)\varphi, v \rangle = \langle \varphi, \pi(g)^{-1}(v) \rangle$$

Mais elle n'est pas forcément admissible. Il faut se restreindre à l'ensemble \tilde{V} des formes linéaires dont le stabilisateur dans G est ouvert. On obtient ainsi une représentation irréductible et admissible de G , notée $\tilde{\pi}$, qui s'appelle la représentation contragrédiente de π .

Elle est isomorphe à la représentation $\omega^{-1} \otimes \pi$ où ω est le caractère central de π . En particulier, si ω est trivial, π est isomorphe à sa contragrédiente. On trouvera des détails sur les représentation contragrédientes dans [B-Z].

3. Formes trilinéaires et vecteurs test lorsque F est un corps p -adique

3.1. Formes trilinéaires. — Soient π_1, π_2 et π_3 trois représentations admissibles et irréductibles de $G = \text{GL}_2(F)$, dans des espaces vectoriels V_1, V_2 et V_3 de dimension infinie sur \mathbb{C} . Soit

$$L = \text{Hom}_G(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \mathbb{C})$$

l'espace des formes linéaires G -invariantes c'est-à-dire les formes linéaires ℓ sur $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ telles que, pour tout élément g de G et tout triplet de vecteurs (v, v', v'') de $V_1 \times V_2 \times V_3$

$$\ell(\pi_1(g)v \otimes \pi_2(g)v' \otimes \pi_3(g)v'') = \ell(v \otimes v' \otimes v'').$$

De façon analogue, si les (π'_i, V'_i) sont des représentations irréductibles de D_F^\times on définit l'espace

$$L' = \text{Hom}_{D_F^\times}(V'_1 \otimes V'_2 \otimes V'_3, \mathbb{C}).$$

En utilisant la théorie des paires de Gelfand, Prasad démontre dans [P] que la dimension des espaces L et L' est 0 ou 1, et il donne un critère précis qui permet de la déterminer.

Commençons par une remarque simple : si L est de dimension 1, le produit des caractères centraux de π_1, π_2 et π_3 est trivial. Nous ferons donc cette hypothèse dans toute la suite.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note σ_i la représentation du groupe de Weil-Deligne associée à π_i par la correspondance de Langlands locale. Le produit $\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3$ est une représentation symplectique de dimension 8 du groupe de Weil-Deligne. A cause de la condition sur les caractères centraux, cette représentation est autoduale si bien que le facteur local $\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3)$ vaut 1 ou -1 . Prasad démontre que si le facteur ε vaut -1 , les trois représentations π_i appartiennent à la série discrète, si bien qu'on peut considérer les représentations (π'_i, V'_i) de D_F^\times associées par la correspondance de Jacquet-Langlands, et s'intéresser à l'espace L' défini ci-dessus. Dans [P], Diprenda Prasad démontre

Théorème 3.1 (Prasad). — *Soient π_1, π_2 et π_3 trois représentations admissibles et irréductibles de G dans des espaces vectoriels V_1, V_2 et V_3 de dimension infinie sur \mathbb{C} . On suppose que le produit de leurs caractères centraux est trivial.*

– *Si au moins une des trois représentations appartient à la série principale*

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}} L = 1.$$

– *Si les trois représentations appartiennent à la série discrète,*

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = 1 \iff \dim_{\mathbb{C}} L = 1 \iff \dim_{\mathbb{C}} L' = 0$$

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = -1 \iff \dim_{\mathbb{C}} L = 0 \iff \dim_{\mathbb{C}} L' = 1$$

3.2. Les vecteurs test connus. — Pour chercher des vecteurs test, on aura besoin des nouveaux vecteurs. Dans toute la suite v_1, v_2 et v_3 désigneront les nouveaux vecteurs des représentations π_1, π_2 et π_3 . Au début, la relation est facile. On trouve dans [P]

Théorème 3.2 (Prasad). — *Si π_1, π_2 et π_3 sont des représentations principales non ramifiées, il existe une forme trilinéaire non nulle ℓ dans L et $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ est un vecteur test pour ℓ .*

et dans **[G-P]**

Théorème 3.3 (Gross-Prasad). — *Si pour chaque i dans $\{1, 2, 3\}$, il existe un caractère non ramifié η_i tel que $\pi_i = \eta_i \otimes \text{St}$, et s'il existe une forme trilinéaire non nulle ℓ dans L , alors $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ est un vecteur test pour ℓ .*

Remarque 3.4. — Dans cette situation, les trois représentations appartiennent à la série discrète. Puisque chaque caractère η_i est non ramifié, il est entièrement déterminé par la valeur de $\eta_i(\pi_F)$ et la condition sur les caractères centraux impose que

$$\left(\eta_1(\pi_F)\eta_2(\pi_F)\eta_3(\pi_F) \right)^2 = 1$$

Or, d'après **[P]** le facteur ε correspondant vaut

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = -\eta_1(\pi_F)\eta_2(\pi_F)\eta_3(\pi_F)$$

Donc, on peut trouver une forme linéaire non nulle ℓ dans L si et seulement si $\eta_1(\pi_F)\eta_2(\pi_F)\eta_3(\pi_F) = -1$. Autrement, on dispose d'un élément non nul ℓ' dans L' pour lequel on peut trouver un vecteur test dans $V_1' \otimes V_2' \otimes V_3'$ de la façon suivante : si R' est l'ordre maximal de D_F , le sous-groupe compact ouvert $R'^{\times} \times R'^{\times} \times R'^{\times}$ fixe une unique droite dans $V_1' \otimes V_2' \otimes V_3'$ et tout élément non nul de cette droite est un vecteur test pour ℓ' . C'est la proposition 6.3 de **[G-P]**.

La démonstration que donnent Gross et Prasad du théorème 3.3 s'adapte très facilement au cas où une des représentations est principale et non ramifiée. On obtient un résultat comparable :

Théorème 3.5 (Gross-Prasad). — *Si pour $i = 1$ et $i = 2$ il existe un caractère non ramifié η_i tel que $\pi_i = \eta_i \otimes \text{St}$ et si π_3 est une représentation principale non ramifiée, il existe une forme trilinéaire non nulle ℓ dans L et $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ est un vecteur test pour ℓ .*

Mais les choses se compliquent dès qu'on augmente la ramification. Nous allons maintenant travailler dans le cas où π_1 et π_2 sont des représentations principales non ramifiées tandis que π_3 est ramifiée.

