



HAL
open science

Gaz de bosons dans le régime de champ moyen : les théories de Hartree et Bogoliubov

Mathieu Lewin

► **To cite this version:**

Mathieu Lewin. Gaz de bosons dans le régime de champ moyen : les théories de Hartree et Bogoliubov. 2013. hal-00797619

HAL Id: hal-00797619

<https://hal.science/hal-00797619>

Submitted on 6 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Gaz de bosons dans le régime de champ moyen : les théories de Hartree et Bogoliubov*

Mathieu LEWIN

CNRS & Université de Cergy-Pontoise (UMR 8088), 95000 Cergy-Pontoise, France.
mathieu.lewin@math.cnrs.fr

Résumé

Nous étudions le spectre du Hamiltonien d'un gaz de bosons, à la limite d'un grand nombre N de particules et dans le régime de champ moyen (l'interaction est multipliée par $1/N$). Le premier terme du développement est donné par le modèle non linéaire de Hartree, alors que le second terme est donné par la théorie de Bogoliubov.

Table des matières

1	Le système à N corps	2
2	Le modèle de Hartree	3
2.1	Validité de Hartree pour des systèmes confinés	3
2.2	Validité de Hartree pour des systèmes non confinés	7
2.3	Non dégénérescence du minimiseur de Hartree	9
3	Le modèle de Bogoliubov	11
3.1	Le Hamiltonien de Bogoliubov	11
3.2	Description des fluctuations autour de Hartree	13
3.3	Le théorème de convergence	14
3.4	Idée de preuve	15

Cet exposé est un résumé des travaux récents [28, 27] avec Phan Thành Nam, Nicolas Rougerie, Sylvia Serfaty et Jan Philip Solovej, dans lesquels nous nous sommes intéressés à la limite d'un grand nombre N de particules pour un système quantique bosonique, dans le régime de champ moyen (ce qui signifie que l'intensité de l'interaction est choisie d'ordre $1/N$). Le premier terme du développement de l'énergie minimale est donné par le modèle non linéaire de Hartree, alors que le second terme est donné par la théorie de Bogoliubov.

*Séminaire Laurent Schwartz "EDP et applications", donné le mardi 20 Novembre 2013 à l'IHÉS. © 2013, Mathieu Lewin.

1 Le système à N corps

Nous considérons un système de N bosons non relativistes soumis à un champ extérieur V et interagissant entre eux avec un potentiel w . Nous supposons également que l'intensité de l'interaction tend vers 0 avec N et se comporte en $1/N$. Le Hamiltonien du système est donc

$$H_N := \sum_{j=1}^N (-\Delta_{x_j} + V(x_j)) + \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} w(x_k - x_\ell). \quad (1)$$

Les résultats de [28, 27] sont en fait valables dans un cadre plus abstrait, mais nous nous restreignons à (1) pour simplifier. Le facteur $1/(N-1)$ sert à compenser le fait que l'interaction comporte de l'ordre de N^2 termes alors que le premier terme n'en contient que de l'ordre de N . Tous les termes du Hamiltonien deviennent alors comparables à la limite $N \rightarrow \infty$. On pourrait mettre $1/N$ à la place de $1/(N-1)$ sans changer l'étude, mais le choix de $1/(N-1)$ simplifie quelques expressions ultérieures. L'opérateur H_N agit sur le sous espace \mathfrak{H}^N de $L^2(\Omega^N)$ composé des fonctions qui sont symétriques par rapport aux échanges de leurs variables, c'est-à-dire vérifiant

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)})$$

pour toute permutation σ de $\{1, \dots, N\}$. Ici Ω est un ouvert régulier de \mathbb{R}^d que l'on peut supposer borné ou non borné (on peut donc avoir $\Omega = \mathbb{R}^d$). Si $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, on choisit des conditions au bord, c'est-à-dire une réalisation auto-adjointe particulière du Laplacien. Les fonctions V et w sont réelles et w est paire. On suppose, pour que l'opérateur H_N soit bien défini, que

(A1) les fonctions V et w sont dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\max(1, d/2) < p < p^*$ où $p^* = d/(d-2)$ en dimension $d \geq 3$ et $p^* = \infty$ si $d = 1, 2$. Si Ω est non borné, on suppose également que $T := -\Delta + V$ est borné inférieurement et que w est comparable à T au sens où

$$w_{\pm}(x-y) \leq \alpha_{\pm}(T_x + T_y) + C \quad (2)$$

pour des constantes $\alpha_+, C > 0$ et $0 \leq \alpha_- < 1$, au sens des formes quadratiques sur \mathfrak{H}^2 , où $w_+ = \max(w, 0)$ et $w_- = \max(-w, 0)$ sont respectivement les parties positives et négatives de w .

L'hypothèse (A1) sur les potentiels V et w suffit à garantir que l'on a

$$(1 - \alpha_-) \sum_{j=1}^N T_{x_j} - \frac{C}{2}N \leq H_N \leq (1 + \alpha_+) \sum_{j=1}^N T_{x_j} + \frac{C}{2}N$$

qui implique que H_N définit une forme quadratique fermée sur le même domaine $Q(H_N)$ que celle associée à $\sum_{j=1}^N T_{x_j}$ (c'est-à-dire $H^1(\Omega^N)$ avec les conditions au bord si Ω est borné). On peut donc définir H_N comme un opérateur auto-adjoint par la méthode de Friedrichs [43].

Nous appellerons $\lambda_k(H_N)$ les valeurs propres ordonnées et comptées avec multiplicité de H_N . Plus précisément, $\lambda_k(H_N)$ est le k ème niveau de min-max

$$\lambda_k(H_N) := \inf_{\substack{V \subset Q(H_N) \\ \dim V = k}} \max_{\Psi \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle \Psi, H_N \Psi \rangle}{\|\Psi\|^2}$$

qui peut également être le bas du spectre essentiel de H_N sans être une valeur propre, si H_N a moins de $k-1$ valeurs propres en dessous de son spectre essentiel. Pour simplifier, nous utiliserons par ailleurs la notation

$$E(N) := \lambda_1(H_N) = \inf \sigma(H_N)$$

pour la première valeur propre, appelée *énergie fondamentale* du système.

Dans cet exposé nous allons voir que, sous certaines conditions, il est possible d'effectuer un développement des valeurs propres de H_N sous la forme

$$\boxed{\lambda_k(H_N) = N e_{\mathbb{H}} + \lambda_k(\mathbb{H}) + o(1)_{N \rightarrow \infty}.} \quad (3)$$

Le premier terme $e_{\mathbb{H}}$ du développement ne dépend pas de k et il est donné par le modèle *non linéaire* de Hartree. Le second terme dépend de k puisque $\lambda_k(\mathbb{H})$ est le k ème niveau de min-max d'un opérateur *linéaire* \mathbb{H} , qui a été introduit pour la première fois par Bogoliubov en 1947 dans l'article [9]. Dans la section suivante nous commençons par rappeler la définition du modèle de Hartree, avant d'introduire le Hamiltonien de Bogoliubov \mathbb{H} à la section 3. Nous expliquerons aussi l'importance du développement (3) d'un point de vue physique.

2 Le modèle de Hartree

Le modèle non linéaire de Hartree est obtenu en restreignant la forme quadratique associée à H_N aux fonctions d'onde qui sont complètement décorréelées :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = (u^{\otimes N})(x_1, \dots, x_N) = u(x_1) \cdots u(x_N).$$

Toutes les particules sont dans le même état $u \in \mathfrak{H} = L^2(\Omega)$, avec $\|u\| = 1$. L'énergie correspondante vaut

$$\begin{aligned} \langle u^{\otimes N}, H_N u^{\otimes N} \rangle &= N \left(\int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} w(x-y)|u(x)|^2|u(y)|^2 dx dy \right) := N \mathcal{E}_{\mathbb{H}}(u). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que l'hypothèse (A1) sur V et w garantit encore que $\mathcal{E}_{\mathbb{H}}$ est bien définie et continue sur le domaine de forme de $T = -\Delta + V$, et qu'elle est bornée inférieurement. On peut alors définir l'énergie minimale

$$\boxed{e_{\mathbb{H}} := \inf_{\substack{u \in Q(T) \\ \|u\|=1}} \mathcal{E}_{\mathbb{H}}(u)} \quad (4)$$

qui apparaît dans le développement (3). Notons que l'on peut restreindre l'infimum aux fonctions positives $u \geq 0$, puisque $\mathcal{E}_{\mathbb{H}}(u) \geq \mathcal{E}_{\mathbb{H}}(|u|)$ pour tout u .

En utilisant $\Psi = u^{\otimes N}$ comme fonction test, on voit immédiatement que $E(N) \leq N e_{\mathbb{H}}$. Comme nous allons maintenant l'expliquer, il se trouve que l'on a très souvent $E(N) = N e_{\mathbb{H}} + o(N)$.

2.1 Validité de Hartree pour des systèmes confinés

Dans cette section, nous expliquons pourquoi on a toujours $E(N) = N e_{\mathbb{H}} + o(N)$ pour les systèmes "confinés" (c'est-à-dire pour lesquels il ne peut y avoir aucune perte de masse à l'infini). Avant de traiter le cas général nous commençons par un exemple instructif très simple qu'il faut toujours avoir en tête.

