



HAL
open science

Sur les intervalles de confiance bilatéraux en modèle exponentiel discret

Francis Maisonneuve

► **To cite this version:**

Francis Maisonneuve. Sur les intervalles de confiance bilatéraux en modèle exponentiel discret. 2013.
hal-00803849

HAL Id: hal-00803849

<https://hal.science/hal-00803849v1>

Preprint submitted on 23 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur les intervalles de confiance bilatéraux en modèle exponentiel discret

Francis Maisonneuve

MINES ParisTech

Résumé

La construction d'intervalles de confiance pour le paramètre d'un modèle exponentiel pose un problème structurel dans le cas discret. On cherche dans cette étude à réduire autant qu'il est possible les intervalles fournis par la procédure standard, tout en conservant une propriété naturelle d'emboîtement dégagée par H. Blaker. On obtient par une démarche fort différente des résultats voisins des siens.

Abstract

About Bilateral Confidence Intervals for Discrete Exponential Families

The definition of confidence intervals for the parameter of an exponential family raises a structural problem in the discrete case. The aim of this study is to reduce as much as possible intervals provided by the standard procedure, while preserving a natural nesting condition outlined by H. Blaker. We obtain, by a quite different approach, results similar to his own.

1. Introduction

L'estimation par intervalles de confiance bilatéraux du paramètre réel d'un modèle est un problème classique, qui n'a pas dans le cas discret de solution parfaite dans le cadre de la statistique fréquentiste. Le cas binomial en particulier a donné lieu à de nombreuses propositions de méthodes et variantes : formules asymptotiques (Wald et Wilson avec ou sans correction de continuité), méthodes à couverture exacte (Clopper-Pearson [3]) ou en moyenne (Agresti et Coull [1]), procédures bayésiennes (Jeffreys), intervalles randomisés (Stevens [7]) ou flous (Geyer and Meeden [5])...

Plutôt que la démarche habituelle par inversion d'un test bilatéral équilibré bien choisi, nous partons d'une fonction pivotale définie sur mesure, qui nous permet en section 2 de retrouver plusieurs des méthodes classiques et de proposer une méthode de réduction des intervalles de confiance standards en conservant la couverture exacte. Le cas binomial illustre en section 3 les résultats obtenus.

Soit $T = \tau(X_1, \dots, X_n)$ la statistique canonique d'un modèle exponentiel relatif à une variable réelle discrète X , de paramètre $\theta \in \Theta$ intervalle ouvert. Le modèle image par T est aussi exponentiel, de mesure

dominante discrète μ portée par $\Delta \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{t \in \mathbb{R} : \mu(\{t\}) > 0\}$. On sait que, quitte \u00e0 remplacer T par $-T$, le rapport $f_{\theta_2}^T/f_{\theta_1}^T$ des densit\u00e9s de T par rapport \u00e0 μ est pour tout $\theta_1 < \theta_2$ une fonction croissante de t ; et que, \u00e0 $t \in \mathbb{R}$ fix\u00e9, $f_t^T(\theta) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} f_\theta^T(t) = e^{n[\alpha(\theta)t + \beta(\theta)]}$ est une fonction de θ strictement monotone ou unimodale sur Θ , du fait que son logarithme est strictement concave en param\u00e9trisation canonique.

Notons pour tout $\theta \in \Theta$, $F_\theta^g(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} P_\theta(T \geq t)$ et $F_\theta^d(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} P_\theta(T > t)$ ($F_\theta^g \geq F_\theta^d$), les versions continues \u00e0 gauche et \u00e0 droite de la fonction de r\u00e9partition compl\u00e9mentaire de T , qui diff\u00e8rent en tout $t \in \Delta$ de la quantit\u00e9 $P_\theta(T = t) = f_\theta^T(t) \mu(\{t\}) > 0$. Comme μ est discr\u00e8te, les variables compos\u00e9es $F_\theta^d(T)$ et $F_\theta^g(T)$ ne sont plus que des approximations (non diffuses) d'une variable uniforme sur $]0, 1[$, qui de plus d\u00e9pendent de θ . On obtient une vraie fonction pivotale par m\u00e9lange al\u00e9atoire :

Proposition 1.1 *Soit T une variable r\u00e9elle de fonctions de r\u00e9partition compl\u00e9mentaires continue \u00e0 droite F^d et \u00e0 gauche $F^g \geq F^d$; et soit U une variable uniforme sur $]0, 1[$ ind\u00e9pendante de T .*

La variable compos\u00e9e $\psi(T, U) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (1 - U) F^d(T) + U F^g(T)$ v\u00e9rifie $\psi(T, U) \stackrel{\mathcal{L}}{=} U$.