Dans ce cas, on peut supposer que le caractère central de chaque représentation est trivial. Notons ω_1, ω_2 et ω_3 les caractères centraux de π_1, π_2 et π_3 . On sait que les caractères centraux de π_1 et de π_2 ne sont pas ramifiés. Comme le produit $\omega_1\omega_2\omega_3$ est trivial, le troisième n'est pas d'avantage ramifié. Ils sont donc tous trois déterminés par leur valeur en π_F . On choisit alors des caractères non ramifiés η_1, η_2, η_3 , tels que pour chaque i dans $\{1, 2, 3\}$: $\eta_i(\pi_F)^2 = \omega_i(\pi_F)$ et $\eta_1(\pi_F)\eta_2(\pi_F)\eta_3(\pi_F) = 1$. Ainsi, le caractère central de chaque représentation $\eta_i^{-1} \otimes V_i$ est trivial et

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 = (\eta_1^{-1} \otimes V_1) \otimes (\eta_2^{-1} \otimes V_2) \otimes (\eta_3^{-1} \otimes V_3).$$

Cet isomorphisme nous permet de supposer que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ ce qui simplifiera un peu les notations dans la suite. Par exemple les nouveaux vecteurs des représentations sont simplement des vecteurs non nuls invariants par certains sous-groupes compacts :

$$v_1 \in V_1^K \quad v_2 \in V_2^K \quad \text{et} \quad v_3 \in V_3^{\Gamma_0(\pi_F^n)}$$

On dispose d'une forme linéaire non nulle ℓ dans L , qui fournit un élément de \widetilde{V}_3

$$\varphi \quad \begin{cases} V_3 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ v & \longmapsto \ell(v_1 \otimes v_2 \otimes v) \end{cases}$$

Puisque ω_3 est trivial, la représentation π_3 est isomorphe à sa contragrédiente. Puisque ℓ est G -invariante, et que v_1 et v_2 sont K -invariants, φ est K -invariante. Or π_3 est ramifiée, donc $\widetilde{\pi}_3$ aussi, si bien que $\varphi = 0 : v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ n'est pas un vecteur-test pour ℓ .

Cependant, Gross et Prasad font la suggestion suivante : si R est un ordre maximal dans $M_2(F)$ vérifiant $R^\times \cap K = \Gamma_0(\pi_F^n)$ et si v_2^* est un vecteur R^\times -invariant dans V_2 , la forme linéaire

$$\begin{cases} V_3 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ v & \longmapsto \ell(v_1 \otimes v_2^* \otimes v) \end{cases}$$

est invariante sous l'action de $R^\times \cap K = \Gamma_0(\pi_F^n)$. Comme $(\widetilde{V}_3)^{\Gamma_0(\pi_F^n)}$ est de dimension 1, il reste une chance pour que $v_1 \otimes v_2^* \otimes v_3$ soit un vecteur test pour ℓ .

Cette suggestion a été mise en œuvre dans [N]. Pour obtenir R^\times , il faut conjuguer le compact maximal K par une puissance d'un certain élément γ de G . Soit n le conducteur de π_3 . On sait que $n \geq 1$. On pose

$$\gamma = \begin{pmatrix} \pi_F & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \gamma^{-n} M_2(\mathcal{O}_F) \gamma^n \quad \text{et} \quad v_2^* = \pi_2(\gamma^{-n}) v_2$$

qui vérifient les relations attendues

$$R^\times = \gamma^{-n} K \gamma^n \quad \text{et} \quad R^\times \cap K = \Gamma_0(\pi_F^n).$$

On est alors dans les conditions favorables :

$$v_1 \in V_1^K \quad v_2^* \in V_2^{R^\times} \quad \text{et} \quad v_3 \in V_3^{K \cap R^\times}.$$

Il faudra toutefois imposer une certaine condition technique, notée $CT(n)$, à π_1 et π_2 , condition que nous allons expliquer maintenant. Puisque π_1 et π_2 sont des représentations principales non ramifiées, il existe des caractères non ramifiés μ_1 et μ_2 tels que pour $i = 1$ et $i = 2$,

$$\pi_i = \text{Ind}_B^G(\mu_i, \mu_i^{-1})$$

La condition $CT(n)$ porte sur la valeur des $\mu_i(\pi_F)^2$:

$$- \text{ si } n = 1 \quad \begin{cases} \mu_1(\pi_F)^2 \neq -1 \\ \text{ou} \quad \mu_2(\pi_F)^2 \neq -1 \end{cases}$$

$$- \text{ si } n \geq 2 \quad \begin{cases} \mu_1(\pi_F)^2 = 1 \\ \text{ou } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \mu_1(\pi_F)^{2k} \neq 1 \\ \text{ou } \mu_2(\pi_F)^2 = 1 \\ \text{ou } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \mu_2(\pi_F)^{2k} \neq 1. \end{cases}$$

On obtient

Théorème 3.6. — *Si π_3 est une représentation ramifiée de conducteur n et si π_1 et π_2 sont des représentations principales non ramifiées vérifiant la condition $CT(n)$, il existe une forme linéaire non nulle ℓ dans L , et avec les notations ci dessus $v_1 \otimes \pi_2(\gamma^{-n})v_2 \otimes v_3$ est un vecteur-test pour ℓ .*

3.3. Quelques idées pour les démonstrations. — Nous allons commencer par les théorèmes 3.2 et 3.6 qui sont complémentaires.

