



HAL
open science

Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux

Térence Bayen, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

► To cite this version:

Térence Bayen, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux. Annales mathématiques du Québec, 2012, 36 (1), pp.17-42. hal-00798652

HAL Id: hal-00798652

<https://hal.science/hal-00798652>

Submitted on 11 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux.

T. BAYEN*, J.-B. HIRIART-URRUTY†

“When Minkowski’s theory of convexity appeared, some mathematicians said that he discovered a nice mathematical joy which, unfortunately, is quite useless. About a century passed, and now the theory of convex sets is a very important applied branch of mathematics.”

V. BOLTYANSKI, in **Geometric methods and optimization problems** (1999).

“La convexité dans le plan et dans l’espace présente un sujet passionnant, la convexité, à la fois par sa simplicité, sa naturalité et sa puissance, pour au moins trois raisons :

- *au niveau des questions que l’on peut se poser naturellement, géométriques, visibles ;*
- *du fait que la convexité est une notion qui se rencontre dans de nombreuses branches des mathématiques ;*
- *du fait de son utilité, de sa force, dans de nombreuses applications.”*

M. BERGER in **Convexité dans le plan, dans l’espace et au-delà**, 2 volumes, collection Opuscules, éditions Ellipses (2006).

Résumé

Les objets convexes de largeur constante (dans le plan) ou d'épaisseur constante (dans l'espace) ont fait l'objet d'une attention soutenue de la part des mathématiciens du XIX-ème comme du XX-ème siècle, y compris par les plus célèbres d'entre eux (H. MINKOWSKI, H. LEBESGUE, W. BLASCHKE, A. HURWITZ, etc.). Malgré tous les efforts déployés et le nombre de résultats obtenus, certains problèmes posés depuis longtemps à propos de ces objets convexes restent encore ouverts. Les techniques modernes comme celles issues du Calcul variationnel ou du Contrôle optimal ont néanmoins permis soit de retrouver d'une nouvelle manière des résultats déjà démontrés soit d'en améliorer significativement certains autres. Dans cet article, qui se veut de synthèse et à but essentiellement pédagogique, nous passons en revue les propriétés et caractérisations essentielles, plutôt de type “variationnel”, des corps convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D), en insistant sur les différences fondamentales en 2D ou 3D ; ce faisant, nous arrivons sur le front de la recherche récente sur les problèmes restés ouverts, en particulier la conjecture sur le corps convexe de l'espace d'épaisseur constante donnée et de volume minimal.

*Laboratoire de mathématiques, Université de Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34000 Hérault, France. terence.bayen@math.univ-montp2.fr.

†Institut de mathématiques, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 9, France. jbhu@cict.fr.

1 Introduction

La convexité dite “géométrique” (celle traitant des structures des corps convexes, de leurs projections sur des sous-espaces, du caractère lisse de leur frontière, volume,...) et la convexité “fonctionnelle” (celle traitant des propriétés des fonctions convexes, de leur utilisation en Optimisation et Calcul variationnel,...) sont deux domaines bien répertoriés mais différents des Mathématiques, avec chacun leurs communautés, préoccupations, revues, etc. Sans dire qu’elles sont disjointes, il est néanmoins des points d’intérêt qui permettent de jeter des ponts entre les deux, parmi ceux-là figurent celui des *problèmes variationnels posés à propos des corps convexes* (“variationnel” étant entendu au sens de “on minimise quelque chose”). Un bel exemple où Géométrie et Calcul variationnel se trouvent liés est l’étude des corps convexes de largeur constante en 2D et 3D.

Disons que le cas 2D est celui qui a été le plus étudié, et on peut dire sans se tromper beaucoup que pratiquement toutes les questions relatives à des corps convexes de largeur constante du plan ont été posées et résolues. La situation est bien différente en 3D ; comme l’indique M. BERGER (voir [8], p.45 du Vol.1), “*Dans l’espace, les convexes de largeur constante sont pratiquement totalement incompris ; par exemple, on ne sait pas, contrairement au cas du plan, quels sont de plus petit volume*”. A l’occasion de notre tour d’horizon, nous arrivons sur le front des problèmes ouverts (souvent depuis longtemps), notamment sur celui concernant le corps convexe d’épaisseur constante (en 3D) qui serait de volume minimal ; il est conjecturé depuis soixante-quinze ans que ce serait le convexe de E. MEISSNER (introduit par ce mathématicien dans les années 1910). Les résultats et techniques modernes du Calcul variationnel, Contrôle optimal et/ou Optimisation de formes ont permis d’en dire plus sur ce problème de minimisation de volume, sans toutefois répondre à la conjecture. Les avancées les plus décisives à ce sujet, dans un contexte 3D (et un peu au-delà), ont été apportées très récemment par T. BAYEN, TH. LACHAND-ROBERT et E. OUDET (travaux publiés en 2007, voir [5], [6], [7], [33]).

Dans la partie 2, nous rappelons diverses propriétés de la fonction d’appui qui sert pour paramétrer un convexe. Dans la partie 3, nous évoquons les principales propriétés des corps de largeur constante 2D et des rotors, qui en constituent une généralisation. Dans la partie 4, nous résumons les propriétés connues sur les corps d’épaisseur constante. Nous terminons par la conjecture sur le corps convexe de MEISSNER, et par l’expression des fonctionnelles de volume en dimension 3 en terme de fonction d’appui.

2 Propriétés générales des convexes du plan

Le produit scalaire standard du plan affine euclidien, identifié à \mathbb{R}^2 , est noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la norme associée par $\| \cdot \|$. La boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$ est notée $\overline{B}(x, r)$, et δ_t désignera la mesure de Dirac centrée au point t . On appellera *corps* tout sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, compact et simplement connexe. Si C est un corps convexe du plan, on notera ∂C sa frontière. Cette frontière est soit un point, soit un segment, soit une courbe de JORDAN rectifiable (situation où C est d’intérieur non vide).

2.1 L’outil fondamental : la fonction d’appui.

Dans la suite, C , C_1 , et C_2 désignent des corps convexes. Une notion centrale associée à C , et qui nous sera d’un usage constant, est *la fonction d’appui* σ_C de C définie comme suit :

$$d \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sigma_C(d) := \max_{c \in C} \langle c, d \rangle. \quad (1)$$

Cette fonction σ_C est convexe, positivement homogène, Lipschitz sur \mathbb{R}^2 ; il suffit donc de la connaître sur la sphère-unité de \mathbb{R}^2 , c’est-à-dire de disposer de $\sigma_C(u)$ pour les vecteurs unitaires $u \in \mathcal{S}^1$. Les propriétés d’une fonction d’appui sont largement diffusées dans n’importe quel ouvrage d’Analyse convexe, par exemple dans le chapitre C de [28]. Rappelons-en quelques unes des plus importantes :

$$(c \in C) \iff (\langle c, d \rangle \leq \sigma_C(d) \text{ pour tout } d \in \mathbb{R}^2); \quad (2)$$

$$(C_1 \subseteq C_2) \iff (\sigma_{C_1} \leq \sigma_{C_2}); \quad (3)$$

Le sous-différentiel $\partial\sigma_C(d)$ de σ_C en d est :

$$\partial\sigma_C(d) = \left\{ c \in C ; \langle c, d \rangle = \sigma_C(d) \right\}. \quad (4)$$

Si C_1 et C_2 sont deux corps convexes, alors il en est de même de $C_1 + C_2$ (somme de MINKOWSKI de C_1 et C_2), et on a :

$$\sigma_{C_1+C_2} = \sigma_{C_1} + \sigma_{C_2}. \quad (5)$$

La propriété (4) dont (2) est un cas particulier, $\partial\sigma_C(0) = C$, nous donne l’occasion d’une interprétation géométrique : $\partial\sigma_C(d)$ est *la zone d’appui* de C dans la direction d , elle sera également notée $Z_C(d)$ (voir Figure 1). La fonction σ_C se trouve être différentiable en d si et seulement si $Z_C(d)$ est un singleton. Puisqu’il s’agit d’une fonction convexe, σ_C se trouve être continûment différentiable dès qu’elle est différentiable (sur \mathbb{R}^2 privé de l’origine). Dans la situation que l’on vient de décrire, C est dit *strictement convexe*. La fonction d’appui se définit également pour un corps convexe de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, et les propriétés ci-dessus se transcrivent de façon analogue. Nous verrons son expression dans \mathbb{R}^3 dans la dernière section, mais pour le moment, on se restreint au cas du plan.

Comme pour connaître σ_C il suffit de se restreindre aux vecteurs unitaires u , et que nous sommes dans le plan, nous sommes naturellement conduits à paramétrer u sous la forme $(\cos \theta, \sin \theta)$, et à considérer de ce fait

$$h_C : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto h_C(\theta) := \sigma_C(\cos \theta, \sin \theta). \quad (6)$$

Supposons sans perte de généralité que $0 \in C$ (ce qui nous évitera de traîner des valeurs absolues dans les expressions de distances) ; alors l’interprétation géométrique de $h_C(\theta)$ est très simple : $h_C(\theta)$ n’est autre que la distance de l’origine O à la “droite d’appui” D_θ d’équation $(\cos \theta)X + (\sin \theta)Y = h_C(\theta)$, (voir Figure 1). Il nous arrivera de noter $Z_C(\theta)$ la zone d’appui de C dans la direction $(\cos \theta, \sin \theta)$. Pour éviter une confusion avec σ_C , nous appellerons h_C *la fonction d’appui paramétrée* de C . Voyons quelques exemples très simples :

- $C = \{0\} \times [-l, +l]$; alors $h_C(\theta) = l |\sin \theta|$.