Preuve Il suffit de montrer que $P(\psi(T, U) < y) = y$ en tout point $y \in]0, 1[$. On suppose d'abord que $y = F^d(t)$ pour un $t \in \mathbb{R}$, et on pose $\bar{t} = \sup\{s \geq t : F^d(s) = F^d(t)\}$. On a $\{\psi(T, U) < F^d(t)\} = \{T > \bar{t}\}$ si $F^d(t) = F^d(\bar{t})$ (c'est le cas si $\bar{t} = t$ ou si pas de saut en $\bar{t} > t$), et $\{\psi(T, U) < F^d(t)\} = \{T \geq \bar{t}\}$ si $F^d(t) = F^g(\bar{t}) > F^d(\bar{t})$, car $U < 1$; d'o\u00f9 le r\u00e9sultat. On suppose ensuite que $y = F^d(t) + u(F^g(t) - F^d(t))$ pour un $t \in \mathbb{R}$ et un $u \in]0, 1[$; on a $\{\psi(T, U) < y\} = \{T > t\} \uplus (\{T = t\} \cap \{U < u\})$, de sorte que $P(\psi(T, U) < y) = F^d(t) + u(F^g(t) - F^d(t)) = y$; d'o\u00f9 \u00e0 nouveau le r\u00e9sultat. \square

Ainsi l'application $\psi_\theta(t, u) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (1 - u) F_\theta^d(t) + u F_\theta^g(t) = F_\theta^d(t) + u P_\theta(T = t)$ v\u00e9rifie $\psi_\theta(T, U) \stackrel{\mathcal{L}}{=} U$ d'apr\u00e8s la proposition : ψ est donc une fonction pivotale intrins\u00e8que au mod\u00e8le exponentiel, mais qui d\u00e9pend d'une variable suppl\u00e9mentaire $u \in [0, 1]$. On sait qu'\u00e0 t fix\u00e9, les applications F_t^d et F_t^g sont continues et croissantes (au sens large) sur Θ (*croissance stochastique*). Soit I le plus petit intervalle ouvert de \mathbb{R} dont l'adh\u00e9rence contient Δ ; comme $f_\theta^T > 0$ partout, on a $I = \{0 < F_\theta^d \leq F_\theta^g < 1\}$ pour tout $\theta \in \Theta$, et on peut pr\u00e9ciser que F_t^d et F_t^g sont strictement croissantes pour tout $t \in I$: en effet la croissance de F_t^d et F_t^g s'\u00e9tablit classiquement en montrant que pour tous $\theta_1 < \theta_2$ dans Θ , on a (F d\u00e9signant ici F^g ou F^d)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} F_{\theta_2}(t) \geq \lambda_t F_{\theta_1}(t) \\ 1 - F_{\theta_2}(t) \leq \lambda_t (1 - F_{\theta_1}(t)) \end{cases} \quad \text{o\u00f9 } \lambda_t = \frac{f_{\theta_2}^T(t)}{f_{\theta_1}^T(t)},$$

du fait de la croissance de l'application $s \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_s$; de sorte que $F_{\theta_2}(t) \geq F_{\theta_1}(t)$, d'apr\u00e8s la premi\u00e8re in\u00e9galit\u00e9 si $\lambda_t \geq 1$ et d'apr\u00e8s la seconde in\u00e9galit\u00e9 si $\lambda_t < 1$. Supposons par l'absurde l'existence d'un $t \in I$ tel que F_t est constante sur un intervalle non trivial de Θ ; pour tous $\theta_1 < \theta_2$ dans cet intervalle, l'\u00e9galit\u00e9 $F_{\theta_1}(t) = F_{\theta_2}(t)$ impliquerait dans les in\u00e9galit\u00e9s ci-dessus $\lambda_t = 1$ et donc $f_{\theta_1}^T(t) = f_{\theta_2}^T(t)$, puisque $t \in I$ exclut qu'on ait $F_{\theta_1}(t) = F_{\theta_2}(t) \in \{0, 1\}$. La fonction f_t^T serait donc aussi constante sur l'intervalle en question, contradiction car f_t^T est strictement monotone ou unimodale sur Θ . En cons\u00e9quence l'application $\psi_{(t, u)} : \theta \in \Theta \mapsto \psi_\theta(t, u)$ est aussi continue et croissante sur Θ pour tout $(t, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ fix\u00e9, avec croissance stricte pour $t \in I$.

L'intervalle I n'est pas porteur de μ d\u00e8s que Δ a un minimum t_{\min} ou un maximum t_{\max} . Dans le premier cas, on a $F_{t_{\min}}^g(\theta) = 1$ pour tout $\theta \in \Theta$. Comme $1 = F_{t_{\min}}^g = F_{t_{\min}}^d + \mu(\{t_{\min}\}) f_{t_{\min}}^T$ avec $F_{t_{\min}}^d$ croissante, $f_{t_{\min}}^T$ est par \u00e9limination strictement d\u00e9croissante, et donc $F_{t_{\min}}^d$ ainsi que $\psi_{(t_{\min}, u)}$ pour tout $u \in [0, 1[$ sont strictement croissantes sur Θ . De mani\u00e8re analogue dans le second cas, $F_{t_{\max}}^g = 0 + \mu(\{t_{\max}\}) f_{t_{\max}}^T$, donc $f_{t_{\max}}^T, F_{t_{\max}}^g$ ainsi que $\psi_{(t_{\max}, u)}$ pour tout $u \in]0, 1]$ sont strictement croissantes sur Θ .