Grandes lignes de la preuve de 3.2 et 3.6. — Dans la situation du théorème 3.2 on peut se ramener, comme pour 3.6, au cas où les trois caractères centraux sont triviaux. On dispose alors de deux représentations principales non ramifiées

$$\pi_1 = \text{Ind}_B^G(\mu_1, \mu_1^{-1}) \quad \text{et} \quad \pi_2 = \text{Ind}_B^G(\mu_2, \mu_2^{-1})$$

et d'une représentation π_3 de conducteur $n \geq 0$ et de caractère central trivial. On obtient facilement un premier isomorphisme

$$\text{Hom}_G(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}_G(V_1 \otimes V_2, \widetilde{V}_3)$$

Pour $i = 1$ et $i = 2$, on définit deux caractères de B qu'on peut restreindre à T

$$\chi_i \left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) = \mu_i \left(\frac{x}{z} \right).$$

En remarquant que

$$V_1 \otimes V_2 = \text{Res}_G \text{Ind}_{B \times B}^{G \times G}(\chi_1 \times \chi_2)$$

on insère $V_1 \otimes V_2$ dans une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{ind}_T^G \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \xrightarrow{\text{ext}} V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\text{res}} \text{Ind}_B^G(\chi_1 \chi_2 \delta^{\frac{1}{2}}) \rightarrow 0$$

Ici, les éléments de $V_1 \otimes V_2$ apparaissent comme des fonctions sur $G \times G$. La surjection **res** est la restriction à la diagonale et l'injection **ext** associe à une fonction f de $\text{ind}_T^G \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)$, une fonction F définie par les relations

$$F(g, g) = 0 \quad \text{et} \quad F(g, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g) = f(g)$$

Après certaines considérations techniques, on en déduit un deuxième isomorphisme

$$\text{Hom}_G(V_1 \otimes V_2, \widetilde{V}_3) \simeq \text{Hom}_G \left(\text{ind}_T^G \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right), \widetilde{V}_3 \right)$$

Enfin la réciprocité de Frobenius fournit un dernier isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{ind}_T^G\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right), \widetilde{V}_3\right) \simeq \mathrm{Hom}_T\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, \widetilde{V}_3|_T\right)$$

C'est une étape importante : ce dernier espace est bien connu et d'après les lemmes 8 et 9 de [W], il est de dimension 1. C'est ainsi que Prasad démontre le théorème 3.1 dans cette situation. Mais on en sait d'avantage. Un générateur de $\mathrm{Hom}_T\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, \widetilde{V}_3|_T\right)$ est donn e par une forme linéaire φ sur V_3 vérifiant, pour tout élément t de T et tout vecteur v de V_3

$$\varphi(\pi_3(t)v) = \frac{\chi_2(t)}{\chi_1(t)}\varphi(v)$$

Voici le point crucial

$$\varphi(v_3) \neq 0.$$

On démontre cette relation en faisant des calculs explicites dans le modèle de Kirillov de V_3 . Pour $n = 0$, c'est lemme 5.6.b de [P] et pour $n \geq 1$, c'est la proposition 2.6 de [G-P].

Le principe de la démonstration consiste ainsi à ramener la question du vecteur test dans un espace plus simple où on peut faire des calculs explicites. Pour revenir à notre espace de départ, il faut maintenant trouver des fonctions F dans $V_1 \otimes V_2$ et f dans $\mathrm{ind}_T^G\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)$ qui vérifient

- (1) $F = \mathbf{ext}(f)$,
- (2) il existe des coefficients c_i dans \mathbb{C} et des éléments g_i de G tels que

$$F = \sum_i c_i \pi_1(g)v_1 \otimes \pi_2(g)v_2^*$$

- (3) f est la fonction caractéristique de l'orbite de $\Gamma_0(\pi_F^n)$ dans $T \backslash G$, c'est-à-dire qu'on décompose G en doubles classes $G = \sqcup T r \Gamma_0(\pi_F^n)$, que f est nulle en dehors de $T \Gamma_0(\pi_F^n)$ et que pour toute paire (t, k) dans $T \times \Gamma_0(\pi_F^n)$, $f(tk) = \frac{\chi_1(t)}{\chi_2(t)}$.

Prasad a décrit ces fonctions dans le cas $n = 0$ et l'auteur de cet article a trait e le cas $n \geq 1$. Malheureusement, lorsqu'on calcule les coefficients c_i dans le cas $n \geq 1$, des dénominateurs apparaissent. En écrivant qu'ils ne doivent pas s'annuler, on obtient la condition technique évoquée au paragraphe 3.2

Une fois qu'on dispose de F et f , on choisit un générateur φ de $\mathrm{Hom}_T\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, \widetilde{V}_3|_T\right)$. On note Φ , Ψ , et ℓ les éléments correspondant par les isomorphismes successifs

$$\mathrm{Hom}_G\left(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \mathbb{C}\right) \simeq \mathrm{Hom}_G\left(V_1 \otimes V_2, \widetilde{V}_3\right) \simeq \mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{ind}_T^G\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right), \widetilde{V}_3\right) \simeq \mathrm{Hom}_T\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}, \widetilde{V}_3|_T\right)$$

$$\ell \quad \mapsto \quad \Psi \quad \mapsto \quad \Phi \quad \mapsto \quad \varphi$$

Alors, grâce à (2) on trouve

$$\left(\Psi(F)\right)(v_3) = \ell\left(v_1 \otimes v_2^* \otimes \left(\sum_{i \in I} c_i \pi_3(g_i^{-1})v_3\right)\right),$$

grâce à (3) on obtient

$$\left(\Phi(f)\right)(v_3) = \int_{T \backslash G} f(g) \varphi\left(\pi_3(g)v_3\right) dg = \int_{T \backslash T\Gamma_0(\pi_F^n)} \varphi\left(\pi_3(k)v_3\right) dk = \lambda \cdot \varphi(v_3)$$

où λ est une constante non nulle (c'est le volume de l'orbite de $\Gamma_0(\pi_F^n)$ dans $T \backslash G$) et grâce à (1) on obtient

$$\left(\Psi(F)\right)(v_3) = \left(\Phi(f)\right)(v_3)$$

Il en résulte que la forme linéaire

$$\begin{cases} V_3 & \longrightarrow \mathbb{C} \\ v & \longmapsto \ell(v_1 \otimes v_2^* \otimes v) \end{cases}$$

n'est pas nulle. C'est donc un nouveau vecteur pour \widetilde{V}_3 . Comme v_3 est le nouveau vecteur de V_3 , en particulier, elle n'est pas nulle en v_3 . On obtient le résultat espéré

$$\ell(v_1 \otimes v_2^* \otimes v_3) \neq 0$$

□

Grandes lignes de la preuve de 3.3 et 3.5. — Le principe est le même que précédemment mais la situation est un peu plus simple. On commence par se ramener au cas où les trois caractères centraux sont triviaux. Alors $V_1 = V_2 = \text{St}$ et V_3 est une représentation de conducteur $n = 0$ ou 1 qui n'est pas isomorphe à St sinon le facteur $\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3)$ vaudrait -1 . On peut alors insérer $V_1 \otimes V_2 = \text{St} \otimes \text{St}$ dans une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{St} \longrightarrow \text{ind}_T^G(1) \longrightarrow \text{St} \otimes \text{St} \longrightarrow 0$$

qui fournit un isomorphisme

$$\text{Hom}_G(V_1 \otimes V_2, \widetilde{V}_3) \simeq \text{Hom}_G(\text{ind}_T^G(1), \widetilde{V}_3)$$

et par Frobenius on obtient

$$\text{Hom}_G(\text{ind}_T^G(1), \widetilde{V}_3) \simeq \text{Hom}_T(\mathbb{C}, \widetilde{V}_3|_T).$$

