



HAL
open science

Germes de feuilletages présentables du plan complexe

Loïc Teyssier

► **To cite this version:**

Loïc Teyssier. Germes de feuilletages présentables du plan complexe. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática / Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 2015, 46 (2), pp.275-329. 10.1007/s00574-015-0093-y . hal-00799548v3

HAL Id: hal-00799548

<https://hal.science/hal-00799548v3>

Submitted on 25 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Germes de feuilletages présentables du plan complexe*

Loïc Teyssier[†]

Septembre 2013

Résumé

Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage singulier du plan complexe. Sous l'hypothèse que \mathcal{F} est une courbe généralisée, D. MARÍN et J.-F. MATTEI ont établi l'incompressibilité de \mathcal{F} dans un voisinage épointé d'un ensemble fini de courbes analytiques. On montre ici que cette hypothèse ne peut être ignorée, en exhibant divers exemples de feuilletages réduits après un éclatement qui ne satisfont pas cette propriété. Même si nous montrons que les nœuds-cols sont incompressibles individuellement, le fait que leurs feuilles ne se rétractent pas tangentiellement sur toutes les composantes du bord de leur domaine de définition empêche la généralisation totale de la construction de Marín–Mattei. Finalement nous caractérisons une classe presque complète des feuilletages, dits fortement présentables, pour lesquels la construction de la monodromie de Marín–Mattei est possible.

Abstract

Let \mathcal{F} be a germ of a singular foliation of the complex plane. Assuming that \mathcal{F} is a generalized curve D. MARÍN and J.-F. MATTEI proved the incompressibility of the foliation in a neighborhood from which a finite set of analytic curves is removed. We show in the present work that this hypothesis cannot be eluded, by building examples of foliations, reduced after one blow-up, for which the property does not hold. Even if we manage to prove that the individual saddle-node foliation is incompressible, their leaves not retracting tangentially on all the components of the definition domain boundary forbids a generalization of Marín–Mattei's construction. We finally characterize a near-complete class of foliations, called strongly presentable, for which the construction of Marín–Mattei's monodromy can be carried out.

1 Introduction

Par beaucoup d'aspects, un feuilletage holomorphe \mathcal{F} d'un ouvert \mathcal{U} semble généraliser, en son lieu régulier, la notion de fibration localement triviale. Prenons à titre d'illustration le feuilletage donné par les niveaux d'une submersion holomorphe

$$f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$$

admettant une fibre singulière (non nécessaire irréductible) $\mathcal{S} = f^{-1}(0)$. Ici f est holomorphe sur (un voisinage de) la boule euclidienne fermée $\text{adh}(\mathcal{B})$ de rayon choisi suffisamment petit pour que les feuilles de \mathcal{F} soient transverses à la sphère $\partial\mathcal{B}$. Un résultat

*PrePrint

[†]Laboratoire I.R.M.A. – Université de Strasbourg

classique de J. MILNOR [Mil68] assure l'incompressibilité de \mathcal{F} : il existe une famille de **tubes de Milnor** \mathcal{T}_η de \mathcal{S} , images réciproques d'un petit disque $\eta\mathbb{D}$, telle que le groupe fondamental de chaque feuille régulière de $\mathcal{F}|_{\mathcal{T}_\eta}$ s'injecte dans celui de $\mathcal{T}_\eta \setminus \mathcal{S}$, lui-même isomorphe à $\pi_1(\mathcal{B} \setminus \mathcal{S})$.

Dans deux travaux récents [MM08, MM21], D. MARÍN et J.-F. MATTEI ont dégagé des conditions suffisantes sous lesquelles ce résultat se généralise lorsque \mathcal{F} n'admet pas d'intégrale première holomorphe non triviale. Précisons cela.

Définition. Dans tout cet article \mathcal{F} désigne un germe de feuilletage holomorphe singulier en $(0,0)$. On dit que \mathcal{F} est **incompressible** s'il existe

- ▷ une union finie $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ de courbes analytiques invariantes par \mathcal{F} et contenant la singularité, disons d'équation $\{f = 0\}$ pour fixer les notations, appelées **séparatrices distinguées**,
 - ▷ une famille de tubes de Milnor $(\mathcal{T}_\eta)_{0 < \eta \leq \eta_0}$ de \mathcal{S} (au sens précédent : $\mathcal{T}_\eta = f^{-1}(\eta\mathbb{D})$), sur lesquels \mathcal{F} est bien défini,
 - ▷ un voisinage \mathcal{U} de la singularité, tels que, en notant $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\eta_0}$,
1. $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, cette inclusion induisant un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux $\pi_1(\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}) \simeq \pi_1(\mathcal{T} \setminus \mathcal{S})$,
 2. $\mathcal{T}_\eta \subset \mathcal{U}$ pour tout η assez petit,
 3. pour chaque feuille \mathcal{L} de $\mathcal{F}|_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}}$ le morphisme canonique induit par l'inclusion $\iota : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$

$$\iota^* : \pi_1(\mathcal{L}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{U} \setminus \mathcal{S})$$

soit injectif.

Pour préciser les notations nous serons parfois amenés à dire que \mathcal{F} est incompressible dans $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

Remarque. La condition (1) stipule que l'on ne s'autorise pas à prendre des voisinages \mathcal{U} volontairement tordus pour accommoder la topologie éventuellement compliquée des feuilles. La topologie de l'espace ambiant doit être « la plus simple possible ».

Toute singularité d'un germe en $p \in \mathbb{C}^2$ de feuilletage holomorphe peut être « réduite » à travers une application rationnelle propre¹ $E : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{C}^2, p)$, où \mathcal{M} est un voisinage conforme d'un arbre $E^{-1}(0)$ de diviseurs $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ à croisement normaux. Le tiré en arrière $E^*\mathcal{F}$ ne possède alors que des singularités (dites réduites) placées sur le diviseur exceptionnel $E^{-1}(0)$, dont le quotient λ des valeurs propres de la partie linéaire n'est pas un rationnel positif.

Théorème de Marín-Mattei. *Tout feuilletage dont la réduction ne comporte pas de nœud-col² ou de selle quasi-résonante³ est incompressible.*

Ce théorème est traité dans [MM08] pour les feuilletages n'ayant pas de composante dicritique dans leur réduction, et dans [MM21] pour les cas restants en faisant l'hypothèse technique supplémentaire que les éventuelles composantes initiales⁴ sont dynamiquement isolées. Nous reviendrons en Section 6 sur ce dernier point ; bornons-nous à mentionner pour l'instant que cette hypothèse est superflue.

1. Voir par exemple l'algorithme de A. SEIDENBERG [Sei68].

2. $\lambda = 0$.

3. $\lambda \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Q}$, non linéarisable.

4. Voir Section 2.4 pour une définition.

Remarque.

1. Il est possible de décrire explicitement l'ensemble \mathcal{S} . En notant E le morphisme de réduction de la singularité de \mathcal{F} , l'ensemble \mathcal{S} est l'union des adhérences des images par \mathcal{E} des séparatrices de $E^*\mathcal{F}$ croisant des composantes non dicritiques, auxquelles s'ajoute l'image par \mathcal{E} d'un germe de feuille transverse par composante dicritique.
2. L'hypothèse du théorème portant sur le type des singularités réduites est générique à donnée combinatoire de l'arbre de réduction et à nombre de singularités réduites fixé.

L'incompressibilité assure l'existence d'un revêtement universel feuilleté. Par cela on entend que le revêtement universel $\pi_{\mathcal{U}} : \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$ est aussi, en restriction, un revêtement universel de chaque feuille de \mathcal{F} . Le groupe des automorphismes de ce revêtement est alors constitué de symétries du feuilletage $\pi_{\mathcal{U}}^*\mathcal{F}$, et à ce titre agit naturellement sur l'espace de ses feuilles $\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}}$. On dispose alors d'une action

$$m_{\mathcal{U}} : \text{Aut}(\pi_{\mathcal{U}}) \longrightarrow \text{Aut}(\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}})$$

que l'on nomme **monodromie** de $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \mathcal{S})$. Le quotient $\Omega_{\mathcal{U}} := \tilde{\Omega}_{\mathcal{U}}/m_{\mathcal{U}}$ s'identifie canoniquement à l'espace des feuilles de \mathcal{F} .

Cette construction ne revêt qu'un intérêt modeste si l'on ne dote pas les espaces de feuilles d'une structure analytique. Cette structure supplémentaire va faire de la monodromie un invariant analytique du triplet $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \mathcal{S})$, dont la « germification » quand $\eta_0 \rightarrow 0$ est un classifiant local (au voisinage de \mathcal{S}) complet pour un choix générique de feuilletages [MM21]. Sa construction est donc une étape importante vers une compréhension plus globale des germes de singularités de feuilletages.

L'ingrédient nécessaire à l'existence d'une structure analytique canonique sur $\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}}$ est celle d'une courbe transverse \mathcal{C} (non nécessairement irréductible) qualifiée ici de complètement connexe. Les composantes de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ doteront l'espace des feuilles de cartes analytiques, à condition que chaque feuille de $\pi^*\mathcal{F}$ coupe au plus une fois chaque composante de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$. Ce sont ces propriétés qui sont isolées par la définition suivante :

Définition 1.1. Un germe de courbe analytique \mathcal{C} (non nécessairement irréductible) est une **transversale complètement connexe** de \mathcal{F} s'il existe un couple $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, dans lequel \mathcal{F} est incompressible, tel que :

1. $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$ soit une courbe analytique lisse transverse aux feuilles de \mathcal{F} ,
2. $\text{Sat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}) = \mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$,
3. $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$ soit 1-connexe dans $\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$ relativement à \mathcal{F} .

Notons qu'il existe toujours une courbe \mathcal{C} satisfaisant les deux premières conditions (1) et (2), quitte à munir \mathcal{C} de suffisamment de composantes (voir [Lor10, p161]), courbe que l'on nomme alors **transversale complète**. La notion de 1-connexité est définie dans [MM08] (voir aussi la Définition 5.2), et revient ici à demander que chaque feuille de $\pi^*\mathcal{F}$ coupe au plus une fois chaque composante de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$. Un corollaire du théorème de Marín–Mattei est alors l'existence, sous les mêmes hypothèses, d'une transversale complètement connexe [MM08, Théorème 6.1.1, p900].

Le but de cet article est d'établir d'une part que la condition de ne pas posséder de nœud–col dans la réduction du lieu singulier n'est pas superflue, mais d'autre part qu'elle n'est pas toujours nécessaire, dans la perspective de bâtir cet invariant analytique. Nous allons généraliser sensiblement les résultats exposés ci-dessus, en donnant une caractérisation presque complète des feuilletages sous-tendant une monodromie.

Je tiens à remercier chaleureusement D. MARÍN et J.-F. MATTEI pour les discussions que nous avons eues autour de ce sujet, plus particulièrement pour la construction des exemples donnés à la fin, et pour leurs encouragements répétés à mener à terme la rédaction du présent travail.

1.1 Présentation des principaux résultats

Nous souhaitons donner dans ce texte la preuve des trois théorèmes principaux suivants.

Théorème A. *Un germe de feuilletage de type nœud-col ou selle quasi-résonnante est incompressible.*

Un tel résultat pourrait laisser espérer que le théorème de Marín–Mattei se généralise sans contrainte. Ce n’est malheureusement pas le cas.

Théorème B. *Il existe des feuilletages \mathcal{F} singuliers, non dicritiques, qui sont compressibles.*

Contrairement aux autres singularités réduites, qui possèdent deux séparatrices transverses passant par la singularité et tangentes aux espaces propres de leur partie linéaire, un nœud-col générique n’en admet qu’une (on dit que ce dernier est **divergent**⁵), appelée **séparatrice forte** et tangente à l’espace propre de la valeur propre non nulle de sa partie linéaire, même si certains en possèdent deux (ceux-ci sont nommés **convergers**⁵).

Les premiers exemples que nous avons pu construire pour établir le Théorème B possèdent tous un nœud-col divergent dans leur réduction. On pourrait alors penser qu’il suffit de proscrire les nœuds-cols divergents pour assurer l’incompressibilité du feuilletage, suivant l’idée que ceux-ci privent de façon injuste l’ensemble \mathcal{S} d’une séparatrice. Il n’en est rien : nous construisons également des exemples de feuilletages compressibles n’ayant aucun nœud-col divergent.

Pour autant nous avons pu affaiblir l’hypothèse du théorème de Marín–Mattei : l’incompressibilité et l’existence d’une transversale complètement connexe vont dépendre de manière cruciale de la façon dont les nœuds-cols sont positionnés dans l’arbre de réduction.

Définition 1.2. Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage du plan complexe.

1. \mathcal{F} est **présentable** s’il est incompressible et s’il admet une transversale complètement connexe.
2. \mathcal{F} est **fortement présentable** si les séparatrices fortes des nœuds-cols apparaissant dans une réduction minimale ne sont jamais des composantes du diviseur exceptionnel⁶.

5. La terminologie sera explicitée et justifiée en Section 2.

6. C’est en particulier le cas si \mathcal{F} est une singularité réduite.

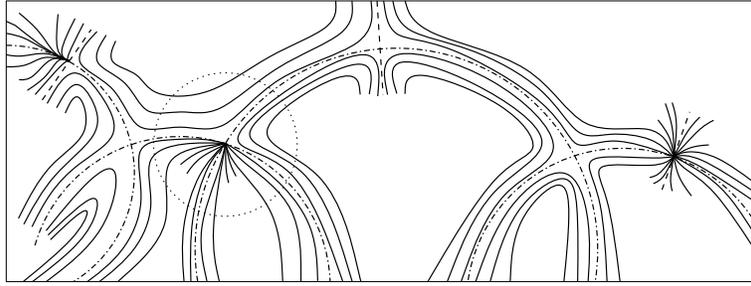


FIGURE 1.1 – Ce feuilletage n’est pas fortement présentable car il exhibe un nœud–col dans un coin.

Un feuilletage fortement présentable non réduit ne contient donc jamais de nœud–col divergent dans sa réduction, et les singularités apparaissant aux points de croisement de deux composantes du diviseur exceptionnel (les « coins ») ne sont pas des nœuds–cols.

Remarque 1.3. La définition de feuilletage fortement présentable n’est curieusement pas invariante par éclatement ponctuel. Plus précisément, l’éclatement d’un nœud–col produit un diviseur possédant d’une part une selle non linéarisable, d’autre part un nœud–col dont la séparatrice forte est un diviseur. C’est pourquoi nous imposons une réduction minimale dans la définition d’un feuilletage fortement présentable (ou en tout cas une réduction de la singularité où aucun nœud–col n’a été éclaté après apparition).

Théorème C. *Tout germe de feuilletage fortement présentable est présentable.*

Comme le souligne la remarque précédente la condition d’être fortement présentable n’est pas nécessaire pour être présentable. Cependant les exemples que nous construisons montrent qu’elle n’est pas superflue. Caractériser complètement les feuilletages présentables est une question difficile, car les propriétés les définissant sont globales alors que les limitations (techniques) imposées par la forte présentabilité sont locales.

1.2 Structure de l’article et esquisse des preuves

Le corps de cet article commence par une section consacrée à introduire les notations et résultats classiques que nous utiliserons. Ensuite nous procéderons aux démonstrations proprement dites. Afin de permettre au lecteur pressé de se faire une idée des techniques employées pour parvenir aux résultats annoncés, nous présentons rapidement dans le reste du paragraphe le squelette de notre argumentation.

1.2.1 Le Théorème A est démontré en Sections 3 et 4

On montre directement que le tiré–en–arrière d’un feuilletage nœud–col convergent ou selle quasi–résonante par le revêtement universel d’un polydisque $\rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D}$ assez petit, épointé de la séparatrice forte $\{x = 0\}$, ne possède que des feuilles simplement connexes. On invoque un argument de transversalité avec les fibres de la projection $\Pi : (\log x, y) \mapsto \log x$ pour prouver dans un premier temps que le bord d’une feuille \mathcal{L} est contenu dans le bord du polydisque. Un argument variationnel immédiat permet alors d’identifier des familles de chemins complètement contenues dans $\Pi(\mathcal{L})$, que l’on nomme « faisceaux de stabilité », le long desquels le module de l’ordonnée de \mathcal{L} diminue : ces chemins sont donc contenus dans \mathcal{L} . Pour prouver que tout cycle γ de \mathcal{L} est tangentiellement trivial, on construit une homotopie entre $\Pi \circ \gamma$ et un lacet bordant une région d’intérieur vide en suivant des faisceaux de stabilité, ce qui garantit qu’elle se relève dans \mathcal{L} en une trivialisation de γ .

Le cas divergent se ramène au cas précédent en redressant au-dessus de secteurs dans la variable x les resommées sectorielles de la séparatrice « faible ». Puisque les faisceaux de stabilité restent à l'intérieur d'un secteur donné, et comme le redressement des séparatrices se fait à travers une application fibrée dans la coordonnée x , l'argument est essentiellement le même. $\mathcal{U} \setminus \{x = 0\}$ est alors l'union des pré-images du polydisque $\rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D}$ par les redressements sectoriels.

1.2.2 Le Théorème C est établi en Section 7

Pour que le raisonnement soit le plus clair possible nous résumons la construction initiale de Marín–Mattei en Section 5. En adaptant la construction, on montre assez facilement l'existence d'une transversale complètement connexe à un feuilletage fortement présentable, en incorporant un nouveau type de bloc élémentaire B renfermant des nœuds–cols convergents ou des selles quasi-résonantes. La propriété d'incompressibilité s'obtient en utilisant également les propriétés d'origine de collage bord–à–bord. Il faut pour cela garantir que le bloc élémentaire B (ou plutôt son bord) se prête à cet assemblage. Le cas des selles quasi-résonantes est très proche du cas des selles résonantes traitées dans [MM08], puisque les feuilles se rétractent radialement sur leur bord (feuilles de type collier). Expliquons maintenant le cas, plus complexe, du nœud–col.

Le bord de B est formé de deux composantes connexes : une composante forte $\partial B \cap \{|y| = r\}$ et une composante faible $\partial B \cap \{|x| = \rho\}$. On peut faire en sorte de choisir B pour que l'une ou l'autre de ces composantes soit de type suspension. Cela signifie grossièrement que cette composante, disons forte (*resp.* faible), s'obtient comme le balayage par le transport holonome d'un petit disque conforme transverse Σ en effectuant une fois le tour du cercle $\{|y| = r\}$ (*resp.* $\{|x| = \rho\}$). Dès que cette propriété est assurée il faut contrôler que l'intersection de Σ avec son image par l'holonomie est connexe (afin de ne pas créer de topologie artificielle dans l'espace ambiant). Nous montrons ces propriétés en utilisant les outils (notamment la notion de rugosité) introduits par D. MARÍN et J.–F. MATTEI.