Exemple 1 : Cas répulsif sur un tore de dimension d . Nous prenons $\Omega = (-1/2, 1/2)^d$, $V \equiv 0$, et nous choisissons des conditions périodiques au bord de Ω . Enfin, nous prenons pour w une fonction \mathbb{Z}^d -périodique paire, telle que

$$\hat{w} \in \ell^1((2\pi\mathbb{Z})^d) \quad \text{et} \quad \hat{w} \geq 0.$$

La condition $\widehat{w} \geq 0$ est importante et c'est une traduction mathématique possible de l'hypothèse que l'interaction est "répulsive". Comme on peut écrire

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} w(x-y) |u(x)|^2 |u(y)|^2 dx dy = \sum_{k \in (2\pi\mathbb{Z})^d} \widehat{w}(k) |\widehat{|u|^2}(k)|^2$$

il est facile de vérifier que l'énergie de Hartree est strictement convexe par rapport à $|u|^2$. Ceci permet d'en déduire qu'elle admet $u_0 \equiv 1$ pour unique minimiseur (à une phase près), et que

$$e_{\text{H}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w.$$

Puisque l'inégalité $E(N) \leq N e_{\text{H}}$ est toujours vraie, on déduit donc que

$$E(N) \leq \frac{N}{2} \int_{\Omega} w. \quad (5)$$

Le lemme suivant fournit une minoration de l'interaction à N corps en fonction de celle de Hartree, qui permettra d'obtenir une borne inférieure sur $E(N)$.

Lemme 1. *On a, pour tout $N \geq 2$ et presque tous $x_1, \dots, x_N \in \Omega$,*

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq N} w(x_k - x_{\ell}) \geq \frac{N(N-1)}{2} \int_{\Omega} w - \frac{N}{2} \left(w(0) - \int_{\Omega} w \right). \quad (6)$$

Démonstration. On introduit $f = w - \int_{\Omega} w$ qui a aussi tous ses coefficients de Fourier positifs, avec $\widehat{f}(0) = 0$. Ensuite, il suffit de remarquer que

$$Nf(0) + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} f(x_k - x_{\ell}) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq N} f(x_k - x_{\ell}) = \sum_{p \in (2\pi\mathbb{Z})^d} \widehat{f}(p) \left| \sum_{j=1}^N e^{ip \cdot x_j} \right|^2 \geq 0.$$

□

L'argument utilisé dans la preuve de l'inégalité (6) est très utile lorsqu'on étudie des systèmes à grand nombre de particules avec une interaction vérifiant $\widehat{w} \geq 0$. C'est par exemple un outil de base dans [46]. Des techniques similaires existent pour des potentiels w non intégrables comme le potentiel de Coulomb $w(x) = |x|^{-1}$ en dimension 3 [30, 32].

D'après (6), on voit que l'on a

$$H_N \geq \sum_{j=1}^N (-\Delta)_{x_j} + N e_{\text{H}} - \frac{N}{2(N-1)} \left(w(0) - \int_{\Omega} w \right) \geq N e_{\text{H}} - C \quad (7)$$

où nous avons utilisé que le Laplacien est un opérateur positif. Avec (7) on déduit immédiatement que l'on a

$$E(N) = N e_{\text{H}} + O(1).$$

Maintenant que nous avons vu que l'énergie est au premier ordre donnée par la théorie de Hartree, une question naturelle est de comprendre en quel sens une fonction propre Ψ_N associée à la valeur propre $E(N)$ est proche de l'état de Hartree $u_0^{\otimes N}$. On pourrait vouloir comparer directement les états Ψ_N et $u_0^{\otimes N}$ dans l'espace \mathfrak{H}^N . Nous allons justement expliquer dans cet exposé que $\|\Psi_N - u_0^{\otimes N}\|_{\mathfrak{H}^N}$ n'est en général pas petit quand $N \rightarrow \infty$. Le lien entre les deux fonctions est plus subtil et nous aurons besoin de la théorie de Bogoliubov pour l'expliquer précisément. Par contre, il est assez facile de déduire des informations supplémentaires en utilisant le formalisme des matrices densité, et c'est ce que nous allons maintenant expliquer.

Définition 1 (Matrices densité). *On appelle matrice densité à une particule d'un état quantique $\Psi \in \mathfrak{H}^N$, l'opérateur auto-adjoint borné $\gamma_{\Psi}^{(1)}$ agissant sur $\mathfrak{H} = L^2(\Omega)$ dont le noyau est*

$$\gamma_{\Psi}^{(1)}(x, y) = \int_{\Omega} dx_2 \cdots \int_{\Omega} dx_N \Psi(x, x_2, \dots, x_N) \overline{\Psi(y, x_2, \dots, x_N)}.$$

Cet opérateur vérifie $\gamma_{\Psi}^{(1)} \geq 0$ et $\text{Tr} \gamma_{\Psi}^{(1)} = 1$.

Plus généralement, pour $1 \leq k \leq N$, on appelle matricé densité à k particules l'opérateur auto-adjoint borné $\gamma_{\Psi}^{(k)}$ agissant sur $\mathfrak{H}^k = L_s^2(\Omega^k)$ dont le noyau est

$$\begin{aligned} \gamma_{\Psi}^{(k)}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) \\ = \int_{\Omega} dx_{k+1} \cdots \int_{\Omega} dx_N \Psi(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N) \overline{\Psi(y_1, \dots, y_k, z_{k+1}, \dots, z_N)}. \end{aligned} \quad (8)$$

L'intérêt de ces opérateurs est que l'énergie par particule peut s'exprimer uniquement à l'aide de $\gamma_{\Psi}^{(1)}$ et $\gamma_{\Psi}^{(2)}$ comme suit :

$$\frac{\langle \Psi, H_N \Psi \rangle}{N} = \text{Tr}_{\mathfrak{H}} (T \gamma_{\Psi}^{(1)}) + \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathfrak{H}^2} (w \gamma_{\Psi}^{(2)}) = \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathfrak{H}^2} (H_2 \gamma_{\Psi}^{(2)}). \quad (9)$$

Nous voyons que l'énergie, écrite sous cette forme, ne dépend pas de N et que N apparaît seulement dans la contrainte que $\gamma_{\Psi}^{(2)}$ est la matrice densité d'un état à N corps $\Psi \in \mathfrak{H}^N$. Comme nous allons le voir plus loin, la raison principale pour laquelle la théorie de Hartree est toujours valable est que la structure de l'ensemble des matrices densité à k corps se simplifie grandement à la limite $N \rightarrow \infty$. Remarquons que pour un état produit $\Psi = u^{\otimes N}$, on trouve par ailleurs

$$\gamma_{u^{\otimes N}}^{(k)} = |u^{\otimes k}\rangle\langle u^{\otimes k}|. \quad (10)$$

Nous avons utilisé ici la notation très utile des physiciens $|u\rangle\langle v|$ pour l'opérateur de rang un défini par $|u\rangle\langle v|f = \langle v, f\rangle u$.

Revenons maintenant à notre exemple et définissons Q , le projecteur sur l'orthogonal de la fonction $u_0 \equiv 1$ qui minimise l'énergie de Hartree, $Q = 1 - |u_0\rangle\langle u_0|$. Alors on a

$$\left\langle \Psi, \left(\sum_{j=1}^N (-\Delta)_{x_j} \right) \Psi \right\rangle = N \text{Tr} (-\Delta) \gamma_{\Psi}^{(1)} \geq \mu N \text{Tr} Q \gamma_{\Psi}^{(1)} Q$$

où $\mu > 0$ est la seconde valeur propre du Laplacien périodique sur le tore Ω (nous utilisons ici le fait que la première valeur propre est non dégénérée). Soit maintenant (Ψ_N) une suite telle que $\langle \Psi_N, H_N \Psi_N \rangle = E(N) + O(1)$. En revenant à (7) et en utilisant la borne supérieure (5), on trouve

$$\mu N \text{Tr} Q \gamma_{\Psi_N}^{(1)} Q + N e_H - C \leq N e_H + O(1)$$

et donc $\text{Tr} Q \gamma_{\Psi_N}^{(1)} Q \leq C/N$. Puisque $\text{Tr} \gamma_{\Psi_N}^{(1)} = 1$, ceci implique

$$\left\langle u_0, \gamma_{\Psi_N}^{(1)} u_0 \right\rangle \geq 1 - C/N.$$

Ceci montre qu'à la limite $N \rightarrow \infty$ l'opérateur $\gamma_{\Psi_N}^{(1)}$ possède une unique valeur propre d'ordre $1 + o(1)$, dont le vecteur propre correspondant tend vers u_0 :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \left| \gamma_{\Psi_N}^{(1)} - \gamma_{u_0^{\otimes N}}^{(1)} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \left| \gamma_{\Psi_N}^{(1)} - |u_0\rangle\langle u_0| \right| = 0.$$

On parle de *condensation de Bose-Einstein complète* [40, 34]. Il est en fait possible de montrer le même résultat pour toutes les matrices densité :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr}_{\mathfrak{H}^k} \left| \gamma_{\Psi_N}^{(k)} - \gamma_{u_0^{\otimes N}}^{(k)} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \left| \gamma_{\Psi_N}^{(k)} - |u_0^{\otimes k}\rangle\langle u_0^{\otimes k}| \right| = 0.$$

Systèmes confinés généraux. L'exemple du tore avec $\widehat{w} \geq 0$ est un cas particulier de systèmes que l'on peut appeler "confinés". Il se trouve que l'approximation de Hartree est toujours valable pour ces systèmes, et que la preuve est assez simple. Cependant la condensation de Bose-Einstein requiert elle l'unicité du minimiseur de Hartree.