On fait les hypoth\u00e8ses compl\u00e9mentaires (couramment v\u00e9rifi\u00e9es) d'*\u00e9talement* de F^g et F^d , qui permettent d'\u00e9viter tout paradoxe apparent dans l'usage de la fonction pivotale ψ

$$\forall t \in I, \left\{ \begin{array}{l} \inf F_t^g(\Theta) = 0 \\ \sup F_t^d(\Theta) = 1 \end{array} \right., \text{ si } \exists t_{\min}, \left\{ \begin{array}{l} \inf F_{t_{\min}}^d(\Theta) = 0 \\ \sup F_{t_{\min}}^d(\Theta) = 1 \end{array} \right. \text{ et si } \exists t_{\max}, \left\{ \begin{array}{l} \inf F_{t_{\max}}^g(\Theta) = 0 \\ \sup F_{t_{\max}}^g(\Theta) = 1 \end{array} \right. ;$$

de sorte que $\forall (t, u) \in I \times]0, 1[$, $\psi_{(t,u)}(\Theta) \in]0, 1[$. Comme $\forall t \in \Delta$, $\mu(\{t\}) f_t^T = F_t^g - F_t^d$, on en déduit $\forall t \in I \cap \Delta$, $\lim_g f_t^T = \lim_d f_t^T = 0$ (limites en les extrémités gauche et droite de Θ) et f_t^T est unimodale. Si Δ a un minimum t_{\min} , on conclut $\lim_d f_{t_{\min}}^T = 0$; et si Δ a un maximum t_{\max} , on conclut $\lim_g f_{t_{\max}}^T = 0$.

2. Divers intervalles de confiance liés à la fonction pivotale

Fixons un niveau de confiance $\gamma \in]0, 1[$ et considérons l'intervalle associé $B =]\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1+\gamma}{2}[$ « à risque équilibré ». Comme $\forall (t, u) \in \Delta \times]0, 1[$, $\psi_{(t,u)}$ est continue et strictement croissante, $\{\psi_{(t,u)} \in B\}$ est un intervalle ouvert $] \theta_{(t,u)}^1, \theta_{(t,u)}^2 [$, éventuellement vide si $t = t_{\min}$ ou $t = t_{\max}$, avec $\theta_{(t,u)}^1$ et $\theta_{(t,u)}^2$ caractérisés par :

$$\forall t \in I \cap \Delta, \psi_{(t,u)}(\theta_{(t,u)}^1) = \frac{1-\gamma}{2} \text{ et } \psi_{(t,u)}(\theta_{(t,u)}^2) = \frac{1+\gamma}{2};$$

même chose si possible pour t_{\min} et t_{\max} , sinon $\theta_{(t_{\min},u)}^1 = \inf \Theta \leq \theta_{(t_{\min},u)}^2$ et $\theta_{(t_{\max},u)}^1 \leq \sup \Theta = \theta_{(t_{\max},u)}^2$.

Comme $\forall \theta \in \Theta$, $U \stackrel{\mathcal{L}}{=} \psi_{\theta}(T, U) = \psi_{(T,U)}(\theta)$ et $\{\psi_{(T,U)}(\theta) \in B\} = \{] \theta_{(T,U)}^1, \theta_{(T,U)}^2 [\ni \theta \}$, on a

$$\forall \theta \in \Theta, \gamma = P_{\theta}(\theta_{(T,U)}^1, \theta_{(T,U)}^2 [\ni \theta) = \int_{\mathbb{R} \times]0, 1[} \mathbb{1}_{\theta_{(t,u)}^1, \theta_{(t,u)}^2 [}(\theta) f_{\theta}^T(t) d\mu(t) du;$$

soit $\gamma = \sum_{t \in \Delta} P_{\theta}(T = t) \tilde{\Theta}_t^{\gamma}(\theta)$ où $\tilde{\Theta}_t^{\gamma}(\theta) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 \mathbb{1}_{\theta_{(t,u)}^1, \theta_{(t,u)}^2 [}(\theta) du$.

Pour tous $t \in \Delta$, l'application $\tilde{\Theta}_t^{\gamma}$, à valeurs dans $[0, 1]$, est ainsi un *intervalle flou* de support et noyau

$$\{\tilde{\Theta}_t^{\gamma} > 0\} = \bigcup_{0 < u < 1} \theta_{(t,u)}^1, \theta_{(t,u)}^2 [=] \hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2 [\text{ et } \{\tilde{\Theta}_t^{\gamma} = 1\} = \bigcap_{0 < u < 1} \theta_{(t,u)}^1, \theta_{(t,u)}^2 [= [\check{\theta}_t^1, \check{\theta}_t^2]$$

pour $\hat{\theta}_t^1 \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \theta_{(t,u)}^1$, $\hat{\theta}_t^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \theta_{(t,u)}^2$, $\check{\theta}_t^1 \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \theta_{(t,u)}^1$ et $\check{\theta}_t^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \theta_{(t,u)}^2$ (avec $[\hat{\theta}_t^1, \check{\theta}_t^2] = \emptyset$ si $\hat{\theta}_t^1 > \check{\theta}_t^2$); en effet la croissance (stricte) de la fonction affine $u \mapsto \psi_{\theta}(t, u)$ pour $(t, \theta) \in \Delta \times \Theta$ entraîne la décroissance de $u \mapsto \theta_{(t,u)}^1$ et $u \mapsto \theta_{(t,u)}^2$ (stricte pour $t \in I \cap \Delta$).