Comme précédemment, l'espace $\text{Hom}_T(\mathbb{C}, \widetilde{V}_3|_T)$ est de dimension 1 et si on choisit un générateur φ on sait que

$$\varphi(v_3) \neq 0.$$

On choisit donc un tel générateur φ et on note ℓ la forme linéaire qui lui correspond dans L par l'isomorphisme

$$\text{Hom}_G(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}_T(\mathbb{C}, \widetilde{V}_3|_T)$$

On calcule alors - beaucoup plus facilement que précédemment- une fonction f dans $\text{ind}_T^G(1)$ qui est la fonction caractéristique de l'orbite de K_n dans $T \backslash G$, avec $K_0 = K$ et $K_1 = \Gamma_0(\pi_F)$. Il vient

$$\ell(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = \int_{T \backslash G} f(g) \varphi(\pi_3(g)v_3) dg = \lambda \varphi(v_3)$$

où λ est une constante non nulle (c'est le volume de l'orbite de K_n dans $T \backslash G$).

□

4. Formes trilinéaires et vecteurs test lorsque F est archimédien.

4.1. Avant Prasad. — L' étude des formes trilinéaires invariantes a commencé dans le cas archimédien. En 1973 dans [O], Oksak décrit l'espace des formes trilinéaires invariantes pour le groupe $\text{SL}_2(\mathbb{C})$, dans le but de décomposer le produit tensoriel de deux représentations dites «élémentaires» de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. En 1978 dans [Rep], Repka décompose le produit tensoriel de deux représentations irréductibles et unitaires de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, puis en 1981 dans [A-R1] et [A-R2], avec Asmuth, il fait la même chose en remplaçant \mathbb{R} par un corps p -adique, où p est un nombre premier impair. Les travaux de Prasad, qui datent de 1990, étaient motivés par ceux Repka, dont il re-démontre certains résultats dans le contexte des (\mathfrak{g}, K) -modules.

4.2. (\mathfrak{g}, K) -modules. — Lorsque $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$ avec $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et K un sous-groupe compact maximal. On remplace les représentations de G par des (\mathfrak{g}, K) -modules. Lorsque $F = \mathbb{R}$, on choisit $K = \text{O}_2(\mathbb{R})$. Les (\mathfrak{g}, K) -modules irréductibles de dimension infinie se répartissent en deux séries, comme dans le cas des corps p -adiques : la série principale et la série discrète. La correspondance de Jacquet-Langlands associe aux modules de la série discrète des représentations irréductibles de \mathbb{H}^\times , où \mathbb{H} désigne l'algèbre des quaternions de Hamilton sur \mathbb{R} . Lorsque $F = \mathbb{C}$, on choisit $K = \text{SU}_2(\mathbb{C})$ et tous les (\mathfrak{g}, K) -modules irréductibles de dimension infinie appartiennent à la série principale.

4.3. Formes trilinéaires. — Soient (π_1, V_1) , (π_2, V_2) et (π_3, V_3) des (\mathfrak{g}, K) -modules irréductibles de dimension infinie. Par la correspondance de Langlands locale, on leur associe des représentations σ_1 , σ_2 et σ_3 du group de Weil de \mathbb{R} . Si le produit des caractères centraux des trois modules est trivial, le facteur ε obtenu vérifie

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = \pm 1$$

On s'intéresse à l'espace des formes trilinéaires invariantes

$$L = \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \mathbb{C})$$

Lorsque les trois modules appartiennent à la série discrète, on note V'_1, V'_2 et V'_3 les représentations irréductibles de \mathbb{H}^\times associées par la correspondance de Jacquet-Langland. On pose

$$L' = \text{Hom}_{\mathbb{H}^\times}(V'_1 \otimes V'_2 \otimes V'_3, \mathbb{C}).$$

Dans [P] Prasad obtient pour $F = \mathbb{R}$ un résultat analogue au théorème 3.1, mais il manque le cas où les trois (\mathfrak{g}, K) -modules appartiennent à la série principale :

Théorème 4.1 (Prasad). — *Soient $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ et (π_3, V_3) des (\mathfrak{g}, K) -modules irréductibles de dimension infinie. On suppose que le produit de leurs caractères centraux est trivial.*

- Si les trois modules appartiennent à la série principale

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = 1.$$

- Si au moins un des trois modules appartient à la série principale et un autre appartient à la série discrète

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}} L = 1.$$

- Si les trois modules appartiennent à la série discrète,

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = 1 \iff \dim_{\mathbb{C}} L = 1 \iff \dim_{\mathbb{C}} L' = 0$$

$$\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = -1 \iff \dim_{\mathbb{C}} L = 0 \iff \dim_{\mathbb{C}} L' = 1$$

Ce théorème a été complété par Loke dans [L] :

Théorème 4.2 (Loke). — *Soient $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ et (π_3, V_3) des (\mathfrak{g}, K) -modules irréductibles de dimension infinie. On suppose que le produit de leurs caractères centraux est trivial.*

- Lorsque $F = \mathbb{R}$, si les trois modules appartiennent à la série principale l'espace L est de dimension 1.
- Lorsque $F = \mathbb{C}$, les trois modules appartiennent nécessairement à la série principale. Modulo une hypothèse technique portant sur les π_i , l'espace L est de dimension 1.