Théorème 1 (Validité de Hartree et condensation de Bose-Einstein pour les systèmes confinés). *On suppose que (A1) est vérifiée et, soit que Ω est borné, soit que V tend vers l'infini à l'infini. Alors on a toujours*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = e_{\text{H}}.$$

De plus, si (Ψ_N) est une suite quelconque d'états bosoniques tels que $\|\Psi_N\|_{\mathfrak{H}^N} = 1$ et $\langle \Psi_N, H_N \Psi_N \rangle = E(N) + o(N)$, alors il existe une sous-suite et une mesure de probabilité borélienne μ sur la sphère $S\mathfrak{H}$ de \mathfrak{H} (invariante par la multiplication par une phase), supportée sur l'ensemble \mathcal{M} des minimiseurs de e_{H} , telle que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{\Psi_{N_j}}^{(k)} = \int_{S\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle \langle u^{\otimes k}| d\mu(u)$$

dans l'espace des opérateurs à trace sur \mathfrak{H}^k , pour tout $k \geq 1$. En particulier, si e_{H} admet un unique minimiseur u_0 (à multiplication par une phase près), alors on a condensation de Bose-Einstein complète

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_{\Psi_N}^{(k)} = |u_0^{\otimes k}\rangle \langle u_0^{\otimes k}|.$$

Nous voyons que l'énergie fondamentale $E(N)$ est toujours donnée au premier ordre par celle de Hartree, et que la matrice densité à une particule $\gamma_{\Psi_N}^{(1)}$ converge vers une combinaison convexe des matrices densité des minimiseurs de Hartree. S'il y a plus d'un seul minimiseur de Hartree, il est facile de construire des suites particulières (Ψ_N) qui convergent vers n'importe quelle combinaison.

Des résultats similaires au Théorème 1 peuvent être trouvés dans [41, 42, 54, 53], mais l'énoncé ci-dessus provient de [27]. Comme nous allons le voir, il se démontre aisément en utilisant le théorème de de Finetti quantique [50, 24] qui donne la structure de l'ensemble des matrices densité bosoniques à la limite $N \rightarrow \infty$. L'objectif principal de [27] est de prouver un résultat similaire dans un cas non confiné et nous y reviendrons dans la section suivante.

L'idée de la preuve du Théorème 1 est la suivante. Considérons une suite (Ψ_N) de quasi minimiseurs, et notons $\gamma_N^{(k)}$ ses matrices densité. Pour chaque k fixé, $\gamma_N^{(k)}$ est une suite bornée dans l'espace des opérateurs à trace et, à extraction d'une sous-suite près, on peut supposer que $\gamma_N^{(k)} \rightharpoonup_* \gamma^{(k)}$ faible-*, ce qui signifie $\text{Tr}(K\gamma_N^{(k)}) \rightharpoonup_* \text{Tr}(K\gamma^{(k)})$ pour tout opérateur compact de \mathfrak{H}^k . Or, grâce à nos hypothèses sur T et w , on voit que l'on a $\text{Tr}(T\gamma_N^{(1)}) \leq C$ pour une constante C indépendante de N . Comme T est à résolvante compacte, ceci implique aisément que la convergence $\gamma_N^{(k)} \rightarrow \gamma^{(k)}$ est forte pour la norme de trace. Par ailleurs, l'énergie est une fonction semi-continue inférieure par rapport aux matrices densité :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathfrak{H}^2}(H_2 \gamma_n^{(2)}) \geq \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathfrak{H}^2}(H_2 \gamma^{(2)}),$$

puisque H_2 est aussi à résolvante compacte. Maintenant on utilise le théorème de de Finetti quantique [50, 24] qui est l'équivalent quantique du célèbre théorème de Hewitt-Savage pour les mesures classiques [13, 23, 14, 38]. Le théorème de de

Finetti fournit la structure des hiérarchies infinies de matrices densité. Il indique qu'il existe une mesure de probabilité μ sur la sphère $S\mathfrak{H}$ de \mathfrak{H} , telle que

$$\gamma^{(k)} = \int_{S\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle\langle u^{\otimes k}| d\mu(u)$$

pour tout $k \geq 1$. En insérant cette information dans l'énergie limite on trouve

$$\frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathfrak{H}^2}(H_2 \gamma^{(2)}) = \int_{S\mathfrak{H}} \mathcal{E}_{\text{H}}(u) d\mu(u) \geq e_{\text{H}}$$

où à la dernière ligne nous avons utilisé le fait que μ a une masse totale égale à 1. Le théorème suit donc.

Un exemple important de système confiné est le gaz de Coulomb 2D et 3D, dont le modèle classique a été étudié par Sandier et Serfaty dans [45, 44] et dont l'équivalent quantique est traité dans [28]. Dans ce cas on a

$$w_{2\text{D}}(x-y) = -\log|x-y| \quad \text{et} \quad w_{3\text{D}}(x-y) = \frac{1}{|x-y|},$$

respectivement en dimensions $d = 2$ et $d = 3$. En dimension 2 il faut que V tende vers l'infini suffisamment vite pour compenser la divergence de $w_{2\text{D}}$ lorsque $|x-y|$ est grand et assurer la validité de (2). La transformée de Fourier de $w_{2\text{D}}$ n'est par ailleurs pas exactement positive puisque c'est la valeur principale de $|k|^{-2}$, mais le minimiseur de Hartree est quand même unique.

2.2 Validité de Hartree pour des systèmes non confinés

Dans cette question nous abordons le cas plus compliqué de systèmes pour lesquels il peut être avantageux d'envoyer une partie des particules à l'infini, menant à une possible perte de compacité. Dans ce cas nous supposons que $\Omega = \mathbb{R}^d$ et que V et w peuvent tous les deux s'écrire $f_1 + f_2$ avec $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$ où $\max(1, d/2) < p_j < \infty$ ou alors $p_j = +\infty$ et $f_j \rightarrow 0$ à l'infini. Comme certaines particules peuvent s'échapper à l'infini, il est utile d'introduire un problème de minimisation faisant intervenir une masse plus petite

$$e_{\text{H}}^V(\lambda) := \inf_{\substack{u \in Q(T) \\ \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 = \lambda}} \mathcal{E}_{\text{H}}^V(u).$$

Nous utilisons maintenant une notation qui exhibe la dépendance du problème par rapport au potentiel V car les particules qui s'échappent ne verront plus ce potentiel. Le résultat principal de [27] est le suivant :

Théorème 2 (Validité de Hartree et condensation de Bose-Einstein pour les systèmes non confinés [27]). *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^d$ et que V et w peuvent tous les deux s'écrire $f_1 + f_2$ avec $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$ où $\max(1, d/2) < p_j < \infty$ ou alors $p_j = +\infty$ et $f_j \rightarrow 0$ à l'infini. Alors on a toujours*

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = e_{\text{H}}.}$$

De plus, si (Ψ_N) est une suite quelconque d'états bosoniques tels que $\|\Psi_N\|_{\mathfrak{H}^N} = 1$ et $\langle \Psi_N, H_N \Psi_N \rangle = E(N) + o(N)$, alors il existe une sous-suite et une mesure de probabilité borélienne μ sur la boule unité $B\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ (invariante par la multiplication par une phase), supportée sur l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) : \mathcal{E}_{\text{H}}^V(u) = e_{\text{H}}^V(\|u\|^2) + e_{\text{H}}^0(1 - \|u\|^2)\},$$

telle que

$$\boxed{\gamma_{\Psi_{N_j}}^{(k)} \xrightarrow{*} \int_{B\mathfrak{H}} |u^{\otimes k}\rangle\langle u^{\otimes k}| d\mu(u)} \quad (11)$$

faible-* dans l'espace des opérateurs à trace sur \mathfrak{H}^k .

Si on a les inégalités strictes de concentration-compacité

$$e_{\mathbb{H}}^V(1) < e_{\mathbb{H}}^V(\lambda) + e_{\mathbb{H}}^0(1 - \lambda), \quad \text{pour tout } 0 \leq \lambda < 1, \quad (12)$$

alors \mathcal{M} est inclus dans la sphère unité $S\mathfrak{H}$ et $e_{\mathbb{H}}$ possède au moins un minimiseur. Dans ce cas la convergence (11) est forte en norme de trace dans \mathfrak{H}^k et μ est supportée sur $S\mathfrak{H}$. En particulier, si $e_{\mathbb{H}}$ admet un unique minimiseur u_0 (à multiplication par une phase près), alors on a condensation de Bose-Einstein complète

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_{\Psi_N}^{(k)} = |u_0^{\otimes k}\rangle\langle u_0^{\otimes k}|.}$$

Nous voyons que si la validité du modèle de Hartree est toujours vraie au niveau de l'énergie, la situation est plus compliquée en ce qui concerne les états eux-mêmes. En général, on n'a pas convergence des matrices densité $\gamma_{\Psi_N}^{(k)}$ vers celles des minimiseurs de Hartree, car il peut tout simplement ne pas y en avoir. En revanche on a toujours convergence faible vers un minimiseur qui possède éventuellement moins de particules. Pour cette raison, la mesure μ a son support dans la boule unité au lieu de la sphère comme au théorème 1.

L'ensemble \mathcal{M} contient tous les minimiseurs possibles du problème de Hartree, éventuellement après perte d'une partie de la masse. Il est facile de vérifier que les inégalités larges

$$e_{\mathbb{H}}^V(1) \leq e_{\mathbb{H}}^V(\lambda) + e_{\mathbb{H}}^0(1 - \lambda),$$

sont vérifiées pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$. L'ensemble \mathcal{M} contient donc toutes les fonctions u pour lesquelles $\mathcal{E}_{\mathbb{H}}^V(u) = e_{\mathbb{H}}^V(1)$ et de plus $e_{\mathbb{H}}^V(1) = e_{\mathbb{H}}^V(\lambda) + e_{\mathbb{H}}^0(1 - \lambda)$ où $\lambda := \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2$.