Ceci étant dit, arrive l'obstruction majeure forçant les nœuds–cols à être placés de la bonne façon. Il faut en effet pouvoir garantir la 1–connexité dans B de la composante du bord que l'on souhaite assembler aux autres blocs. Cette propriété est vérifiée par la composante faible. En contraste, la composante forte du bord n'est jamais 1–connexe dans B . Dans chaque feuille d'un nœud–col existent en effet des « chemins inamovibles » dont les extrémités $\{p_1, p_2\}$ sont situées dans une transversale donnée $\{y = \text{cte}\}$ et qui sont homotopes dans B , privé de la séparatrice qui n'est pas un diviseur, à un chemin les joignant dans la transversale. Cependant il n'est pas possible d'opérer cette homotopie tangentiellement au feuilletage. La coexistence d'un comportement « col » et « nœud » au sein de certaines feuilles prévient en effet cette possibilité. Le point de vue topologique est le suivant : certaines feuilles de nœud–col ne peuvent se rétracter tangentiellement sur la composante forte du bord, en d'autres termes les feuilles ne sont pas de type collier vis–à–vis de cette composante (alors qu'ils le sont pour la composante faible). Ainsi, quelle que soit la forme du bloc B , la composante forte de son bord ne sera jamais 1–connexe dans B , ce qui interdit d'appliquer le procédé de localisation sur lequel se base le théorème de Marín–Mattei. Néanmoins cette obstruction est d'ordre technique, comme l'a souligné la Remarque 1.3.

1.2.3 Les exemples du Théorème B sont produits en Section 8

Nous présentons quelques exemples, dont le Théorème B découle. Dans un premier temps (Section 8.2), la compressibilité des feuilles est fournie par un argument de taille

de groupe (impossibilité d’injecter un groupe libre de rang 2 dans un groupe commutatif), en réalisant un tel groupe de difféomorphismes comme l’holonomie projective d’un feuilletage admettant au moins un nœud–col divergent dans sa réduction. L’argument est ici d’utiliser la non existence d’une seconde séparatrice pour forcer la compressibilité. Il est à noter que dans le second exemple nous parvenons en outre à exhiber un lacet non trivial dans le noyau de ι^* .

Nous construisons ensuite (Section 8.3) une famille d’exemples de feuilletages compressibles n’ayant que des nœuds–cols convergents dans leur réduction. À cette fin nous exploitons la mise en défaut, déjà évoquée, de la 1–connexité de la composante forte du bord dans un bloc renfermant un nœud–col. On met en regard deux nœuds–cols modèles partageant la même séparatrice forte de sorte à connecter deux chemins inamovibles pour former un cycle. Celui-ci est trivial dans l’espace privé des séparatrices mais pas dans la feuille le contenant.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Présentation des principaux résultats	4
1.2	Structure de l’article et esquisse des preuves	5
2	Notations et rappels	8
2.1	Singularités réduites non dégénérées : $\lambda \neq 0$	8
2.2	Nœuds–cols : $\lambda = 0$	9
2.3	Holonomie	9
2.4	Réduction d’une singularité et branches mortes	10
3	Incompressibilité des singularités non dégénérées solitaires	10
3.1	Faisceau de stabilité et réduction de la preuve	11
3.2	Démonstration du Lemme 3.3	12
4	Incompressibilité du nœud–col solitaire	13
4.1	Faisceau de stabilité et réduction de la preuve	13
4.2	Le cas convergent	17
4.3	Cas divergent	17
5	Résumé de la construction de Marín–Mattei	18
5.1	Découpage du diviseur exceptionnel en blocs	19
5.2	Blocs adaptés feuilletés	19
5.3	Rugosité des ensembles de type suspension	20
5.4	Blocs adaptés feuilletés contrôlés	21
6	Composantes initiales	21
6.1	Preliminaires	22
6.2	Preuve du Théorème 6.1	25
7	Feuilletages fortement présentables	27
7.1	Blocs feuilletés adaptés contrôlés : preuve du Théorème 7.1	29
7.2	Chemins inamovibles	33
7.3	Passage des coins	35

8 Exemples de feuilletages compressibles	36
8.1 Synthèse	36
8.2 Avec au moins un nœud-col divergent	36
8.3 Sans nœud-col divergent	39
8.4 Un feuilletage possédant beaucoup de composantes initiales	41

2 Notations et rappels

Nous décrivons brièvement les deux types de singularités élémentaires apparaissant comme singularités finales dans la réduction d'un germe de feuilletage holomorphe singulier, essentiellement afin de fixer quelques notations. Les feuilles du feuilletage \mathcal{F} associé à la 1-forme différentielle

$$\omega = P dx - Q dy$$

sont les surfaces de Riemann intégrant la distribution des noyaux de ω . Si \mathcal{F} n'est pas régulier en un point p , c'est-à-dire $\omega(p) = 0$, on peut supposer que $P \wedge Q = 1$ en tant que germes en ce point, auquel cas leurs zéros communs sont isolés. On se place alors sur un voisinage de p suffisamment petit pour que ce soit la seule singularité. La singularité p est dite **élémentaire** lorsque la partie linéaire du feuilletage en p , naturellement

identifiée à (la classe sous l'action de $\mathbb{C}_{\neq 0}$ par homothéties de) la matrice $\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}(p)$,

admet au moins une valeur propre non nulle, disons λ_2 . Quand le quotient de l'autre valeur propre par celle-ci

$$\lambda := \lambda_1/\lambda_2$$

n'est pas un rationnel strictement positif on parle de singularité **réduite**. Si $\lambda_j \neq 0$ il existe une unique feuille de \mathcal{F} dont l'adhérence est une variété analytique lisse tangente en p à l'espace propre associé à λ_j . Une telle séparatrice sera qualifiée de **séparatrice forte**.

2.1 Singularités réduites non dégénérées : $\lambda \neq 0$

Après avoir « redressé » les séparatrices fortes sur les axes $\{xy = 0\}$ d'un système local de coordonnées analytiques, le feuilletage est donné par la 1-forme différentielle

$$\omega_R := \lambda x dy - y(1 + R) dx \tag{2.1}$$

où $R \in x^k \mathbb{C}\{x, y\}$ pour $k \in \mathbb{N}_{>0}$ (arbitrairement grand).

Lorsque $\lambda \notin \mathbb{R}$ la singularité est **hyperbolique**, et le théorème de Poincaré assure sa linéarisabilité. Lorsque $\lambda > 0$ la singularité est un **nœud**, également linéarisable. Lorsque $\lambda \in \mathbb{Q}_{<0}$ et que la singularité n'est pas linéarisable on parle de **selle résonnante**. Enfin si $\lambda \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Q}$ la singularité est toujours formellement linéarisable, mais pour un ensemble de mesure nulle de tels λ il se peut que la série linéarisante diverge (présence de petits diviseurs). On parle alors de **selle quasi-résonnante**.

On notera que sous la forme préparée 2.1 les feuilles sont transverses aux fibres de la projection canonique

$$\Pi : (x, y) \mapsto x,$$

en dehors de la séparatrice $\{x = 0\}$.

2.2 Nœuds–cols : $\lambda = 0$

Tout germe de feuilletage \mathcal{F} de type nœud–col, d’invariant formel $(k, \mu) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{C}$ *a priori* fixé, est, dans une certaine coordonnée locale centrée en $(0, 0)$, donné par une forme différentielle dans l’écriture préparée de Dulac [Dul09]

$$\omega_R := x^{k+1} dy - (y + R) dx, \quad (2.2)$$

où $R \in x^k(\mu y + x\mathbb{C}\{x, y\})$ est arbitraire. La séparatrice forte est redressée sur $\{x = 0\}$. Si on s’autorise des changements de coordonnées formels alors on peut toujours conjuguer ω_R à ω_0 , forme que l’on appellera **modèle formel**. Les feuilles de ω_0 sont les composantes connexes des niveaux de l’intégrale première multivaluée

$$H_0(x, y) := yx^{-\mu} \exp(kx^{-k}).$$

Ici encore les feuilles autres que la séparatrice forte sont transverses aux fibres de Π . L’entier k est un invariant topologique, et gouverne le nombre $2k$ (génériquement optimal) de secteurs sur lesquels ω_R sera conjuguée analytiquement au modèle formel [HKM61]. Nous utiliserons essentiellement l’existence de « séparatrices sectorielles » démontrée dans la référence citée. Précisons cela. Le feuilletage admet une séparatrice formelle $\{y = \hat{s}(x)\}$ correspondant à la feuille d’adhérence analytique $\{y = 0\}$ de ω_0 , que l’on nomme **séparatrice faible**. On dit que le nœud–col est **divergent** ou **convergent** selon que la série \hat{s} diverge ou converge. Pour un nœud–col convergent le changement de coordonnée analytique

$$(x, y) \mapsto (x, y - \hat{s}(x))$$

transforme la forme différentielle initiale en ω_{yR} (pour un autre germe encore noté R par simplicité), auquel cas la séparatrice faible initiale est redressée sur $\{y = 0\}$. Dans le cas contraire la série \hat{s} est une série formelle k –Gevrey, qui s’avère être k –sommable. Il existe ainsi k fonctions holomorphes et bornées $(s_j)_{j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, chacune vivant sur un secteur ouvert

$$V_j^\beta := \left\{ x : 0 < |x| < \rho, \left| \arg x - \frac{\pi}{k}(2j+1) \right| < \frac{\pi}{k} + \beta \right\},$$

$\rho > 0$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2k}$ étant fixés assez petits, et dont le graphe est tangent à \mathcal{F} . Leur développement asymptotique en 0 coïncide avec \hat{s} . Lorsque $k = 1$ le secteur V_0 doit être compris comme un secteur d’ouverture supérieure à 2π ne se recollant pas. Ceci étant dit, comme la plupart du travail sera menée dans la coordonnée $\log x$, il n’y aura pas d’ambiguïté.

2.3 Holonomie

Le principal objet dynamique associé à un feuilletage est son holonomie. Si \mathcal{S} est une séparatrice (forte ou, lorsqu’elle converge, faible) disons $\mathcal{S} = \{x = 0, y \neq 0\}$, on construit l’holonomie comme suit. On choisit un générateur $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ de son groupe fondamental, dont l’image est incluse dans un voisinage \mathcal{U} simplement connexe donné de $(0, 0)$; il existe un voisinage $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ de l’image de γ sur lequel $\ker \omega_R$ est transverse aux fibres de la projection $\pi : (x, y) \mapsto y$. Quitte à réduire la taille de \mathcal{W} on pourra relever γ par π dans les feuilles de $\omega_R|_{\mathcal{W}}$ en s’appuyant sur un point p quelconque de la transversale $\Sigma := \pi^{-1}(\gamma(0)) \cap \mathcal{W}$. Rien n’indique que ce relevé γ_p sera un lacet et l’holonomie forte sera l’application holomorphe injective fixant $p_* := \gamma(0)$, définie par

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\gamma : \Sigma &\longrightarrow \pi^{-1}(p_*) \\ p &\longmapsto \gamma_p(1). \end{aligned}$$

Le germe d'application holomorphe ainsi défini ne dépend que de la classe d'homotopie⁷ dans \mathcal{S} de γ . Plus généralement cette construction donne lieu à un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\bullet : \pi_1(\mathcal{S}, p_*) &\longrightarrow \text{Diff}(\Sigma, p_*) \\ \gamma &\longmapsto \mathfrak{h}_\gamma. \end{aligned}$$

Ici $\text{Diff}(\Sigma, p_*)$ est le groupe des germes de difféomorphismes au voisinage de p_* et laissant ce point fixe.

2.4 Réduction d'une singularité et branches mortes

Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage singulier à l'origine de \mathbb{C}^2 et $E : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un morphisme minimal de réduction de \mathcal{F} . On note $\hat{\mathcal{F}} := E^* \mathcal{F}$ le feuilletage holomorphe singulier sur \mathcal{M} transformé de \mathcal{F} par E . La réduction s'obtient par une succession d'éclatements ponctuels des singularités non réduites apparaissant au fur et à mesure. À chaque étape intermédiaire de la réduction de \mathcal{F} , l'image réciproque de 0 est une union finie de diviseurs $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ d'auto-intersection négative, que l'on nomme **composantes**, se croisant transversalement en un certain nombre de points, appelés **coins**.

Remarque 2.1. [Sei68] Par un coin passent exactement deux composantes, qui seront qualifiées d'adjacentes. De plus le graphe d'incidence des composantes est un arbre connexe.

Définition 2.2.

1. Une **branche morte** B de $\hat{\mathcal{F}}$ est une union maximale de composantes adjacentes, chacune d'un des trois types suivants :
 - ▷ possédant au plus deux coins et aucune autre singularité de $\hat{\mathcal{F}}$,
 - ▷ possédant exactement un coin et aucune autre singularité de $\hat{\mathcal{F}}$ (**extrémité** de B),
 - ▷ possédant un coin et une autre singularité de $\hat{\mathcal{F}}$ (**composante d'attache** de B), ayant exactement une extrémité et une composante d'attache. Le graphe d'incidence de ces composantes est donc un arbre ayant la combinatoire d'une chaîne, c'est pourquoi on appellera parfois **maillons** les composantes formant B . La singularité de $\hat{\mathcal{F}}$ distincte du coin de la composante d'attache sera appelée **point d'attache**.
2. Une **composante initiale** de $\hat{\mathcal{F}}$ est une composante non dicritique du diviseur exceptionnel $E^{-1}(0)$, à laquelle est attachée au moins deux branches mortes et ne portant en sus de ces points d'attache qu'une seule singularité de $\hat{\mathcal{F}}$. Notons que rien n'interdit à \mathcal{C} de croiser une composante dicritique de $\hat{\mathcal{F}}$.

3 Incompressibilité des singularités non dégénérées solitaires

Ici on étudie un feuilletage pris sous la forme (2.1). Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ un polydisque $\rho_0 \mathbb{D} \times r_0 \mathbb{D}$ choisi assez petit pour garantir que R est holomorphe sur un voisinage de son adhérence. On considère le domaine

$$\mathcal{V}^* := \mathcal{V} \setminus \{x = 0\}$$

⁷. Toutes les homotopies considérées dans ce texte, à part quelques exceptions explicitement annoncées, seront supposées à extrémités fixes.

sur lequel \mathcal{F} est partout transverses aux fibres de Π . Dans tout l'article on travaillera sur le revêtement universel de \mathcal{V}^* donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \tilde{\mathcal{V}} &\longrightarrow \mathcal{V}^* \\ (z, y) &\longmapsto (\exp z, y). \end{aligned}$$

On chapeautera d'un « \sim » les objets tirés en arrière dans cette coordonnées, et définissons en particulier la projection

$$\tilde{\Pi} : (z, y) \longmapsto z.$$

Le but de cette section est de donner la preuve du Théorème A quand la singularité n'est pas un nœud-col. Celle-ci découle du résultat quantitatif ci-dessous.

Proposition 3.1. *Il existe $\rho_0 > 0$ et $r_0 > 0$ assez petits tels que, en notant $\mathcal{U}(\rho, r) := \rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D}$ pour chaque $0 < \rho \leq \rho_0$ et $0 < r \leq r_0$, toute feuille de $\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{E}^* \mathcal{F}_{\mathcal{U}(\rho, r)}$ est simplement connexe. Le couple (ρ_0, r_0) convient dès que*

$$\sup_{(x, y) \in \mathcal{U}(\rho_0, r_0)} |R(x, y)| < 1.$$

Notons que l'ensemble \mathcal{S} des séparatrices de \mathcal{F} coïncide avec $\mathcal{B} \cap \{xy = 0\}$, de sorte que les tubes de Milnor \mathcal{T}_η sont simples à décrire. Bien sûr pour chaque (ρ, r) on peut trouver $\mathcal{T}_\eta \subset \mathcal{U}(\rho, r) \subset \mathcal{T}_\rho$ pour chaque η assez petit (quitte à considérer une boule \mathcal{B} assez petite fixée une fois pour toutes), et le groupe fondamental de $\mathcal{U}(\rho, r) \setminus \mathcal{S}$ est isomorphe à celui de $\mathcal{T}_\rho \setminus \mathcal{S}$. Le reste de cette section est consacré à la preuve de la Proposition 3.1.

3.1 Faisceau de stabilité et réduction de la preuve

Par soucis de simplicité on écrira ρ et r à la place de ρ_0 et r_0 , c'est-à-dire $\mathcal{V} = \mathcal{U}(\rho, r)$.

Définition 3.2. Étant donné un point $z_* \in \tilde{\Pi}(\tilde{\mathcal{V}})$, on appelle **faisceau de stabilité** de sommet z_* et d'ouverture $\frac{\pi}{2} > \delta > 0$ la région de $\tilde{\mathcal{V}}$ contenant z_* donnée par

$$S_\lambda(z_*, \delta) := \left\{ z_* - t\theta \frac{\lambda}{|\lambda|} : |\arg \theta| < \delta, t \geq 0 \right\} \cap \Pi(\tilde{\mathcal{V}}) .$$

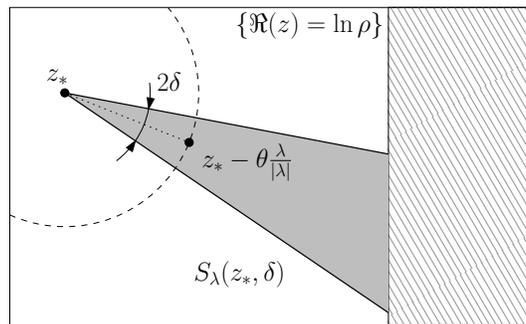


FIGURE 3.1 – Un faisceau de stabilité (région grisée).

Le nom de faisceau de stabilité est justifié par le fait suivant :

Lemme 3.3. Pour tous $\rho > 0$ et $r > 0$ tels que

$$M := \sup_{(x,y) \in \mathcal{U}(\rho,r)} |R(x,y)| < 1$$

on pose $\delta := \arccos M$. Alors pour tout $p_* = (z_*, y_*) \in \tilde{\mathcal{U}}$, chaque chemin γ basé en z_* et d'image incluse dans $S_\lambda(z_*, \delta)$ se relève dans $\tilde{\mathcal{F}}$ en s'appuyant sur p_* .