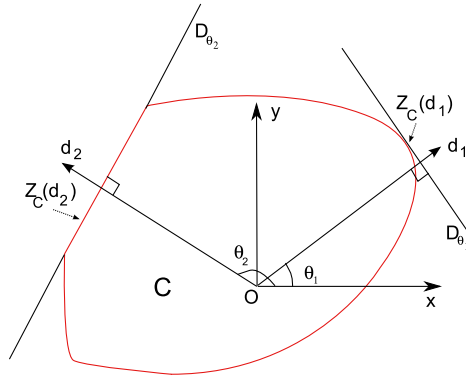


Figure 1: La fonction d'appui d'un corps convexe C est la distance au signe près entre la droite d'appui de normale $d = (\cos \theta, \sin \theta)$ et l'origine.

- C est le convexe compact elliptique d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; alors $h_C(\theta) = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$.
- C est un rectangle de sommets $(\pm a, \pm b)$, avec $a > 0$ et $b > 0$; alors $h_C(\theta) = a |\cos \theta| + b |\sin \theta|$.
- C est un demi-disque d'équation polaire $\rho \leq 1$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$; alors $h_C(\theta) = 1$ si $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$, et $h_C(\theta) = |\sin \theta|$ si $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.
- C est le translaté de C_0 par le vecteur (x_0, y_0) , i.e. $C = C_0 + (x_0, y_0)$; alors $h_C(\theta) = h_{C_0}(\theta) + x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- C est l'enveloppe convexe de C_1 et C_2 ; alors $h_C = \max(h_{C_1}, h_{C_2})$.

La règle est qu'il vaut mieux travailler avec la fonction h_C qu'avec n'importe quelle autre fonction attachée à C ou ∂C (y compris, comme nous le verrons, un paramétrage de ∂C). Dans des problèmes variationnels où un convexe C est en jeu, il est également plus performant d'utiliser h_C que n'importe quel paramétrage de sa frontière ∂C , c'est par exemple l'attitude adoptée dans [40].

2.2 Paramétrage par la fonction d'appui

On s'intéresse maintenant au paramétrage d'un corps convexe C par sa fonction d'appui paramétrée, ce qui nous permettra notamment d'introduire le rayon de courbure de sa frontière, notion fondamentale pour prendre en compte la convexité. Dans la suite, on notera σ la fonction d'appui d'un corps convexe C , h la fonction d'appui paramétrée associée à σ , et Z la zone d'appui dans la direction θ (pour alléger les notations on laisse tomber l'indexation par C). Le résultat suivant (valable également dans \mathbb{R}^N , voir [39]) relie la régularité de la fonction d'appui et la géométrie de C .

Proposition 2.1 *La fonction d'appui d'un corps convexe $C \subset \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si et seulement si C est strictement convexe.*

Ainsi, en 2D, si la zone d'appui $Z(\theta)$ est toujours un singleton, alors h est continûment différentiable. En fait, h est la composée de la fonction convexe $d = (x, y) \mapsto \sigma(d)$ avec la fonction (de classe C^∞) $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$; elle jouit donc de propriétés semblables à celles des fonctions convexes, par exemple : en tout point θ , h admet une dérivée à gauche $h'_g(\theta)$ et une dérivée à droite $h'_d(\theta)$, lesquelles vérifient $h'_g(\theta) \leq h'_d(\theta)$. Dans la terminologie des fonctions localement Lipschitz, non nécessairement différentiables, h est *régulière au sens de* F. H. CLARKE, et son *sous-différentiel généralisé* (toujours au sens de CLARKE) en $\theta \in \mathbb{R}$, noté $\partial h(\theta)$ (même graphisme que le sous-différentiel d'une fonction convexe), s'évalue comme suit (voir [15], ou bien [29]) :

$$\partial h(\theta) = \left\{ -p \sin \theta + q \cos \theta ; (p, q) \in \partial \sigma(\cos \theta, \sin \theta) \right\} = [h'_g(\theta), h'_d(\theta)]. \quad (7)$$

La différentiabilité de h en θ (en fait la stricte différentiabilité) se produit lorsque $\partial h(\theta)$ est un singleton, c'est-à-dire lorsque la zone d'appui $Z(\theta)$ de C dans la direction $(\cos \theta, \sin \theta)$ se réduit à un point :

$$h'(\theta) = -p \sin \theta + q \cos \theta, \quad (8)$$

où $\nabla \sigma(\cos \theta, \sin \theta) = (p, q)$. Dans le cas particulier des corps de largeur constante de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ou des rotors, la fonction d'appui paramétrée est de classe $C^{1,1}$, c'est-à-dire, en plus d'être C^1 , sa dérivée est Lipschitzienne (voir [5], [7], [27]). Dans \mathbb{R}^2 , un corps strictement convexe se paramètre de la façon suivante.

Proposition 2.2 *Soit C un corps strictement convexe de \mathbb{R}^2 et h sa fonction d'appui paramétrée. Alors sa frontière ∂C est décrite par :*

$$\begin{cases} x(\theta) = h(\theta) \cos \theta - h'(\theta) \sin \theta, \\ y(\theta) = h(\theta) \sin \theta + h'(\theta) \cos \theta, \end{cases} \quad (9)$$

où $\theta \in [0, 2\pi]$.

□ *Démonstration.* On appelle u_θ le vecteur $u_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$. La fonction d'appui paramétrée h vérifie :

$$h(\theta) = \max_{x \in K} \langle x, u_\theta \rangle,$$

et est de classe C^1 par la stricte convexité de C . Comme C est compact, ce maximum est atteint par un point $(x(\theta), y(\theta))$ de la frontière de C qui se trouve sur la droite d'appui D_θ à C d'équation $(\cos \theta)X + (\sin \theta)Y = h(\theta)$. On a donc :

$$x(\theta) \cos \theta + y(\theta) \sin \theta = h(\theta).$$

Le fait que D_θ s'appuie sur C en $Z(\theta)$ se traduit grâce à (7) par :

$$h'(\theta) = -x(\theta) \sin \theta + y(\theta) \cos \theta.$$

En combinant ces deux dernières relations, on trouve que $(x(\theta), y(\theta))$ est donné par (9). □

La proposition suivante fournit l'expression du rayon de courbure de C en fonction de h .

Proposition 2.3 *Soit C un corps strictement convexe et h sa fonction d'appui paramétrée. Si on suppose que h est de classe $C^{1,1}$, le rayon de courbure géométrique ρ de ∂C s'écrit :*

$$\rho = h + h''. \quad (10)$$

□ *Démonstration.* Le rayon de courbure ρ est donné classiquement par la formule suivante :

$$\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)}{(x'^2(\theta) + y'^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme h est de classe $C^{1,1}$, h'' existe presque partout (théorème de RADEMACHER). Grâce au paramétrage (9), on trouve bien $\rho = h + h''$. □

Une façon d'exprimer la convexité de C est comme suit.

Corollaire 2.1 *Soit C un corps strictement convexe. On suppose que sa fonction d'appui paramétrée h est de classe $C^{1,1}$. La convexité de C équivaut à :*

$$\rho = h + h'' \geq 0. \quad (11)$$

Lorsque la fonction h est seulement de classe C^1 , le corollaire précédent reste vrai. La condition $\rho \geq 0$ s'écrit au sens des distributions : $\rho = h + h''$ est une mesure de RADON positive, *i.e.* pour tout fonction ϕ positive de classe C^∞ , à support compact dans $[0, 2\pi]$, alors $\int_0^{2\pi} \rho \phi \geq 0$ (voir [35] pour une démonstration de ce résultat dans le cas où $h \in C^1$).

2.3 Expression du périmètre et de l'aire

Il y a une très belle (et simple) formule qui donne la longueur $\ell(\partial C)$ de la frontière ∂C de C . (voir [35],[38]) :

Théorème 2.1 *Le périmètre d'un corps convexe C s'écrit :*

$$\ell(\partial C) = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta. \quad (12)$$

□ *Démonstration.* Esquissons la démonstration de (12), au moins dans le cas où C est strictement convexe et $h'' \in L^1$, ce qui sera le cas pour les corps de largeur constante et les rotors. Il s'agit essentiellement de celle effectuée par G. LETAC (voir [35], pp.52–53). Par (9), on a :

$$ds(\theta) = \sqrt{dx(\theta)^2 + dy(\theta)^2} = (h(\theta) + h''(\theta)) d\theta$$

(la stricte convexité de C assurant que $h(\theta) + h''(\theta) \geq 0$ pour tout θ , *cf.* Corollaire 2.1). En conséquence,

$$\ell(\partial C) = \int_0^{2\pi} ds(\theta) = \int_0^{2\pi} (h(\theta) + h''(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta + [h'(\theta)]_0^{2\pi},$$

d'où le résultat puisque la 2π -périodicité de h' induit que $[h'(\theta)]_0^{2\pi} = 0$. □

Une illustration de l'utilisation du Théorème 1.2 est la réponse à la question suivante : si C_1 , de frontière ∂C_1 , est contenue dans C_2 , de frontière ∂C_2 , alors $\ell(\partial C_1) \leq \ell(\partial C_2)$. Cela se voit immédiatement, du fait que $h_{C_1} \leq h_{C_2}$, inégalité qui elle-même résulte de (3).

La fonction h sert également pour déterminer l'aire $\mathcal{A}(C)$ de C ; en voici deux expressions.