4.4. Vecteurs test. — L'article de Loke fournit également une description des vecteurs test dans les deux cas. Nous nous contenterons ici d'expliquer brièvement le cas $F = \mathbb{R}$, et nous renvoyons le lecteur intéressé au corollaire 4.6 de [L], pour le cas $F = \mathbb{C}$.

Les séries principales de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ sont paramétrées par des triplets $(s, \varepsilon, m) \in \mathbb{C} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Une série principale (π, V) paramétrée par (s, ε, m) possède une base

$$\{ w_n \in V \mid n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \equiv \varepsilon \pmod{2} \}$$

dont les vecteurs sont déterminés en tant que vecteurs propres de certains opérateurs. Cette base permet de décrire les vecteurs test.

Soient (π_1, V_1) , (π_2, V_2) et (π_3, V_3) des (\mathfrak{g}, K) -modules qui appartiennent à la série principale. On suppose que le produit de leurs caractères centraux est trivial. Il existe alors une forme trilinéaire non nulle ℓ dans L . Pour chaque i dans $\{1, 2, 3\}$, on note $(s_i, \varepsilon_i, m_i)$ les paramètres de π_i et (w_n^i) les vecteurs correspondants. De l'hypothèse sur les caractères centraux, on déduit

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \equiv 0 \pmod{2}$$

On peut alors supposer que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, tandis que $\varepsilon_3 = 0$.

Théorème 4.3 (Loke). — *Dans ces conditions*

- si $\varepsilon_1 = 1$, $w_1^1 \otimes w_{-1}^2 \otimes w_0^3$ est un vecteur test pour ℓ ,
- si $\varepsilon_1 = 0$ et si $m_1 + m_2 + m_3$ est impair, $w_0^1 \otimes w_0^2 \otimes w_0^3$ est un vecteur test pour ℓ ,
- si $\varepsilon_1 = 0$ et si $m_1 + m_2 + m_3$ est pair, $w_{-2}^1 \otimes w_2^2 \otimes w_0^3$ est un vecteur test pour ℓ .

4.5. Changement de groupe. — Dans [D], Anton Deitmar étudie l'espace des formes trilinéaires invariantes pour les représentations lisses d'un groupe de Lie-semi simple. Il démontre que si cet espace est de dimension 0 ou 1, alors le groupe est localement un produit de groupes hyperboliques.

5. Globalisation

Dans [G-P], Gross et Prasad donnent une version globale de leurs théorèmes locaux. Soit E une extension finie de \mathbb{Q} qui n'a pas de places complexes et \mathbb{A} l'anneau des adèles de E . Soit D une algèbre de quaternions sur E qui se ramifie en toutes les places réelles. Pour toute place v de E on note

$$\varepsilon_v(D) = \begin{cases} 1 & \text{si } D \text{ est déployée} \\ -1 & \text{si } D \text{ est ramifiée} \end{cases}$$

Soient V_1, V_2, V_3 des représentations admissibles, irréductibles et de dimension infinie du groupe $G_{\mathbb{A}} = D_{\mathbb{A}}^{\times}/E_{\mathbb{A}}^{\times}$.

Théorème 5.1 (Gross-Prasad). — *L'espace des formes linéaires $G_{\mathbb{A}}$ invariantes*

$$\ell : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

est de dimension 0 ou 1. C'est 1 lorsque, pour toute place v de E

$$\varepsilon_v(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3) = \varepsilon_v(D)$$

Principe de la démonstration. — Chacune des trois représentations V_i s'obtient comme le produit tensoriel restreint de représentations $V_{i,v}$ du groupe $G_v = (D \otimes E_v)^{\times}$ dont le caractère central est trivial. La condition sur les facteurs ε assure, en toute place v de E , l'existence d'une forme linéaire G_v -invariante, non nulle

$$\ell_v : V_{1,v} \otimes V_{2,v} \otimes V_{3,v} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

La forme linéaire globale s'obtient comme le produit tensoriel des formes locales. \square

Pour trouver un vecteur test global, il faut faire des hypothèses supplémentaires

- aux places v où D se ramifie, $\dim_{\mathbb{C}} V_{i,v} = 1$,
- aux places v où D se déploie, les conducteurs des représentations $V_{1,v}$, $V_{2,v}$ et $V_{3,v}$ sont égaux, et ils valent 0 ou 1. On note n_v leur valeur commune.

La seconde hypothèse consiste à se placer dans les conditions des théorèmes 3.2 et 3.3. En chaque place v où D se ramifie, on note R_v l'ordre maximal de $D \otimes E_v$. Le sous-groupe ouvert compact

$$\prod_{v \text{ ramifiée}} R_v^\times \times \prod_{v \text{ déployée}} \Gamma_0(\pi_F^{n_v})$$

de G fixe une unique droite dans chaque espace V_i , et on note v_i un vecteur non-nul de cette droite.

Théorème 5.2 (Gross-Prasad). — *Le vecteur $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ est un vecteur test pour ℓ .*

NB : la même méthode fournit des vecteurs test lorsqu'on modifie la seconde hypothèse de manière à se placer dans les conditions des théorèmes 3.5 et 3.6.

5.1. Vers la cohomologie motivique. — Dans [H-S] Harris et Scholl généralisent le théorème 3.1 de Prasad au cas où π_1 , π_2 et π_3 sont des induites paraboliques, irréductibles ou non. Ils utilisent une version globale de ce résultat pour exhiber des éléments dans la cohomologie motivique du produit de deux courbes modulaires construites par Beilinson.