Remarque 3.4.

1. La conclusion du lemme ci-dessus est bien que γ se relève *en totalité* dans la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ contenant p .
2. L'existence des faisceaux de stabilité impose une condition très forte sur la forme du bord d'une feuille : celui-ci ne peut pas être trop irrégulier (convexité conique). Il en résulte que le revêtement universel d'une feuille typique ressemble à la Figure 3.2.

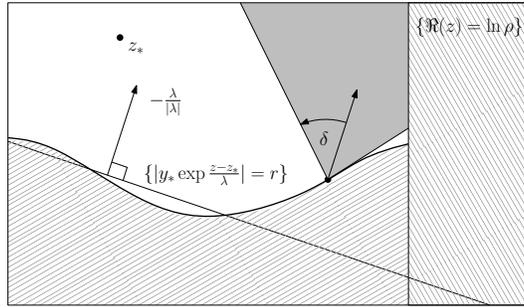


FIGURE 3.2 – Le revêtement universel d'une feuille typique, passant par $p_* = (z_*, y_*) \in \tilde{\mathcal{U}}$ d'une singularité non dégénérée (complémentaire des régions hachurées). La droite réelle $\{|y_* \exp \frac{z-z_*}{\lambda}| = r\}$ représente la trace de la feuille du feuilletage linéaire $\tilde{\omega}_0$ sur le bord $\tilde{\Pi}(\tilde{\mathcal{U}}) \times r\mathbb{S}^1$.

Avant de donner la preuve du lemme nous achevons celle de la Proposition 3.1. Pour un lacet $\tilde{\gamma}$ d'une feuille $\tilde{\mathcal{L}}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ nous notons $\gamma := \tilde{\Pi} \circ \tilde{\gamma}$ son projeté, dont l'image est un compact contenu dans une bande $\{a \leq \Re(z) \leq b\}$ pour deux réels $a \leq b < \ln \rho$. Tout faisceau de stabilité $S_\lambda(\gamma(t), \delta)$ coupe l'une ou l'autre des droites formant le bord de la bande, disons $\{\Re(z) = a\}$ pour fixer les idées, en suivant une droite parallèle de direction ϑ fixée. Pour $t \in [0, 1]$ on considère une paramétrisation $s \in [0, 1] \mapsto h_s(t)$ du segment reliant $\gamma(t)$ à $\{\Re(z) = a\}$ parallèlement à ϑ . Alors $(h_s)_{s \in [0, 1]}$ est une homotopie (libre) entre γ et un chemin dont l'image est un segment I . Puisque l'homotopie se déroule dans une union de faisceaux de stabilité elle se relève en une homotopie dans $\tilde{\mathcal{L}}$ entre $\tilde{\gamma}$ et un chemin tangent à une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}|_{\tilde{\Pi}^{-1}(I)}$. Or ce dernier est un feuilletage réel lisse unidimensionnel et transverse à la projection $\tilde{\Pi}$: puisque I est contractile ses feuilles le sont également, et $\tilde{\gamma}$ est finalement homotopiquement trivial dans $\tilde{\mathcal{L}}$.

3.2 Démonstration du Lemme 3.3

Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est induit par la 1-forme différentielle

$$\tilde{\omega}(z, y) = \lambda dz - y(1 + \tilde{R}(z, y)) dy$$

où par hypothèse

$$\tilde{R}(z, y) := R(\exp z, y)$$

est bornée par 1 sur $\tilde{\mathcal{V}}$. Prenons $(z_*, y_*) \in \tilde{\mathcal{L}}$ et pour $\theta \in \mathbb{S}^1$, $t \geq 0$ on note

$$z_\theta(t) := z_* - t\theta \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Puisque les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont transverses aux fibres de la projection $\tilde{\Pi}$, le bord de $\tilde{\mathcal{L}}$ est contenu dans le bord $\{|y| = r \text{ ou } \Re(z) = \ln \rho\}$. Pour garantir que les chemins $t \geq 0 \mapsto z_\theta(t)$ des faisceaux de stabilité se relèvent dans $\tilde{\mathcal{L}}$ en $t \geq 0 \mapsto (z_\theta(t), y_\theta(t))$, il suffit d'assurer que $|y_\theta|$ est une fonction décroissante. Étudions–donc les variations de

$$\varphi(t) := \ln |y_\theta(t)| = \frac{1}{2} \ln (y_\theta(t) \overline{y_\theta(t)}).$$

En utilisant la relation

$$\frac{\dot{y}_\theta}{\dot{z}_\theta} = \frac{y_\theta (1 + \tilde{R}(z_\theta, y_\theta))}{\lambda}$$

on trouve

$$\dot{\varphi} = \Re \left(-\frac{\theta}{|\lambda|} (1 + \tilde{R}(z_\theta, y_\theta)) \right).$$

Maintenant le membre de droite est strictement négatif dès que $|\arg \theta| < \delta$. Dès lors, tout rayon $t \geq 0 \mapsto z_\theta(t)$ du faisceau de stabilité $S_\lambda(z_*, \delta)$ se relève dans la feuille $\tilde{\mathcal{L}}$, puisque $|y_\theta|$ est décroissante, tant que $\Re(z_\theta(t))$ reste plus petit que $\ln \rho$. La conclusion suit.

4 Incompressibilité du nœud–col solitaire

On répète les arguments développés en section précédente dans le cas d'un nœud–col. Ici encore le Théorème A découle de la

Proposition 4.1. *Il existe $\rho_0 > 0$ et $r_0 > 0$ assez petits, et pour tous $0 < \rho \leq \rho_0$ et $0 < r \leq r_0$ un domaine $\mathcal{U}(\rho, r) \subset \mathcal{V}$, fibré en disques au-dessus de $\rho\mathbb{D} \times \{0\}$, tels que les proposition suivantes tiennent.*

1. *Chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{E}^* \mathcal{F}_{\mathcal{U}(\rho, r)}$ est simplement connexe.*
2. *Si le nœud–col est convergent, alors $\mathcal{U}(\rho, r)$ est le polydisque standard et (r_0, ρ_0) convient dès que*

$$\sup_{(x, y) \in \mathcal{U}(r_0, \rho_0)} |R(x, y)| < 1.$$

L'ensemble \mathcal{S} des séparatrices de \mathcal{F} est inclus dans $\mathcal{B} \cap \{xy = 0\}$ et les tubes de Milnor \mathcal{T}_η sont encore simples à décrire. Le reste de cette section est consacré à la preuve de la Proposition 4.1.

4.1 Faisceau de stabilité et réduction de la preuve

Par soucis de simplicité on écrira ρ et r à la place de ρ_0 et r_0 . Fixons un point $p_* := (z_*, y_*) \in \tilde{\mathcal{V}}$. Pour $\theta \in \mathbb{S}^1$ on construit le chemin $z_\theta : t \geq 0 \mapsto z_\theta(t)$ solution de

$$\dot{z}_\theta(t) = -\theta \exp(kz_\theta(t)) \tag{4.1}$$

avec la condition initiale $z_\theta(0) = z_*$.

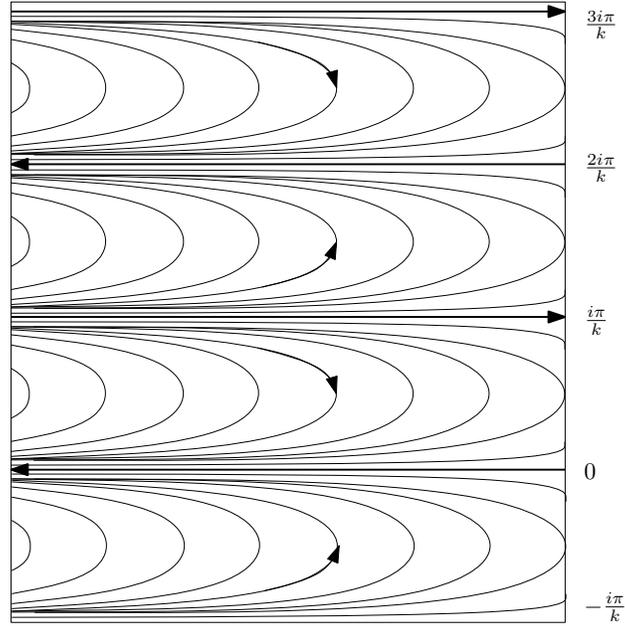


FIGURE 4.1 – Les courbes intégrales z_1 . On obtient z_θ en translatant z_1 de $-i\frac{\arg\theta}{k}$

On a la relation implicite

$$\exp(kz_\theta(t)) = \frac{\exp(kz_*)}{1 + k\theta t \exp(kz_*)}.$$

On dispose également de l'asymptotique

$$\begin{cases} \Re(z_\theta(t)) & \sim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{k} \ln t \\ \Im(z_\theta(t)) & \sim_{t \rightarrow +\infty} \Im(z_*) - \frac{1}{k} \arg \theta \end{cases}.$$

Cependant il se peut qu'avant de tendre vers $-\infty$ la partie réelle de z_θ dépasse $\ln \rho$, c'est en particulier le cas lorsque $\theta \exp(kz_*) < 0$ puisqu'alors $\exp(kz_\theta)$ admet un pôle, et donc la trajectoire z_θ quitte le domaine $\{\Re(z) < \ln \rho\}$.

Définition 4.2. On appelle **faisceau de stabilité** de sommet z_* et d'ouverture $\frac{\pi}{2} > \delta > 0$ la région de $\tilde{\mathcal{U}}(\rho, r)$ contenant z_* donnée par

$$S_\lambda(z_*, \delta) := \left\{ z_\theta(t) : |\arg \theta| < \delta, t \geq 0, (\forall \tau \leq t) z_\theta(\tau) \in \tilde{\mathcal{U}} \right\}.$$

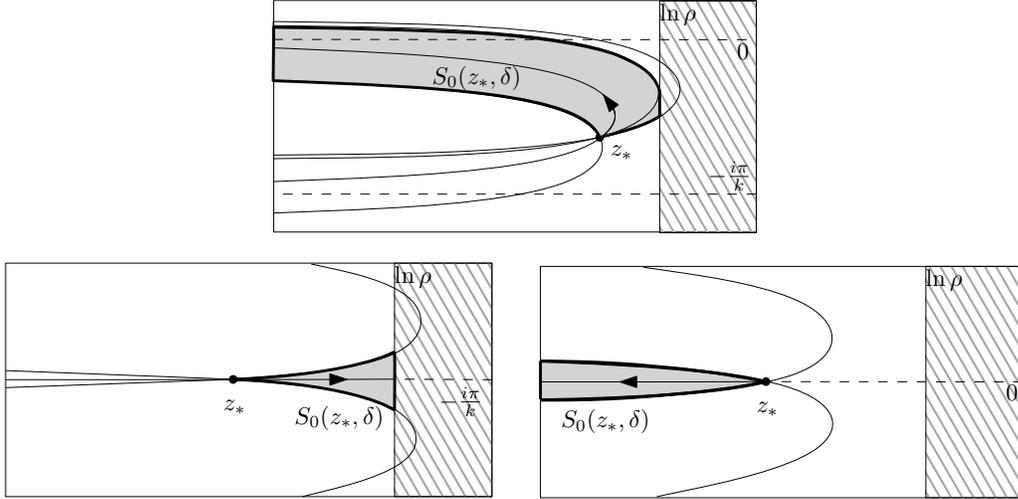


FIGURE 4.2 – Des faisceaux de stabilité (région uniformément grisée).

Lemme 4.3. *Il existe un domaine $\mathcal{U}(\rho, r)$, fibré en $r\mathbb{D}$ au-dessus de $\rho\mathbb{D} \times \{0\}$, tel que, pour tout $p_* = (z_*, y_*) \in \tilde{\mathcal{U}}(r, \rho)$, chaque chemin γ basé en z_* et inclus dans $S_\lambda(z_*, \delta)$ se relève dans $\tilde{\mathcal{F}}$ en s'appuyant sur p . Si le nœud-col est convergent alors $\mathcal{U}(\rho, r)$ est le polydisque standard.*

Remarque. L'existence des faisceaux de stabilité impose ici aussi une condition très forte sur la régularité du bord d'une feuille. Il en résulte que le revêtement universel d'une feuille typique ressemble à la Figure 4.3. La présence des « langues » d'étendue infinie sur la gauche de la figure provient du comportement « col ». En effet dans les secteurs $\left\{ \left| \arg(x^k) - \pi \right| < \frac{\pi}{2} \right\}$, délimités par des pointillés sur la figure, l'ordonnée de la feuille est de l'ordre de $\exp \frac{-1}{kx^k}$ et tend fortement vers l'infini quand x se rapproche du point singulier. Au contraire dans les secteurs « nœuds » $\left\{ \left| \arg(x^k) \right| < \frac{\pi}{2} \right\}$ les feuilles tendent platement vers 0 (voir par exemple [Tey04]). Nous donnons plus de détails en Section 7.1 concernant la topologie du bord de $\tilde{\Pi}(\tilde{\mathcal{L}})$.

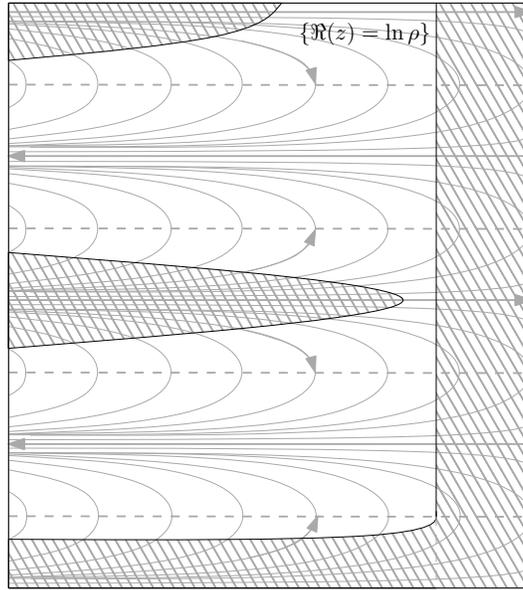


FIGURE 4.3 – Le revêtement universel d’une feuille typique d’un nœud–col (complémentaire des régions hachurées).

Ce lemme sera prouvé dans les prochaines sous-sections en deux étapes : d’abord le cas des nœuds–cols convergents puis celui des divergents. Expliquons au préalable en quoi il suffit à garantir la simple–connexité d’une feuille $\tilde{\mathcal{L}}$. La stratégie est similaire à celle introduite pour les singularités non dégénérées : il suffit de construire une homotopie (libre) $(h_s)_{s \in [0,1]}$ entre la projection $\gamma := \tilde{\Pi} \circ \tilde{\gamma}$ d’un cycle tangent $\tilde{\gamma}$ et un chemin bordant une région d’intérieur vide, telle que pour t fixé $s \mapsto h_s(t)$ est un chemin de $S_\lambda(h_0(t), \delta)$, qui se relève donc dans $\tilde{\mathcal{L}}$. Ceci achève la preuve de la Proposition 4.1 en invoquant encore une fois l’argument d’un feuilletage réel unidimensionnel au-dessus d’un compact contractile. Le fait que les faisceaux de stabilité ne sont pas tous dirigés selon une direction donnée à l’avance constitue la difficulté supplémentaire par rapport au cas non dégénéré.

Le procédé est illustré en Figure 4.4, et correspond aux deux étapes suivantes.

- Les parties de l’image de γ contenues dans les bandes « col » $\{\cos(kz) \leq 0\}$ sont envoyées, en suivant les chemins z_1 , dans $\{\cos(kz) = 0\} \cup \{\Re(z) = \ln \rho\}$.
- Les parties de l’image de γ contenues dans les bandes « nœud » $\{\cos(kz) \geq 0\}$ sont envoyées, en suivant les chemins z_1 , dans $\{\Re(z) = a\} \cup \Gamma$ où Γ est l’union des images des trajectoires z_1 issues des points $\ln \rho + i\pi/2k + i\pi/k\mathbb{Z}$.

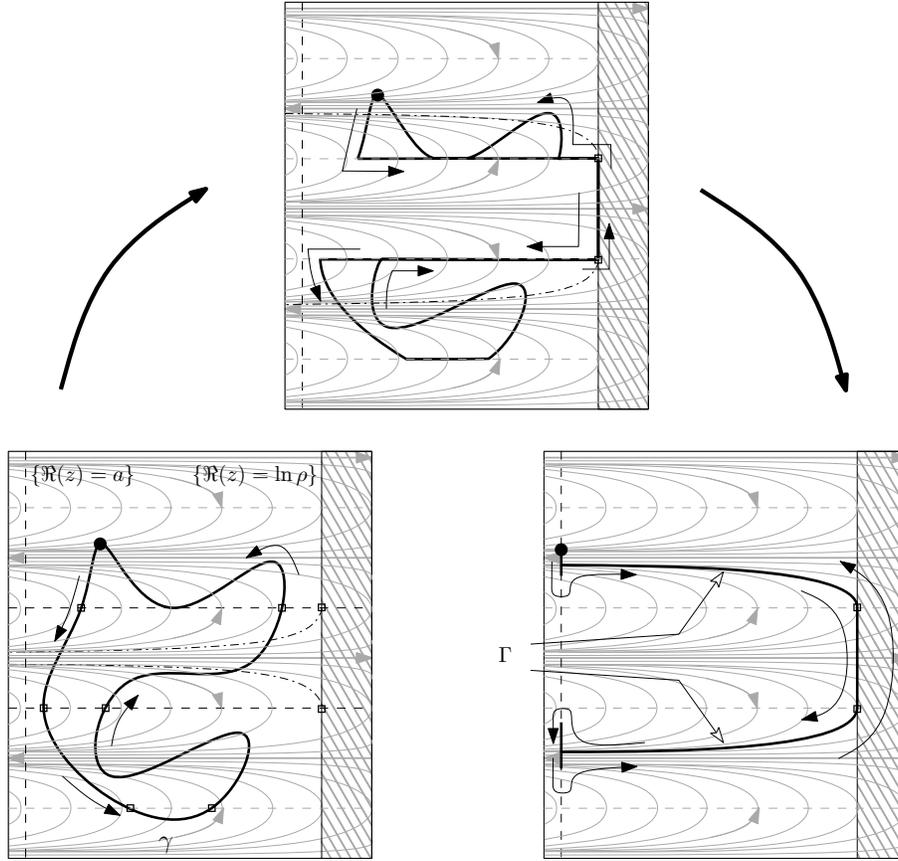


FIGURE 4.4

4.2 Le cas convergent

On prend ici \mathcal{U} sous la forme d'un polydisque $r\mathbb{D} \times \rho\mathbb{D}$ avec $r, \rho > 0$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{yR} &:= \mathcal{E}^* \omega_{yR} \\ &= \exp(kz) dy - y(1 + \tilde{R}(z, y)) dz. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Puisque les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont transverses aux fibres de la projection $\tilde{\Pi}$, le bord de \mathcal{L}_p est contenu dans le bord $\{|y| = r \text{ ou } \Re(z) = \ln \rho\}$. Pour garantir que les chemins $t \geq 0 \mapsto z_\theta(t)$ des faisceaux de stabilité se relèvent dans \mathcal{L}_p en $t \geq 0 \mapsto (z_\theta(t), y_\theta(t))$, il suffit d'assurer que $|y_\theta|$ est une fonction décroissante. Mais ceci découle encore des variations de $\varphi := \ln |y_\theta|$, à savoir

$$\dot{\varphi} = \Re(-\theta(1 + \tilde{R}(z_\theta, y_\theta))).$$

Le Lemme 4.3 est donc démontré.