Théorème 2.2 *L'aire d'un corps strictement convexe s'écrit :*

$$\mathcal{A}(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h^2(\theta) - h'^2(\theta)) d\theta. \quad (13)$$

Lorsque le bord de C est de classe C^1 , alors h est C^2 par (9), et par une intégration par partie, (13) s'exprime de la façon suivante :

$$\mathcal{A}(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)(h(\theta) + h''(\theta)) d\theta. \quad (14)$$

Remarquons que (14) fait intervenir la fonction d'appui paramétrée et le rayon de courbure de ∂C . Cette dernière formule se généralise en dimension N (voir partie 4, [10], [25]). Dans le cas où h est seulement de classe C^1 (i.e., C strictement convexe), (14) se définit comme le produit d'une fonction continue h et d'une mesure de Radon $h + h''$. Les formules (12), (13) et (14) sont par ailleurs facilement illustrées avec les exemples simples du paragraphe 2.1.

2.4 Lien avec les fonctions sous-sinusoidales

Par ce qui précède, la fonction d'appui paramétrée h d'un corps C strictement convexe est une fonction continue (même C^1), périodique (de période 2π). Il est intéressant de noter que l'on sait caractériser, parmi les fonctions continues périodiques, celles qui sont des fonctions d'appui paramétrées. Ceci relève de l'étude des fonctions entières (voir [37], p.124-137).

Théorème 2.3 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction h , continue et 2π -périodique, soit la fonction d'appui paramétrée d'un convexe compact C est :*

$$\forall (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3, \theta_1 < \theta_2 < \theta_3, \theta_2 - \theta_1 < \pi, \theta_3 - \theta_2 < \pi, \quad (15)$$

$$h(\theta_1) \sin(\theta_3 - \theta_2) + h(\theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_3) + h(\theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_1) \geq 0.$$

En terme de déterminants, cela se traduit par :

$$\begin{vmatrix} h(\theta_1) & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ h(\theta_2) & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ h(\theta_3) & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \end{vmatrix} \geq 0. \quad (16)$$

Dans ce cas, C est reconstruit à partir de h comme indiqué dans (2) :

$$C = \left\{ (x, y) ; (\cos \theta)x + (\sin \theta)y - h(\theta) \leq 0 \text{ pour tout } \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

La condition (15) caractérise les fonctions sous-sinusoidales (voir [37]) utilisées dans l'étude des fonctions entières. Si h est la fonction d'appui paramétrée d'un corps convexe, la condition (15) est immédiate en utilisant la définition de fonction d'appui paramétrée. La réciproque est plus délicate. Dans [37], il est établi qu'une fonction sous-sinusoidale qui vérifie (15) est dérivable à gauche et à droite en tout point, ce qui permet ensuite de montrer que h est bien la fonction d'appui paramétrée d'un corps convexe. La proposition suivante montre que si h est C^2 , l'hypothèse (15) entraîne la convexité du corps C dont la frontière est décrite par (9).

Proposition 2.4 *Soit h une fonction de classe C^2 , 2π -périodique, et qui vérifie la condition (15). Alors la quantité $\rho = h + h''$ est positive.*

□ *Démonstration.* Fixons $\theta_1 \in [0, 2\pi[$, et $0 < \varepsilon < \pi$, et posons $\theta_2 = \theta_1 + \varepsilon$, $\theta_3 = \theta_1 + \varepsilon_2$. Par développement limité au troisième ordre en ε , la quantité

$$\delta(\theta_1, \varepsilon) := h(\theta_1) \sin(\theta_3 - \theta_2) + h(\theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_3) + h(\theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

devient:

$$\delta(\theta_1, \varepsilon) = (h(\theta_1) + h''(\theta_1))\varepsilon^3 + o(\varepsilon)^3.$$

Par la condition (15), la quantité $\delta(\theta_1, \varepsilon)$ est positive, ce qui entraîne la positivité du rayon de courbure $h + h''$. \square

Citons également une autre caractérisation des fonctions d'appui due à M. Kallay (voir [31]).

Définition 2.1 Une fonction $\sigma \in C^0(\mathcal{S}^1, \mathbb{R})$ est dite "circle-convex" si et seulement si

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], f(\theta + \alpha) + f(\theta - \alpha) \geq 2f(\theta) \cos \alpha, \quad (17)$$

où l'on a posé $f(\theta) = \sigma(\cos \theta, \sin \theta)$.

On a le résultat suivant (voir [31]).

Théorème 2.4 Toute fonction $\sigma \in C^0(\mathcal{S}^1, \mathbb{R})$ est la fonction d'appui d'un corps convexe si et seulement si elle est "circle-convex".

Notons que sous des hypothèses de régularités sur la fonction σ , la condition (17) implique (10) de façon analogue à la démonstration de la proposition 2.4.

3 Convexes compacts du plan de largeur constante et rotors.

3.1 Corps de largeur constante

Commençons par deux définitions (s'appuyer sur la figure 2a) : C étant toujours un convexe compact du plan ;

- La largeur de C dans la direction (unitaire) $u \in \mathbb{R}^2$ est $\sigma_C(u) + \sigma_C(-u)$, c'est-à-dire la différence entre $\max_{c \in C} \langle c, u \rangle$ et $\min_{c \in C} \langle c, u \rangle$.
- Le diamètre de C est par définition $\Delta(C) := \max \{c - d ; (c, d) \in C\}$; en raison de la convexité de C , $\Delta(C)$ vaut aussi $\max \{\sigma_C(u) + \sigma_C(-u) ; u \in \mathcal{S}^1\}$ (le diamètre est la plus grande des largeurs).

Définition 3.1 On dit que C est de largeur constante si $\sigma_C(u) + \sigma_C(-u) = l$ (la largeur) pour toute direction unitaire u .

En terme de fonction d'appui, C est un corps de largeur constante l si et seulement si sa fonction d'appui paramétrée h vérifie la relation :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], h(\theta) + h(\theta + \pi) = l. \quad (18)$$

La traduction géométrique de la définition ci-dessus est comme suit : la projection orthogonale de C sur toute droite du plan est un segment de longueur l .

Les convexes compacts du plan, de largeur constante, ont été abondamment étudiées au XIX-ème siècle et première moitié du XX-ème siècle. De tels convexes sont appelés parfois *des orbiformes* dans la littérature. Ils possèdent des propriétés géométriques et mécaniques particulières. Des articles-revues ou livres existent sur la question (comme [11], [14]) ; on peut même dire que toutes les questions mathématiques qu'on peut se poser à leur sujet ont

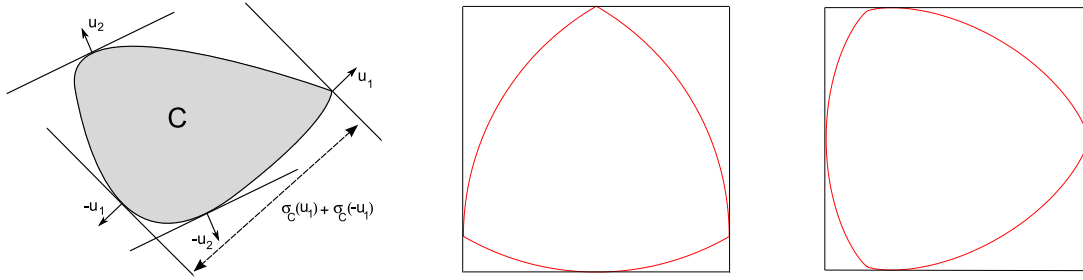


Figure 2: *Largeur d'un corps convexe C dans une direction donnée (Fig. 2a), triangle de REULEAUX (Fig. 2b), et corps de largeur constante décrit par (19) (Fig. 2c).*

été posées, et que des réponses à la plupart d'entre elles ont été apportées. Nous allons lister ci-dessous, sans démonstrations, les propriétés les plus saillantes de ces convexes (libellées (\mathbf{P}_1) , (\mathbf{P}_2) , etc.).

Les deux convexes de largeur constante l les plus simples sont : le disque $\overline{B}(0, l/2)$ bien sûr, et le triangle de F. REULEAUX (1829-1905), lequel est un triangle curviligne construit à partir d'un triangle équilatéral en traçant trois arcs de cercle centrés aux sommets du triangle et de rayon l (voir Figure 2b et [36]). Mais il y a une grande variété dans la “forme” de ces convexes de largeur constante, et leur tracé n'a rien à voir avec les deux cas “extrêmes” que l'on vient d'évoquer. En Figure 2c est tracé un convexe de largeur constante à frontière ∂C analytique, tiré de [12] ; le paramétrage de ∂C est comme suit

$$t \in [0, 4\pi] \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{2}{3} \cos(t) - \frac{1}{3} \cos(2t) - \frac{8}{3} \cos(\frac{1}{2}t), \\ y(t) = \frac{2}{3} \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(2t) + \frac{8}{3} \sin(\frac{1}{2}t). \end{cases} \quad (19)$$

Ce dernier exemple est intéressant à plus d'un titre : tous les calculs (trigonométriques) concernant les droites d'appui, les diamètres, les longueurs, etc. peuvent être menés jusqu'au bout ; il sert d'illustration à bien des propriétés qui vont suivre.

(\mathbf{P}_1) *Caractérisation géométrique.* C est de largeur constante l si et seulement si $C + (-C) = \overline{B}(0, l)$.

Ceci est facile à vérifier à l'aide des fonctions d'appui : comme $\sigma_C(-u) = \sigma_{-C}(u)$ pour tout u , la définition de “ C est de largeur constante l ” se traduit par

$$\sigma_C(u) + \sigma_{-C}(u) = l = \sigma_{\overline{B}(0, l)}(u), \quad \text{pour tout } u,$$

et ceci est la transcription analytique de la propriété ensembliste $C + (-C) = \overline{B}(0, l)$.