6. Fonctions L

6.1. Fonction L d'une représentation. — Soient E une extension finie de \mathbb{Q} et π une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(\mathbb{A}_E)$. Elle se décompose en un produit tensoriel de facteurs locaux

$$\pi = \bigotimes_v \pi_v$$

et on lui associe une fonction L qui est définie par un produit eulérien sur le demi-plan $\Re(s) > 1$

$$L(\pi, s) = \prod_{v \text{ finie}} L(\pi_v, s) \quad \text{avec} \quad L(\pi_v, s) = \left(1 - \frac{\alpha_1(v)}{q_v^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\alpha_2(v)}{q_v^s}\right)^{-1}$$

où q_v est le cardinal du corps résiduel de E_v , et où $\alpha_1(v)$ et $\alpha_2(v)$ sont des nombres complexes déterminés par π_v . La fonction L se prolonge à tout le plan complexe, en une fonction analytique. Si v est une place infinie réelle de E , on pose

$$L(\pi_v, s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \mu_1(v))\Gamma_{\mathbb{R}}(s - \mu_2(v)) \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

Si v est une place infinie complexe de E , on pose

$$L(\pi_v, s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s - \mu_1(v))\Gamma_{\mathbb{C}}(s - \mu_2(v)) \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \Gamma_{\mathbb{R}}\left(\frac{s}{2}\right)$$

où $\mu_1(v)$ et $\mu_2(v)$ sont des nombres complexes déterminés par π_v . On complète la fonction L en une fonction Λ

$$\Lambda(\pi, s) = L(\pi, s) \prod_{v|\infty} L(\pi_v, s)$$

qui vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$(1) \quad N(\mathfrak{q}_\pi)^{\frac{s}{2}} \Lambda(\pi, s) = \varepsilon(\pi) N(\mathfrak{q}_\pi)^{\frac{1-s}{2}} \Lambda(\tilde{\pi}, 1-s)$$

où \mathfrak{q}_π est le conducteur de π et $N(\mathfrak{q}_\pi)$ sa norme dans \mathbb{Q} .

6.2. Fonctions L de produits triples. — Soit (π_1, π_2, π_3) un triplet de représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)$. On peut lui associer une fonction L notée $L(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, s)$ ou $L(\pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, s)$. Pour cela, on introduit dans les notations un indice j dans $\{1, 2, 3\}$ pour préciser à quelle représentations sont attachés les paramètres considérés. En toute place finie v où π_1, π_2 et π_3 ne sont pas ramifiées, la fonction L locale est

$$L((\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)_v, s) = \prod_{\eta} \left(1 - \frac{\alpha_{j,\eta(1)}(v)\alpha_{j,\eta(2)}(v)\alpha_{j,\eta(3)}(v)}{q_v^s} \right)^{-1}$$

où η décrit l'ensemble des applications de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2\}$. On pose alors

$$L(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, s) = \prod_{v \text{ finie non ramifiée}} L((\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)_v, s).$$

Cette fonction se prolonge en une fonction analytique de tout le plan complexe. Si on la complète par un facteur archimédien approprié, elle vérifie une équation fonctionnelle comparable à (1), reliant les valeurs de la fonction L en s et $1-s$. Le point $s = \frac{1}{2}$ apparaît alors comme le centre de symétrie de cette équation fonctionnelle.

6.3. La conjecture de Jacquet. — A la suite du travail de Prasad, Jacquet a formulé une conjecture sur les fonctions L de produits triples de représentations. Soient E une extension finie de \mathbb{Q} et π_1, π_2 et π_3 des représentations cuspidales automorphes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)$. Pour chaque j dans $\{1, 2, 3\}$, la représentation π_j se décompose en un produit tensoriel de facteurs locaux

$$\pi_j = \bigotimes_v \pi_{j,v}$$

On note \mathcal{D} l'ensemble des algèbres de quaternions sur E qui se ramifient exactement aux places v où $\pi_{1,v}, \pi_{2,v}$ et $\pi_{3,v}$ appartiennent à la série discrète. Pour tout élément D_α de \mathcal{D} , on note $(\pi_{j,\alpha}, V_{j,\alpha})$ la représentation automorphe de $D_\alpha^\times(\mathbb{A}_E)$ associée à

π_j par la correspondance de Jacquet-Langlands globale. Enfin, pour $f_{1,\alpha}$, $f_{2,\alpha}$ et $f_{3,\alpha}$ dans $V_{1,\alpha}$, $V_{2,\alpha}$ et $V_{3,\alpha}$ respectivement, on définit l'intégrale

$$I(f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, f_{3,\alpha}) = \int_{\mathbb{A}_E^\times D_\alpha^\times(E) \backslash D_\alpha^\times(\mathbb{A}_E)} f_{1,\alpha}(h) f_{2,\alpha}(h) f_{3,\alpha}(h) dh$$

qui est une forme trilinéaire invariante sur $V_{1,\alpha} \otimes V_{2,\alpha} \otimes V_{3,\alpha}$

Conjecture 6.1 (Jacquet). — *La fonction $L(s, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)$ s'annule en $s = \frac{1}{2}$ si et seulement si, pour tout D_α dans \mathcal{D} et tout triplet $(f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, f_{3,\alpha})$ dans $V_{1,\alpha} \times V_{2,\alpha} \times V_{3,\alpha}$, l'intégrale $I(f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, f_{3,\alpha})$ s'annule.*

En terme de vecteurs test, ceci signifie que la valeur de la fonction L au point critique est non nulle si et seulement si il existe une algèbre de quaternions dans D_α pour laquelle il y a un vecteur test dans $V_{1,\alpha} \otimes V_{2,\alpha} \otimes V_{3,\alpha}$.

Dans [H-K1] et [H-K2] Harris et Kudla ont démontré cette conjecture. La démonstration repose sur une formule explicite, qui exprime la valeur de $L(\frac{1}{2}, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)$ comme une somme de termes de la forme $I(f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, f_{3,\alpha}) I(f'_{1,\alpha}, f'_{2,\alpha}, f'_{3,\alpha})$. Dans cette formule, α est fixé et pour chaque j dans $\{1, 2, 3\}$, les fonctions $f_{j,\alpha}$ et $f'_{j,\alpha}$ appartiennent à l'espace de $\pi_{j,\alpha}$ et sont déterminées grâce aux résultats de Prasad.

D'autres formules explicites reliant la la valeur de $L(\frac{1}{2}, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3)$ à des intégrales de la forme $I(f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, f_{3,\alpha})$ ont été établies dans des cas particuliers, par Böcherer et Schulze-Pillot [B-S] et par Watson [W]. Toutes ces formules ont été généralisées par Ichino dans un preprint récent [I].