4.3 Cas divergent

On va montrer que $S_\lambda(z_*, \delta)$ est encore un faisceau de stabilité à condition de modifier \mathcal{U} . Puisque $z_\theta = z_1 - i \frac{\arg \theta}{k}$ la propriété suivante est vraie.

Lemme 4.4. Pour $j \in \mathbb{Z}$ on note \tilde{V}_j^β la bande

$$\tilde{V}_j^\beta := \left\{ z : \Re(z) < \ln \rho, \left| \Im(z) - (2j+1) \frac{\pi}{k} \right| < \frac{\pi}{k} + \beta \right\},$$

dont l'image par $z \mapsto x = \exp z$ coïncide avec V_j^β . Étant donnés $0 < \beta' < \beta < \frac{\pi}{2k}$ on peut choisir $\delta > 0$ suffisamment petit de sorte que, pour tout $z_* \in \tilde{V}_j^{\beta'}$, le faisceau de stabilité $S_\lambda(z_*, \delta)$ soit inclus dans \tilde{V}_j^β .

En opérant le changement de variables sectoriel pour $j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

$$S_j : (z, y) \in \tilde{V}_j^\beta \mapsto (z, y - \bar{s}_j(\exp z)),$$

qui redresse la séparatrice sectorielle sur $\{y = 0\}$, on se ramène au cas précédent (en effet la preuve du Lemme 4.3 dans le cas convergent n'utilise pas le caractère holomorphe de la perturbation yR). On prend pour $\mathcal{U}(r, \rho)$ l'intérieur de l'adhérence du domaine suivant :

$$\mathcal{E} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} S_j^{-1} \left(V_j^\beta \times r\mathbb{D} \right) \right).$$

Comme la famille $\left(\tilde{V}_j^{\beta'} \right)_{j \in \mathbb{Z}}$ recouvre $\tilde{\Pi}(\tilde{\mathcal{V}})$ et S_j est fibrée en la variable z , le Lemme 4.3 est maintenant démontré.

5 Résumé de la construction de Marín–Mattei

La construction consiste à recoller une quantité finie de blocs locaux $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ contenant les singularités réduites de la réduction de \mathcal{F} , deux-à-deux disjoints, avec des blocs réguliers recouvrant le reste du diviseur exceptionnel, afin de localiser (grâce à un théorème de type Van Kampen) la propriété d'incompressibilité recherchée. Ces blocs ne peuvent être arbitraires, mais doivent au contraire satisfaire de «bonnes» propriétés, que nous détaillons plus bas, et posséder au moins un degré de liberté dans leur construction (la « taille ») gouverné par une fonction de contrôle. L'assemblage des blocs se fait par induction, en choisissant une composante du diviseur puis en parcourant l'arbre de réduction de proche en proche. On arrive dans une nouvelle composante D_{j+1} par le passage d'un coin, muni d'une taille de sortie spécifiée sur D_j , et on assemble les autres blocs présents sur D_{j+1} à celui-ci en ajustant leur taille. On passe alors à une composante adjacente à D_{j+1} si toutes n'ont pas été visitées.

Tout ceci n'est que partiellement exact, car les blocs réguliers qui englobent les branches mortes (Section 2.4) n'ont aucun degré de liberté : leur taille est imposée. Une obstruction d'ordre technique apparaît donc quand D_{j+1} est attachée à au moins deux branches mortes et ne possède d'autre singularité que celle partagée avec D_j , autrement dit une composante initiale. On doit donc démarrer l'induction par une composante initiale (Section 2.4), imposant une taille à sa descendance. Dans le cas d'une courbe généralisée non dicritique il est bien connu [MM08, p866] qu'il n'existe qu'au plus une composante initiale, ce qui rend possible l'induction. De plus la composante initiale est attachée à exactement deux branches mortes, l'une d'elles ayant comme extrémité le diviseur apparu lors du premier éclatement. Nous généralisons mot pour mot cette propriété à toutes les singularités de feuilletages fortement présentables en Section 6.

5.1 Découpage du diviseur exceptionnel en blocs

Soit \mathcal{F} un feuilletage fortement présentable non réduit. Notons

$$\hat{\mathcal{F}} := E^* \mathcal{F}$$

le feuilletage réduit et $\hat{\mathcal{S}}$ l'union des transformées strictes par E de chaque composante irréductible de \mathcal{S} . Autour de chaque singularité s de $\hat{\mathcal{F}}$ on se donne un système de coordonnées locales comme en Section 2, c'est-à-dire un biholomorphisme $\psi_{s,D} : \mathcal{U}_{s,D} \rightarrow \rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D}$ qui transforme $\hat{\mathcal{F}}$ en le feuilletage donné par $\omega_R = 0$ et qui envoie une composante du diviseur $D \ni s$ sur $\{y = 0\}$. On choisit (ρ_0, r_0) une fois pour toute de façon à ce que les Propositions 3.1 et 4.1 tiennent pour toutes les singularités réduites. Nous déterminerons de proche en proche les valeurs de $0 < \rho_s \leq \rho_0$ et $0 < r_s \leq r_0$ pour lesquelles la construction suivante s'appliquera.

On notera $\Gamma_{s,D}$ le cercle conforme $\partial\mathcal{U}_{s,D} \cap D$, pré-image par ψ_s de $\rho_s \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Dans toute la suite on suppose que le réel positif η_0 , paramétrant l'étendue de la famille de tubes de Milnor $(\mathcal{T}_\eta)_{0 < \eta \leq \eta_0}$, est inférieur à une « hauteur d'uniformité des blocs de Milnor » $\eta_1 > 0$ (voir [MM08, Section 2.2, p867]). La valeur de η_1 est telle que les composantes connexes de $T := E^{-1}(\mathcal{T}_\eta) \setminus \bigcup_{s \in D} \psi_{s,D}^{-1}(\rho_s \mathbb{S}^1 \times r_s \mathbb{D})$ sont en bijection avec l'adhérence $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ des composantes de $E^{-1}(0) \setminus \bigcup_{s \in D} \Gamma_{s,D}$. On note alors $\mathcal{T}_\eta(K_\alpha)$ les composantes de T correspondant à K_α .

Chaque K_α est un compact dont le bord est une union finie de cercles conformes $\mathcal{C}_{\alpha,j}$ paramétrés par des lacets simples analytiques $\gamma_{\alpha,j}$. À chaque composante initiale correspond un unique K_α , celui contenant les deux points d'attache des branches mortes, qui sera lui aussi qualifié d'initial.

Définition 5.1. Le parcours des $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ dans l'induction identifie de manière unique, pour chaque K_α non initial, une composante $\mathcal{C}_{\alpha,\ell}$ appelée **composante d'entrée** de K_α . Celle-ci correspond à la composante du bord de K_α qui sera recollée avec la construction réalisée à l'étape précédente.

Les blocs \mathcal{B}_α que nous allons décrire seront des sous-ensembles bien particuliers fibrés au-dessus des $K_\alpha \setminus \hat{\mathcal{S}}$.

5.2 Blocs adaptés feuilletés

Définition 5.2. [MM08, Définition 1.2.2, p861] Prenons un feuilletage \mathcal{F} sur un domaine \mathcal{U} et soient $A \subset B$ deux sous-ensembles de \mathcal{U} . On dit que A est **1-connexe** dans B (relativement à \mathcal{F}) si pour chaque feuille \mathcal{L} de \mathcal{F} et tout chemins α de A et β de $B \cap \mathcal{L}$ qui sont homotopes dans B , il existe un chemin de $A \cap \mathcal{L}$ homotope à la fois à α dans A et à β dans $B \cap \mathcal{L}$.

Afin de simplifier le présent texte nous ne parlons que de « blocs », sans distinguer les deux types « élémentaires » et « fondamentaux » (ces derniers regroupant plusieurs blocs élémentaires contigus recouvrant une branche morte). Cette distinction est d'ordre technique et peut être ignorée ici (voir [MM08, Section 2.2, p867] pour plus de détails).

Définition 5.3. [MM08, Définition 2.1.1, p864] La notation ∂A représente le fermé $\text{adh}(A) \setminus \text{int}(A)$.

1. Nous dirons que \mathcal{B}_α est un **blocs feuilleté adapté** si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (BF1) chaque composante connexe de $\partial\mathcal{B}_\alpha$ est incompressible dans \mathcal{B}_α ,
- (BF2) $\hat{\mathcal{F}}$ est transverse à $\partial\mathcal{B}_\alpha$

- (BF3) $\hat{\mathcal{F}}$ est incompressible dans \mathcal{B}_α ,
 (BF4) chaque composante connexe de $\partial\mathcal{B}_\alpha$ est 1-connexe dans \mathcal{B}_α ,

2. Nous dirons que la collections de blocs $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ réalise un **assemblage bord-à-bord** de blocs feuilletés adaptés si
- pour chaque $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ l'intersection $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta$ est ou bien vide, ou bien une composante connexe de $\partial\mathcal{B}_\alpha$ et de $\partial\mathcal{B}_\beta$,
 - $E(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha)$ est un voisinage de la singularité \mathcal{U} épointé de \mathcal{S} .

Nous énonçons le théorème de localisation :

Théorème 5.4. [MM08, Théorème 2.1.2, p864] *Si \mathcal{U} est un assemblage bord-à-bord de blocs feuilletés adaptés alors chaque feuille de $\hat{\mathcal{F}}$ est incompressible dans $(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha, \mathcal{S})$.*

5.3 Rugosité des ensembles de type suspension

Définition 5.5. [MM08, Definition 3.1.1, p869] Une composante B de $\partial\mathcal{B}_\alpha$ est de **type suspension** au-dessus de $\mathcal{C}_{\alpha,j}$ s'il existe un disque analytique fermé Σ inclus dans $\Pi^{-1}(\gamma_{\alpha,j}(0)) \cap B$, centré en $\gamma_{\alpha,j}(0)$ et sur lequel l'holonomie $\mathfrak{h}_{\gamma_{\alpha,j}}$ est holomorphe, tels que B soit l'union des images des chemins tangents servant à calculer l'holonomie à partir de Σ . On écrit alors

$$B = \text{Susp}_{\gamma_{\alpha,j}}(\Sigma).$$

Afin de ne pas créer de topologie artificielle dans l'espace ambiant il faut assurer que l'intersection $\Sigma \cap \mathfrak{h}_{\gamma_{\alpha,j}}(\Sigma)$ est connexe. Pour cela on introduit une notion de taille contrôlée, garantissant que cette intersection est étoilée par rapport à son centre.

Définition 5.6. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose

$$\{\{\theta\}\} := \begin{cases} |\hat{\theta}| & \text{si } \theta \in \hat{\theta} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ avec } |\hat{\theta}| < \frac{\pi}{2} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Soit $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}_{\neq 0}$ un chemin analytique lisse par morceaux.
- (a) En un point lisse $\gamma'(t) \neq 0$ on définit

$$\mathbf{e}(\gamma; t) := \left\{ \left\{ \arg \left(\frac{\dot{\gamma}}{i\gamma}(t) \right) \right\} \right\}.$$

Cette quantité admet une limite à gauche et à droite en tout $t \in [0,1]$, et on notera $\mathbf{e}(\gamma; t)$ la plus grande des deux.

- (b) Définissons finalement la **rugosité** de γ par

$$\mathbf{e}(\gamma) := \max \mathbf{e}(\gamma; [0,1]).$$

2. La rugosité est visiblement une propriété intrinsèque de la courbe orientée paramétrée par γ . Si Γ est l'image du chemin γ on posera alors

$$\mathbf{e}(\Gamma) := \min \{\mathbf{e}(\gamma), \mathbf{e}(\gamma^-)\},$$

où γ^- est le chemin d'orientation opposée à γ . Si Δ est un voisinage simplement connexe de $0 \in \mathbb{C}$, de bord analytique par morceaux, et si $\mathbf{e}(\partial\Delta) < \infty$, alors Δ est étoilé par rapport à 0.

3. On appelle **fonction de contrôle** d'un ensemble de type suspension $B := \text{Susp}_\gamma \Sigma$ au-dessus d'un lacet simple γ , analytique par morceaux, l'élément de $[0, \infty]$ donné par

$$\mathfrak{r}(B) := \max\{\mathbf{e}(\partial \text{adh}(f \circ E(\Sigma))), \|B\|_{\mathcal{S}}\}$$

où $\|B\|_{\mathcal{S}} := \sup|f \circ E(\Sigma)|$ est la **taille** de B vis-à-vis de la fibration définie par l'équation des séparatrices distinguées $\mathcal{S} = \{f = 0\}$.

5.4 Blocs adaptés feuilletés contrôlés

Définition 5.7. [MM08, Théorème 3.2.1, p871] Prenons deux réels $\eta_0 \leq \eta_1$ et $\varepsilon > 0$, ainsi que $\alpha \in \mathcal{A}$ correspondant à une composante D du diviseur exceptionnel.

1. On dira que $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{T}_{\eta_0}(K_\alpha)$ est un **bloc feuilleté contrôlé** si :

(BC1) pour tout $\eta_0 \geq \eta > 0$ assez petit $\mathcal{T}_\eta(K_\alpha) \subset \mathcal{B}_\alpha$ et les inclusions induisent des isomorphismes $\pi_1(\mathcal{T}_\eta(K_\alpha) \setminus D) \simeq \pi_1(\mathcal{B}_\alpha \setminus D)$ et $\pi_1(\partial \mathcal{T}_\eta(K_\alpha) \setminus D) \simeq \pi_1(\partial K_\alpha \setminus D)$,

(BC2) \mathcal{B}_α est un bloc feuilleté adapté,

(BC3) chaque composante B_j de $\partial \mathcal{B}_\alpha$ est de type suspension au-dessus de $\mathcal{C}_{\alpha, j}$.

(BC4) $\mathfrak{r}(B_j) \leq \varepsilon$.

2. On dira qu'une composante non initiale K_α est **contrôlable** s'il existe $c_\alpha > 0$ et une fonction croissante $\mathfrak{d}_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, de limite nulle en 0, telles que pour tout sous-ensemble $B \subset \mathcal{T}_\eta(K_\alpha)$ de type suspension au-dessus de la composante d'entrée $\mathcal{C}_{\alpha, \ell}$ de K_α , avec $\mathfrak{r}(B) \leq c_\alpha$, il existe un bloc feuilleté contrôlé dont la composante B_ℓ du bord au-dessus de $\mathcal{C}_{\alpha, \ell}$ satisfait les propriétés supplémentaires :

(BC3') B_ℓ est 1-connexe dans B ,

(BC4') $\mathfrak{r}(B_\ell) \leq \mathfrak{d}_\alpha(\mathfrak{r}(B))$.

Le Théorème 3.2.1 de [MM08, p871] prouve que chaque K_α non initial est contrôlable lorsque $\hat{\mathcal{F}}$ ne contient ni nœud-col ni selle quasi-résonnante. Le reste de la Section 3.2 de [MM08] prouve que ce résultat entraîne le théorème de Marin-Mattei. Nous montrons dans la Section 7 que ce théorème se généralise à tous les feuilletages fortement présentables.

6 Composantes initiales

Nous renvoyons à la Section 2.4 pour les définitions de «branche morte» et «composante initiale». Cette section est dévolue à la preuve de la propriété suivante :

Théorème 6.1. *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage fortement présentable réduit par un morphisme minimal $E : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Alors $E^{-1}(0)$ contient au maximum une composante initiale. Lorsqu'elle existe, exactement deux branches mortes s'y attachent. Les singularités présentes aux coins de ces branches mortes (autres que le point d'attache), sont des selles rationnelles linéarisables. L'extrémité d'une de ces branches est le premier diviseur créé par la réduction.*

On verra en Section 8 comment construire des feuilletages comportant un nombre arbitraire de composantes initiales, chacune pouvant elle-même être attachée à un nombre arbitraire de branches mortes.

6.1 Préliminaires

6.1.1 Formule de Camacho–Sad

La notion d'indice de Camacho–Sad, ainsi que les formules afférentes, sont introduites dans le fameux article [CS82]. Sans entrer dans les détails de la construction d'origine, on se servira du fait suivant comme définition.

Lemme 6.2. *Soit \mathcal{F} un germe de singularité réduite en un point $p \in \mathbb{C}^2$, et S un germe de séparatrice locale, lisse en ce point. Quitte à changer le système de coordonnées conformes au voisinage de la singularité, on peut toujours supposer que $p = (0, 0)$ et que le feuilletage \mathcal{F} est induit par un germe de 1–forme différentielle*

$$(\lambda_1 x + \dots) dy - \lambda_2 y(1 + \dots) dx \quad , \lambda_2 \neq 0 \quad .$$

La valeur de l'indice $\text{CS}(\mathcal{F}, S, p)$ de Camacho–Sad de \mathcal{F} relativement à S au point p est donnée par les égalités suivantes.