La seconde partie du théorème signifie que si ces inégalités sont strictes alors il n'est pas avantageux d'envoyer une partie de la masse à l'infini et on a convergence forte. Que les inégalités strictes impliquent l'existence d'un minimiseur pour le problème $e_{\mathbb{H}}$ de Hartree suit de la méthode de concentration-compacité [37]. La preuve que la convergence (11) a aussi lieu pour le problème à N corps est bien plus difficile. Elle repose sur un résultat de type "de Finetti faible" (dans l'esprit des mesures de Wigner construites par Ammari et Nier dans [1, 2]) et sur une méthode de type concentration-compacité adaptée à la structure spéciale du problème à N corps, précédemment introduite dans [26]. Nous n'en dirons pas plus ici et nous renvoyons le lecteur à [27] pour plus de détails.

Il ne faut pas confondre les inégalités strictes (12) avec le critère correspondant pour le Hamiltonien H_N . En effet, le théorème HVZ nous précise que le bas du spectre essentiel commence lorsque certaines des N particules sont envoyées à l'infini (voir par exemple [26, Thm. 12]) :

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(H_N) = \inf_{K=1, \dots, N} \{E(K) + E^0(N - K)\} \leq E(N - 1).$$

Ici $E^0(N)$ est le bas du spectre de H_N lorsque l'on remplace V par 0. Mais en appliquant le théorème 2 à $E(N - 1)$ on déduit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\inf \sigma_{\text{ess}}(H_N)}{N} = e_{\mathbb{H}}.$$

Au premier ordre il est impossible de différencier le bas du spectre du bas du spectre essentiel. En particulier, toutes les valeurs propres situées entre les deux se comportent également comme $Ne_{\mathbb{H}}$ au premier ordre.

Remarque 1. Si $V \equiv 0$, alors le modèle est invariant par translation et on peut construire des suites minimisantes qui s'évanouissent complètement, au sens où $\gamma_{\Psi_N}^{(k)} \rightharpoonup_* 0$ faiblement, même après une translation spatiale quelconque. En fait, si $V \equiv 0$, la fonction nulle appartient à l'ensemble \mathcal{M} .

Avant de passer à la description de l'ordre suivant du développement, nous donnons un exemple célèbre.

Exemple 2 : Atomes bosoniques. Les atomes bosoniques n'existent pas dans la réalité puisque les électrons sont des fermions et non des bosons (ce qui est très important pour la stabilité de la matière à l'échelle macroscopique [33]). Le Hamiltonien du système s'écrit

$$\sum_{i=1}^N \left(-\Delta_i - \frac{Z}{|x_i|} \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|x_i - x_j|}$$

où N est le nombre d'électrons et Z la charge totale du noyau. On a ici $\Omega = \mathbb{R}^3$. Après une dilatation, on trouve que cet opérateur est, à une constante multiplicative près, unitairement équivalent à

$$H_{t,N} := \sum_{i=1}^N \left(-\Delta_i - \frac{1}{t|x_i|} \right) + \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|x_i - x_j|}$$

où $t = (N-1)/Z$ est le rapport entre le nombre d'électrons et de protons, que nous allons supposer fixe. L'opérateur $H_{t,N}$ est exactement sous la forme qui nous intéresse. La fonctionnelle non linéaire de Hartree est donc

$$\mathcal{E}_H(t, u) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla u(x)|^2 - \frac{|u(x)|^2}{t|x|} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|} dx dy$$

et nous noterons son énergie minimale $e_H(t)$. On peut montrer [7, 5] qu'il existe un unique minimiseur $u_t > 0$ si et seulement si $0 \leq t \leq t_c \simeq 1,21$. Il n'y a aucun minimiseur pour $t > t_c$.

Même si $w(x) = |x|^{-1}$ a une transformée de Fourier positive, on ne peut pas utiliser les arguments de l'exemple 1 puisque $\int w = w(0) = +\infty$. Benguria et Lieb ont cependant pu démontrer dans [7] que l'on a bien

$$E(t, N) = N e_H(t) + o(N)$$

pour tout $t \geq 0$ et que l'on a condensation de Bose-Einstein complète pour $t \leq t_c$. La preuve est basée sur l'inégalité de Lieb-Oxford [30, 32], qui remplace l'argument du lemme 1. Ces résultats ont ensuite été améliorés dans [47, 3, 4].

Le théorème 2 s'applique également à cet exemple et il fournit l'information supplémentaire que

$$\gamma_{\Psi_N}^{(k)} \rightharpoonup_* |u_0^{\otimes k}\rangle \langle u_0^{\otimes k}|$$

faible-* lorsque $t > t_c$, où u_0 est l'unique minimiseur du problème $e_H^V(t_c/t)$.

2.3 Non dégénérescence du minimiseur de Hartree

Après avoir discuté de la validité du modèle de Hartree à la limite $N \rightarrow \infty$, nous passons maintenant au problème de comprendre l'ordre suivant du développement. Afin d'aller plus loin, nous allons faire l'hypothèse que le problème de Hartree possède un *unique* minimiseur u_0 qui est *non dégénéré*. Ces hypothèses sont vérifiées dans les exemples que nous avons mentionnés plus haut.

Précisons ce que veut dire “non dégénéré”. Tout d’abord rappelons que si u_0 minimise \mathcal{E}_H , alors $|u_0|$ également et on peut donc toujours supposer que u_0 est réelle positive. Tout minimiseur satisfait la condition du premier ordre

$$h u_0 = 0, \quad \text{où } h = -\Delta + V + |u_0|^2 * w - \mu_H \quad (13)$$

où μ_H est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\|u\| = 1$. Le minimiseur vérifie aussi la condition du second ordre que la Hessienne est positive sur le plan tangent en u_0 . Un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Hess } \mathcal{E}_H(u_0)(v, v) &= \langle v, h v \rangle + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} w(x-y) u_0(x) u_0(y) \left(\overline{v(x)v(y)} + v(x) \overline{v(y)} \right. \\ &\quad \left. + \overline{v(x)v(y)} + v(x)v(y) \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \overline{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h+K & K \\ K & h+K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \overline{v} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_+} \end{aligned} \quad (14)$$

pour tout v dans le plan tangent

$$\mathfrak{H}_+ := \{u_0\}^{\perp} = \left\{ v \in \mathfrak{H} : \int_{\Omega} v u_0 = 0 \right\}$$

et où K est la restriction à \mathfrak{H}_+ de l’opérateur de noyau $k(x, y) = w(x-y) u_0(x) u_0(y)$. En fait, le noyau de K s’obtient en projetant la fonction symétrique k dans le sous-espace $\mathfrak{H}_+ \otimes_s \mathfrak{H}_+$, c’est-à-dire $K(x, y) = (P \otimes P k)(x, y)$ avec $P = 1 - Q = |u_0\rangle\langle u_0|$. L’opérateur h préserve lui l’espace \mathfrak{H}_+ et nous n’utilisons pas de notation particulière pour sa restriction.

Notre hypothèse précise est donc la suivante :

(A2) *On suppose que e_H possède un unique minimiseur $u_0 \geq 0$ et qu’il existe une constante $\eta_H > 0$ telle que*

$$\begin{pmatrix} h+K & K \\ K & h+K \end{pmatrix} \geq \eta_H \quad \text{sur } \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_+. \quad (15)$$

Par ailleurs on demande que l’opérateur K soit Hilbert-Schmidt ce qui, puisque \mathfrak{H}_+ est de co-dimension 1, est équivalent à

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} w(x-y)^2 |u_0(x)|^2 |u_0(y)|^2 dx dy < \infty. \quad (16)$$

Comme nous allons l’expliquer, la condition (16) est très importante. Elle ne suit pas de nos conditions sur V et w dans (A1), puisque nous n’avons *a priori* aucun contrôle sur w^2 . Mais (16) est automatique si ces fonctions sont des petites perturbations du Laplacien au sens de Rellich, et pas seulement au sens des formes.

Notons que puisque u_0 est positive, ce doit être la première fonction propre de l’opérateur de Schrödinger h et on sait alors qu’elle est forcément non-dégénérée. Donc on a $h \geq \eta'_H > 0$ sur \mathfrak{H}_+ . Si $K \geq 0$ (par exemple quand $\widehat{w} \geq 0$), on déduit que

$$\begin{pmatrix} h+K & K \\ K & h+K \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \geq \eta'_H.$$

Le minimiseur u_0 est donc toujours non dégénéré lorsque $\widehat{w} \geq 0$ (il est par ailleurs aussi toujours unique). Par contre (A2) est une véritable hypothèse si \widehat{w} n’a pas de signe.

La dernière hypothèse concerne la condensation de Bose-Einstein complète :

(A3) On a condensation de Bose-Einstein complète au sens où, pour toute suite (Ψ_N) telle que $\|\Psi_N\| = 1$ et $\langle \Psi_N, H_N \Psi_N \rangle \leq E(N) + R$,

$$\left\langle u_0, \gamma_{\Psi_N}^{(1)} u_0 \right\rangle \geq 1 - \varepsilon_R(N) \quad (17)$$

avec $\varepsilon_R(N) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$ et R reste fixe.

Rappelons que $\text{Tr}(|u_0\rangle\langle u_0| \gamma_{\Psi}^{(1)}) = \langle u_0, \gamma_{\Psi}^{(1)} u_0 \rangle$ est la proportion moyenne de particules dans le condensat et que $\text{Tr}(Q \gamma_{\Psi}^{(1)}) = \text{Tr}(Q \gamma_{\Psi}^{(1)} Q)$ est la proportion moyenne de particules excitées, en dehors du condensat. L'hypothèse (A3) signifie exactement qu'il y a $N + o(N)$ particules dans le condensat. D'après le théorème 1, (A3) est toujours vraie pour les systèmes confinés, si (A1) et (A2) sont vraies. Le théorème 2 indique que (A3) est également une conséquence de (A1) et (A2) dans le cas non confiné, si les inégalités de concentration-compacité (12) sont satisfaites.