(\mathbf{P}_2) Le disque est le seul convexe du plan de largeur constante ayant un centre de symétrie.

(\mathbf{P}_3) Si C_1 et C_2 sont de largeurs constantes (l_1 et l_2 respectivement), alors $C_1 + C_2$ est de largeur constante $l_1 + l_2$.

Ceci est facile à vérifier à partir de (5). Par exemple, additionner un disque $\overline{B}(0, \epsilon/2)$ à un triangle curviligne de REULEAUX de largeur l conduit à un convexe de largeur constante $l + \epsilon$, version “lissée” du triangle de REULEAUX .

(\mathbf{P}_4) Si C est de largeur constante, il n'y a pas de “partie plate” (= segment) sur sa frontière : C est strictement convexe. En conséquence, h est dérivable sur \mathbb{R} , et de par la formule (8), la fonction dérivée h' est bornée sur \mathbb{R} .

(P₅) La fonction d'appui d'un corps de largeur constante est de classe $C^{1,1}$ (voir [5], [6], [27]).

(P₆) Un corps de largeur constante C , peut être "lisse" ou avec des points anguleux (ou coins) sur sa frontière, mais il ne peut y avoir de point anguleux d'angle strictement inférieur à $\frac{2\pi}{3}$. Si C a un point anguleux d'angle $\frac{2\pi}{3}$, alors C est nécessairement le triangle de REULEAUX.

(P₇) Si la frontière d'un convexe C de largeur constante l comporte un point anguleux, alors un des morceaux de la frontière est un arc de cercle de rayon l . Réciproquement, si une partie de la frontière de C est un arc de cercle, c'est que la frontière de C comporte un point anguleux.

Les polygones curvilignes de REULEAUX (voir plus bas, Figure 3 notamment) ont un nombre aussi grand que voulu de côtés courbés, mais en nombre impair. Toutefois il faut se garder de croire que c'est la forme générale des convexes de largeur constante : il y en a pour lesquels aucun morceau de la courbe frontière n'est un bout de cercle (*cf.* Figure 2c). Notons néanmoins le résultat d'approximation suivant : un convexe de largeur constante peut être approchée aussi près qu'on veut (au sens de la distance de HAUSDORFF) par un polygone curviligne de REULEAUX.

(P₈) Si C est de largeur constante l , alors en presque tout point de sa frontière, le rayon de courbure ρ vérifie $\rho \leq l$.

(P₉) Le diamètre d'un convexe de largeur constante l est l précisément.

Ceci est facile à voir avec la formule donnant le diamètre de C à l'aide de la fonction d'appui de C .

(P₁₀) Un corps de largeur constante C est "saturé" au sens suivant : il n'y a pas de convexe C' contenant strictement C , de même diamètre ($\Delta(C) = \Delta(C')$) ; en d'autres termes, "on ne peut l'agrandir en conservant le même diamètre".

(P₁₁) Les "normales" aux points de contact de deux droites parallèles tangentes à un convexe de largeur constante l , se confondent en une même droite ; on parle alors de "binormale". Le segment joignant les deux points de contact est une "corde", sa longueur est le diamètre l ; les deux points de contact en question sont "diamétralement opposés".

Une illustration est avec l'orbiforme de l'exemple de la Figure 2c, où deux points de contact diamétralement opposés correspondent exactement à des valeurs translatées θ et $\theta + 2\pi$ du paramètre.

(P₁₂) Pour $x \in \partial C$, on considère la distance maximale de x à un point de C , quantité notée $d_{\max}(x)$. Alors :

$$(C \text{ est de largeur constante}) \iff (d_{\max}(x) = l \text{ pour tout } x \in \partial C).$$

(P₁₃) *Propriétés des cercles inscrits et circonscrits.* Désignons par r le rayon du cercle inscrit dans le convexe de largeur constante l , et par R celui du cercle circonscrit. Alors :

- Le cercle inscrit et le cercle circonscrit à un convexe de largeur constante sont concentriques ;

- La somme $r + R$ est constante et vaut l ;
- Les valeurs de r et de R sont encadrées de la manière suivante :

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} l \cong 0,42 l \leq r \leq \frac{l}{2} ; \quad \frac{l}{2} \leq R \leq \frac{\sqrt{3}}{3} l \cong 0,58 l. \quad (20)$$

La plus grande valeur de r (et donc la plus petite de R), c'est-à-dire $l/2$, est obtenue pour les disques de diamètre l . La plus petite valeur de r (et donc la plus grande de R) est obtenue pour les triangles de REULEAUX.

(P₁₄) Théorème de J. Barbier. *Si C est de largeur constante l , la longueur de sa frontière (le périmètre de C) est une constante et vaut πl .*

□ *Démonstration.* La démonstration en est aisée grâce à la formule (8) du Théorème 1.2 et à la caractérisation géométrique (**P₁**). En effet, si C est de largeur constante l , il en est de même de $-C$; de plus, C et $-C$ ont même périmètre. Ainsi, la caractérisation géométrique (**P₁**) induit

$$\int_0^{2\pi} \sigma_C(\cos \theta, \sin \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \sigma_{-C}(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} l d\theta = 2\pi l.$$

On a donc :

$$\int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} h_{-C}(\theta) d\theta = 2\pi l,$$

d'où le résultat grâce au Théorème 2.1. □

Soit C un corps de largeur constante l et $\varepsilon > 0$. Alors par le théorème de BARBIER, le périmètre de $C + \overline{B}(0, \varepsilon)$ est simplement $\pi(l + 2\varepsilon)$.

(P₁₅) Parmi tous les convexes du plan de diamètre l , les convexes de largeur constante l sont ceux de plus grand périmètre ($= \pi l$).

(P₁₆) Théorème de W. Blaschke et H. Lebesgue. *Parmi les convexes C de largeur constante l , les disques de diamètre l sont ceux d'aire maximale, les triangles de REULEAUX sont ceux d'aire minimale. On a ainsi l'encadrement suivant de l'aire $\mathcal{A}(C)$ de C :*

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} l^2 \cong 0,7048 l^2 \leq \mathcal{A}(C) \leq \frac{\pi}{4} l^2 \cong 0,7854 l^2. \quad (21)$$

Il y a eu, historiquement, plusieurs démonstrations de ce théorème (voir [9], [18], [20], [34]) ; une récente, utilisant les résultats et techniques du Contrôle optimal est due à T. BAYEN (voir [6]). Par rapport aux disques, les triangles de REULEAUX ont une aire inférieure d'environ 10%.

A l'aide des polygones curvilignes de REULEAUX, construits comme le triangle de REULEAUX mais à partir d'un polygone à $2k + 1$ côtés, on a une gradation croissante de l'aire de ces polygones dans la plage indiquée par (21) ; cf. Figure 3.

(P₁₇) Parmi tous les convexes du plan de diamètre l , le triangle équilatéral de hauteur l est celui ayant la plus petite aire, $\frac{\sqrt{3}}{3} l^2 \cong 0,58 l^2$, mais ce n'est pas un convexe de largeur constante.

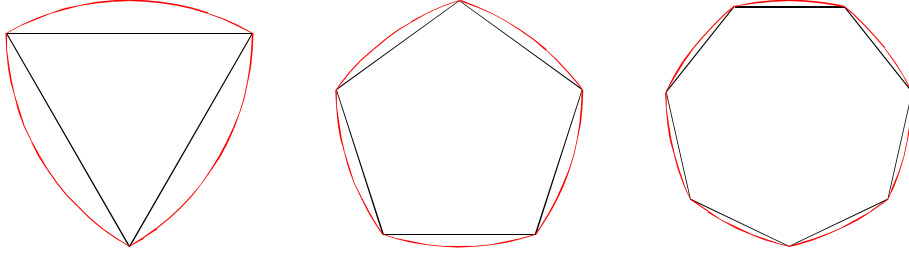


Figure 3: *polygones de REULEAUX impairs \mathcal{P}_N de largeur constante 1, et dont l'aire est donnée par : $\mathcal{A}(\mathcal{P}_N) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{N}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{2N}\right)\right)$: $\mathcal{A}(\mathcal{P}_3) \approx 0.704$, $\mathcal{A}(\mathcal{P}_5) \approx 0.758$, $\mathcal{A}(\mathcal{P}_7) \approx 0.771$.*

3.2 Rotors du plan

Dans cette section, nous résumons les propriétés des rotors dont certains sont utilisés en Mécanique, et qui généralisent les corps de largeur constante du plan.

Définition 3.2 *Un rotor est un corps convexe qui tourne à l'intérieur d'un polygône régulier convexe à n côtés \mathcal{P}_n , en restant à chaque instant en contact avec les n côtés de \mathcal{P}_n .*

Lorsque $n = 3$, un rotor est appelé une Δ -courbe (voir [45]) et lorsque $n = 4$, un rotor est un corps de largeur constante. Les rotors ont été étudiés dans les années 1960 par GOLDBERG (voir [21], [23], [24]), puis un peu plus tard par KLÖTZLER, qui s'est intéressé à une généralisation du théorème de BLASCHKE-LEBESGUE dans ce cas-là (voir [17] puis [3], [4], [32]). C'est seulement récemment que l'on a pu répondre complètement à la question du rotor d'aire minimale (voir [5]), qui était un problème ouvert, et pour lequel GOLDBERG avait formulé une conjecture en 1957 (voir [23]).