1. Si $S \subset \{x = 0\}$ on a

$$\text{CS}(\mathcal{F}, S, p) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

2. De plus, si \mathcal{F} est un nœud–col convergent d'invariant formel $\mu \in \mathbb{C}$ et si $S \subset \{y = 0\}$ est la séparatrice faible, on a

$$\text{CS}(\mathcal{F}, S, p) = \mu.$$

Théorème 6.3. (Formule de Camacho–Sad) [CS82] *Soit \mathcal{C} une courbe complexe lisse et compacte plongée dans une surface complexe \mathcal{M} . On note $\mathfrak{c}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ la classe de Chern de ce plongement. Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe sur \mathcal{M} laissant \mathcal{C} invariante, et dénotons $\text{Sing}(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ l'ensemble des points singuliers de \mathcal{F} sur \mathcal{C} . Alors*

$$\mathfrak{c}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}, \mathcal{C})} \text{CS}(\mathcal{F}, \mathcal{C}, p).$$

6.1.2 Autres ingrédients

Rappelons le résultat suivant, qui sera utile dans cette section :

Lemme 6.4. [CLS84, Lemma 1, p20] *Soit s une singularité de germe de feuilletage holomorphe du plan complexe, telle que :*

1. sa réduction ne contient pas de nœud–col,
2. exactement deux séparatrices s'y croisent, et elles sont transverses, irréductibles et lisses.

Alors s est réduite.

Ce lemme va nous permettre de contrôler de manière très précise le processus de formation des branches mortes dans la réduction d'un feuilletage fortement présentable. Un autre ingrédient, élémentaire, pour arriver à cette fin est le :

Lemme 6.5. *Soit p une singularité non réduite présente sur une composante D à une étape intermédiaire de la réduction d'un germe de feuilletage. Si la réduction de p produit une branche morte attachée à D alors la seule séparatrice passant par p est le diviseur D .*

Démonstration. Soit S un germe de séparatrice passant par p . Après réduction de s le transformé strict de S ne peut que passer par le point d'attache. Donc $S \subset D$. \square

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Corollaire 6.6. Soit D une composante à une étape de la réduction d'un feuilletage fortement présentable. Alors la réduction d'une singularité $p \in D$ ne peut créer de branche morte attachée à D en p .

Cette propriété se déduit directement du Lemme 6.5 et du suivant (avec $S := D$) :

Lemme 6.7. Soit s une singularité de germe de feuilletage fortement présentable du plan complexe par laquelle ne passe qu'une seule séparatrice S , lisse et irréductible.

1. Si le feuilletage est réduit, s est une singularité de type nœud-col divergent dont S est la séparatrice forte.
2. Si le feuilletage n'est pas réduit et si son arbre de réduction est une branche morte attachée au transformé strict \hat{S} de S , alors \hat{S} est la séparatrice forte d'un nœud-col présent dans le dernier diviseur créé, qui est le point d'attache de la branche morte. Les autres singularités de $\hat{\mathcal{F}}$ sont des selles rationnelles linéarisables.

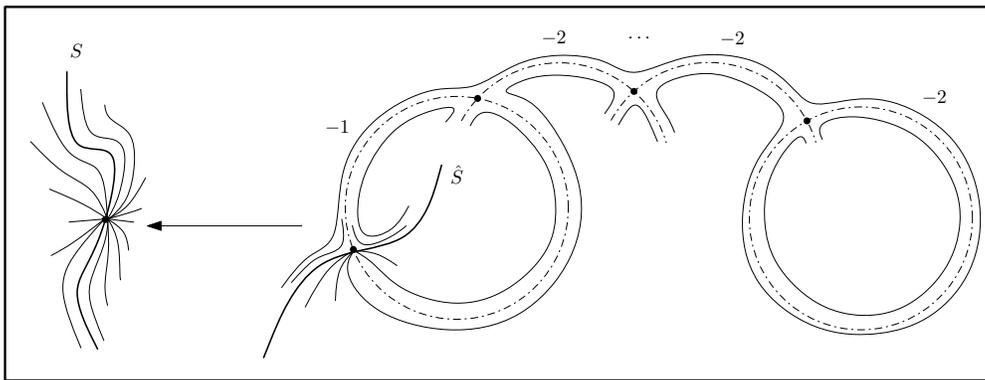
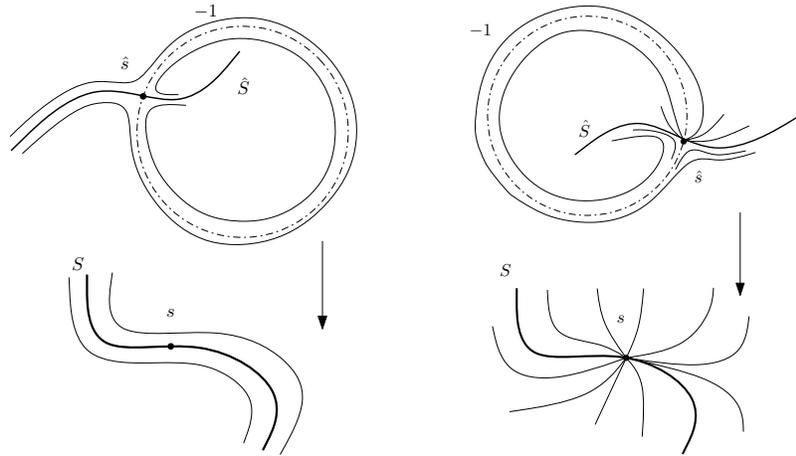


FIGURE 6.1 – Une branche morte obtenue en réduisant une seule séparatrice (en gras). Les nombres indiquent la classe de Chern des composantes.

Remarque 6.8. En Section 8.4 nous construisons des feuilletages correspondant à la situation évoquée dans ce lemme. On comprend également comment construire des feuilletages (pas fortement présentables) ayant un nombre arbitraire de branches mortes.

Démonstration.

1. Par une singularité réduite passent deux séparatrices transverses, irréductibles et lisses, sauf si la singularité est un nœud-col divergent.
2. Nous montrons le lemme par récurrence sur le nombre $d \geq 1$ d'éclatements ponctuels de s nécessaire à la réduire. Si s est réduite en un éclatement on obtient un diviseur D^1 ne portant qu'une seule singularité \hat{s} par laquelle passe \hat{S} . L'holonomie de $\hat{\mathcal{F}}$ le long de D^1 doit être l'identité et son indice de Camacho–Sad égal à -1 d'après la formule de Camacho–Sad. Les seuls types locaux de singularité ayant cette propriété sont les suivants :



(a) Les selles linéarisables localement conjuguées à $d(xy) = 0$, avec le diviseur correspondant à une branche de $\{xy = 0\}$; dans ce cas \mathcal{F} est régulier, ce qui est exclu.

(b) Les nœuds-cols dont le diviseur est la séparatrice faible, d'invariant formel $\mu := -1$. Ainsi \hat{S} est la séparatrice forte de \hat{s} .

Le lemme est vrai pour $d \leq 1$. Supposons qu'il le soit pour toute singularité réduite en au plus $d \geq 1$ éclatements, et prenons une singularité s réduite en (exactement) $d + 1$ éclatements, dont l'arbre de réduction est une branche morte attachée à \hat{S} . Après le premier éclatement de s , le diviseur D^1 (puisque c'est un maillon d'une branche morte) contient au plus deux singularités, réduites en au plus d éclatements. Le transformé strict S_1 de S passe par une d'elles, disons s_1 , en coupant transversalement le diviseur D^1 . Nécessairement la réduction de s_1 produit le point d'attache, donc la réduction de l'autre singularité \bar{s} éventuelle est une branche morte. Comme la seule séparatrice de \bar{s} est D^1 , l'hypothèse de récurrence appliquée à \bar{s} contredit celle de forte présentabilité, donc s_1 est la seule singularité présente sur D^1 .

Éclatons s_1 une fois de plus : on obtient un nouveau diviseur D^2 attaché à D^1 . Le même argument que précédemment indique que les seules singularités présentes sur $D^1 \cup D^2$ sont :

- ▷ le coin $p_1 := D^2 \cap D^1$,
- ▷ le point d'intersection s_2 entre le transformé strict S_2 de S_1 et D^2 .

Comme $p_1 \neq s_2$ le coin est réduit :

Lemme 6.9. *Soit p un coin du diviseur exceptionnel d'une étape intermédiaire de la réduction d'un feuilletage fortement présentable, par laquelle ne passe aucune autre séparatrice que les branches du diviseur exceptionnel. Alors la singularité p est réduite.*

Démonstration. D'après le Lemme 6.4, si p n'était pas réduite il y aurait un nœud-col dans sa réduction. Puisque aucune autre séparatrice ne passe par p , la séparatrice forte de ce nœud-col est incluse dans un diviseur. Cette situation est exclue pour les feuilletages fortement présentables. \square

D'après le raisonnement développé pour le cas $d = 1$, la singularité réduite présente en p_1 est une selle rationnelle linéarisable puisqu'elle ne peut être un nœud-col (les deux séparatrices passant par p_1 sont des composantes du diviseur).

La prochaine étape pour réduire s est d'éclater s_2 . On montre ainsi de proche en proche qu'après $d + 1$ étapes le transformé strict \hat{S} de S intersecte en \hat{s} la dernière

composante D^{d+1} créée, et les autres singularités de $\hat{\mathcal{F}}$ correspondent aux points de croisement $p_j := D^j \cap D^{j+1}$, en lesquelles $\hat{\mathcal{F}}$ est réduit et admet une selle rationnelle linéarisable. La classe de Chern de chaque D^j est -2 pour $j \leq d$ alors que pour D^{d+1} elle vaut -1 . La singularité p_j est une selle linéarisable avec

$$\text{CS}(\hat{\mathcal{F}}, D^{j+1}, p_j) = -\frac{j}{j+1}.$$

Puisque s_1 n'est pas réduite le Lemme 6.4 indique que \hat{s} est un nœud-col. Son indice

$$\text{CS}(\hat{\mathcal{F}}, D^{d+1}, \hat{s}) = -\frac{1}{d+1}$$

est non nul donc D^{d+1} est sa séparatrice faible. □

6.2 Preuve du Théorème 6.1

Écrivons le morphisme E comme le composé $E_d \circ \dots \circ E_2 \circ E_1$ d'éclatements ponctuels $E_n : \mathcal{M}_{n+1} \rightarrow \mathcal{M}_n$ avec $\mathcal{M}_1 := (\mathbb{C}^2, 0)$ et $\mathcal{M}_d := \mathcal{M}$, chacun faisant apparaître une nouvelle composante \mathcal{D}_n du diviseur exceptionnel final $E^{-1}(0)$. On dit que n est l'**étape d'apparition** de \mathcal{D}_n , et on considère l'application définie sur l'ensemble des composantes de $E^{-1}(0)$:

$$\begin{aligned} \text{comp}(E^{-1}(0)) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \mathcal{D}_n &\longmapsto \mathfrak{n}(\mathcal{D}_n) := n. \end{aligned}$$

On écrira $\mathcal{F}_n := E_n^* \mathcal{F}$ le transformé de \mathcal{F} par E_n .

La preuve se déroule en deux épisodes, correspondant aux différents temps de formation de la composante initiale. Une conséquence du Corollaire 6.6 est qu'une composante initiale apparaît toujours après que toutes les branches mortes s'y attachant ont été créées par le processus de réduction.

6.2.1 Apparition de la première branche morte

De toutes les branches mortes $(B_\ell)_{1 \leq \ell \leq m}$ attachées à la composante initiale \mathcal{C} , $m \geq 2$, on choisit celle qui apparaît en premier et on la nomme B . On procède de la manière suivante : en identifiant une branche B_ℓ à la collection des maillons qui la forme, on choisit B de sorte que

$$\min \mathfrak{n}(B) = \min \mathfrak{n} \left(\bigcup_{\ell \leq m} B_\ell \right).$$

Numérotons les composantes $(D^j)_{1 \leq j \leq k}$ formant B de sorte que $j \mapsto n_j := \mathfrak{n}(D^j)$ soit croissante. Si D^1 est le premier diviseur obtenu dans la réduction de \mathcal{F} , c'est-à-dire $n_1 = 1$, on définit S comme étant une séparatrice de \mathcal{F} (dont l'existence est garantie par le théorème de Camacho–Sad [CS82]). Dans le cas contraire on prend pour S une composante de $E_n^{-1}(0)$ adjacente à D^1 .

Lemme 6.10. *L'ordre d'adjacence des D^j coïncide avec leur ordre d'apparition :*

$$D^j \cap D^\ell \neq \emptyset \iff |j - \ell| \leq 1.$$

Le coin $D^{j+1} \cap D^j$ est une selle rationnelle linéarisable. De plus D^k contient exactement deux singularités (une seule si $k = 1$) : le coin $D^k \cap D^{k-1}$ (si $k > 1$) et une singularité s_k par laquelle passe une séparatrice S_k différente de D^k . Cette séparatrice provient du transformé strict de S dans \mathcal{F}_{n_k} .

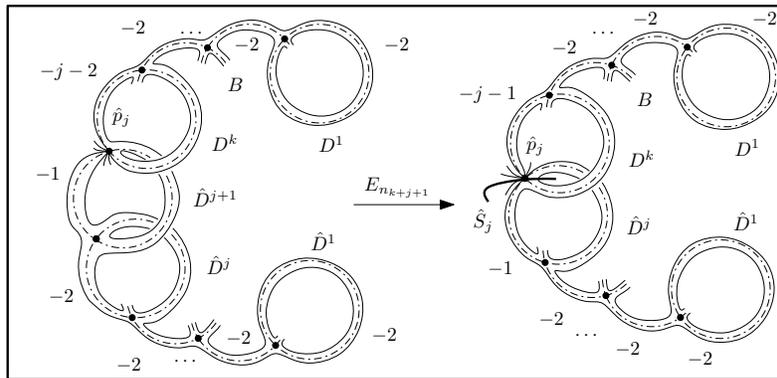
Démonstration. D^1 contient au moins une singularité s_1 de \mathcal{F}_{n_1} par laquelle passe le transformé strict S_1 de S (si $n_1 \neq 1$ on a directement $S_1 = S$). Le Corollaire 6.6 montre que \mathcal{F}_{n_1} n'a pas d'autre singularité sur D^1 . Si $k \geq 2$, à l'étape n_2 aucune autre séparatrice que D^1 et D^2 ne passe par le coin $p := D^2 \cap D^1$, puisque sinon son transformé strict dans $\hat{\mathcal{F}}$ appartiendrait à une union connexe de composantes reliant D^1 et D^2 , contredisant le fait que B est une branche morte. Par suite la singularité p est réduite (Lemme 6.9) et D^2 contient exactement une singularité s_2 de \mathcal{F}_{n_2} , par laquelle passe le transformé strict de S_1 , distinct de D^2 . L'holonomie de \mathcal{F}_{n_1} en p le long de D^1 est l'identité et l'indice de Camacho–Sad $\text{CS}(\mathcal{F}_{n_1}, D^1, p)$ est un entier négatif. Puisque p ne peut être un nœud–col la seule possibilité est que p soit une selle rationnelle linéarisable, comme dans la preuve du Corollaire 6.7. Un raisonnement par induction achève la démonstration du lemme. \square

6.2.2 Apparition de la seconde branche morte

Soit n_{k+1} l'étape de la réduction de \mathcal{F} qui correspond à l'éclatement de s_k . On construit de proche en proche une chaîne de composantes $(\hat{D}^j)_{1 \leq j \leq k}$ dont l'ordre d'apparition n_{k+j} correspond à l'ordre d'adjacence, en utilisant les règles suivantes.

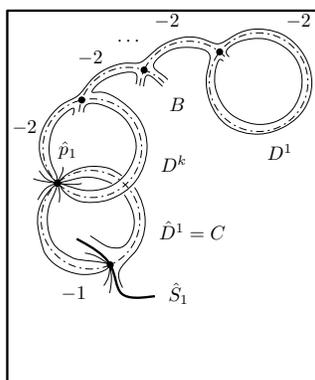
- ▶ **Par le coin $\hat{p}_j := D^k \cap \hat{D}^j$ passe une séparatrice \hat{S}_j distincte de D^k et \hat{D}^j .**

Alors \hat{p}_j n'est pas réduite et \hat{S}_j n'est pas une composante du diviseur exceptionnel $E_{n_{k+j}}^{-1}(0)$ (Remarque 2.1). À l'étape n_{k+j+1} l'éclatement de \hat{p}_j produit un diviseur \hat{D}^{j+1} adjacent à \hat{D}^j et D^k . Si une séparatrice distincte de $\hat{D}^j \cup \hat{D}^{j+1}$ passait par le coin $\hat{D}^j \cap \hat{D}^{j+1}$ alors B ne serait pas maximale ; cette singularité est donc réduite (Lemme 6.9). C'est en fait une selle rationnelle linéarisable d'après le même argument qu'employé pour prouver le Lemme 6.10. Si \hat{D}^{j+1} porte une troisième singularité alors $\hat{D}^{j+1} = C$ et le processus s'arrête.



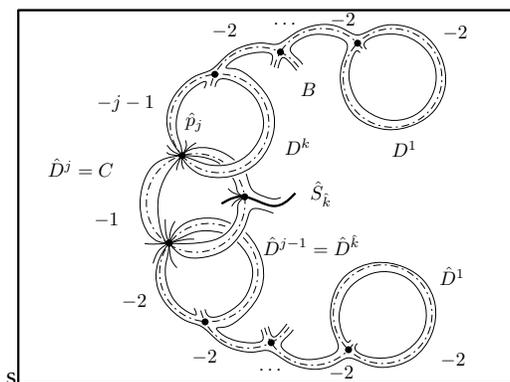
- ▶ **Par \hat{p}_1 ne passe aucune autre séparatrice que D^k et \hat{D}^1 .**

D'après le Lemme 6.9 \hat{p}_1 est réduite. Puisque B est maximale, \hat{D}^1 ne peut être un maillon de B et \hat{p}_1 est le point d'attache de B sur la composante initiale $C = \hat{D}^1$. Le Corollaire 6.6 interdit l'existence d'une deuxième branche morte attachée à C . Cette configuration ne peut donc se produire.



► Par \hat{p}_j , $j \geq 2$, ne passe aucune autre séparatrice que D^k et \hat{D}^j .