En conséquence $\forall t \in \Delta$ les deux valeurs $\hat{\theta}_t^1 < \hat{\theta}_t^2$, sont caractérisés par

$$\text{pour } t \neq t_{\min}, F_t^g(\hat{\theta}_t^1) = \frac{1-\gamma}{2} \text{ et } \hat{\theta}_{t_{\min}}^1 = \inf \Theta; \text{ pour } t \neq t_{\max}, F_t^d(\hat{\theta}_t^2) = \frac{1+\gamma}{2} \text{ et } \hat{\theta}_{t_{\max}}^2 = \sup \Theta;$$

et les deux valeurs $\check{\theta}_t^1$ et $\check{\theta}_t^2$, telles que $\check{\theta}_t^1, \check{\theta}_t^2 \in] \hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2 [$ pour $t \in I \cap \Delta$, sont caractérisées par

$$\text{pour } t \neq t_{\max}, F_t^d(\check{\theta}_t^1) = \frac{1-\gamma}{2} \text{ et } \check{\theta}_{t_{\max}}^1 = \sup \Theta; \text{ pour } t \neq t_{\min}, F_t^g(\check{\theta}_t^2) = \frac{1+\gamma}{2} \text{ et } \check{\theta}_{t_{\min}}^2 = \inf \Theta.$$

La décroissance stricte en t et la croissance en θ des applications F^g et F^d sur $\Delta \times \Theta$ assurent que les 4 applications $t \mapsto \hat{\theta}_t^1$, $t \mapsto \hat{\theta}_t^2$, $t \mapsto \check{\theta}_t^1$ et $t \mapsto \check{\theta}_t^2$ sont strictement croissantes sur Δ . On note que l'application $F_t^d + F_t^g$ étant pour tout $t \in I \cap \Delta$ continue, strictement croissante sur Θ et d'image $]0, 2[$, il existe une unique valeur θ_t^{med} de θ , l'estimation T -médiane ponctuelle de θ sachant $t \in I \cap \Delta$, telle que

$$(F_t^d + F_t^g)(\theta_t^{\text{med}}) = 1 \iff P_{\theta_t^{\text{med}}}(T < t) = P_{\theta_t^{\text{med}}}(T > t).$$

On vérifie aisément que $\forall \gamma \in]0, 1[$, on a $\theta_t^{\text{med}} \in [\min(\hat{\theta}_t^1, \check{\theta}_t^2), \max(\check{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2)] \subset] \hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2 [$,

avec $\{\tilde{\Theta}_t^{\gamma} = 1\} = [\check{\theta}_t^1, \check{\theta}_t^2] \neq \emptyset \iff \check{\theta}_t^1 \leq \theta_t^{\text{med}} \leq \check{\theta}_t^2 \iff \gamma \geq P_{\theta_t^{\text{med}}}(T = t)$.

En fait on veut disposer de vrais intervalles pour l'estimation de θ sachant t . Une première solution serait de se référer directement à l'intervalle aléatoire de confiance randomisé $] \theta_{(T,U)}^1, \theta_{(T,U)}^2 [$, de niveau précis γ , pour retenir l'intervalle $] \theta_{(t,u)}^1, \theta_{(t,u)}^2 [$. Mais il paraît inacceptable que pour une même réalisation $t \in \Delta$ de T , l'intervalle de confiance de θ puisse varier au gré d'une valeur aléatoire u indépendante du

modèle étudié et qui ne porte en conséquence aucune information le concernant ! On cherche à définir de vrais intervalles de confiance déterministes. Une seconde solution plus intéressante est de remarquer que

$$(\forall (t, u) \in \Delta \times]0, 1[,]\hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2[\supseteq]\theta_{(t,u)}^1, \theta_{(t,u)}^2[) \implies]\hat{\theta}_T^1, \hat{\theta}_T^2[\supseteq]\theta_{(T,U)}^1, \theta_{(T,U)}^2[.$$

On a donc $\forall \theta \in \Theta$, $P_\theta(] \hat{\theta}_T^1, \hat{\theta}_T^2[\ni \theta) \geq \gamma$, ce qui exprime qu'on peut attribuer à l'intervalle aléatoire $\hat{\Theta}_T^\gamma \stackrel{\text{déf}}{=}] \hat{\theta}_T^1, \hat{\theta}_T^2[$ un niveau de confiance au moins égal à γ . On retrouve ici la méthode standard de couverture exacte, qui a l'inconvénient d'être conservatrice car les intervalles $\hat{\Theta}_t^\gamma$ associés sont surdimensionnés. On va s'employer dans la suite à les réduire de manière fine sous la contrainte de couverture exacte. Pour cela on se réfère à la formule de calcul

$$\forall \theta \in \Theta, P_\theta(] \hat{\theta}_T^1, \hat{\theta}_T^2[\ni \theta) = \sum_{t \in \Delta : \hat{\theta}_t^1 < \theta < \hat{\theta}_t^2} P_\theta(T = t), \quad (1)$$

et on cherche à définir au mieux $\theta_t^1 < \theta_t^2$ dans $[\hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2]$ pour tout $t \in \Delta$, vérifiant encore

$$P_\theta(] \theta_T^1, \theta_T^2[\ni \theta) = \sum_{t \in \Delta : \theta_t^1 < \theta < \theta_t^2} P_\theta(T = t) \geq \gamma$$

pour *presque* tout $\theta \in \Theta$ (au sens de sauf pour un nombre au plus dénombrable de θ) : on dira alors que l'intervalle aléatoire $\Theta_T^\gamma \stackrel{\text{déf}}{=}] \theta_T^1, \theta_T^2[$ est à couverture *presque exacte*.