Terminons ce paragraphe en citant, à titre d'exemple, la formule que Watson a obtenue pour des formes de Maass φ_1 , φ_2 et φ_3 de norme 1 sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$

$$(2) \quad \left| \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \varphi_1(z) \varphi_2(z) \varphi_3(z) \frac{dx dy}{y^2} \right|^2 = \frac{\frac{216}{\pi^4} \Lambda(\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3, \frac{1}{2})}{\Lambda(\mathrm{sym}^2 \varphi_1, 1) \Lambda(\mathrm{sym}^2 \varphi_2, 1) \Lambda(\mathrm{sym}^2 \varphi_3, 1)}.$$

La fonction $\Lambda(\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3, s)$ est la fonction L complétée : pour chaque j dans $\{1, 2, 3\}$, les paramètres de φ_j à l'infini sont de la forme $\mu_1(\infty) = ir_j$ et $\mu_2(\infty) = -ir_j$. On a alors

$$\Lambda(\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3, s) = \pi^{-4s} \prod_{\varepsilon_j = \pm 1} \Gamma\left(\frac{s + \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \varepsilon_3 r_3}{2}\right) L(\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3, s)$$

Les fonctions $\Lambda(\mathrm{sym}^2 \varphi_j, s)$ sont des fonctions L du produit symétrique, convenablement complétées, qu'on ne décrira pas ici.

6.4. Convexité et sous-convexité. — Le problème de convexité, consiste à estimer le comportement de la fonction L sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Le conducteur analytique de la fonction L , défini par Iwaniec et Sarnak dans [I-S], est la fonction

$$C(\pi, t) = N(\mathfrak{q}_\pi) \prod_{v|\infty} \left(1 + |\mu_1(v) + it|^{[E_v:\mathbb{R}]}\right) \left(1 + |\mu_2(v) + it|^{[E_v:\mathbb{R}]}\right)$$

qui fournit la borne de convexité :

$$(3) \quad L\left(\pi, \frac{1}{2} + it\right) \ll_{\varepsilon, E} C(\pi, t)^{\frac{1}{4} + \varepsilon}.$$

La notation $\ll_{\varepsilon, F}$ signifie que cette inégalité est vérifiée modulo une constante multiplicative implicite, constante qui ne dépend que de ε et de E . Le problème de sous-convexité consiste à trouver un nombre réel strictement positif δ tel qu'on puisse remplacer l'exposant $\frac{1}{4}$ par $\frac{1}{4} - \delta$ dans l'inégalité (3) de telle sorte que la constante implicite ne dépende pas de δ . On peut généraliser ce problème à d'autres classes de fonction L , comme les fonctions L de Rankin-Selberg, $L(\pi_1 \otimes \pi_2, s)$ ou les fonctions L de produit triple, $L(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, s)$. On renvoie à [I-S] et à [M-V] pour un exposé des résultats connus, et des applications possibles.

A cause des formules mentionnées au paragraphe 6.3, les vecteurs test jouent un rôle crucial dans ce problème. On travaille avec des familles de représentations automorphes pour lesquelles on s'efforce de borner les intégrales I du paragraphe 6.3. On peut, par exemple, fixer le niveau des représentations et imposer $t = 0$. On obtient alors des estimations en fonction des paramètres $\mu_{j,1}(v)$ et $\mu_{j,2}(v)$. C'est le point de vue de Bernstein et Reznikov. Ou bien on peut faire varier le niveau d'une des représentations, pour obtenir des estimations en fonction de ce niveau. C'est le point de vue de Michel et Venkatesh.

6.5. Attaque spectrale : Bernstein et Reznikov. — Soient φ_1, φ_2 et φ_λ trois formes de Maass sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ qui sont vecteur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami. On fixe φ_1 et φ_2 , et on note $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$ la valeur propre associée à φ_λ . Soient π_1, π_2 et π_λ les représentations cuspidales automorphes associées. Dans [BR1] et [BR2] Bernstein and Reznikov établissent la majoration

$$(4) \quad r^2 e^{\frac{\pi r}{2}} \left| \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_\lambda d\mu \right|^2 \ll_{\varepsilon} r^{\frac{5}{3} + \varepsilon}$$

qui fournit, grâce à la formule (2), une borne de sous convexité :

$$L(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_\lambda, \frac{1}{2}) \ll_{\varepsilon, \pi_1, \pi_2} r^{\frac{5}{3} + \varepsilon}.$$

Il ont ainsi amélioré la borne de convexité de la fonction L , qui était en $r^{2+\varepsilon}$

Un point intéressant de la démonstration. — De nombreuses idées et techniques ont été mises en œuvre pour obtenir ce résultat. Nous nous contenterons d'expliquer où interviennent les vecteurs test. Ici, π_1, π_2 et π_λ sont des représentations irréductibles et

admissibles du groupe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dans des espaces vectoriels de dimension infinie V_1, V_2 et V_λ . Leur caractère central est trivial. L'espace des formes linéaires G -invariantes sur $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ est donc de dimension 0 ou 1 si bien que, pour estimer $\left| \int \varphi_1 \varphi_2 \varphi_\lambda d\mu \right|$ on peut remplacer $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_\lambda)$ par n'importe quel triplet de vecteurs (v_1, v_2, v_λ) dans $V_1 \times V_2 \times V_\lambda$. Bernstein et Reznikov utilisent alors un modèle connu des représentations π_1, π_2 et π_λ dans des espaces de fonctions sur le cercle unité. Tout y est explicite : les vecteurs v_1, v_2, v_λ et la forme trilinéaire qu'on notera ℓ . Il existe donc un nombre complexe a_λ qui vérifie

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_\lambda d\mu = a_\lambda \cdot \ell(v_1 \otimes v_2 \otimes v_\lambda)$$

Des techniques analytiques permettent alors d'évaluer $\ell(v_1 \otimes v_2 \otimes v_\lambda)$ tandis que des techniques algébriques sont nécessaires pour borner a_λ . On aboutit à (4). \square

6.6. Attaque par le niveau : Michel et Venkatesh. — Soient π_1 et π_2 des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_E)$, qui sont fixées. Soit π une troisième représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_E)$ de conducteur \mathfrak{q} . On suppose que \mathfrak{q} est un idéal premier qui est premier aux conducteurs de π_1 et π_2 . Dans [V], Venkatesh a démontré que

$$(5) \quad L(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi, \frac{1}{2}) \ll_{\pi_\infty} N(\mathfrak{q})^{1-\frac{1}{13}}$$

quand le niveau de π varie, sous réserve qu'une version appropriée de la formule (2) soit vraie. La borne de convexité pour cette fonction L est en $N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}$. Une version de la formule (5) lorsque π_1 ou π_2 est une série d'Eisenstein fournit une borne de convexité pour des fonctions L de Rankin-Selberg. Par exemple, si π_1 et π sont comme ci-dessus,

$$(6) \quad L(\pi_1 \otimes \pi, \frac{1}{2} + it)^2 \ll_{t, \pi_\infty} N(\mathfrak{q})^{1-\frac{1}{100}}$$

$$(7) \quad L(\pi, \frac{1}{2} + it)^4 \ll_{t, \pi_\infty} N(\mathfrak{q})^{1-\frac{1}{600}}$$

On renvoie à [M-V] pour une liste des résultats obtenus et à [V] pour plus un exposé plus détaillé.