D'après le Lemme 6.9, \hat{p}_j est réduite. Dans ce cas $\hat{D}^j = C$ et le Corollaire 6.6 oblige la deuxième branche morte à contenir $\bigcup_{\ell=1}^{j-1} \hat{D}^\ell$. Dans ce cas les seules séparatrices passant par le coin $\hat{D}^j \cap \hat{D}^{j-1}$ sont \hat{D}^j et \hat{D}^{j-1} : le coin est réduit. Par une troisième singularité de C passent tous les transformés stricts des séparatrices de \mathcal{F} et de la séparatrice S considérée pour construire la première branche morte. Le Corollaire 6.6 interdit à C de porter une autre singularité de $\mathcal{F}_{n_{k+\hat{k}+1}}$ (et donc il ne peut y avoir plus de $m := 2$ branches mortes attachée à C). La construction s'achève.



Ce procédé s'arrête après un nombre fini $j = \hat{k} + 1 \geq 2$ d'étapes. En prenant pour $\hat{S}_\hat{k}$ le transformé strict de S dans $E_{n_{k+\hat{k}}}$ on prouve que S ne pouvait être une composante du diviseur $E_{n_1}^{-1}(0)$ (sinon $\hat{S}_{\hat{k}-1}$ serait une composante du diviseur en coupant deux autres, contredisant la Remarque 2.1) et

$$n_1 = 1.$$

Aussi l'extrémité de B est le premier diviseur créé par la réduction de \mathcal{F} , entraînant l'unicité de C et le résultat.

7 Feuilletages fortement présentables

On montre maintenant le Théorème C. Le premier ingrédient est le suivant :

Théorème 7.1. *Considérons un germe de feuilletage holomorphe au voisinage d'une singularité élémentaire admettant deux séparatrices⁸, induit par la 1-forme ω_R donnée en Section 2,*

8. Cette classe regroupe les singularités non dégénérées et les noeuds-cols convergents.

avec $\lambda \notin \mathbb{R}_{>0}$. Il existe $\rho, r > 0$ tels que les propriétés suivantes sont satisfaites sur le polydisque $\mathcal{U}(\rho, r) := \rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D}$.

1. Le feuilletage est holomorphe avec une seule singularité sur un voisinage de $\text{adh}(\mathcal{U}(\rho, r))$.
2. Pour $x_* \in \rho\mathbb{S}^1$ considérons la paramétrisation $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto x_* \exp(2i\pi t)$ du cercle $\rho\mathbb{S}^1$, ainsi que l'ouvert maximal sur lequel \mathfrak{h}_γ est définie :

$$\Sigma := \{(x_*, y_*) : |y_*| < r, \gamma \text{ se relève dans } \mathcal{F}_{|\mathcal{U}(\rho, r)} \text{ à partir de } (x_*, y_*)\}.$$

Alors Σ est un disque analytique contenant $(x_*, 0)$, à bord analytique par morceaux. De plus à ρ fixé il existe $M_\rho > 0$ telle que pour tout r assez petit

$$e(\partial \text{adh}(\Sigma)) < M_\rho r.$$

3. $(\mathcal{U}(\rho, r) \setminus \{xy = 0\}) \cup \text{Susp}_\gamma(\Sigma)$ est un bloc feuilleté contrôlé.
4. Si cette classe de singularité apparaît dans une composante K_α de la réduction $\hat{\mathcal{F}}$ alors K_α est contrôlable.

Ce théorème, démontré en Section 7.1, permet de placer des blocs contenant les singularités nœuds–cols et quasi–résonnantes dans la construction de Marín–Mattei. Il faut toutefois obtenir des résultats plus précis pour le passage des coins. Pour un feuilletage fortement présentable cela ne peut se produire qu'avec des singularités non dégénérées ; nous précisons cela en Section 7.3. Dès lors un feuilletage présentable est incompressible dans l'ouvert

$$\mathcal{U} := E\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha\right) \cup \mathcal{S}$$

où :

- les blocs \mathcal{B}_α correspondant à des singularités s autres que des nœuds ($\lambda > 0$) sont ceux donnés par (3) de ce théorème (*modulo* le passage des coins), on prendra alors ρ_s et r_s inférieurs à ρ et r ,
- les autres blocs \mathcal{B}_α sont pris comme dans la construction d'origine de Marín–Mattei.

Il est tout à fait probable que certains feuilletages non fortement présentables soient incompressibles (par exemple s'il n'y a qu'un seul nœud–col dans la réduction). Dans ces cas-là c'est la localisation de la construction qui est mise en défaut :

Proposition 7.2. *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage holomorphe au voisinage d'une singularité de type nœud–col, induit par la 1–forme ω_R donnée en Section 2. On note \mathcal{S} la séparatrice faible d'un nœud–col convergent, et $\mathcal{S} := \emptyset$ dans le cas divergent. Soit $0 \in D \subset r\mathbb{D}$ un disque fermé conforme et \mathcal{V} un voisinage simplement connexe de $(0, 0)$, assez petit, fibré au-dessus de D par la projection $(x, y) \mapsto y$. Prenons une composante V de $\partial\mathcal{V}$, de type suspension au-dessus de $\{0\} \times \partial D$. Alors V ne peut-être 1–connexe dans $\mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$.*

Cette proposition, prouvée en Section 7.2, interdit de plonger un nœud–col dont la séparatrice forte est une composante du diviseur exceptionnel, dans un bloc local suffisamment petit vérifiant (BF4). La condition de forte présentabilité seule ne permet donc pas de caractériser les feuilletages incompressibles.

Le Théorème 6.1.1 de [MM08, p900] nous permet d'obtenir une transversale \mathcal{C}' complètement connexe dans $\bigcup_{\alpha \in \text{NC}} \mathcal{B}_\alpha$, où NC est le sous-ensemble de \mathcal{A} correspondant aux blocs contenant les nœuds–cols (y compris en présence de selles quasi–résonnantes). Soit

s une singularité nœud–col de $\hat{\mathcal{F}}$, appartenant à une composante D du diviseur exceptionnel. On note \mathcal{F}' le feuilletage poussé–en–avant de $\hat{\mathcal{F}}$ par le biholomorphisme $\psi_{s,D}$ introduit en Section 5.1. Il est aisé de voir que chaque transversale $\{y = y_0\}$ sature, par \mathcal{F}' , un voisinage épointé de $D = \{y = 0\}$. Rajouter $\psi_{s,D}^{-1}(\{y = y_0\})$ à \mathcal{C}' est pourtant une approche vouée à l'échec :

Corollaire 7.3. *Sous les hypothèses de la proposition précédente aucune transversale $\{y = y_0\}$ n'est 1–connexe dans $\mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$.*

Ce corollaire sera démontré en Section 7.2.

Pour obtenir une transversale complète \mathcal{C} dans \mathcal{U} on adjoint à \mathcal{C}' , pour chaque singularité nœud–col $s \in D$ où D est la séparatrice faible de $\hat{\mathcal{F}}$, le disque conforme $\Omega(x_0, y_0, \varepsilon)$ (ou plutôt, son image par le morphisme de réduction), dépendant de $(x_0, y_0) \in \partial \text{adh}(\mathcal{U}(\rho, r))$ et $r \geq \varepsilon > 0$, défini dans la coordonnée $\psi_{s,D}$ par :

$$\Omega(x_0, y_0, \varepsilon) := \{(x, y_0) : 0 < |x| < \rho, \sin(k \arg x) > 1/2\} \cup \{x_0\} \times \varepsilon \mathbb{D}.$$

Corollaire 7.4. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(x_0, y_0) \in \partial \text{adh}(\mathcal{U}(\rho, r))$, l'ouvert $\Omega_{(x_0, y_0, \varepsilon)}$*

1. *sature un voisinage de $(0, 0)$ épointé de $\{x = 0\}$,*
2. *est 1–connexe dans $U(\rho, r)$.*

Ce corollaire, montré en Section 7.2, couplé au fait que la 1–connexité est transitive [MM08, Remarque 1.2.3, p861], garantit alors que \mathcal{C} est une transversale complètement connexe. Cela clôt la preuve de l'assertion (1) du Théorème C.

7.1 Blocs feuilletés adaptés contrôlés : preuve du Théorème 7.1

Dans cette section nous ne considérons que des feuilletages ayant une singularité de type

- non dégénérée donnée par la forme ω_R définie en (2.1), avec $\lambda \notin \mathbb{R}_{>0}$,
- nœud–col convergent donné par la forme ω_{yR} définie en (2.2).

D'après les choix effectués en début de section, la famille de polydisques

$$\mathcal{U}(\rho, r) := \rho \mathbb{D} \times r \mathbb{D}$$

fournit une base de voisinages $\mathcal{U}(\rho, r)$ de $(0, 0)$, dépendant de deux paramètres $\rho, r > 0$ suffisamment petits, pour laquelle les conditions (BF3) et (BC1), ainsi que (1) du Théorème 7.1, sont satisfaites. De plus les conditions (BF1), (BF2), (BC3) et (BC4) sont trivialement vérifiées dès que (2) du Théorème 7.1 est établi. Les propriétés suivantes doivent donc être satisfaites pour démontrer (3) :

- (BF4),

et pour démontrer (4) :

- (BC3'),
- (BC4').

7.1.1 Preuve de (2)

Soit $\zeta(t) := z_* + 2i\pi t$ pour $x_* = \exp z_*$ et $t \in [0, 1]$. Considérons le feuilletage analytique réel \mathcal{F}_C induit sur le cylindre $C := [0, 1] \times r \mathbb{D}$ par la 1–forme

$$\omega := dy - yG(t, y) dt,$$

où

$$G(t, y) := 2i\pi \frac{1 + \tilde{R}(\zeta(t), y)}{\tilde{P}(\zeta(t))},$$

avec $P(x) := \lambda$ pour les singularités dégénérées, et $P(x) := x^k$ pour les nœuds-cols. Celui-ci est régulier, transverse aux fibres de la projection $\Pi : (t, y) \mapsto t$. On identifie canoniquement Σ à un sous-ensemble de $r\mathbb{D} \simeq \{0\} \times r\mathbb{D}$, c'est-à-dire l'ensemble des $y_* \in r\mathbb{D}$ tels que le relevé $t \mapsto y(t, y_*)$ de $[0, 1] \times \{0\}$ dans \mathcal{F}_C en s'appuyant sur $(0, y_*)$ existe pour tout $t \in [0, 1]$. L'holonomie \mathfrak{h}_C le long de \mathcal{F}_C est holomorphe sur un voisinage de $\text{adh}(\Sigma)$. Par transversalité $y_* \in \Sigma$ si, et seulement si, $|y(y_*, t)| < r$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Clairement Σ est ouvert et contient 0. Si $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ est un lacet lisse et simple, délimitant un disque analytique $U \subset r\mathbb{D}$, alors la surface

$$T := \bigcup_{s \in [0, 1]} y([0, 1], \Gamma(s))$$

est un tube homéomorphe à $[0, 1] \times \partial U$. Mais pour tout $y_* \in U$ le chemin $t \mapsto y(t, y_*)$ est prisonnier de T et donc $y_* \in \Sigma$, ce qui montre que Σ est simplement connexe.

Pour $y_* \in \Sigma$ écrivons

$$\varphi(t, y_*) := \ln |y(t, y_*)|$$

de sorte que

$$\dot{\varphi}(t, y_*) = \Re(G(t, y(t, y_*))).$$

Dès lors, ou bien $y_* \in r\mathbb{S}^1$, ou bien $y_* \in \mathfrak{h}_C^{-1}(r\mathbb{S}^1)$, ou bien encore il existe $\tau \in]0, 1[$ minimal tel que

$$\begin{cases} \varphi(\tau, y_*) = r \\ \dot{\varphi}(\tau, y_*) = 0 \end{cases}.$$

Ainsi y_* est inclus dans le pré-image par transport holonome de l'ensemble analytique réel $Z := \partial \text{adh}(C) \cap \{\Re(F) = 0\}$. Écartons les cas triviaux, $Z = \partial \text{adh}(C)$ ou $\#Z < \infty$, pour étudier la courbe analytique Z . Si $(\tau_0, y(\tau_0, y_*))$ est un point régulier de Z alors Z est localement paramétré par un arc lisse $\tau \mapsto (\tau, y(\tau, y_*(\tau)))$ résolvant le système pour $y_* := y_*(\tau)$. Dès lors $\partial \Sigma$ est inclus dans une union finie d'adhérences de courbes analytiques par morceaux. En particulier Σ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Il suffit alors de réduire r pour obtenir la connexité de Σ .

Nous finissons la preuve de (2) en donnant une estimation de la rugosité de $\partial \Sigma$. Tout d'abord il est clair que pour tout $y_* \in \Sigma$ et $t \in [0, 1]$ on a la relation

$$y(t, y_*) = y_* \exp(-F(t, y_*)) \tag{7.1}$$

où

$$F(t, y_*) := \int_0^t G(u, y(u, y_*)) du.$$

La formule suivante est une conséquence immédiate des définitions :

Lemme 7.5. *Pour un chemin $\chi : [0, 1] \rightarrow \text{adh}(\Sigma)$ et pour tout $s \in [0, 1]$ on a*

$$\mathbf{e}(\mathfrak{h}_C \circ \chi, s) = \mathbf{e}(\chi, s) + \left\{ \left\{ \arg \left(1 - \chi(s) \frac{\partial F}{\partial y_*}(1, \chi(s)) \right) \right\} \right\}.$$

On calcule aisément

$$\frac{\partial F}{\partial y_*}(1, y_*) = 2i\pi \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial y_*}(t, y_*) \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y}(\zeta(t), y(t, y_*)) \frac{dt}{P(\zeta(t))}.$$

Puisque

$$A(x, y) := \frac{\frac{\partial R}{\partial y}(x, y)}{P(x)}$$

est holomorphe sur $\mathcal{U}(\rho, r)$, on pose

$$\begin{aligned} D_\rho &:= \sup_C \left| \frac{\partial y}{\partial y_*} \right| \\ M &:= \sup_{\mathcal{U}(\rho, r)} |A| \end{aligned}$$

de sorte que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y_*}(1, y_*) \right| \leq 2\pi M D_\rho.$$

Ainsi pour $\rho_0 \geq \rho > 0$ fixé et $r_0 \geq r > 0$ assez petit on a

$$\left| \left\{ \left\{ \arg \left(1 - y_* \frac{\partial F}{\partial y_*}(1, y_*) \right) \right\} \right\} \right| \leq \arcsin(2\pi M D_\rho r) \leq \pi^2 M D_\rho r.$$

En considérant $\mathfrak{h}_C^{\circ-1}$, et χ une paramétrisation d'un arc de $r\mathbb{S}^1$, on majore la rugosité de $\partial\Sigma \cap \mathfrak{h}_C^{-1}(r\mathbb{S}^1)$ par $\pi^2 M D_\rho r$. Les autres points du bord se traitent de manière similaire.

7.1.2 Preuve de (3) dans le cas non dégénéré

Rappelons que

$$\delta := \arccos \sup |R(\mathcal{U}(\rho, r))|$$

et reprenons les notions introduites en Section (3). D'après le Lemme (3.3) on peut garantir qu'un rayon $z_\theta (\mathbb{R}_{\geq 0})$ d'un faisceau de stabilité $S_\lambda(z_*, \delta)$ coupe $\{\Re(z) = \ln \rho\}$, en choisissant θ de sorte que $\Re(-\lambda\theta) > 0$ et $|\arg \theta| < \delta$. Cela se produit dès que $\Re(\lambda) \leq 0$ ou, dans le cas contraire, $\cos \arg \theta < \sin |\arg \lambda|$. Ainsi la trace de chaque feuille sur $\rho\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{D}$ est un connexe non vide, ce qui entraîne la 1-connexité de $\rho\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{D}$ dans $\text{adh}(\mathcal{U}(\rho, r))$.

Soit $B := \text{Susp}_{\rho\mathbb{S}^1}(\Sigma) \subset \rho\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{D}$. L'obstruction à la 1-connexité de B dans $B \cup \mathcal{U}(\rho, r)$ provient de l'existence d'une feuille \mathcal{L} telle que $\text{adh}(\mathcal{L}) \cap B$ ne soit pas connexe. Mais ceci ne peut se produire puisque Σ est maximal pour la suspension de points de $\{x_*\} \times r\mathbb{D}$, donnant la propriété (BF4).

7.1.3 Preuve de (3) dans le cas des nœuds-cols

Nous raisonnons exactement comme précédemment, la difficulté ici encore provient de l'absence de direction fixe incluse dans les faisceaux de stabilité.

Définition 7.6. On se donne $\varepsilon \in]0, 1[$. On définit les **régions nœuds** et **cols** respectivement par

$$\begin{aligned} N_\varepsilon &:= \{ \cos(kz) \geq \varepsilon : \Re(z) \leq \ln \rho \} \\ C_\varepsilon &:= \{ \cos(kz) < \varepsilon : \Re(z) \leq \ln \rho \}. \end{aligned}$$

Chacune de ces régions s'écrit comme une partition dénombrable de **bandes** $(N_\varepsilon^\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ et $(C_\varepsilon^\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ correspondant aux déterminations de $\arg(x^k)$.

Nous prouvons maintenant le

Lemme 7.7. Soit $\tilde{\mathcal{L}}$ une feuille telle que $L := \tilde{\Pi}(\text{adh}(\tilde{\mathcal{L}})) \cap \{\Re(z) = \ln \rho\}$ coupe deux bandes cols distinctes, disons en des points z_* et z^* . Alors $[z_*, z^*] \subset L$.

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Pi}(\text{adh}(\tilde{\mathcal{L}}))$ la projection d'un chemin tangent avec $\gamma(0) = z_*$ et $\gamma(1) = z^*$. On considère l'union de faisceaux de stabilité

$$S := \bigcup_{t \in [0, 1]} S_\lambda(\gamma(t), \delta)$$

qui est incluse dans $\tilde{\Pi}(\tilde{\mathcal{L}})$. Les trajectoires z_1 issues de $S \cap C_\varepsilon$ intersectent $\{\Re(z) = \ln \rho\}$. En prenant $\varepsilon := \sin \delta$ on obtient même l'inclusion $\{\Re(z) = \ln \rho\} \setminus L \subset N_\varepsilon$. Dès lors il suffit de traiter le cas $z_* := \ln \rho - i \frac{\pi}{2k}$ et $z^* := \ln \rho + i \frac{\pi}{2k}$.