On suppose dorénavant que Δ est fini ou localement fini, de sorte que chaque $t \in \Delta$ a un prédécesseur noté t_- (si $t \neq t_{\min}$) et un successeur noté t_+ (si $t \neq t_{\max}$). Comme $\{T \geq t\} = \{T > t_-\}$ et $\{T \geq t_+\} = \{T > t\}$, on a $F_{t_-}^d(\hat{\theta}_{t_-}^2) = \frac{1+\gamma}{2} = F_t^g(\check{\theta}_t^2) = F_{t_-}^d(\check{\theta}_t^2)$ et $F_{t_+}^g(\hat{\theta}_{t_+}^1) = \frac{1-\gamma}{2} = F_t^d(\check{\theta}_t^1) = F_{t_+}^g(\check{\theta}_t^1)$; de sorte que $\hat{\theta}_{t_-}^2 = \check{\theta}_t^2$ (si $t \neq t_{\min}$) et $\hat{\theta}_{t_+}^1 = \check{\theta}_t^1$ (si $t \neq t_{\max}$). La formule élémentaire (1) se précise alors en

$$\forall \theta \in \Theta, \gamma \leq P_\theta(] \hat{\theta}_T^1, \hat{\theta}_T^2[\ni \theta) = \sum_{t \in \Delta : t' \leq t \leq t''} P_\theta(T = t) = F_{t''}^g(\theta) - F_{t'}^d(\theta) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \check{\theta}_{t''}^2 \leq \theta < \hat{\theta}_{t''}^2 \\ \hat{\theta}_{t'}^1 < \theta \leq \check{\theta}_{t'}^1 \end{cases}, \quad (2)$$

ces dernières inégalités caractérisant $t' < t''$ dans Δ . On démontre :

Théorème 2.1 Soient $t' < t''$ dans Δ ; l'équation sur Θ $(F_{t''}^g + F_{t'}^d)(\theta) = 1$ a une unique solution $\theta_{t''}^{t'}$, et on a $\hat{\theta}_{t''}^1 < \hat{\theta}_{t''}^2$ (avec $\theta_{t''}^{t'} \in] \hat{\theta}_{t''}^1, \hat{\theta}_{t''}^2[$) si et seulement si $\gamma > \hat{\gamma}_{t''}^{t'}$, $\stackrel{\text{déf}}{=} (F_{t''}^d - F_{t''}^g)(\theta_{t''}^{t'})$, où $\hat{\gamma}_{t''}^{t'} \in [0, 1[$.

Pour tous $\gamma \in]0, 1[$ et $t'' \in \Delta$, soit $t' < t''$ l'unique élément de Δ tel que $\check{\theta}_{t''}^2 \leq \hat{\theta}_{t''}^1 < \hat{\theta}_{t''}^2$. On pose :

$\theta_{t''}^1 =$ la plus grande valeur de $\theta \in [\hat{\theta}_{t''}^1, \min(\theta_{t''}^{t'}, \check{\theta}_{t''}^1)]$ telle que $(F_{t''}^g - F_{t''}^g)(\theta) \geq \gamma$ sur $[\hat{\theta}_{t''}^1, \theta]$.

Pour tous $\gamma \in]0, 1[$ et $t' \in \Delta$, soit $t'' > t'$ l'unique élément de Δ tel que $\hat{\theta}_{t''}^1 < \hat{\theta}_{t''}^2 \leq \check{\theta}_{t''}^1$. On pose :

$\theta_{t'}^2 =$ la plus petite valeur de $\theta \in [\max(\theta_{t'}^{t'}, \check{\theta}_{t'}^2), \hat{\theta}_{t'}^2]$ telle que $(F_{t'}^d - F_{t'}^d)(\theta) \geq \gamma$ sur $[\theta, \hat{\theta}_{t'}^2]$.

Alors $\Theta_T^\gamma =] \theta_T^1, \theta_T^2[$ est à couverture presque exacte. De plus $\forall t \in \Delta$, l'application $\gamma \in]0, 1[\mapsto \Theta_t^\gamma$ est croissante (propriété naturelle d'emboîtement des intervalles) et on a $\{\tilde{\Theta}_t^\gamma = 1\} \subseteq \Theta_t^\gamma \subseteq \hat{\Theta}_t^\gamma = \{\tilde{\Theta}_t^\gamma > 0\}$.

Preuve La fonction $F_{t''}^g + F_{t'}^d$ est continue et strictement croissante sur Θ , d'image $]0, 2[$; d'où l'existence et l'unicité de $\theta_{t''}^{t'}$. On a $t'' \geq t'_+$, donc $F_{t''}^g \leq F_{t'_+}^g = F_{t'}^d$ et $\hat{\gamma}_{t''}^{t'} \in [0, 1[$. Et comme $F_{t''}^g(\theta_{t''}^{t'}) = \frac{1-\hat{\gamma}_{t''}^{t'}}{2}$ et

$F_{t'}^d(\theta_{t''}^{t'}) = \frac{1+\hat{\gamma}_{t''}^{t'}}{2}$, on a l'équivalence avancée, par définition de $\hat{\theta}_{t''}^1, \hat{\theta}_{t''}^2$ et croissance stricte de $F_{t''}^g$ et $F_{t'}^d$.