Les rotors ont été étudiés de manière géométrique principalement lorsque $n = 3$ et $n = 4$, et pour $n \geq 5$, il a été plus difficile de répondre géométriquement à certaines questions, notamment la question du rotor d'aire minimale. Lorsque $n = 3$, FUJIWARA a démontré au début du vingtième siècle que la lunule (constituée de deux arcs de cercles symétriques) était d'aire minimale (voir [19]). Lorsque $n = 4$, il s'agit du théorème de BLASCHKE-LEBESGUE. Pour arriver à une généralisation de ce résultat pour $n \geq 5$, nous effectuons un paramétrage du problème.

La première étape consiste à généraliser la relation (18) qui caractérise un corps de largeur constante l . Le paramétrage analytique d'un rotor par sa fonction d'appui paramétrée se résume par le théorème suivant (voir [5]). Soit $r > 0$ le rayon du cercle inscrit à \mathcal{P}_n et $d = \frac{2\pi}{n}$.

Théorème 3.1 *Soit C un corps strictement convexe et h sa fonction d'appui paramétrée. Alors C est un rotor de \mathcal{P}_n si et seulement si h est de classe $C^{1,1}$ et vérifie la relation :*

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad h(\theta) - 2 \cos(d)h(\theta + d) + h(\theta + 2d) = 4r \sin^2\left(\frac{d}{2}\right). \quad (22)$$

La relation (22) est une relation cinématique : les n perpendiculaires aux n points de contact du rotor et \mathcal{P}_n convergent à chaque instant au centre instantané de rotation (voir [45]). Elle

peut également s'écrire de la façon suivante. Etant donné un corps strictement convexe C , on peut définir les deux mesures suivantes $\rho(d\theta)$ et κ_n par :

$$\rho(d\theta) = (h(\theta) + h''(\theta))d\theta, \quad \kappa_n := \delta_{-d} - 2 \cos(d)\delta_0 + \delta_d.$$

Il vient alors que C est un rotor si et seulement si il existe $R > 0$ tel que

$$\rho * \kappa_n = R,$$

où $*$ indique la convolution sur le groupe du cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$. Un rotor peut donc se décrire naturellement à l'aide des séries de Fourier. Par cette remarque, on obtient directement l'expression de la fonction d'appui paramétrée sous la forme :

$$h(\theta) = r + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(c_{ln-1} e^{i(ln-1)\theta} + c_{ln+1} e^{i(ln+1)\theta} \right). \quad (23)$$

Un exemple de rotor non trivial est donné par :

$$h(\theta) = 1 + \frac{1}{1 - (ln - 1)^2} \cos((ln - 1)\theta), \quad (24)$$

où $l \in \mathbb{N}^*$ (voir Figure 4). L'expression (24) s'obtient en tronquant le développement en série de Fourier de h et en respectant (11).

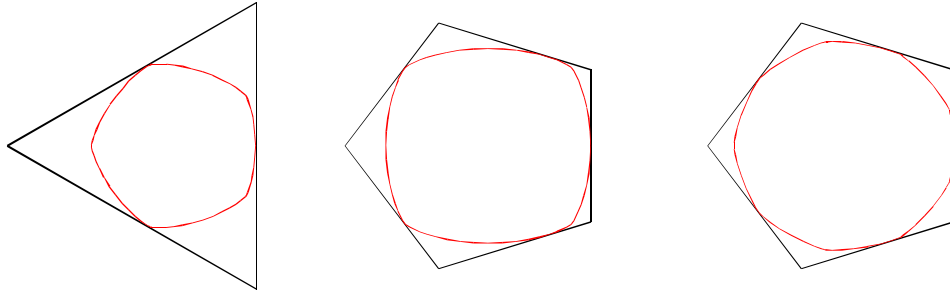


Figure 4: Exemples de rotors dont la fonction d'appui paramétrée est donnée par (24) avec $n = 3, l = 2$ et $n = 5, l = 1, 2$.

On montre également le théorème de BARBIER dans le cas des rotors en intégrant (22) sur $[0, 2\pi]$; ainsi tous les rotors ont le même périmètre $2\pi r$, celui du disque. Par suite, le rotor d'aire maximale est le disque.

Le problème de trouver le rotor d'aire minimale pour $n \geq 5$ a été posé par FUJIWARA, et c'est en 1957 que GOLDBERG a apporté une conjecture au problème. Pour $n \geq 5$, les méthodes géométriques ne sont plus adaptées. Néanmoins GOLDBERG a décrit géométriquement les *rotors réguliers* qui sont une généralisation des polygones de REULEAUX, mais avec plusieurs rayons de courbures (voir [23] et figure 5 et 6). Ces rotors réguliers peuvent se développer

en série de Fourier et leur développement est lacunaire (voir [5] pour une description analytique des rotors réguliers). Comme pour le triangle de REULEAUX, il a conjecturé que le rotor d'aire minimale était celui avec le minimum d'arcs de cercle. KLÖTZLER a donné une première approche du problème par la théorie du Contrôle optimal, et le problème a pu être définitivement résolu en 2008 (voir [5]). Le problème d'optimisation auquel on est conduit peut se réécrire sous la forme :

$$\min_{h \in \mathcal{K}} \int_0^{2\pi} h(h + h''), \quad (25)$$

où \mathcal{K} est l'ensemble des fonctions h 2π -périodiques, de classe $C^{1,1}$ vérifiant (11)-(22). Il est facile de voir que cet ensemble est compact convexe. Pour aborder ce problème de minimisation, l'idée est de prendre comme contrôle $\rho = h + h''$ qui est borné, et d'exprimer ensuite le problème d'optimisation comme un problème de Contrôle optimal (en prenant l'angle comme paramètre temporel). Lorsque $n = 4$, le problème se simplifie car ρ varie dans $[0, 1]$ (voir [6]). Lorsque $n \neq 4$, la relation (22) comporte trois termes et on est conduit à travailler cette fois avec un contrôle $u = (u_1, u_2)$ prenant ses valeurs dans un certain polygône convexe du plan.

L'analyse par le principe du maximum de PONTRYAGIN conduit à des extrémales "bang-bang" (*i.e.* le rayon de courbure sature les contraintes d'inégalité). Un contrôle extrémal prend ainsi ses valeurs uniquement sur les sommets du polygône. Ce résultat peut s'obtenir également en remarquant que l'application

$$C \longmapsto \sqrt{\mathcal{A}(C)}$$

est strictement concave sur l'ensemble des corps strictement convexes (théorème de BRUNN-MINKOWSKI). Ainsi, un rotor d'aire minimale est un point extrémal de l'ensemble \mathcal{K} . Le principe du maximum de PONTRYAGIN et la formulation en Contrôle optimal permet cependant une étude plus systématique des extrémales du problème de minimisation (candidates pour être optimales).

On obtient ainsi qu'un rotor d'aire minimale est nécessairement une réunion d'arcs de cercles. En approfondissant cette étude, on démontre que ces arcs de cercles sont en nombre fini, et qu'ils ont tous les mêmes secteurs angulaires (voir figure 6). Cette dernière propriété revient à démontrer l'équidistance des points de commutation d'un contrôle extrémal, et se démontre ici par une extension du théorème de NOETHER en Contrôle optimal (voir [41], [42]). On obtient alors que pour un rotor d'aire minimale, ρ s'écrit sur $[0, d]$:

$$\rho = \sum_{0 \leq i \leq ln-1} r_i \mathbb{1}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}, \quad (26)$$

où $l \in \mathbb{N}^*$, $r_i \in \mathbb{R}$, $\tau_i = \frac{d}{ln-1}$ (voir figure 6). Ceci achève le schéma de démonstration de la conjecture de GOLDBERG. Plusieurs rotors réguliers d'aire minimale sont représentés sur la figure 5. Notons qu'un rotor d'aire minimale dans un polygône à n côtés hérite de la symétrie du groupe diédral d'ordre $n - 1$, cependant cette propriété n'apparaît qu'à l'issue de la synthèse du problème de minimisation.

Certaines propriétés des rotors réguliers peuvent être approfondies, notamment l'étude de leur optimalité locale. FIREY démontre géométriquement que les polygônes de REULEAUX réguliers sont des maxima locaux de l'aire dans la classe des polygônes de REULEAUX (non

réguliers) avec le même nombre de côtés (voir [16]). Il pourrait être intéressant de généraliser ce résultat au cas des rotors réguliers. D'autres problèmes similaires se posent dans le cadre des rotors sphériques en dimension 3 (voir GOLDBERG, [22]).

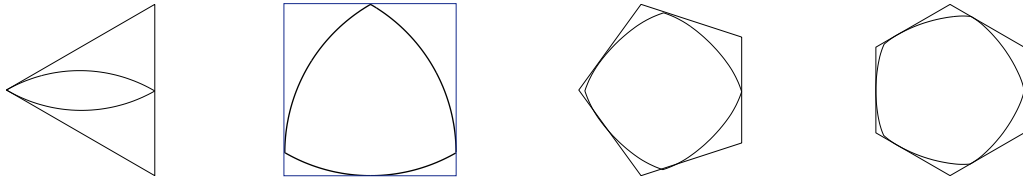


Figure 5: *Les rotors réguliers d'aire minimale dans le triangle, le carré, le pentagone et l'hexagone.*

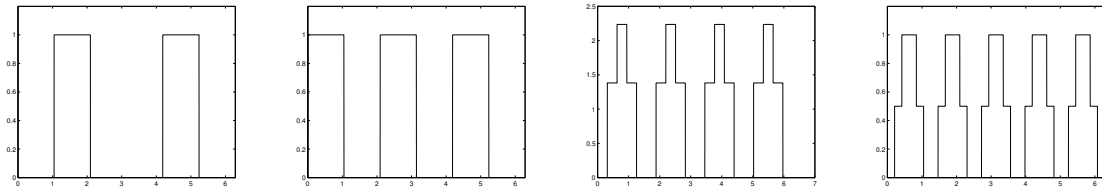


Figure 6: *Rayons de courbure des quatre rotors réguliers de la figure 5.*

4 Convexes compacts de l'espace d'épaisseur constante

La fonction d'appui reste encore un outil fondamental dans le contexte 3D ; les propriétés (2) à (5) restent valables, il suffit simplement de remplacer \mathbb{R}^2 par \mathbb{R}^3 . Dans le contexte 3D, on dit que le convexe compact C est *d'épaisseur constante* lorsque $\sigma_C(u) + \sigma_C(-u) = l$ (l'épaisseur) pour toute direction unitaire $u \in \mathcal{S}^2$. Ici encore, cela signifie géométriquement que les projections orthogonales de C sur des droites de l'espace sont toujours des segments de longueur l . De tels convexes sont appelés parfois *des sphéroformes* dans la littérature.