On reprend l'équation variationnelle de $\varphi := \ln|y|$ intégrant le feuilletage au-dessus du chemin $t \in [0, \frac{\pi}{2k}] \mapsto z(t) := z_* + it$. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \Re \left(i \exp(-kz(t)) \left(1 + \bar{R}(z(t), y(t)) \right) \right) \\ &= -\rho^{-k} \cos(kt) + \text{Im} \left(\exp(-kz(t)) \bar{R}(z(t), y(t)) \right). \end{aligned}$$

Notons

$$C_\rho := \sup_{\mathcal{U}(\rho, r)} |x^{-k} R(x, y)|$$

de sorte que

$$\dot{\varphi}(t) \leq -\rho^{-k} \cos(kt) + C_\rho$$

puis

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \ln r &\leq -\frac{\rho^{-k}}{k} \sin(kt) + C_\rho t \\ &\leq \left(C_\rho - \frac{2}{\pi \rho^k} \right) t. \end{aligned}$$

Puisque $R \in x^k \mathbb{C}\{x, y\}$ il est possible de réaliser l'inégalité

$$C_\rho < \frac{2}{\pi \rho^k}$$

quitte à prendre ρ assez petit. Ainsi $\varphi(t) \leq \ln r$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2k}]$. En raisonnant de même pour le chemin $t \in [0, \frac{\pi}{2k}] \mapsto z(t) := z^* - it$ on montre finalement $[z_*, z^*] \subset L$. \square

Il se peut que le bord $\rho\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{D}$ ne soit pas 1–connexe dans $\mathcal{U}(\rho, r)$, mais les chemins mettant en défaut cette propriété doivent avoir leurs extrémités dans des arcs nœuds, et l’intersection du bord d’une feuille contenant un tel chemin avec $\rho\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{D}$ ne doit pas rencontrer plus d’une bande col dans son revêtement universel. En particulier $\text{Susp}_{\rho\mathbb{S}^1}(\Sigma)$ est 1–connexe dans $\text{adh}(\mathcal{U}(\rho, r))$, puisque il y a $k+1$ bandes cols croisant une région $\{0 \leq \text{Im}(z - z_*) \leq 2\pi\}$, donnant (BF4).

7.1.4 Preuve de (4) : rabotage

Puisque chaque feuille attachée à un ensemble de type suspension au-dessus de $\rho\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ se rétracte tangentiellement sur le bord $\rho\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{D}$, le processus de rabotage de Marín–Mattei [MM08, Section 4.3, p877] permet de montrer l’existence d’un sous–ensemble de type suspension 1–connexe dans un autre, donné à l’avance dans la composante d’entrée. Le contrôle sur la rugosité est alors garanti par l’estimation (2).

7.2 Chemins inamovibles

Nous montrons la Proposition 7.2 lorsque $\mathcal{U}(\rho, r) \subset \mathcal{V} \subset \text{adh}(\mathcal{U}(\rho, r))$. En effet si $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow D$ est une représentation conforme de $\text{int}(D)$, fixant 0, alors le changement de coordonnées $\phi : (x, y) \mapsto (x, \varphi(y))$ transforme $\mathcal{V} \cup V$ en un tel voisinage et $\phi^*\omega_R$ est encore sous la forme (2.2).

On a $V \subset \rho\mathbb{D} \times r\mathbb{S}^1$ et les feuilles \mathcal{L} dont l’adhérence coupe V en un point (x_*, y_*) avec $x_*^k < 0$ (dans une partie col) coupent également le bord $\rho\mathbb{S}^1 \times r\mathbb{D}$ (il suffit de suivre dans $\tilde{\mathcal{L}}$ le relevé du chemin z_1 issu de $\log x_*$). Dès lors $\tilde{\Gamma}(\text{adh}(\tilde{\mathcal{L}}) \cap \{|y| = r\})$ n’est pas connexe, de sorte que tout chemin γ dans \mathcal{L} , tel que $\tilde{\gamma}$ relie deux composantes distinctes, n’est pas tangentiellement homotope à un chemin dans V . Nous renvoyons à la Figure 7.1. Pour mettre en défaut la 1–connexité de V dans $\mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$ il faut montrer que γ est homotope dans $\mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$ à un chemin dans V . Le point clef ici est que $\mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$ contient le disque $\{0\} \times r\mathbb{D}$, c’est–à–dire que l’enlacement de γ autour de $\{x = 0\}$ n’importe pas. Il reste donc à contrôler l’indice de γ autour de \mathcal{S} dans le cas convergent. Le Corollaire 7.3 découlera du fait que l’on peut choisir les extrémités \tilde{p} et \tilde{q} de $\tilde{\gamma}$ dans une même transversale $\{y = \text{cst}\}$, comme l’indiquera la construction.

Définition 7.8. Un chemin tangent Γ , d’extrémité dans une même transversale $\{y = \text{cst}\}$, dont le relevé $\tilde{\Gamma}$ relie deux composantes connexes distinctes de $\text{adh}(\tilde{\mathcal{L}}) \cap \{|y| = r\}$, sera qualifié d’**inamovible**.

Le Corollaire 7.4 est quant à lui une conséquence du fait que pour tout chemin inamovible Γ l’intervalle $\text{Im}(\tilde{\Gamma}(\tilde{\Gamma}([0, 1])))$ a une longueur supérieure à $\frac{\pi}{k}$.

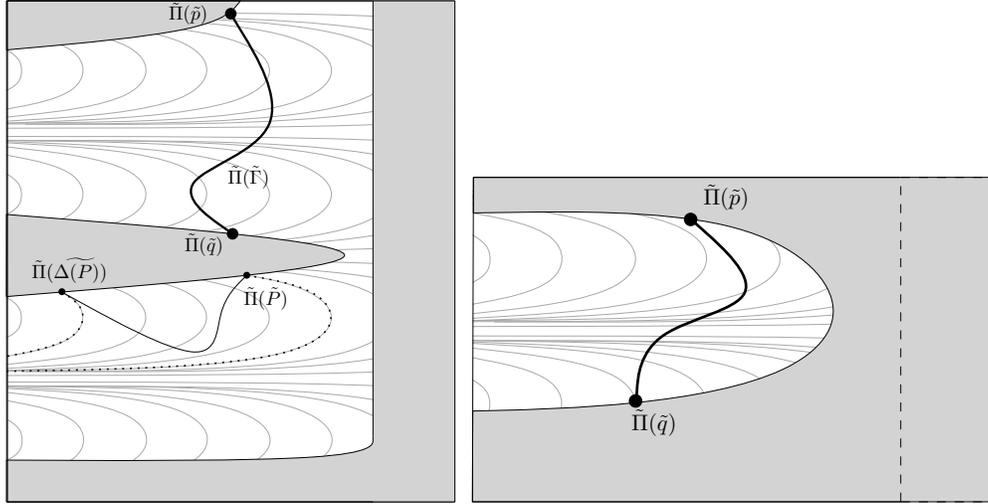


FIGURE 7.1 – La projection en coordonnées logarithmiques d’un chemin inamovable Γ (en gras et en haut, figure de gauche) à comparer avec la projection d’un chemin tangent portant l’holonomie forte Δ (en bas). Les courbes grises correspondent aux courbes d’iso–argument de l’ordonnée de la feuille, celles représentées en pointillés correspondant à des valeurs différant de 2π . La figure de droite présente un chemin qui n’est pas inamovable ($x_*^k > 0$ assez petit).

7.2.1 Le cas du modèle formel

Commençons par prouver le résultat pour le modèle $(k, 0)$ (on renvoie également à la Section 8.3 pour un traitement plus détaillé de ce cas là). Les courbes z_1 définies en (4.1) sont les courbes d’iso–argument des ordonnées des feuilles du modèle

$$y(z) = c \exp(-\exp(-kz)/k), \quad c \in \mathbb{C}.$$

Au contraire les courbes z_i sont les courbes d’iso–module de ces fonctions. Étant donné $y_* \in r\mathbb{S}^1$ on définit $z_* := \ln \rho/2 + i\pi/k$. Il existe $c \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ tel que $y(z_0) = y_0$. Le long du chemin $z : t \in [-\pi/k, \pi/k] \mapsto \ln \rho/2 - it$ on a

$$\begin{aligned} \arg y(z(t)) &= \arg c - \frac{2^k}{k\rho^k} \sin(kt) \\ |y(z(t))| &= |c| \exp\left(-\frac{2^k}{k\rho^k} \cos(kt)\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma := (\exp \circ z, y)$ est un chemin tangent reliant $p := (\exp z_*, y_*)$ à un autre point $q := (\exp(z_* + 2i\pi/k), y_*)$ dans la même transversale $\Sigma := \{y = y_*\}$. Celui-ci n’est tangentiellement homotope à aucun chemin de Σ . Il est pourtant homotope dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$ à un chemin reliant p à q dans Σ , puisque la variation d’argument de y est nulle.

On passe du modèle $(k, 0)$ au modèle (k, μ) par le changement de coordonnées

$$z \mapsto z - \frac{1}{k} \log(1 - \mu k z \exp(kz)).$$

Celui-ci est un biholomorphisme (pourvu que ρ soit assez petit) et donc le résultat persiste pour tous les modèles formels.

7.2.2 Le cas convergent

La variation de $\alpha(t) := \arg y(t)$ au-dessus d'un chemin $t \in \mathbb{R} \mapsto z(t)$ qui paramètre une composante connexe de $L := \text{adh}(\tilde{\mathcal{L}}) \cap \{|y| = r\}$ avec $|z| = 1$ est donnée par

$$\dot{\alpha}(t) = \pm 1,$$

le signe dépendant du sens de parcours. Dès lors si $\text{adh}(\tilde{\mathcal{L}}) \cap \{\Re(z) = \ln \rho\}$ rencontre au moins deux bandes nœuds et si le chemin z paramètre la composante du bord présente dans une bande col entre les bandes nœuds alors le chemin z est défini sur \mathbb{R} et $\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi on peut relier par un chemin tangent Γ n'importe quel point (z_*, y_*) d'une autre composante de L à un unique $(z(t), y(t))$ avec $|y(t)| = r$ et $\arg y(t) = \arg y_*$. Cette dernière égalité montre que Γ est homotope à un chemin de $\{y = y_*\}$ dans $\mathcal{U}(\rho, r) \setminus \{y = 0\}$.

7.2.3 Le cas divergent

Traisons finalement le cas des nœuds–cols divergents. On fait apparaître les resomées sectorielles des séparatrices faibles par $\tau_j : (z, y) \mapsto (z, y - s_j(\exp z))$ sur les bandes

$$\{|\text{Im}(z) - i\pi(2j+1)/k| < \pi/k + \beta\} \quad ,$$

pour se ramener au cas convergent sur une union d'une bande col et de deux bandes nœuds adjacentes. L'application de τ_j revient à ajouter à la constante d'intégration c d'un secteur un coefficient de Stokes $\chi_j \in \mathbb{C}$ (qui provient de la partie translation de l'invariant de Martinet–Ramis [MR82]) ce qui permet de recoller la feuille du secteur consécutif correspondant à la constante d'intégration $c + \chi_j$. En modifiant l'extrémité d'arrivée du chemin Γ , par exemple en la prenant à une affixe de partie réelle plus négative, on peut encore réaliser la construction d'un chemin inamovible.

7.3 Passage des coins

Si on veut appliquer la méthode de Marín–Mattei pour « passer un coin » associé à une singularité non-linéarisable $s \in K_\alpha$ alors il faut prendre un autre type de blocs \mathcal{B}_α . Ceux-ci s'obtiennent en poussant la composante d'entrée du bord par le champ de vecteurs radial $x \frac{\partial}{\partial x}$. Lorsque $\lambda < 0$ cette opération fournit un voisinage épointé des séparatrices (feuilles de type « collier »). L'opération de rabotage [MM08, Section 4.3, p877] s'effectue alors de façon similaire et la composante « de sortie » aura une rugosité contrôlée par l'application de Dulac \mathcal{D}_s associée. Nous ne rentrerons pas dans les détails, nous indiquons seulement que ce contrôle découle de la majoration du reste du développement asymptotique de \mathcal{D}_s se trouvant par exemple dans [IY08, Theorem 24.38, p462], à travers la Proposition 4.2.3 de [MM08, p877] (plus précisément le Lemme 4.4.3).

Remarque 7.9. La preuve de la Proposition 4.2.3 de [MM08, p877] invoque la Proposition 1.2.4 [MM08, p861]. Cependant les hypothèses de cette proposition ne sont pas vérifiées pour certaines selles quasi-résonantes. En effet J.–C. Yoccoz a montré que certaines d'entre elles contiennent des familles de feuilles fermées (pas simplement connexes) accumulant la singularité [Per92]. Néanmoins un examen légèrement plus poussé montre que l'on peut se passer d'invoquer cette proposition sauf dans le cas de singularités linéarisables.

8 Exemples de feuilletages compressibles

8.1 Synthèse

Nous aurons besoin d'une version particulière du théorème de réalisation de A. LINS–NETO, afin d'obtenir des feuilletages réduits après un éclatement, possédant en chacune de ses singularités réduites un type analytique local prescrit. Cette version a été écrite par F. LORAY dans [Lor10]. Plutôt que de donner l'énoncé général, nous nous bornons à exposer une version adaptée à notre contexte. Pour réaliser des feuilletages de classe analytique et d'holonomie prescrites placés dans sa réduction, il faut satisfaire aux formules d'indices de Camacho–Sad (Section 6.1.1).

Théorème 8.1. [Lor10, p159] *On se donne un groupe de type fini $G := \langle \Delta_0, \dots, \Delta_n \rangle < \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, avec $n \in \mathbb{N}_{>0}$, tel que $\bigcirc_{\ell=0}^n \Delta_\ell = \text{Id}$. On se donne également une collection de feuilletages holomorphes singuliers réduits \mathcal{F}_ℓ , chacun accompagné d'un germe de séparatrice S_ℓ , de sorte que, dans une bonne coordonnée locale, l'holonomie de \mathcal{F}_ℓ le long de S_ℓ soit précisément Δ_ℓ . Supposons finalement que la relation*

$$\sum_{\ell=0}^n \text{CS}(\mathcal{F}_\ell, S_\ell, p_\ell) = -1. \quad (\text{CS})$$

est satisfaite. Alors il existe un germe de feuilletage singulier \mathcal{F} du plan complexe, non dicritique, qui satisfait les conclusions suivantes :

1. \mathcal{F} est réduit après un éclatement et possède $n+1$ points singuliers $(p_\ell)_{\ell \leq n}$ sur le diviseur exceptionnel $\mathcal{D} \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$,
2. il existe un germe de transversale Σ attachée à \mathcal{D} en un point régulier p tel que la représentation d'holonomie projective $\pi_1(\mathcal{D} \setminus \{p_\ell : 0 \leq \ell \leq n\}, p) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, p)$ coïncide avec G . Plus précisément, l'image d'un générateur γ_ℓ du groupe fondamental partant de p , d'indice 1 autour de p_ℓ et d'indice nul autour des autres singularités, est Δ_ℓ ,
3. le type analytique local au voisinage de la singularité p_ℓ est \mathcal{F}_ℓ ,
4. la séparatrice S_ℓ est incluse dans une composante du diviseur exceptionnel \mathcal{D} .

Remarque 8.2. L'égalité exprimée par (CS) est la condition nécessaire donnée par la formule de Camacho–Sad. Il est en général assez facile de garantir que cette condition tient. Cependant Y. IL'YASHENKO [Il'97] a décrit un sous-groupe $\langle \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \rangle$ engendré par des germes non linéarisables tangents à une rotation irrationnelle à petits diviseurs, tel que $\Delta_1 \circ \Delta_2 \circ \Delta_3 = \text{Id}$, mais dont la somme des indices de Camacho–Sad de n'importe quelle réalisation locale (comme l'holonomie d'un feuilletage \mathcal{F}_ℓ) est toujours inférieure à -2 .

8.2 Avec au moins un nœud–col divergent

Ces exemples ont été construits avec l'aide précieuse de D. MARÍN.

8.2.1 Cas d'un seul nœud–col

Il existe un nœud–col \mathcal{F}_1 divergent, avec $k = 2$ et $\mu = 0$, dont l'invariant de classification orbitale de Martinet–Ramis [MR82] est

$$(\varphi_0^0, \varphi_0^\infty, \varphi_1^0, \varphi_1^\infty) = (\text{Id}, \text{Id} + 1, \text{Id}, \text{Id} + 1).$$

Celui-ci est invariant par la permutation des indices $\#_j \leftrightarrow \#_{1-j}$ pour $\# \in \{0, \infty\}$. Il existe donc $\Delta_2 \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$, périodique d'ordre 2, qui commute à l'holonomie forte Δ_1 de \mathcal{F}_1 [Lor10, Corollaire 2.8.4 p60]. On note $\Delta_0 := \Delta_1^{\circ-1} \circ \Delta_2^{\circ-1}$.

Puisque dans une bonne coordonnée

$$\begin{aligned}\Delta_0(h) &= -h + o(h) \\ \Delta_1(h) &= h + h^3 + o(h^3) \\ \Delta_2(h) &= -h + o(h)\end{aligned}$$

il est possible de trouver des feuilletages locaux donnés par des selles \mathcal{F}_2 (linéarisable) et \mathcal{F}_0 (résonnante) avec un indice de Camacho–Sad égal à $-\frac{1}{2}$, dont les holonomies sont précisément Δ_2 et Δ_0 respectivement (voir [MR83]). En appliquant le Théorème 8.1 on obtient un feuilletage \mathcal{F} dont la réduction induit un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ défini sur un voisinage du diviseur exceptionnel \mathcal{D} ayant trois singularités p_ℓ , $\ell \in \{0, 1, 2\}$. On peut de plus supposer que chaque séparatrice locale de $\hat{\mathcal{F}}$ est soit incluse dans \mathcal{D} , soit un petit disque $S_\ell \subset \hat{\Pi}^{-1}(p_\ell)$ transverse à \mathcal{D} pour $\ell \in \{0, 2\}$, $\hat{\Pi}$ désignant la projection canonique sur \mathcal{D} . Notons que les autres feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ sont transverses aux fibres de $\hat{\Pi}$, sauf sur le long d’une courbe analytique $T \pitchfork \mathcal{D}$ localisée près de p_1 .