1) Considérons d'abord tous les couples $(t', t'') \in \Delta^2$ tels que $t' < t''$ et $\check{\theta}_{t''}^2 \leq \hat{\theta}_{t''}^1 < \hat{\theta}_{t''}^2 \leq \check{\theta}_{t''}^1$ (figure 1).

On a (formule (2)) $\forall \theta \in] \hat{\theta}_{t''}^1, \hat{\theta}_{t''}^2[$, $F_{t''}^g(\theta) - F_{t''}^d(\theta) = P_\theta(] \hat{\theta}_T^1, \hat{\theta}_T^2[\ni \theta) \geq \gamma$. Remplacer $\hat{\theta}_{t''}^1$ et $\hat{\theta}_{t''}^2$ par $\theta_{t''}^1$ et $\theta_{t''}^2$ permet de réduire « au mieux » (cf. la remarque 1 ci-dessous) les intervalles de confiance de θ sous la contrainte de couverture exacte (sauf en $\theta_{t''}^{t'}$, si $\theta_{t''}^1 = \theta_{t''}^2 = \theta_{t''}^{t'}$); en effet les niveaux de confiance des θ affectés sont :

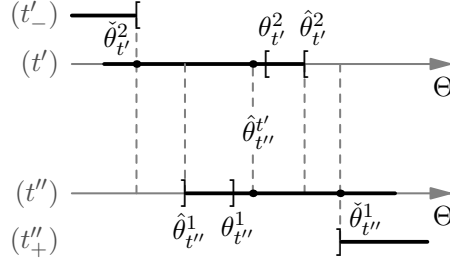


FIGURE 1. Cas de chevauchement minimal des intervalles $\hat{\Theta}_{t'}^\gamma$ et $\hat{\Theta}_{t''}^\gamma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \theta \in]\hat{\theta}_{t''}^1, \theta_{t''}^1], \theta \neq \theta_{t''}^1, \quad \sum_{t \in \Delta, t' \leq t < t''} P_\theta(T = t) = F_{t'}^g(\theta) - F_{t''}^g(\theta) \geq \gamma \\ \text{pour } \theta \in [\theta_{t'}^2, \hat{\theta}_{t'}^2[, \theta \neq \theta_{t'}^2, \quad \sum_{t \in \Delta, t' < t \leq t''} P_\theta(T = t) = F_{t'}^d(\theta) - F_{t''}^d(\theta) \geq \gamma \end{array} \right.$$

De plus vu leurs définitions $\theta_{t''}^1$ croît et $\theta_{t'}^2$ décroît quand γ décroît, jusqu'à atteindre la valeur commune $\theta_{t''}^1$, à partir d'un certain $\gamma_{t''}^1$ et rester stables jusqu'à la valeur $\hat{\gamma}_{t''}^1 \leq \gamma_{t''}^1$, où ils sont rejoints par $\hat{\theta}_{t''}^1$ et $\hat{\theta}_{t'}^2$.

2) Considérons ensuite les $t'' \in \Delta \setminus \{t_{\max}\}$ pour lesquels il existe $t' < t''$ (t' unique dans Δ) tel que

$$\check{\theta}_{t'}^2 \leq \hat{\theta}_{t''}^1 < \check{\theta}_{t''}^1 = \hat{\theta}_{t''}^1 < \hat{\theta}_{t'}^2;$$

pour eux $\theta_{t'}^2 \in [\hat{\theta}_{t''}^1, \hat{\theta}_{t'}^2]$ a été défini à l'étape 1. A t' fixé les $\theta_{t''}^1 \in [\hat{\theta}_{t''}^1, \hat{\theta}_{t''}^1]$ respectent entre eux les mêmes inégalités que les $\hat{\theta}_{t''}^1$, en étant tous inférieurs au $\theta_{t''}^1$ relatif au t''_0 du couple (t', t''_0) déterminé à l'étape 1, qui succède aux t'' considérés ici; et la définition des $\theta_{t''}^1$ assure qu'ils croissent quand γ décroît. On a des résultats analogues pour les $t' \in \Delta \setminus \{t_{\min}\}$ pour lesquels il existe $t'' > t'$ (t'' unique dans Δ) tel que $\hat{\theta}_{t''}^1 < \hat{\theta}_{t'}^2 = \theta_{t'}^2 < \hat{\theta}_{t'}^2 \leq \check{\theta}_{t''}^1$, en changeant le signe des inégalités. Et les mêmes considérations qu'à l'étape 1 sur les niveaux de confiance des θ affectés permettent de conclure que $\Theta_T^\gamma \stackrel{\text{déf}}{=}]\theta_T^1, \theta_T^2[$ est bien à couverture presque exacte. \square