Rappelons que le principe fondamental pour obtenir ces majorations consiste à écrire les fonctions L comme une forme trilinéaire invariante évaluée sur un vecteur test, sous forme d'une intégrale $I(f_1, f_2, f_3)$. Venkatesh explique dans le paragraphe 5.1 de [V] que si l'on se contente d'un vecteur test dont on connaît théoriquement l'existence, on n'obtient pas vraiment la fonction L , mais une fonction holomorphe qui diffère de la fonction L par un facteur multiplicatif qui ne varie pas trop. Pour avoir un meilleur contrôle de ce facteur, il faut choisir judicieusement les vecteurs test. Malheureusement, les difficultés techniques augmentent très vite avec le conducteur des représentations en jeu.

Références

- [A-R1] Charles Asmuth et Joe Repka, *Tensor products for $SL_2(K)$. I. Complementary series and the special representation*. Pacific Journal of Mathematics **97** no. 2, (1981), 271–282.
- [A-R2] Charles Asmuth et Joe Repka, *Tensor products for $SL_2(K)$. II. Supercuspidal representations*. Pacific Journal of Mathematics **97** no. 1, (1981) 1–18.
- [B] Daniel Bump, *Automorphic Forms and Representations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 55.
- [B-H] Colin J. Busnell et Guy Henniart, *The local Langlands conjecture for $GL(2)$* . Springer Series : Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. **335** (2007) .
- [B-S] Siegfried Böcherer et Rainer Schulze-Pillot *On the central critical value of the triple product L -function*, Number Theory (Paris 1993–1994). London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press **235** (1996), 1–46.
- [B-Z] Joseph Bernstein et Andrei Zelevinsky, *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-archimedean local field*. Russian Mathematical Surveys **31 :3** (1976), 1–68.
- [B-R 1] Joseph Bernstein et André Reznikov, *Estimates of automorphic functions*. Moscow Mathematic Journal **4**, no.1 (2004), 19–37.
- [B-R 2] Joseph Bernstein et André Reznikov, *Periods, subconvexity and representation theory*. Journal of differential geometry **70** (2005), 129–142.
- [C] William Casselman, *On some Results of Atkin and Lehner*. Mathematische Annalen **201** (1973), 301–314.
- [D] Anton Deitmar, *Invariant triple products*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences vol. 2006, Article ID 48274, 22 pages, 2006. doi :10.1155/IJMMS/2006/48274
- [G] Stephen S. Gelbart, *Automorphic forms on Adele groups*. Annals of Mathematics Studies, 83. Princeton University Press.
- [G-P] Benedict H.Gross et Diprenda Prasad, *Test Vectors for Linear forms*. Mathematische Annalen **291** (1991), 343–355.
- [H-K1] Michael Harris et Stephen Kudla, *The central critical value of a triple product l -function*. Annals of Mathematics **133** (1991), 605–672.
- [H-K2] Michael Harris et Stephen Kudla, *On a conjecture of Jacquet*. Dans *Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory*, Johns Hopkins University Press, Maryland (2004) 355–371.
- [H-S] Michael Harris et Anthony Scholl, *A note on trilinear forms for reducible representations and Beilinson conjectures*. Journal of the European Mathematical Society **2001, 1** (2001), 93–104.
- [I] Atsushi Ichino, *Trilinear forms and the central values of triple product L -functions*. Preprint (2008).
- [I-S] Henrik Iwaniec and Peter Sarnak, *Perspectives on the analytic theory of L -functions*. Geometric And Functional Analysis, Special Volume : GAFA 2000 (Tel Aviv 1999), part II, 705–741.
- [J-L] Hervé Jacquet et Robert P Langlands, *Automorphic Forms on $GL(2)$* . Lecture Notes in Mathematics **114** (1970).
- [L] Hung Yean Loke, *Trilinear Forms for \mathfrak{gl}_2* . Pacific Journal of Mathematics **197**, no.1 (2001), 119–144.

- [M-V] Philippe Michel and Akshay Venkatesh, *Equidistribution, L-functions and Ergodic theory : on some problem of Yu. V. Linnik*. In *International Congress of Mathematicians 2006, Madrid*, Volume II, 421–458. European Mathematical Society, Zurich.
- [N] Louise Nyssen, *Test vectors for trilinear forms, when two representations are unramified*. Preprint (2007).
- [O] A. I. Oksak, *Trilinear Lorentz invariant forms*. *Communications in Mathematical Physics* **29** (1973), 189–217.
- [P] Diprenda Prasad, *Trilinear forms for representations of $GL(2)$ and local ε -factors*. *Compositio Mathematica* **75** (1990), 1–46.
- [Rep] Joe Repka, *Tensor products of unitary representations of $SL_2(\mathbb{R})$* . *American Journal of Mathematics* **100** no. 4 (1978), 747–774. *Amer. J. Math.* 100 (1978), no. 4, 747–774.
- [R] André Reznikov, *Ranking-Selberg without unfolding and bounds for spherical Fourier coefficients of Maass Forms*. *Journal of AMS*, **21**, no. 2 (2008), 439–477.
- [V] Akshay Venkatesh, *Sparse equidistribution problems, period bounds, and subconvexity*. Preprint (2005).
- [W] Jean-Loup Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie*. *Compositio Mathematica* **54** (1985), 173–242.
- [Wat] Thomas C. Watson, *Rankin Triple product and quantum chaos*. To appear in *Annals of Mathematics*.