3 Le modèle de Bogoliubov

3.1 Le Hamiltonien de Bogoliubov

Nous pouvons maintenant définir le modèle de Bogoliubov qui va fournir l'ordre suivant du développement des valeurs propres au bas du spectre de H_N . Au voisinage de u_0 le modèle de Hartree est au second ordre décrit par la hessienne de \mathcal{E}_H et il est donc intuitif que cette dernière joue un rôle. La théorie de Bogoliubov est une version en dimension infinie de la théorie semi-classique et elle peut être résumée comme suit :

Théorie de Bogoliubov [9]. On a $H_N \simeq Ne_H + \mathbb{H}$ où \mathbb{H} est la seconde quantification de $v \mapsto \text{Hess } \mathcal{E}_H(u_0)(v, v)/2$ sur l'espace de Fock bosonique $\mathcal{F}_+ = \Gamma_s(\mathfrak{H}_+)$, construit à partir de l'espace tangent $\mathfrak{H}_+ = \{u_0\}^\perp$.

Nous allons bientôt donner un sens mathématique précis à l'assertion que $H_N \simeq Ne_H + \mathbb{H}$, mais on peut commencer par retenir que l'on a $\lambda_k(H_N) = Ne_H + \lambda_k(\mathbb{H}) + o(1)_{N \rightarrow \infty}$, comme annoncé en (3).

Avant d'expliciter la définition de \mathbb{H} , nous faisons quelques commentaires historiques. Le fait que les valeurs propres $\lambda_k(H_N)$ du système à N corps se comportent (à la constante Ne_H près) comme celles de \mathbb{H} est extrêmement important d'un point de vue physique. Pour l'exemple 1 du tore qui est celui considéré par Bogoliubov dans l'article original [9], on peut tout calculer explicitement. Dans ce cas l'opérateur \mathbb{H} commute avec les translations à cause du fait que $u_0 \equiv 1$, et son spectre peut être calculé explicitement :

$$\lambda_k(\mathbb{H}) = e_B + \sqrt{|k|^4 + 2\widehat{w}(k)|k|^2}, \quad k \in (2\pi\mathbb{Z})^d, \quad (18)$$

où

$$e_B = - \sum_{k \in (2\pi\mathbb{Z})^d \setminus \{0\}} \left(|k|^2 + \widehat{w}(k) - \sqrt{|k|^4 + 2\widehat{w}(k)|k|^2} \right)$$

et où $k \in (2\pi\mathbb{Z})^d$ a l'interprétation d'un moment à cause de l'invariance par les translations. On voit que l'effet des interactions est de transformer la relation de dispersion parabolique $\lambda_k(\mathbb{H})_{w=0} = \sqrt{|k|^4} = |k|^2$ du Laplacien périodique en une dispersion linéaire au voisinage de l'origine, $\lambda_k(\mathbb{H}) \simeq e_B + \sqrt{2\widehat{w}(0)}|k|$. Comme proposé en premier par Landau [25], cette linéarité est l'explication mathématique du phénomène de *superfluidité* à très basse température de certains systèmes bosoniques (comme l'hélium-4), et elle a ensuite fait le succès de la théorie de Bogoliubov.

La validité de la théorie de Bogoliubov a été démontrée mathématiquement dans plusieurs situations, par exemple pour des systèmes 1D complètement intégrables [17,

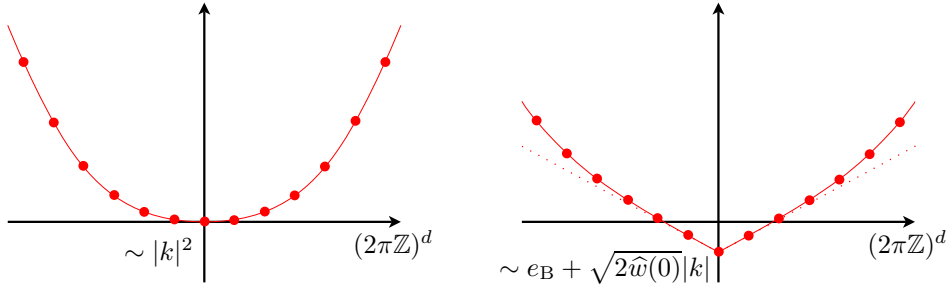


FIGURE 1 – Le spectre de \mathbb{H} pour l'exemple 1 lorsque $w \equiv 0$ (à gauche) et $w \neq 0$ (à droite). Si on place le système dans une boîte de taille L au lieu de 1, en laissant w inchangée, les points sont sur le réseau $(2\pi\mathbb{Z}/L)^d$, et le spectre converge à la limite vers la courbe.

31, 29, 11, 10, 51, 52], pour les gaz de bosons chargés à une et deux composantes [35, 36, 48], et pour les gaz très dilués [15, 18, 56]. Très récemment, Seiringer a été le premier à montrer la validité de la théorie de Bogoliubov dans un cadre plus général : pour l'exemple 1 dans [46] et pour des systèmes confinés avec une interactions répulsives dans [19]. Le lecteur pourra aussi lire [34, 12, 57] pour plus d'information sur la théorie de Bogoliubov. Notons que l'opérateur de Bogoliubov intervient aussi dans la description au second ordre des solutions à l'équation dépendant du temps (le premier ordre est cette fois décrit par l'équation de Hartree dépendant du temps) [22, 16, 55, 1, 2, 20, 21, 6].

Nous devons maintenant définir l'opérateur de Bogoliubov \mathbb{H} . Formellement, la seconde quantification consiste à remplacer $v(x)$ par un opérateur d'annihilation $a(x)$ d'une particule de \mathfrak{H}_+ en x et $\overline{v(x)}$ par un opérateur de création $a^\dagger(x)$, dans la formule (14) de la Hessienne de $\mathcal{E}_\mathbb{H}$. Les opérateurs $a(x)$ et $a^\dagger(x)$ doivent satisfaire les relations canoniques de commutation. Plus prosaïquement, l'espace de Fock sur lequel agit \mathbb{H} est la somme directe de tous les espaces à k particules dans \mathfrak{H}_+ :

$$\mathcal{F}_+ := \mathbb{C} \oplus \mathfrak{H}_+ \oplus \underbrace{(\mathfrak{H}_+ \otimes_s \mathfrak{H}_+)}_{:=\mathfrak{H}_+^2} \oplus \underbrace{(\mathfrak{H}_+ \otimes_s \mathfrak{H}_+ \otimes_s \mathfrak{H}_+)}_{:=\mathfrak{H}_+^3} \oplus \dots$$

Il est muni de la structure hilbertienne naturelle. Les vecteurs de \mathcal{F}_+ sont donc des suites $\Phi = (\varphi_n)_{n \geq 0}$ avec $\varphi_n \in \mathfrak{H}_+^n$ et leur norme est

$$\|\Phi\|_{\mathcal{F}_+}^2 := |\varphi_0|^2 + \sum_{n \geq 1} \|\varphi_n\|_{\mathfrak{H}_+^n}^2 < \infty.$$

Maintenant, \mathbb{H} est la somme de trois termes

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 + (\mathbb{H}_2)^*$$

où \mathbb{H}_1 correspond aux termes de la Hessienne faisant intervenir $\overline{v(x)v(y)}$ alors que \mathbb{H}_2 correspond au terme $v(x)v(y)$. L'opérateur \mathbb{H}_1 conserve le nombre de particule, c'est-à-dire est diagonal par rapport à la décomposition de \mathcal{F}_+ en somme directe :

$$\mathbb{H}_1 = 0 \oplus (h + K) \oplus ((h + K)_1 + (h + K)_2) \oplus \dots \oplus \underbrace{\left(\sum_{j=1}^k (h + K)_j \right)}_{\text{agit sur } \mathfrak{H}_+^k} \oplus \dots$$

L'opérateur \mathbb{H}_2 est hors-diagonal par rapport à la décomposition de \mathcal{F}_+ en somme directe, puisqu'il envoie un vecteur de \mathfrak{H}_+^k dans \mathfrak{H}_+^{k+2} :

$$\mathbb{H}_2(0 \oplus \cdots \oplus \underbrace{\varphi_k}_{\in \mathfrak{H}_+^k} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots) = 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus 0 \oplus \underbrace{\left(\frac{K \otimes_s \varphi_k}{\sqrt{2}} \right)}_{\in \mathfrak{H}_+^{k+2}} \oplus \cdots.$$

Ici l'opérateur K est assimilé à son noyau intégral défini plus haut, qui est une fonction de \mathfrak{H}_+^2 par construction. Rappelons notre hypothèse (16) que la fonction K est dans L^2 , qui est cruciale ici pour définir convenablement l'opérateur \mathbb{H}_2 . Sans cette hypothèse, l'opérateur \mathbb{H}_2 n'est pas bien défini.

Le produit tensoriel symétrique \otimes_s utilisé dans la définition de \mathbb{H}_2 est défini par

$$\begin{aligned} \Psi_k \otimes_s \Psi_\ell(x_1, \dots, x_{k+\ell}) \\ = \frac{1}{\sqrt{k!\ell!(k+\ell)!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \Psi_k(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \Psi_\ell(x_{\sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma(k+\ell)}), \end{aligned}$$

pour tous $\Psi_k \in \mathfrak{H}^k$ et $\Psi_\ell \in \mathfrak{H}^\ell$.