Remarque 1 La condition $\theta_{t''}^1 (\leq \theta_{t'}^2) \leq \theta_{t'}^2$, qui assure le maintien local des chevauchements entre intervalles à l'étape 1 ci-dessus est indispensable, car sinon on aurait :

- soit $]\theta_{t'}^2, \theta_{t''}^1[\subseteq]\hat{\theta}_{t''}^1, \hat{\theta}_{t'}^2[$, et le niveau de confiance des $\theta \in]\theta_{t'}^2, \theta_{t''}^1[$ serait

$$\sum_{t \in \Delta, t' < t < t''} P_\theta(T = t) = F_{t'}^d(\theta) - F_{t''}^g(\theta) < F_{t'}^d(\hat{\theta}_{t'}^2) - F_{t''}^g(\hat{\theta}_{t''}^1) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} = \gamma.$$

- soit $\theta_{t''}^1 > \hat{\theta}_{t'}^2$ et le niveau de confiance des $\theta \in]\hat{\theta}_{t'}^2, \theta_{t''}^1[$ voisins de $\hat{\theta}_{t'}^2$ serait

$$\sum_{t \in \Delta, t' < t < t''} P_\theta(T = t) = F_{t'}^d(\theta) - F_{t''}^g(\theta) \approx F_{t'}^d(\hat{\theta}_{t'}^2) - F_{t''}^g(\hat{\theta}_{t''}^1) < F_{t'}^d(\hat{\theta}_{t'}^2) - F_{t''}^g(\hat{\theta}_{t''}^1) = \gamma$$

par continuité de $F_{t'}^d$ et $F_{t''}^g$, et croissance stricte de $F_{t''}^g$.

- soit $\theta_{t''}^1 < \hat{\theta}_{t''}^1$, et même conclusion pour le niveau de confiance des $\theta \in]\theta_{t''}^1, \hat{\theta}_{t''}^1[$ voisins de $\hat{\theta}_{t''}^1$.

Remarque 2 On a $\theta_{t''}^1 > \hat{\theta}_{t''}^1$, dès que $\check{\theta}_{t''}^1 < \hat{\theta}_{t''}^1$: en effet cette inégalité assure

$$F_{t'}^g(\hat{\theta}_{t''}^1) - F_{t''}^g(\hat{\theta}_{t''}^1) > F_{t'}^g(\check{\theta}_{t''}^1) - F_{t''}^g(\hat{\theta}_{t''}^1) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} = \gamma \text{ si } t' \neq t_{\min},$$

et $F_{t_{\min}}^g(\hat{\theta}_{t''}^1) - F_{t''}^g(\hat{\theta}_{t''}^1) = 1 - \frac{1-\gamma}{2} > \gamma$; on a donc aussi $F_{t'}^g - F_{t''}^g > \gamma$ au voisinage (droit) de $\hat{\theta}_{t''}^1$, par continuité de $F_{t'}^g - F_{t''}^g$. De même, on a $\theta_{t'}^2 < \hat{\theta}_{t'}^2$, dès que $\check{\theta}_{t'}^2 > \hat{\theta}_{t'}^2$.

Remarque 3 Dans le cas spécial où $t'_+ = t'' \stackrel{\text{déf}}{=} t$, on a $\theta_{t''}^1 = \theta_t^{\text{med}}$ puisqu'alors $F_{t'}^g + F_{t''}^d = F_t^d + F_t^g$.

Remarque 4 Contrairement au cas des modèles de loi μ diffuse, faire tendre $\gamma > 0$ vers 0 ne conduit pas à des estimations ponctuelles de θ : en effet par principe (presque) aucune valeur possible de θ n'est exclue des estimations par intervalles, autrement dit la réunion de ceux-ci coïncide toujours (presque) avec Θ . Simplement les intervalles $] \hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2 [$, $t \in \Delta$ tendent à être 2 à 2 disjoints et contigus car $\forall t \in \Delta$, $t \neq t_{\max}$,

$$F_t^d(\hat{\theta}_t^2) = \frac{1+\gamma}{2} \approx \frac{1-\gamma}{2} = F_t^d(\hat{\theta}_t^1) \implies \hat{\theta}_t^2 \approx \hat{\theta}_t^1 = \hat{\theta}_{t_+}^1 \approx \hat{\theta}_{t_+}^2.$$

Pour $\gamma = 0$, les intervalles contigus $\hat{\Theta}_t^\gamma \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=}] \hat{\theta}_t^1, \hat{\theta}_t^2 [$, qui pour $t \in I \cap \Delta$ sont les $] \theta_t^{t-}, \theta_t^t [$ et contiennent les estimations T -m\u00e9dianes ponctuelles θ_t^{med} , apparaissent comme les estimations T -m\u00e9dianes par intervalles de θ sachant t . Les $\Theta_t^\gamma =] \theta_t^1, \theta_t^2 [$ coïncident avec eux d\u00e8s que $\gamma \leq \gamma_0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \min_{t \in \Delta \setminus \{t_{\max}\}} \gamma_{t_+}^t$: la valeur γ_0 est le (faible) niveau de confiance qu'on peut accorder \u00e0 ce mode m\u00e9dian d'estimation du param\u00e8tre.