4.1 Propriétés

Comme on s'y attend, des propriétés comme (\mathbf{P}_1) , (\mathbf{P}_2) , (\mathbf{P}_3) ,..., adaptées *mutatis mutandis*, sont vérifiées par les convexes d'épaisseur constante. Nous insistons ci-dessous sur celles qui sont radicalement différentes quand on passe de 2D à 3D.

(\mathbf{Q}_1) La projection orthogonale sur un plan d'un convexe compact C d'épaisseur constante l donne lieu à un convexe compact plan de largeur constante l (mais, pour le même C , ces projections sont généralement des convexes différents) ; on dit, avec un certain abus de langage, que les convexes de l'espace d'épaisseur constante sont "des objets à périmètre constant".

(Q₂) Il n'y a pas de convexe compact d'épaisseur constante dont la frontière soit composée de morceaux sphériques exclusivement (sauf les boules, bien sûr).

Une construction similaire à celle qui a permis de passer du triangle équilatéral au triangle curviligne de REULEAUX, opérée à partir d'un tétraèdre régulier, conduit à un convexe compact *qui n'est pas d'épaisseur constante* (peu s'en faut, le défaut est inférieur à 2,5 %, voir Figure 8). Sa frontière est constituée de 4 morceaux de sphère, et une modification de ce convexe conduira au dit solide de MEISSNER (voir (Q₁₂)).

(Q₃) Si C est un convexe compact d'épaisseur constante, sa fonction d'appui h_C est une fonction de classe $C^{1,1}$. Cela se traduit géométriquement en disant que C "glisse librement à l'intérieur d'une boule $\overline{B}(0, r)$ ", ce qui signifie (voir [27]) : pour tout x de norme égale à r (sur la frontière de la boule, donc), il existe un translaté de C , disons $y + C$, tels que $x \in y + C$ et $y + C \subseteq \overline{B}(0, r)$.

L'application qui à un point de la surface de C , supposée lisse, associe la normale unitaire en ce point étant l'application dite de GAUSS, il est légitime que l'application $u \in \mathcal{S}^1 \mapsto \nabla h(u)$ soit appelée parfois l'application inverse de GAUSS.

(Q₄) *Caractérisation des sphéroformes à l'aide de l'application inverse de GAUSS* (voir [33], §3). Soit C un convexe compact strictement convexe ; alors C est de largeur constante l si et seulement si :

$$\text{Pour tout vecteur } d \text{ non nul, } \nabla h(d) - ld = \nabla h(-d). \quad (27)$$

(Q₅) *Une construction (théorique) des sphéroformes* (voir [7], Section 2). Soit $u \mapsto M(u) \in \mathbb{R}^3$ une application continue définie sur la sphère-unité de \mathbb{R}^3 , vérifiant les propriétés additionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{Pour tout } u \text{ unitaire, } M(-u) = M(u) \text{ (symétrie) ;} \\ &\text{Pour tout } u \text{ et } v \text{ unitaires, } \langle M(u) - M(v), u \rangle \leq \frac{l}{4} \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

Alors, l'ensemble C , construit comme réunion de segments, comme indiqué ci-dessous,

$$C := \left\{ M(u) + tu ; u \text{ unitaire et } -l \leq t \leq l \right\}$$

est un sphéroforme d'épaisseur l .

(Q₆) *Propriétés des sphères inscrites et circonscrites*. Désignons par r le rayon de la sphère inscrite dans le convexe d'épaisseur constante l , et par R celui de la sphère circonscrite. Alors :

- La sphère inscrite et la sphère circonscrite à un convexe d'épaisseur constante sont concentriques ;
- La somme $r + R$ est constante et vaut l ;
- Les valeurs de r et de R sont bornées de la manière suivante :

$$\left(1 - \sqrt{\frac{3}{8}}\right) l \cong 0,39 l \leq r \leq R \leq \sqrt{\frac{3}{8}} l \cong 0,61 l. \quad (28)$$

(Q₇) *Propriété d'intersection sphérique* (voir [33], Proposition 2.1). Un sphéroforme C d'épaisseur l vérifie la propriété d'intersection suivante :

$$C = \bigcap_{x \in \partial C} \overline{B}(x, l).$$

(Q₈) Voici une autre caractérisation des corps d'épaisseur constante :

Théorème de H. Minkowski. *Un convexe compact est d'épaisseur constante si, et seulement si, toutes ses projections orthogonales sur des plans sont de périmètre constant.*

(Q₉) Théorème de S. NAKAJIMA (= MATSUMURA) (1926) et R. HOWARD (2006). On dit que C est *d'ombre constante* si toutes ses projections orthogonales de C sur des plans sont d'aire constante (au lieu de considérer des projections sur des droites comme dans la définition de “ C d'épaisseur constante”, on considère les projections sur des plans). En 1926, S. NAKAJIMA démontre le résultat de “rigidité” suivant :

Théorème de S. Nakajima. *Si un convexe compact C , dont la frontière est de classe C^2 , est à la fois d'épaisseur constante et d'ombre constante, alors C ne peut être qu'une boule.*

L'hypothèse sur la régularité de la frontière de C a pu être récemment enlevée par R. HOWARD (voir [27]) pour obtenir le même résultat.

(Q₁₀) Théorème de W. BLASCHKE (1915) *reliant l'aire surfacique et le volume d'un convexe d'épaisseur constante*. Un résultat extraordinaire de W. BLASCHKE établit une relation affine simple entre le volume du convexe compact C et son aire surfacique (mesure de surface de sa frontière) lorsque C se trouve être d'épaisseur constante l :

Théorème de W. Blaschke. *Si C est un corps convexe d'épaisseur constante l , on a :*

$$Vol(C) = Aire(\partial C) \frac{l}{2} - \frac{\pi}{3} l^3. \quad (29)$$

Ce théorème a été retrouvé dans [7], (Théorème 4), comme sous-produit du paramétrage des sphéroformes proposée par ces auteurs, à l'aide de ce qu'ils appellent “la surface médiane” d'un sphéroforme.

(Q₁₁) Par rotation des orbiformes à symétrie axiale autour de leur axe de symétrie, on peut obtenir des sphéroformes particuliers. En opérant de cette façon à partir du triangle curviligne de REULEAUX (rotation autour d'un de ses axes de symétries), on obtient ce qu'on appelle *le sphéroforme de REULEAUX*. Dans cette classe de sphéroformes à symétrie axiale, celui de volume minimal est le sphéroforme de REULEAUX (démonstration géométrique dans [13]). Cette question se ramenant à un problème 2D, il est également envisageable de l'aborder par la théorie du contrôle optimal, de la même manière que cela a été fait pour les rotors (voir [6],[2]).

(Q₁₂) **Le sphéroforme de E. MEISSNER.** Il y a des sphéroformes de même épaisseur que le sphéroforme de REULEAUX et qui ont un volume inférieur (donc sans la propriété de symétrie axiale, cf. (Q₁₁)). Le *sphéroforme de MEISSNER*, introduit dans les années 1911, est de ceux-là. *Il est à ce jour celui parmi les sphéroformes celui qui a le plus petit volume connu*, donc un candidat tout trouvé pour être minimiseur du volume parmi tous les sphéroformes.

- Le sphéroforme de MEISSNER peut être construit de la manière suivante : à partir d’un tétraèdre régulier, on construit un convexe compact K dont la frontière est constituée de morceaux de sphères comme on fait à partir d’un triangle équilatéral pour arriver au triangle curviligne de REULEAUX ; ensuite, on “rabote” K là où cela est nécessaire pour faire de ce convexe compact un sphéroforme. Voici la construction de MEISSNER : considérons la réunion E de 3 arêtes curvilignes issues d’un même sommet de K ; alors

$$C := K \cap [\cap_{x \in E} \overline{B}(x, l)]$$

est un convexe compact d’épaisseur constante l . Il y a d’ailleurs deux manières de raboter ainsi, conduisant à deux variantes du sphéroforme de MEISSNER, de même volume.

- Le sphéroforme de MEISSNER, comme déjà dit, ne jouit d’aucune symétrie de révolution. Il n’a pas non plus toutes les symétries du tétraèdre régulier.
- Pour une épaisseur l fixée à 1, le sphéroforme de MEISSNER a un volume égal à $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \arccos(\frac{1}{3}) \cong 0,42$; par rapport à la boule de diamètre 1, cela fait une réduction de volume d’environ 20%. Quant à l’aire surfacique, celui du sphéroforme de MEISSNER est de $2\pi - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \arccos(\frac{1}{3}) \cong 2,93$ (cf. Théorème de BLASCHKE en (\mathbf{Q}_{10})) ; par rapport à la boule de diamètre 1, cela fait une réduction d’aire surfacique d’environ 7%.