Il est possible de trouver une petite transversale $\Sigma = \hat{\Pi}^{-1}(p_*)$, munie de la coordonnée $h \in \mathbb{D}$, sur lequel la représentation d’holonomie associée à $\hat{\Pi}$ et $\mathcal{D}^* := \mathcal{D} \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$ coïncide avec $\langle \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2 \rangle$. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{D}^*)$ est un groupe libre de rang 2, de générateurs a_1 et a_2 faisant respectivement un tour autour de p_1 et p_2 mais aucun autour de l’autre point. Clairement

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_{a_2^2} &= \text{Id} \\ \mathfrak{h}_{[a_1, a_2]} &= \text{Id}\end{aligned}$$

et les mots $u := a_2^2$ et $v := [a_1, a_2]$ sont sans puissance commune. Il s’ensuit que les relevés respectifs \tilde{u} et \tilde{v} de u et v par $\hat{\Pi}$ dans une feuille \mathcal{L} (assez proche du diviseur) sont des cycles de la feuille. En choisissant un voisinage Ω de p_* sur lequel \mathfrak{h}_u et \mathfrak{h}_v sont définies on s’aperçoit que chaque élément de $\mathfrak{h}_{\langle u, v \rangle}$ est holomorphe et injectif sur Ω . Ainsi pour chaque feuille \mathcal{L} de $\hat{\mathcal{F}}$ assez proche du diviseur on a

$$\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle < \pi_1(\mathcal{L}).$$

Ces éléments sont sans puissances communes sinon u et v le seraient.

Une feuille \mathcal{L} étant une surface de Riemann à bord son groupe fondamental est libre. Puisque $\langle u, v \rangle$ n’est pas monogène cela signifie qu’aucun morphisme injectif ne peut exister de $\pi_1(\mathcal{L})$ dans $\pi_1(\mathcal{V}^*) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pour conclure, ce phénomène se produisant aussi près du diviseur que l’on souhaite, le feuilletage n’est incompressible dans aucun voisinage de la singularité.

8.2.2 Avec un nœud–col divergent et un convergent

On peut construire un exemple un peu plus explicite que le précédent mais en utilisant le même argument de grandeur des groupes libres de rang 2. On considère une équation de Riccati, définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{C}P^1$ et plus connue sous le nom d’équation d’Euler, donnée par la 1–forme

$$\omega_E(x, y) := x^2 dy - (y + x) dx.$$

Celle–ci admet deux singularités de type nœud–col. La première, en $(0, 0)$, est de type divergent alors que celle située en $(0, \infty)$ est de type convergent. Les holonomies fortes

associées sont inverses l'une de l'autre. On peut prendre comme troisième singularité la selle linéaire

$$\omega_L(x, y) := x dy + y dx$$

dont l'holonomie est l'identité. On synthétise alors un éclatement de singularité de feuilletage ayant ces trois singularités locales, dont les invariants de Camacho–Sad le long du diviseur exceptionnel sont 0 pour les nœuds–cols situés en p_0 et p_1 et -1 pour la selle située en p_2 .

Cette fois les mots

$$\begin{aligned} u &:= a_2 \\ v &:= [a_1, a_2] \end{aligned}$$

sont dans le noyau de \mathfrak{h}_\bullet et sans puissance commune. Cela signifie encore qu'il existe des feuilles \mathcal{L} telles que $\pi_1(\mathcal{L})$ contienne un groupe libre de rang 2, et comme $\pi_1(\mathcal{V}^*) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ l'incompressibilité est impossible. En fait il est possible de montrer directement l'existence d'un lacet non trivial de \mathcal{L} qui l'est dans un voisinage épointé \mathcal{V}^* des séparatrices.

Proposition 8.3. *Notons γ le relevé de $[a_1, a_2]$ par $\hat{\Gamma}$ dans une feuille \mathcal{L} de $\hat{\mathcal{F}}$ suffisamment proche de \mathcal{D} . On écrit $\iota^* : \pi_1(\mathcal{L}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{V}^*)$ le morphisme naturel induit par l'inclusion $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^*$. Alors $\gamma \in \ker \iota^* \setminus \{1\}$.*

Démonstration. Soit Σ une transversale sur lequel est réalisée l'holonomie $\mathfrak{h}_{[a_1, a_2]}$ et prenons une feuille \mathcal{L} coupant Σ ; notons également \tilde{a}_2 le relevé de a_2 dans \mathcal{L} . Puisque la seule séparatrice de $\hat{\mathcal{F}}$ passant par p_1 est le diviseur, γ est homotope dans \mathcal{V}^* à $\tilde{a}_2 \tilde{a}_2^{-1} = 1$ (autrement dit $\gamma \in \ker \iota^*$). Pour autant $\gamma \neq 1$ dans $\pi_1(\mathcal{L})$, comme nous allons le montrer. Partant d'un point $A \in \Sigma \cap \mathcal{L}$ le relevé de $[a_1, a_2] = a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ on obtient la configuration décrite en Figure 8.1. Comme l'holonomie forte Δ_1 du nœud–col n'a pas de point fixe on a toujours $A \neq \Delta_1^{\circ-1}(A)$. Mais si γ était trivial dans $\pi_1(\mathcal{L})$ alors ces points devraient être homotopes dans $\mathcal{L} \cap \Sigma$ (voir la Figure 8.1), ce qui n'est pas possible puisque $\Sigma \cap \mathcal{L}$ est discret.

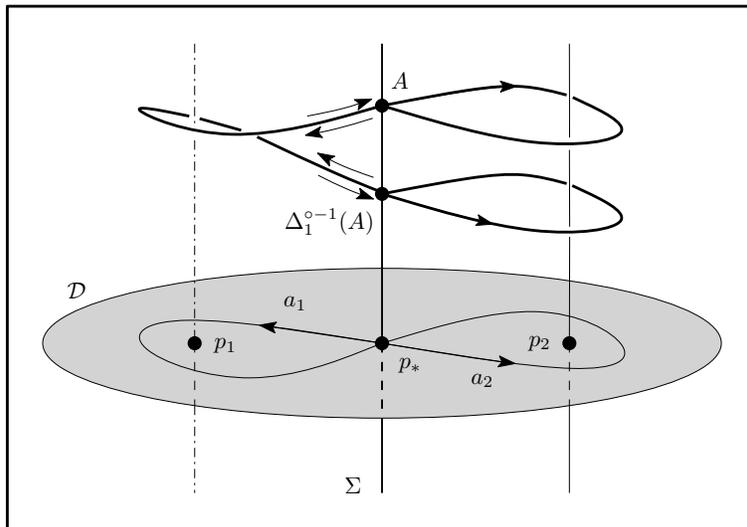


FIGURE 8.1 – Relevé dans le feuilletage du commutateur $[a_1, a_2]$ à partir d'un point A d'une feuille \mathcal{L} .

□

8.2.3 Encore plus de contre-exemples ?

Plus généralement, dès qu'il existe un nœud-col divergent dans la réduction de \mathcal{F} alors peuvent apparaître des cycles forçant la compressibilité du feuilletage, lorsque existent des relations entre les holonomies provenant d'autres parties du feuilletage. D'une manière plus précise, si on place le nœud-col en un point p d'un diviseur \mathcal{D} et si a un générateur du groupe fondamental de \mathcal{D}^* tournant autour de p , alors le noyau de la flèche naturelle

$$i^* : \pi_1(\mathcal{D}^*) \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}^* \cup \{p\})$$

doit contenir a .

8.3 Sans nœud-col divergent

Ces exemples s'appuient le modèle $(1, 0)$

$$\omega_0(x, y) := x^2 dy - y dx,$$

mais la même construction se généralise quasiment à l'identique pour chaque modèle $(k, 0)$ avec $k \geq 1$. Le feuilletage convergent induit possède la famille $(\Gamma_c)_{c \in]0, 1[}$ de chemins inamovibles

$$\begin{aligned} \Gamma_c : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \text{adh}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \\ t &\longmapsto \left(c \exp(it), \exp\left(-\frac{1}{c}(1 + \exp(-it))\right) \right) \end{aligned}$$

(voir la Section 7.2 et la Définition 7.8). Leur extrémité $(-c, 1)$ appartient à la même transversale $\{y = 1\}$. L'explication géométrique de l'existence de ces chemins inamovibles est la présence dans l'équation

$$y \frac{dx}{dy} = x^2$$

d'un pôle mobile de la solution

$$x(y) = \frac{-c}{c \log y + 1}.$$

Leur projection sur $\{x = 0\}$ a la forme d'un haricot (disons si $c > \frac{1}{\pi}$) d'indice nul autour de $\{y = 0\}$ mais entourant la position du pôle mobile $y_c := \exp^{-1/c}$ (voir la Figure 8.2). Pour cette raison ces cycles ont été suggérés par E. PAUL comme candidats pour trouver un nœud-col compressible. Ils ne fournissent cependant pas de contre-exemple car chaque Γ_c est non trivial dans $\text{adh}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \setminus \{x = 0\}$. Par contre en adjoignant une autre singularité on peut former des cycles produisant les exemples attendus.

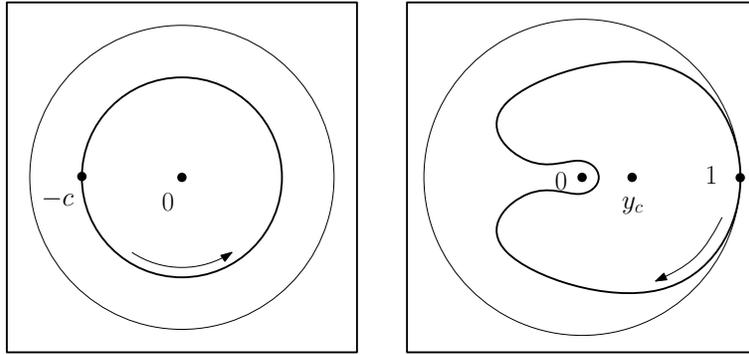


FIGURE 8.2 – Projeté de Γ_c sur $\{y = 0\}$ (à gauche) et sur $\{x = 0\}$ (à droite).

Effectuons le tiré-en-arrière de ω_0 par une application ψ de degré 2 afin de symétriser la situation en plaçant deux tels feuilletages en vis-à-vis. Explicitement,

$$\psi : (x, y) \mapsto (x, 1 - y^2)$$

transforme ω_0 en

$$\psi^* \omega_0 = (y^2 - 1) dx - 2yx^2 dy.$$

Ce feuilletage possède les trois séparatrices $\{x = 0\}$ et $\{y = \pm 1\}$. Le chemin Γ_c admet deux pré-images par ψ

$$\begin{aligned} \Gamma_c^\pm : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \left(c \exp(it), \pm \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1}{c}(1 + \exp(-it))\right)} \right). \end{aligned}$$

Comme l'image de Γ_c est contenue dans $\text{adh}(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ on peut considérer une détermination fixée de la racine carrée sur la coupure $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$. Maintenant on fabrique le chemin

$$\begin{aligned} \gamma_c : [-2\pi, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C} \\ t \leq 0 &\longmapsto \Gamma_c^-(\pi + t) \\ t \geq 0 &\longmapsto \Gamma_c^+(\pi - t). \end{aligned}$$

Par construction ce cycle est d'indice nul autour de chaque branche de $\{x(y^2 - 1) = 0\}$, mais étant la concaténation de deux chemins inamovibles «distants» il n'est pas tangentielllement trivial. Puisque c peut-être pris arbitrairement proche de 0, le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ défini par $\psi^* \omega_0$ n'est incompressible dans aucun voisinage de $S := \{x = 0\}$.

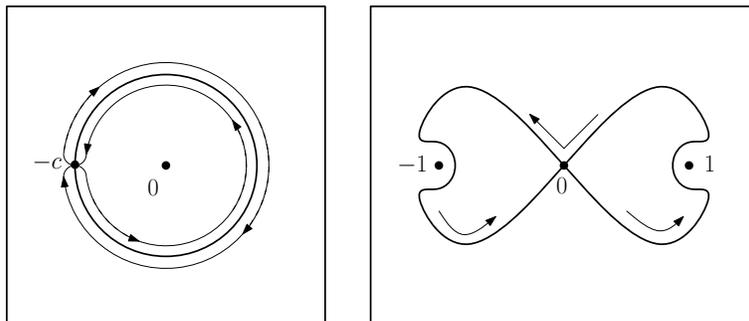


FIGURE 8.3 – Projeté de γ_c sur $\{y = 0\}$ (à gauche) et sur $\{x = 0\}$ (à droite).

Cette association de deux singularités $p_0 = (0, -1)$ et $p_1 = (0, 1)$ forme un bloc, muni du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, que nous allons plonger dans la réduction d'un germe de feuilletage singulier en lui adjoignant une troisième singularité p_2 , le diviseur exceptionnel coïncidant avec S . Puisque

$$\begin{aligned} \text{CS}(\tilde{\mathcal{F}}, S, p_0) &= \text{CS}(\tilde{\mathcal{F}}, S, p_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et comme l'holonomie de $\tilde{\mathcal{F}}$ le long du chemin $t \in [0, 2\pi] \mapsto (0, 2 \exp(it))$ est conjuguée à $\Delta_0^{\circ 2}$, en notant Δ_0 l'holonomie forte de ω_0 , on choisit pour p_2 une selle résonnante tangente à $x dy + y dx$ et d'holonomie $\Delta_0^{\circ -2}$ tangente à l'identité (voir [MR83]). L'invocation du Théorème 8.1 achève alors la construction.

8.4 Un feuilletage possédant beaucoup de composantes initiales

8.4.1 Une branche morte *ex nihilo*

Ici nous construisons une famille d'exemples correspondant à la situation décrite dans le Lemme 6.7 et correspondant à la figure ci-dessous.

FIGURE 8.4 – Une branche morte obtenue en réduisant une seule séparatrice (en gras). Les nombres indiquent la classe de Chern des composantes.

Considérons pour commencer le feuilletage donné par la forme différentielle, correspondant à un nœud résonant linéaire,

$$\omega_1(x, y) := (x - y) dx + x dy.$$

Le feuilletage sous-jacent est réduit en un éclatement, et sa réduction contient une seule singularité (un nœud-col modèle avec $(k, \mu) = (1, -1)$).

Plus généralement on vérifie sans peine que, pour chaque $n \in \mathbb{N}_{>0}$, la 1-forme différentielle

$$\omega_n(x, y) := \left(\frac{x}{n} - y^n \right) dx + nxy^{n-1} dy$$

est réduite en n éclatement et sa réduction est une branche morte. Le dernier éclatement crée un diviseur ayant d'une part un coin, d'autre part un nœud-col modèle

$$\hat{\omega}_n(t, y) := t^2 dy + y \left(1 - \frac{1}{n} t \right) dt$$

par lequel passe le transformé strict de l'unique séparatrice $\{x = 0\}$ du feuilletage de départ.

8.4.2 Une composante initiale avec beaucoup de branches mortes

De tels feuilletages \mathcal{F} se construisent grâce à la version plus générale du Théorème 8.1 donnée dans [Lor10]. Il suffit ici de considérer un voisinage d'un diviseur D de classe de Chern -1 , contenant $m \in \mathbb{N}_{>0}$ singularités $(p_j)_{1 \leq j \leq m}$, chacune localement conjuguée à celle donnée par ω_{n_j} (définie dans le paragraphe précédent), et une singularité selle résonnante p_0 que nous caractérisons ci-après. Le diviseur D sera le premier diviseur créé lors de la réduction de \mathcal{F} .

Après réduction de chaque p_j , le diviseur D est attaché à m branches mortes et sa classe de Chern devient

$$\zeta := -1 - \sum_{j=1}^m n_j \in \mathbb{Z}_{<-1}.$$

La singularité d'attache de la branche morte en p_j est un nœud-col dont la séparatrice forte coïncide avec D : son indice de Camacho—Sad par rapport à D est nul ; on note Δ_j son holonomie forte (tangente à l'identité). On place en p_0 une selle résonante de partie linéaire $\zeta x dy - y dx$ (en choisissant des coordonnées locales dans lesquelles $D = \{x = 0\}$) dont l'holonomie le long de D

$$\Delta_0(h) = \exp(2i\pi\zeta)h + \dots = h + \dots$$

est l'inverse de $\bigcirc_{j=1}^m \Delta_j$. Le théorème de réalisation de Martinet—Ramis [MR83] prouve qu'une telle singularité de feuilletage existe.

Références

- [CLS84] C. CAMACHO, A. LINS NETO and P. SAD, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, J. Differential Geom., vol. 20, #1 : pp. 143–174, 1984
- [CS82] C. CAMACHO and P. SAD, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. of Math. (2), vol. 115, #3 : pp. 579–595, 1982
- [Dul09] H. DULAC, *Sur les points singuliers d'une équation différentielle*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3), vol. 1 : pp. 329–379, 1909
- [HKM61] M. HUKUHARA, T. KIMURA and T. MATUDA, *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Publications of the Mathematical Society of Japan, 7. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961
- [Il'97] Y. S. IL'YASHENKO, *The nonlinear Riemann-Hilbert problem*, Tr. Mat. Inst. Steklova, vol. 213, #Differ. Uravn. s Veshchestv. i Kompleks. Vrem. : pp. 10–34, 1997
- [IY08] Y. ILYASHENKO and S. YAKOVENKO, *Lectures on analytic differential equations*, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008
- [Lor10] F. LORAY, *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*, PrePrint 2010
- [Mil68] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968
- [MM08] D. MARÍN and J.-F. MATTEI, *Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), vol. 41, #6 : pp. 855–903, 2008
- [MM21] D. MARÍN and J.-F. MATTEI, *Topology of singular holomorphic foliations along a compact divisor*, PrePrint 2012, arxiv :1206.2121
- [MR82] J. MARTINET and J.-P. RAMIS, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., , #55 : pp. 63–164, 1982

- [MR83] J. MARTINET and J.-P. RAMIS, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), vol. 16, #4 : pp. 571–621, 1983
- [Per92] R. PEREZ MARCO, *Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe (d'après J.-C. Yoccoz)*, Astérisque, #206 : pp. Exp. No. 753, 4, 273–310, séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92, 1992
- [Sei68] A. SEIDENBERG, *Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$* , Amer. J. Math., vol. 90 : pp. 248–269, 1968
- [Tey04] L. TEYSSIER, *Analytical classification of singular saddle-node vector fields*, J. Dynam. Control Systems, vol. 10, #4 : pp. 577–605, doi :10.1023/B:JODS.0000045365.56394.b4, 2004

Laboratoire I.R.M.A., 7 rue R. DESCARTES, Université de Strasbourg, 67084 Strasbourg
cedex, France
Email : teyssier@math.unistra.fr