3. Exemple du mod\u00e8le exponentiel des lois binomiales

On a ici $\Delta = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$, μ uniforme de masse $n+1$ sur Δ , $\Theta =]0, 1[$ et $f_\theta^T(t) = \theta^{nt} (1-\theta)^{n(1-t)}$: la loi de $nT = \sum_{i=1}^n X_i$ est binomiale. De plus F_t^d et F_t^g v\u00e9rifient les hypoth\u00e8ses compl\u00e9mentaires d'\u00e9talement.

En effet :

- $\forall t \in I =]0, 1[$, $\inf F_t^g(\Theta) = 0$ et $\sup F_t^d(\Theta) = 1$ car $\theta \mapsto \frac{F_t^g(\theta)}{\theta}$ et $\theta \mapsto \frac{1 - F_t^d(\theta)}{1 - \theta}$ sont des polyn\u00f4mes ;
- $F_0^d(\theta) = 1 - (1 - \theta)^n$, donc $\inf F_0^d(\Theta) = 0$ et $\sup F_0^d(\Theta) = 1$;
- $F_1^g(\theta) = \theta^n$, donc $\inf F_1^g(\Theta) = 0$ et $\sup F_1^g(\Theta) = 1$.

On peut illustrer la d\u00e9marche en examinant les demi-graphes gauches des applications ε et $\hat{\varepsilon}$ (figure 2)

avec $\varepsilon(\theta) = P_\theta(] \theta_T^1, \theta_T^2 [\ni \theta) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \theta^j (1-\theta)^{n-j} \mathbb{1}_{\Theta_t^\gamma}(\theta)$ et de m\u00eame $\hat{\varepsilon}(\theta) = P_\theta(] \hat{\theta}_T^1, \hat{\theta}_T^2 [\ni \theta)$.

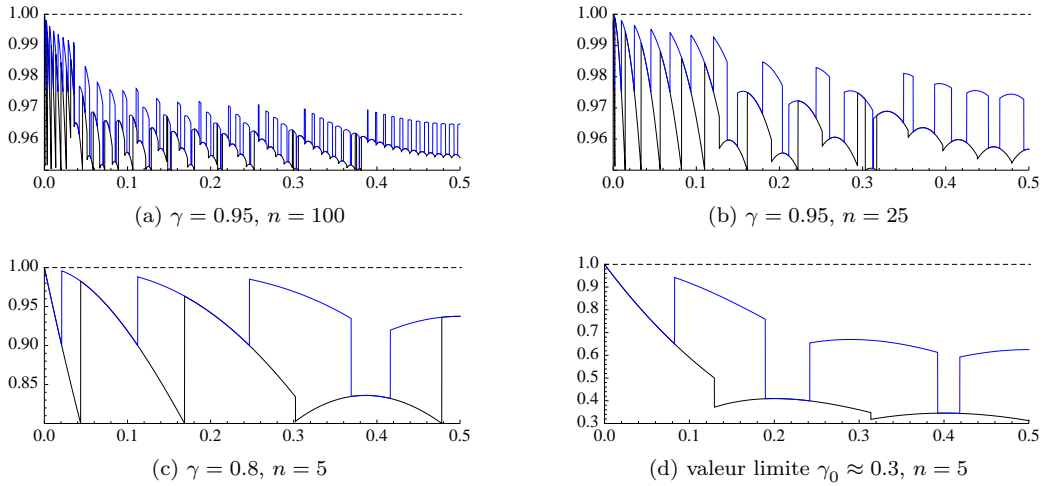


FIGURE 2. Demi-graphes gauches de ε (m\u00e9thode propos\u00e9e ici) et de $\hat{\varepsilon}$ (m\u00e9thode standard de Clopper-Pearson)

4. Conclusion

En quête d'une nouvelle procédure d'estimation exacte par intervalles de confiance bilatéraux dans le cas discret selon une démarche originale, nous sommes retombés — en la précisant légèrement — sur la proposition de H. Blaker. Sur le plan pratique, cette procédure implique des calculs numériques limités pour la détermination d'un intervalle d'intérêt ; elle peut donc être mise en œuvre aussi bien pour de très petits et pour de grands échantillons, quel que soit le niveau de confiance souhaité. L'emploi de méthodes approchées, fondées sur le théorème central limite, devrait donc être cantonné aux échantillons de tailles vraiment considérables.

Références

- [1] A. Agresti, B. A. Coull, Approximate is better than "exact" for interval estimation of binomial proportions, *Amer. Statist.* 52 (1998) 119-126.
- [2] H. Blaker, Confidence curves and improved exact confidence intervals for discrete distributions, *Canad. J. Statist.* 28 (2000) 783-798.
- [3] C. J. Clopper, E. S. Pearson, The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial, *Biometrika* 26 (1934) 404-413.
- [4] G. Casella, Refining binomial confidence intervals, *Canad. J. Statist.* 14 (1986) 113-129.
- [5] C. J. Geyer, G. D. Meeden, Fuzzy and randomized confidence intervals and P-values, *Statistical Science* 20 (4) (2005) 358-366.
- [6] T. E. Sterne, Some remarks on confidence or fiducial limits, *Biometrika* 41 (1954) 275-278.
- [7] W. L. Stevens, Fiducial limits of the parameter of a discontinuous distribution, *Biometrika* 37 (1950) 117-129.