Le résultat suivant indique que l'opérateur \mathbb{H} ainsi défini *a priori* seulement sur les vecteurs $\Phi = (\varphi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}_+$ qui s'annulent à partir d'un certain rang ($\varphi_n \equiv 0 \forall n \geq n_0$), est en fait auto-adjoint et borné inférieurement.

Théorème 3 (Hamiltonien de Bogoliubov [28]). *Sous les hypothèses (A1) et (A2), l'opérateur \mathbb{H} fournit une forme quadratique bornée inférieurement et est donc auto-adjoint, par la méthode de Friedrichs. De plus, lorsque $w \neq 0$, sa première valeur propre est toujours isolée, non dégénérée et strictement négative.*

L'opérateur \mathbb{H} est un *Hamiltonien quadratique* en les opérateurs de création et d'annihilation, une classe qui a été beaucoup étudiée dans la littérature [8, 49]. C'est en diagonalisant \mathbb{H} explicitement dans le cas du tore, que Bogoliubov a obtenu le résultat (18) dans [9].

3.2 Description des fluctuations autour de Hartree

Dans les sections précédentes nous avons défini le modèle de Hartree, et le Hamiltonien de Bogoliubov, qui interviennent respectivement à l'ordre 1 et à l'ordre 2 du développement des valeurs propres de H_N à la limite $N \rightarrow \infty$, comme annoncé dès le début en (3). Nous devons maintenant expliquer le lien entre \mathbb{H} et H_N , qui sont définis sur des espaces de Hilbert complètement différents. Comment apparaît \mathbb{H} ? Comment apparaît naturellement l'espace de Fock \mathcal{F}_+ , alors que le modèle initial était posé dans le sous-espace \mathfrak{H}^N des fonctions symétriques de $L^2(\Omega^N)$? D'une manière générale, on peut se demander comment décrire les fluctuations autour de l'état produit $u_0^{\otimes N}$ de Hartree. Quand elles-existent, les fonctions propres $\Psi_N^{(k)}$ associées aux valeurs propres $\lambda_k(H_N)$ sont-elles proches de $u_0^{\otimes N}$? Pour répondre à ces questions, nous allons introduire un opérateur unitaire U_N sur \mathfrak{H}^N qui prend ses valeurs dans \mathcal{F}_+ .

Nous utilisons le fait que l'on peut décomposer \mathfrak{H}^N en une somme directe de sous-espaces en fonction du nombre de u_0 :

$$\mathfrak{H}^N = \left(u_0^{\otimes N} \mathbb{C} \right) \oplus \left(u_0^{\otimes(N-1)} \otimes_s \mathfrak{H}_+ \right) \oplus \left(u_0^{\otimes(N-2)} \otimes_s \mathfrak{H}_+^2 \right) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}_+^N. \quad (19)$$

Ceci signifie que toute fonction Ψ de \mathfrak{H}^N peut s'écrire sous la forme

$$\Psi = \underbrace{\psi_0}_{\in \mathbb{C}} u_0^{\otimes N} + u_0^{\otimes(N-1)} \otimes_s \underbrace{\psi_1}_{\in \mathfrak{H}_+} + u_0^{\otimes(N-2)} \otimes_s \underbrace{\psi_2}_{\in \mathfrak{H}_+^2} + \cdots + \underbrace{\psi_N}_{\in \mathfrak{H}_+^N}. \quad (20)$$

Les vecteurs de cette somme sont orthogonaux deux à deux, car ils ne comportent pas le même nombre de u_0 , et on a donc

$$\|\Psi\|^2 = |\psi_0|^2 + \|\psi_1\|_{\mathfrak{H}_+}^2 + \|\psi_2\|_{\mathfrak{H}_+^2}^2 + \cdots + \|\psi_N\|_{\mathfrak{H}_+^N}^2. \quad (21)$$

Une manière de justifier (19) et (20) est d'utiliser une base orthonormée (u_i) de l'espace $\mathfrak{H} = L^2(\Omega)$, dont le premier élément est notre minimiseur u_0 du problème de Hartree. On sait alors que les produits tensoriels ($u_{i_1} \otimes_s \cdots \otimes_s u_{i_N}$) forment une base (non-orthonormée) de l'espace symétrique \mathfrak{H}^N et on peut donc écrire

$$\Psi = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_N} c_{i_1 \dots i_N} u_{i_1} \otimes_s \cdots \otimes_s u_{i_N}$$

où la somme est convergente dans L^2 . Dans la somme ci-dessus il suffit alors de regrouper les termes en fonction du nombre de fois que u_0 apparaît.

Dans (19) nous voyons apparaître les espaces $\mathbb{C}, \mathfrak{H}_+, \dots, \mathfrak{H}_+^N$ dont la somme directe forme l'espace de Fock \mathcal{F}_+ . Il est maintenant naturel d'introduire l'opérateur

$$\begin{aligned} U_N : \mathfrak{H}^N &\rightarrow \mathcal{F}_+^{\leq N} = \bigoplus_{n=0}^N \mathfrak{H}_+^n \\ \Psi &\mapsto \psi_0 \oplus \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_N \end{aligned} \quad (22)$$

qui est unitaire de l'espace à N corps \mathfrak{H}^N dans l'espace de Fock tronqué $\mathcal{F}_+^{\leq N}$, d'après (21). Clairement, l'espace $\mathcal{F}_+^{\leq N}$ peut être identifié à un sous-espace de \mathcal{F}_+ et il converge vers celui-ci lorsque $N \rightarrow \infty$.

Comme U_N est unitaire, étudier le spectre de H_N est équivalent à étudier celui de l'opérateur $U_N H_N U_N^* : \mathcal{F}_+^{\leq N} \rightarrow \mathcal{F}_+^{\leq N}$. C'est ce dernier opérateur qui est relié à \mathbb{H} à la limite $N \rightarrow \infty$.

3.3 Le théorème de convergence

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le résultat principal qui concerne, comme annoncé en (3), le développement des niveaux de min-max de H_N . Grâce à l'unitaire U_N nous allons pouvoir être plus précis.

Théorème 4 (Le spectre de Bogoliubov [28]). *Sous les hypothèses (A1) et (A2), on a la convergence faible de $U_N(H_N - N e_{\mathbb{H}})U_N^*$ vers \mathbb{H} , au sens où*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Phi', U_N(H_N - N e_{\mathbb{H}})U_N^* \Phi \rangle_{\mathcal{F}_+} = \langle \Phi', \mathbb{H} \Phi \rangle_{\mathcal{F}_+} \quad (23)$$

pour tous Φ, Φ' dans le domaine de forme de \mathbb{H} , et où U_N^* est par convention étendu à 0 en dehors de $\mathcal{F}_+^{\leq N}$.

Si de plus on a la condensation de Bose-Einstein complète au sens de (A3), alors les niveaux de min-max convergent :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\lambda_k(H_N) - N e_{\mathbb{H}} \right) = \lambda_k(\mathbb{H}) \quad (24)$$

pour tout $k \geq 1$ fixé.

Si par ailleurs $\lambda_k(\mathbb{H})$ est isolée et de multiplicité finie (par exemple pour $k = 1$), alors $\lambda_k(H_N)$ est aussi isolée et de multiplicité finie pour N assez grand et on a la convergence (à sous-suite près) des vecteurs propres associés :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| U_N \Psi_N^{(k)} - \Phi^{(k)} \right\|_{\mathcal{F}_+} = 0. \quad (25)$$

Rappelons que (A3) est souvent une conséquence de (A1) et (A2), d'après les théorèmes 1 et 2. Un résultat similaire à (24) a été récemment prouvé par Seiringer et Grech dans [46, 19]. En plus d'éclairer la manière dont apparaît \mathbb{H} , l'unitaire U_N permet également d'obtenir la convergence des fonctions propres.

En utilisant le fait que U_N est unitaire, il y a une autre façon d'énoncer la convergence (25) :

$$\left\| \Psi_N^{(k)} - U_N^* \Phi^{(k)} \right\|_{\mathfrak{H}^N} = \left\| \Psi_N^{(k)} - \varphi_0^{(k)} u_0^{\otimes N} - \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(k)} \otimes_s u_0^{\otimes(N-j)} \right\|_{\mathfrak{H}^N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

où $\Phi^{(k)} = \varphi_0^{(k)} \oplus \varphi_1^{(k)} \oplus \dots \in \mathcal{F}_+$ est le (un) k ème vecteur propre de \mathbb{H} . Nous obtenons donc bien un développement de la fonction d'onde $\Psi_N^{(k)}$ dans l'espace initial \mathfrak{H}^N . Lorsque $w \neq 0$, on peut montrer que les vecteurs propres $\Phi^{(k)}$ de \mathbb{H} sont tels que $\varphi_j^{(k)} \neq 0$ pour une infinité de $j \geq 0$. Comme on a

$$\left\| \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(k)} \otimes_s u_0^{\otimes(N-j)} \right\|_{\mathfrak{H}^N}^2 = \sum_{j=1}^N \left\| \varphi_j^{(k)} \right\|_{\mathfrak{H}_+^j}^2 \geq \varepsilon > 0$$

où $\varepsilon > 0$ ne dépend pas de N , nous voyons donc que les vecteurs propres de H_N ne sont jamais proches de $u_0^{\otimes N}$ dans \mathfrak{H}^N (sauf quand $w \equiv 0$).

Le théorème 4 s'applique aux exemples de la section 2, en particulier au gaz de Coulomb 2D confiné (qui avait précédemment été étudié dans le cas classique dans [45, 44]), et aux atomes bosoniques (pour lesquels le résultat avait auparavant été conjecturé dans [39]). Pour ce dernier exemple, nous avons montré dans [28] que \mathbb{H} avait une infinité de valeurs propres sous son spectre essentiel lorsque $0 \leq t < 1$, et seulement un nombre fini pour $1 \leq t < t_c$.