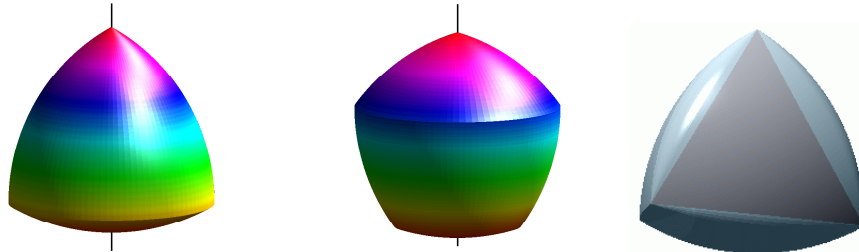


Figure 7: *Trois sphéroformes : le triangle de REULEAUX et le pentagone de REULEAUX tournés autour de leur axe de symétrie de révolution ; le solide de MEISSNER.*



Figure 8: *Deux vues du tétraèdre sphérique de REULEAUX (pas d’épaisseur constante).*

4.2 Le problème de minimisation du volume

La fonction volume a les propriétés de continuité, l'ensemble des sphéroformes celle de compacité (dans toutes les topologies raisonnables), voulues pour que le problème de minimisation (ou de maximisation) du volume parmi les sphéroformes ait des solutions. D'après le théorème de BLASCHKE (voir (\mathbf{Q}_{10})), on peut remplacer le critère volume par celui d'aire surfacique, les problèmes d'optimisation demeurent *équivalents* (ce qui n'était pas le cas en 2D). Pour ce qui est de la maximisation, la question est facilement réglée : la log-concavité de la fonction volume (voir Théorème de BRUNN-MINKOWSKI, [8]) conduit aisément au fait que la boule de diamètre l maximise le volume parmi tous les sphéroformes d'épaisseur l . La question a été travaillée pour la minimisation, mais pas été résolue à ce jour. Mis à part l'existence effective de minimiseurs, que sait-on de ce problème de minimisation et de ses solutions ?

(\mathbf{R}_1) Le volume d'un sphéroforme d'épaisseur $l = 1$ est minoré par $\pi^{\frac{3\sqrt{6}-7}{3}} \cong 0,365$.

(\mathbf{R}_2) *Une condition nécessaire de minimalité locale.* Un sphéroforme minimiseur n'est pas à frontière lisse, il possède ce qu'on pourrait appeler des "arêtes curvilignes". Ceci est précisé par le Théorème de BAYEN, LACHAND-ROBERT et OUDET (voir [7]) que voici : Soit A un ensemble de vecteurs unitaires u et $Z(A) := \nabla h(A) (= \cup_{u \in A} \nabla h(u))$ la zone d'appui de C dans les directions u de A ; alors l'un des morceaux $Z(A)$ ou $Z(-A)$ de la frontière n'est pas lisse.

Ainsi, à toute zone lisse de la frontière est diamétralement opposée une zone non lisse. Le sphéroforme de MEISSNER jouit de toutes ces propriétés et il est conjecturé, depuis les années 1934 par BONNESEN et FENCHEL, qu'il s'agit bien de la solution du problème de minimisation évoqué. Ce qui est énoncé au-dessus en (\mathbf{R}_2) est une condition nécessaire pour qu'un sphéroforme soit un minimiseur, mais il n'a pas été démontré formellement que le sphéroforme de MEISSNER est effectivement un minimiseur local. En somme, on est vis-à-vis de ce problème de minimisation dans la même situation que pour le dit problème aérodynamique de NEWTON (voir [30], Problème 9) : il est résolu si on s'en tient aux solides de révolution, mais il y a un solide qui n'est pas de révolution qui fait mieux.

Des expériences numériques, parfois fort poussées, ont été tentées pour "cerner numériquement" si on arrive à une forme (= un convexe) qui s'apparenterait à celle de MEISSNER. Les résultats sont encourageants, mais toute la problématique de la minimisation non-convexe s'y trouve présente (des minimiseurs locaux qui ne sont pas globaux, difficulté d'accéder à un "certificat d'optimalité globale", instabilités numériques, etc.).

Enfin, il est naturel à présent de se poser la question de la généralisation à un contexte d'espace de dimension $N > 3$. Les mêmes problèmes qu'en 2 ou 3D peuvent être posés, sans que des résultats spécifiques aient pu être mis en évidence. Signalons toutefois une contribution récente : les auteurs dans [33], §4, proposent un procédé constructif d'un convexe de largeur ou épaisseur constante dans un espace de dimension N à partir d'une de ses projections sur un espace de dimension $N - 1$.

4.3 Fonctionnelles de surface et de volume dans \mathbb{R}^3

Dans cette section, nous donnons des expressions de l'aire surfacique et du volume d'un corps convexe de \mathbb{R}^3 , en utilisant un paramétrage de la sphère en coordonnées sphériques. L'objectif est d'arriver à un analogue de la formule (13) en 3D. Soit C un corps convexe régulier de

\mathbb{R}^3 (*i.e.*, dont le bord est de classe C^1), et σ_C sa fonction d'appui. On considère la base orthonormale de \mathbb{R}^3 constituée des vecteurs :

$$\begin{cases} u = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \\ v = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ w = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \end{cases}$$

avec $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. La fonction d'appui paramétrée de C s'écrit alors $h(\theta, \phi) := \sigma_C(u(\theta, \phi))$; elle vérifie la relation :

$$\forall (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi], \quad h(\theta, \phi) = h(\theta, \phi + 2\pi).$$

Comme C est strictement convexe et régulier, on dispose de l'application de GAUSS qui à un point X de la frontière de C associe le vecteur unitaire normal à C en X . Par hypothèse de régularité sur C , on peut inverser l'application de GAUSS ; cette application inverse associe à un vecteur unitaire $u(\theta, \phi)$ l'unique point $X(\theta, \phi)$ de ∂C réalisant le maximum

$$\max_{\tilde{X} \in C} \langle \tilde{X}, u(\theta, \phi) \rangle = h(\theta, \phi).$$

Autrement dit, $X(\theta, \phi)$ est le point pour lequel la fonction d'appui paramétrée est réalisée. La proposition suivante fournit un paramétrage de C par sa fonction d'appui paramétrée (analogue à celui en 2D fourni par (9)) :

Proposition 4.1 *Le bord du convexe C (mis à part deux points) se paramètre sous la forme suivante :*

$$(\theta, \phi) \in]0, \pi[\times [0, 2\pi] \longmapsto X(\theta, \phi) = h(\theta, \phi)u(\theta, \phi) + \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, \phi)v(\theta, \phi) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial h}{\partial \phi}(\theta, \phi)w(\theta, \phi). \quad (30)$$

□ *Démonstration.* Soit (x, y, z) les coordonnées d'un point X de \mathbb{R}^3 . Par définition de la fonction d'appui paramétrée, pour tout $\theta \in [0, \pi]$ et tout $\phi \in [0, 2\pi]$, il existe $X(\theta, \phi) := (x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$x(\theta, \phi) \sin \theta \cos \phi + y(\theta, \phi) \sin \theta \sin \phi + z(\theta, \phi) \cos \theta = h(\theta, \phi). \quad (31)$$

Le bord de C est réalisé comme l'enveloppe des hyperplans tangents à C de normale $u(\theta, \phi)$. Le point d'appui correspondant au vecteur unitaire $u(\theta, \phi)$ (*i.e.* l'application inverse de GAUSS) est le gradient de la fonction d'appui σ_C prise en $u(\theta, \phi)$. Ainsi, on a également les relations :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, \phi) = \langle X(\theta, \phi), u(\theta, \phi) \rangle = x(\theta, \phi) \cos \theta \cos \phi + y(\theta, \phi) \cos \theta \sin \phi - z(\theta, \phi) \sin \theta, \\ \frac{\partial h}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \langle X(\theta, \phi), v(\theta, \phi) \rangle = -x(\theta, \phi) \sin \theta \sin \phi + y(\theta, \phi) \sin \theta \cos \phi. \end{cases} \quad (32)$$

En combinant (31) et (32), on obtient (30). □

On remarque au passage que par le paramétrage (30), la fonction d'appui paramétrée h de C est de classe C^2 . Pour des raisons techniques, il a été préféré dans [7] un paramétrage différent, dit isothermal. Nous terminons par l'expression de l'aire surfacique de ∂C à l'aide de sa fonction d'appui paramétrée. Posons

$$\nabla_S := \left(0, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad d\sigma := \sin \theta d\theta d\phi.$$

On a le résultat suivant (voir [7],[10]) :

Théorème 4.1 *L'aire surfacique d'un corps C strictement convexe s'écrit :*

$$\mathcal{S}(C) = \iint_{]0, \pi[\times]0, 2\pi[} \left(h^2 - \frac{1}{2} |\nabla_S h|^2 \right) d\sigma, \quad (33)$$

L'expression de l'aire surfacique s'écrit également :

$$\mathcal{S}(C) = \iint_{]0, \pi[\times]0, 2\pi[} \sin \theta \left(h^2(\theta, \phi) - \frac{1}{2} h_\theta^2 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} h_\phi^2 \right) d\theta d\phi. \quad (34)$$

On peut noter la similarité de ces deux expressions avec (13). Dans le cas où le corps C est régulier, l'aire surfacique et le volume peuvent également s'exprimer à l'aide des rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 de C et de h pour obtenir une expression analogue à (14). Avec ces notations, le volume de C s'écrit par exemple :

$$V(C) = \int_{]0, \pi[\times]0, 2\pi[} h(\rho_1 + \rho_2) d\sigma$$

(voir [10], [25], [26]). Cette formule se généralise en dimension quelconque. En ce qui concerne la conjecture de MEISSNER, la fonctionnelle à minimiser est donc donnée par (33) ou (34) par le théorème de BLASCHKE. Par ailleurs, pour caractériser un corps de largeur constante en dimension 3, la relation (18) se généralise en considérant l'application $(\theta, \phi) \mapsto (\pi - \theta, \phi + \pi)$ qui au vecteur normal u associe son opposé.