3.4 Idée de preuve

Nous terminons cet exposé par expliquer l'idée de la preuve du théorème 4, qui est basée sur deux résultats auxiliaires. Le premier quantifie la différence entre $U_N H_N U_N^*$ et \mathbb{H} , au sens des formes quadratiques.

Proposition 1 (Estimée sur un espace de Fock tronqué [28, Prop. 15]). *Sous les hypothèses (A1) et (A2), on a*

$$\left| \left\langle \Phi, \left(U_N (H_N - N e_{\mathbb{H}}) U_N^* - \mathbb{H} \right) \Phi \right\rangle_{\mathcal{F}_+} \right| \leq C \sqrt{\frac{M}{N}} \langle \Phi, (\mathbb{H} + C) \Phi \rangle, \quad (26)$$

pour tout vecteur Φ dans le domaine de forme de \mathbb{H} et tel que $\Phi \in \mathcal{F}_+^{\leq M}$ pour un certain $1 \leq M \leq N$.

L'inégalité (26) se démontre en calculant explicitement l'expression de $U_N H_N U_N^*$ dans $\mathcal{F}_+^{\leq N}$ et en estimant les différents termes obtenus. Le formalisme de la seconde quantification est alors utile pour gérer tous les termes. Il est assez facile de déduire la convergence faible (23) de (26).

Nous voyons d'après (26) qu'on peut aisément relier $U_N H_N U_N^*$ à \mathbb{H} à condition que l'on travaille dans un espace de Fock tronqué $\mathcal{F}_+^{\leq M}$ avec $M \ll N$. Il faudra donc projeter la suite de vecteurs propres exacts $(\Psi_N^{(k)})$ de H_N dans $\mathcal{F}_+^{\leq M}$ et estimer l'erreur, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2 (Localisation dans un espace de Fock tronqué [28, Prop. 22]). *Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse valant 1 sur l'intervalle $[0, 1]$ et 0 en dehors de*

$[0, 2]$ et soit g telle que $f^2 + g^2 = 1$. On note f_M l'opérateur de localisation sur \mathcal{F}_+ , défini par

$$f_M := 1 \oplus f(1/M) \mathbf{1}_{\mathfrak{H}_+^1} \oplus f(2/M) \mathbf{1}_{\mathfrak{H}_+^2} \oplus \dots$$

et on introduit de façon similaire g_M . Alors, sous les hypothèses (A1) et (A2) on a

$$-C \frac{N + \mathbb{H}}{M^2} \leq \tilde{H}_N - f_M \tilde{H}_N f_M - g_M \tilde{H}_N g_M \leq C \frac{N + \mathbb{H}}{M^2} \quad (27)$$

au sens des formes sur \mathcal{F}_+ , avec $\tilde{H}_N = U_N(H_N - N e_{\mathbb{H}})U_N^*$.

L'estimée (27) est inspirée de [35, Theorem A.1] et elle ressemble à la célèbre formule IMS concernant la localisation du Laplacien par des fonctions lisses,

$$P^2 = fP^2f + gP^2g - |\nabla f|^2 - |\nabla g|^2$$

où $P^2 = -\Delta$ et f, g sont assimilés à des opérateurs de multiplication. Si f est sous la forme $f(x/M)$, alors l'erreur est bien un $O(M^{-2})$. En fait, \mathbb{H} et \tilde{H}_N contiennent une partie qui est diagonale dans \mathcal{F}_+ et qui commute donc avec les opérateurs f_M et g_M , et une partie hors diagonale qui, cependant, couple un espace \mathfrak{H}_+^k avec seulement ses quatre plus proches voisins, $\mathfrak{H}_+^{k-2}, \dots, \mathfrak{H}_+^{k+2}$. Dit autrement, les opérateurs \mathbb{H} et \tilde{H}_N sont des matrices penta-diagonales par blocs dans la représentation associée à la décomposition de \mathcal{F}_+ en somme directe. Les termes hors-diagonaux donnent naissance aux erreurs de localisation en $1/M^2$, comme le ferait un Laplacien discret.

Avec les propositions 1 et 2 à notre disposition, nous pouvons maintenant donner l'idée de la preuve de la convergence (24) du théorème 4, pour $k = 1$ (première valeur propre). L'argument est très similaire pour $k \geq 2$.

La preuve contient une borne supérieure et une borne inférieure. Pour obtenir la borne supérieure sur $\lambda_1(H_N)$, il suffit de construire une fonction test. Simplement, on tronque la fonction propre exacte $\Phi^{(1)}$ de \mathbb{H} pour la projeter dans un espace $\mathcal{F}_+^{\leq M}$ et on utilise la proposition 1. On fait d'abord tendre $N \rightarrow \infty$ avant de faire tendre $M \rightarrow \infty$. La borne supérieure n'utilise que (A1) et (A2), elle ne nécessite pas la condensation de Bose-Einstein.

La borne inférieure est habituellement la plus difficile et elle est ici démontrée en utilisant la localisation de la proposition 2. Soit en effet Ψ_N le premier vecteur propre de H_N (ou un vecteur propre approché), et soit $\Phi_N := U_N \Psi_N$ le vecteur correspondant dans \mathcal{F}_+ . D'après la proposition 2 (et grâce à l'estimée $\langle \Phi_N, \mathbb{H} \Phi_N \rangle = O(N)$ facile à démontrer à partir de la borne supérieure), on trouve

$$\begin{aligned} E(N) - N e_{\mathbb{H}} &= \lambda_1(\tilde{H}_N) = \langle \Phi_N, \tilde{H}_N \Phi_N \rangle_{\mathcal{F}_+} \\ &\geq \langle f_M \Phi_N, \tilde{H}_N f_M \Phi_N \rangle_{\mathcal{F}_+} + \langle g_M \Phi_N, \tilde{H}_N g_M \Phi_N \rangle_{\mathcal{F}_+} - C \frac{N}{M^2} \\ &\geq \langle f_M \Phi_N, \tilde{H}_N f_M \Phi_N \rangle_{\mathcal{F}_+} + \|g_M \Phi_N\|^2 (E(N) - N e_{\mathbb{H}}) - C \frac{N}{M^2} \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'estimée de la proposition 1 pour le premier terme,

$$\begin{aligned} E(N) - N e_{\mathbb{H}} &\geq \frac{1}{1 - \|g_M \Phi_N\|^2} \left(\left(1 - C \sqrt{\frac{M}{N}} \right) \langle f_M \Phi_N, \mathbb{H} f_M \Phi_N \rangle_{\mathcal{F}_+} - C \sqrt{\frac{M}{N}} - C \frac{N}{M^2} \right). \end{aligned}$$

Maintenant il suffit d'utiliser que

$$\langle f_M \Phi_N, \mathbb{H} f_M \Phi_N \rangle_{\mathcal{F}_+} \geq \lambda_1(\mathbb{H}) \|f_M \Phi_N\|_{\mathcal{F}_+}^2 = \lambda_1(\mathbb{H}) - \lambda_1(\mathbb{H}) \|g_M \Phi_N\|_{\mathcal{F}_+}^2$$

et on trouve l'estimée

$$E(N) - N e_{\mathbb{H}} \geq \frac{1}{1 - \|g_M \Phi_N\|^2} \left(\lambda_1(\mathbb{H}) - C \|g_M \Phi_N\|_{\mathcal{F}_+}^2 - C \sqrt{\frac{M}{N}} - C \frac{N}{M^2} \right).$$

Nous voyons qu'il faut prouver que $\|g_M \Phi_N\|^2 \rightarrow 0$, avec M tendant vers l'infini moins vite que N . Afin d'utiliser l'hypothèse (A3), nous avons besoin de la formule suivante.

Lemme 2 (Nombre de particules excitées). *Soit $\Psi \in \mathfrak{H}^N$ une fonction normalisée que l'on écrit comme dans (20) sous la forme*

$$\Psi = \underbrace{\varphi_0}_{\in \mathbb{C}} u_0^{\otimes N} + u_0^{\otimes(N-1)} \otimes_s \underbrace{\varphi_1}_{\in \mathfrak{H}_+} + u_0^{\otimes(N-2)} \otimes_s \underbrace{\varphi_2}_{\in \mathfrak{H}_+^2} + \cdots + \underbrace{\varphi_N}_{\in \mathfrak{H}_+^N}.$$

Alors on a

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}_+}(Q \gamma_{\Psi}^{(1)} Q) = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{N} \|\varphi_n\|_{\mathfrak{H}_+^n}^2. \quad (28)$$

Rappelons que $Q = 1 - |u_0\rangle\langle u_0|$ est le projecteur orthogonal sur l'espace $\mathfrak{H}_+ = \{u_0\}^\perp$.

Démonstration. On a

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}(Q \gamma_{\Psi}^{(1)} Q) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}}(Q \gamma_{\Psi}^{(1)}) = N^{-1} \left\langle \Psi, \left(\sum_{j=1}^N Q_{x_j} \right) \Psi \right\rangle.$$

Or un simple calcul montre que

$$\left(\sum_{j=1}^N Q_j \right) u_0^{\otimes(N-n)} \otimes_s \varphi_n = n u_0^{\otimes(N-n)} \otimes_s \varphi_n,$$

ce qui fournit le résultat. \square

En revenant à notre problème, on peut écrire d'après (28) et (A3)

$$\begin{aligned} \|g_M \Phi_N\|^2 &= \sum_{0 \leq n \leq N} g\left(\frac{n}{M}\right) \|\varphi_{N,n}\|_{\mathfrak{H}_+^n}^2 \leq \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{n}{M} \|\varphi_{N,n}\|_{\mathfrak{H}_+^n}^2 \\ &= \frac{N}{M} \mathrm{Tr} Q \gamma_{\Psi_N}^{(1)} Q \leq \frac{N}{M} \varepsilon_R(N) \end{aligned} \quad (29)$$

avec la notation $\Phi_N = \bigoplus_{n=0}^N \varphi_{N,n} \in \mathcal{F}_+^{\leq N}$. La condensation de Bose-Einstein garantit donc exactement que $\|g_M \Phi_N\|^2$ tend vers 0, à condition de prendre M tel que $N \varepsilon_R(N)/M \rightarrow 0$.