Proposition 4.2 *Soit h la fonction d'appui paramétrée d'un corps de largeur constante α . Alors h vérifie la relation :*

$$\forall (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi], \quad h(\theta, \phi) + h(\pi - \theta, \phi + \pi) = \alpha. \quad (35)$$

L'objet de [7] a été d'utiliser cette relation et d'exprimer la convexité en terme de fonction d'appui paramétrée, afin d'étudier la conjecture de MEISSNER. Plus précisément, il est fourni dans [7] des conditions nécessaires et suffisantes sur h afin que le convexe décrit par (30) soit d'épaisseur constante. Le problème initial devient donc un problème d'optimisation sous contraintes : minimiser (33) sous la contrainte (35) et de convexité. Cependant, les corps d'épaisseur constante n'étant pas réguliers, la contrainte de convexité est délicate à prendre en compte. L'étude de ces contraintes et du problème de minimisation peut faire l'objet de perspectives intéressantes afin d'élucider cette conjecture.

4.4 Addendum

Après une première circulation de cet article auprès de collègues (2008), nous avons eu connaissance du travail de H. ANCIAUX et B. GUILFOYLE (voir [1] et également [2] sur les corps de révolution). Ils ont proposé une nouvelle condition nécessaire de minimalité locale pour le problème évoqué au paragraphe 4.2. Si le corps convexe C est un minimiseur local parmi les corps convexes d'épaisseur constante ℓ , alors les parties lisses de sa frontière ont leur plus petite courbure principale constante et égale à $1/\ell$; en conséquence, ces parties lisses sont des calottes sphériques ou des tubes, toutes les deux de rayon ℓ . Le sphéroforme de Meissner satisfait ces propriétés; toutefois il n'est pas exclu qu'un minimiseur (global) possède les symétries du tétraèdre.

Remerciements. Nous remercions G. LETAC (Toulouse) et les collègues, qui après une première version de ce papier, nous ont fait part des remarques ou indiqué des références qui ont permis d'apporter quelques améliorations.

References

- [1] H. ANCIAUX, G. GUILDFOYLE, *On the three-dimensional Blaschke-Lebesgue problem*, preprint [arXiv:0906.3217](https://arxiv.org/abs/0906.3217), June 2009.
- [2] H. ANCIAUX, N. GEORGIU, *The Blaschke-Lebesgue problem for constant width bodies of revolution*, preprint [arXiv:0903.4284](https://arxiv.org/abs/0903.4284), March 2009.
- [3] J. A. ANDREJEWA AND R. KLÖTZLER, *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen I*, Z. Angew. Math. Mech., vol. 64 (1985), pp. 35–44.
- [4] J. A. ANDREJEWA AND R. KLÖTZLER, *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen II*, Z. Angew. Math. Mech., vol. 64 (1985), pp. 147–153.
- [5] T. BAYEN, *Analytical parameterization of rotors and proof of a Goldberg Conjecture by Optimal Control Theory*, SIAM J. Control Optim., vol. 47 (2008), pp. 3007–3036.
- [6] T. BAYEN, *Optimisation de formes dans la classe des corps de largeur constante et des rotors*. Thèse de doctorat de l’université Paris VI, (2007), <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/21/20/70/PDF/Bayen1.pdf>.
- [7] T. BAYEN, T. LACHAND-ROBERT AND E. OUDET, *Analytic parametrization of three-dimensional bodies of constant width*, Arch. Ration. Mech. Anal., vol. 186 (2007), pp. 225–249.
- [8] M. BERGER, *Convexité dans le plan, dans l’espace et au-delà. De la puissance et de la complexité d’une notion simple*. En 2 volumes, collection Opuscules, éditions Ellipses, 2006.
- [9] W. BLASCHKE, *Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts*, Math. Ann., vol. 76 (1915), pp. 504–513.
- [10] T. BONNESEN AND W. FENCHEL, *Theory of convex bodies*, BCS Associates, 1987.
- [11] J. BRYANT AND C. SANGWIN, *How round is your circle?* Princeton University Press, 2008.
- [12] J. F. BURKE, *A curve of constant diameter*, Math. Magazine, vol. 39 (1966), pp. 84–85.
- [13] S. CAMPI, A. COLESANTI, P. GRONCHI, *Minimum problems for volumes of convex bodies*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 177 (1996), pp. 43–55.
- [14] G. D. CHAKERIAN AND H. GROEMER, *Convex bodies of constant width*, Convexity and its applications, 1983, pp. 49–96.
- [15] F. H. CLARKE, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley (1983), reprinted by SIAM, Classics in applied mathematics series (1990).
- [16] W. J. FIREY, *Isoperimetric ratios of Reuleaux polygons*, Pacific J. Math., vol. 10 (1960), pp. 823–829.

- [17] J. FOCKE, *Symmetrische n -Orbiformen kleinsten Inhalts*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., vol. 20 (1969), pp. 39–68.
- [18] M. FUJIWARA, *Analytical Proof of Blaschke's theorem on the curve of constant breadth with minimum area*, Proc. Tokyo Imp. Acad. Japan, vol. 3 (1927), pp. 300–302.
- [19] M. FUJIWARA AND S. KAKEYA, *On some problems of maxima and minima for the curve of constant breadth and the in-resolvable curve of the equilateral triangle*, Tohoku Mathematical Journal, vol. 11 (1917), pp. 92–110.
- [20] M. FUJIWARA, *Analytical Proof of Blaschke's theorem on the curve of constant breadth with minimum area*, Proc. Tokyo Imp. Acad. Japan, vol. 7 (1931), pp. 300–302.
- [21] M. GOLBERG, *Circular-arc rotors in regular polygons*, Amer. Math. Monthly, vol. 55 (1948), pp. 393–402.
- [22] M. GOLBERG, *Basic rotors in spherical polygons.*, J. Math. and Phys., vol. 34 (1956), pp. 322–327.
- [23] M. GOLBERG, *Trammel rotors in regular polygons*, Amer. Math. Monthly, vol. 64 (1957), pp. 71–78.
- [24] M. GOLBERG, *Rotors in polygons and polyhedra*, Math. Comput, vol. 14 (1960), pp. 229–239.
- [25] P. M. GRUBER AND J. M. WILLS, *Handbook of convex geometry*, vol. A, B, North-Holland Publishing Co., 1993.
- [26] E. HARRELL, *A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue*, J. Geom. Anal., vol. 12 (2002), pp. 81–88.
- [27] R. HOWARD, *Convex bodies of constant width and constant brightness*, Advances in Mathematics, vol. 204 (2006), pp. 241–261.
- [28] J.-B. HIRIART-URRUTY AND C. LEMARÉCHAL, *Fundamentals of convex analysis*, Grundlehren Text Editions, Springer, 2001.
- [29] J.-B. HIRIART-URRUTY, *Un concept récent pour l'analyse et l'optimisation de fonctions non différentiables : le gradient généralisé*, Revue de Mathématiques Spéciales n° 8 (1985-1986), pp. 311-321.
- [30] J.-B. HIRIART-URRUTY, *Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization*, SIAM Review, vol. 49 (2007), pp. 255–273.
- [31] M. KALLAY *Reconstruction of a plane convex body from the curvature of its boundary*, Israel. J. Math., vol. 17 (1974), pp. 149–61.
- [32] R. KLÖTZLER, *Beweis einer Vermutung über n -Orbiformen kleinsten Inhalts*, Z. Angew. Math. Mech., vol. 55 (1975), pp. 557–570.
- [33] TH. LACHAND-ROBERT AND E. OUDET, *Bodies of constant width in arbitrary dimension*, Math. Nachr. 280, N°7 (2007), pp. 740–750.

- [34] H. LEBESGUE, *Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations*, Journal de Mathématiques (8ème série), 4 (1921).
- [35] G. LETAC *Mesures sur le cercle et convexes du plan*, Annales scientifiques de l'université de Clermont-Ferrand II, N°76 (1983), pp. 35-65.
- [36] F. REULEAUX, *The Kinematics of Machinery : Outline of a theory of Machines*, Macmillan, London, 1876.
- [37] L. A. RUBEL, *Entire and meromorphic functions*, Springer Universitext, 1996.
- [38] L. SANTALO, *Integral geometry and geometric probability*, Cambridge University Press (2nd edition, 2004).
- [39] R. SCHNEIDER, *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [40] G. STRANG, *Maximum area with Minkowski measures of perimeter*, Proceedings of the Royal society of Edinburgh, 138A, pp. 189–199 (2008).
- [41] D. F. M. TORRES, *Conserved Quantities along the Pontryagin Extremals of Quasi-Invariant Optimal Control Problems*, Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2002.
- [42] D. F. M. TORRES, *On the Noether invariance principle for constrained optimal control problems*, WSEAS Trans. Math., vol. 3 (2004), pp. 620–624.
- [43] F. A. VALENTINE, *Convex sets*, McGraw-Hill Book Co., 1964.
- [44] B. WEISSBACH, *Rotoren im regulären Dreieck*, Publ. Math. Debrecen, vol. 19 (1972), pp. 21–27.
- [45] I. M. YAGLOM AND V. G. BOLTYANSKII, *Convex Figures*, Holt. Rinehart and Winston, 1961.