En posant $M = N\delta$, nous obtenons

$$E(N) - N e_{\mathbb{H}} \geq \frac{1}{1 - \delta^{-1} \varepsilon_R(N)} \left(\lambda_1(\mathbb{H}) - C \frac{\varepsilon_R(N)}{\delta} - C \sqrt{\delta} - C \frac{1}{\delta^2 N} \right)$$

et la preuve est terminée en prenant $\delta \rightarrow 0$ suffisamment lentement. \square

Remerciements. Ce travail a été effectué au sein du projet MNIQS 258023 du *European Research Council* (European Community's Seventh Framework Programme).

Références

- [1] Z. AMMARI AND F. NIER, *Mean field limit for bosons and infinite dimensional phase-space analysis*, Annales Henri Poincaré, 9 (2008), pp. 1503–1574. 10.1007/s00023-008-0393-5.
- [2] ———, *Mean field propagation of Wigner measures and BBGKY hierarchies for general bosonic states*, J. Math. Pures Appl., 95 (2011), pp. 585–626.
- [3] V. BACH, *Ionization energies of bosonic Coulomb systems*, Lett. Math. Phys., 21 (1991), pp. 139–149.
- [4] V. BACH, R. LEWIS, E. H. LIEB, AND H. SIEDENTOP, *On the number of bound states of a bosonic N -particle Coulomb system*, Math. Z., 214 (1993), pp. 441–459.
- [5] B. BAUMGARTNER, *On Thomas-Fermi-von Weizsäcker and Hartree energies as functions of the degree of ionisation*, J. Phys. A, 17 (1984), pp. 1593–1601.
- [6] G. BEN AROUS, K. KIRKPATRICK, AND B. SCHLEIN, *A Central Limit Theorem in Many-Body Quantum Dynamics*, ArXiv e-prints, (2011).
- [7] R. BENGURIA AND E. H. LIEB, *Proof of the Stability of Highly Negative Ions in the Absence of the Pauli Principle*, Physical Review Letters, 50 (1983), pp. 1771–1774.
- [8] F. BEREZIN, *The method of second quantization*, Pure and applied physics. A series of monographs and textbooks, Academic Press, 1966.
- [9] N. N. BOGOLIUBOV, *About the theory of superfluidity*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 11 (1947), p. 77.
- [10] F. CALOGERO, *Solution of the one-dimensional N -body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Mathematical Phys., 12 (1971), pp. 419–436.
- [11] F. CALOGERO AND C. MARCHIORO, *Lower bounds to the ground-state energy of systems containing identical particles*, J. Mathematical Phys., 10 (1969), pp. 562–569.
- [12] H. D. CORNEAN, J. DEREZINSKI, AND P. ZIN, *On the infimum of the energy-momentum spectrum of a homogeneous bose gas*, J. Math. Phys., 50 (2009), p. 062103.
- [13] B. DE FINETTI, *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*. Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, 1931. Ser. 6, Memorie, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.
- [14] P. DIACONIS AND D. FREEDMAN, *Finite exchangeable sequences*, Ann. Probab., 8 (1980), pp. 745–764.
- [15] L. ERDÖS, B. SCHLEIN, AND H.-T. YAU, *Ground-state energy of a low-density Bose gas : A second-order upper bound*, Phys. Rev. A, 78 (2008), p. 053627.
- [16] J. GINIBRE AND G. VELO, *The classical field limit of scattering theory for non-relativistic many-boson systems. II*, Commun. Math. Phys., 68 (1979), pp. 45–68.
- [17] M. GIRARDEAU, *Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension*, J. Mathematical Phys., 1 (1960), pp. 516–523.
- [18] A. GIULIANI AND R. SEIRINGER, *The ground state energy of the weakly interacting Bose gas at high density*, J. Stat. Phys., 135 (2009), pp. 915–934.
- [19] P. GRECH AND R. SEIRINGER, *The excitation spectrum for weakly interacting bosons in a trap*, ArXiv e-prints, (2012).

- [20] M. G. GRILLAKIS, M. MACHEDON, AND D. MARGETIS, *Second-order corrections to mean field evolution of weakly interacting bosons. I*, Commun. Math. Phys., 294 (2010), pp. 273–301.
- [21] ———, *Second-order corrections to mean field evolution of weakly interacting bosons. II*, Adv. Math., 228 (2011), pp. 1788–1815.
- [22] K. HEPP, *The classical limit for quantum mechanical correlation functions*, Comm. Math. Phys., 35 (1974), pp. 265–277.
- [23] E. HEWITT AND L. J. SAVAGE, *Symmetric measures on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc., 80 (1955), pp. 470–501.
- [24] R. L. HUDSON AND G. R. MOODY, *Locally normal symmetric states and an analogue of de Finetti’s theorem*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 33 (1975/76), pp. 343–351.
- [25] L. LANDAU, *Theory of the Superfluidity of Helium II*, Phys. Rev., 60 (1941), pp. 356–358.
- [26] M. LEWIN, *Geometric methods for nonlinear many-body quantum systems*, J. Funct. Anal., 260 (2011), pp. 3535–3595.
- [27] M. LEWIN, P. T. NAM, AND N. ROUGERIE, *Derivation of Hartree’s theory for generic mean-field Bose gases*, preprint arXiv, (2013). preprint arXiv.
- [28] M. LEWIN, P. T. NAM, S. SERFATY, AND J. P. SOLOVEJ, *Bogoliubov spectrum of interacting Bose gases*, preprint arXiv :1211.2778, (2012).
- [29] E. H. LIEB, *Exact analysis of an interacting Bose gas. II. The excitation spectrum*, Phys. Rev. (2), 130 (1963), pp. 1616–1624.
- [30] ———, *A lower bound for Coulomb energies*, Phys. Lett. A, 70 (1979), pp. 444–446.
- [31] E. H. LIEB AND W. LINIGER, *Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state*, Phys. Rev. (2), 130 (1963), pp. 1605–1616.
- [32] E. H. LIEB AND S. OXFORD, *Improved lower bound on the indirect Coulomb energy*, Int. J. Quantum Chem., 19 (1980), pp. 427–439.
- [33] E. H. LIEB AND R. SEIRINGER, *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press, 2010.
- [34] E. H. LIEB, R. SEIRINGER, J. P. SOLOVEJ, AND J. YNGVASON, *The mathematics of the Bose gas and its condensation*, Oberwolfach Seminars, Birkhäuser, 2005.
- [35] E. H. LIEB AND J. P. SOLOVEJ, *Ground state energy of the one-component charged Bose gas*, Commun. Math. Phys., 217 (2001), pp. 127–163.
- [36] E. H. LIEB AND J. P. SOLOVEJ, *Ground state energy of the two-component charged Bose gas.*, Commun. Math. Phys., 252 (2004), pp. 485–534.
- [37] P.-L. LIONS, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Part I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1 (1984), pp. 109–149.
- [38] P.-L. LIONS, *Mean-field games and applications*. Lectures at the Collège de France, unpublished, Nov 2007.
- [39] P. T. NAM, *Contributions to the rigorous study of the structure of atoms*, PhD thesis, University of Copenhagen, 2011.
- [40] O. PENROSE AND L. ONSAGER, *Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium*, Phys. Rev., 104 (1956), pp. 576–584.

- [41] D. PETZ, G. A. RAGGIO, AND A. VERBEURE, *Asymptotics of Varadhan-type and the Gibbs variational principle*, Comm. Math. Phys., 121 (1989), pp. 271–282.
- [42] G. A. RAGGIO AND R. F. WERNER, *Quantum statistical mechanics of general mean field systems*, Helv. Phys. Acta, 62 (1989), pp. 980–1003.
- [43] M. REED AND B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
- [44] E. SANDIER AND S. SERFATY, *2D Coulomb Gases and the Renormalized Energy*, ArXiv e-prints, (2012).
- [45] E. SANDIER AND S. SERFATY, *From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems*, Commun. Math. Phys., 313 (2012), pp. 635–743.
- [46] R. SEIRINGER, *The excitation spectrum for weakly interacting bosons*, Commun. Math. Phys., 306 (2011), pp. 565–578.
- [47] J. P. SOLOVEJ, *Asymptotics for bosonic atoms*, Lett. Math. Phys., 20 (1990), pp. 165–172.
- [48] J. P. SOLOVEJ, *Upper bounds to the ground state energies of the one- and two-component charged Bose gases*, Commun. Math. Phys., 266 (2006), pp. 797–818.
- [49] ———, *Many body quantum mechanics*. LMU, 2007. Lecture notes.
- [50] E. STØRMER, *Symmetric states of infinite tensor products of C^* -algebras*, J. Functional Analysis, 3 (1969), pp. 48–68.
- [51] B. SUTHERLAND, *Quantum Many-Body Problem in One Dimension : Ground State*, J. Mathematical Phys., 12 (1971), pp. 246–250.
- [52] ———, *Quantum Many-Body Problem in One Dimension : Thermodynamics*, J. Mathematical Phys., 12 (1971), pp. 251–256.
- [53] A. SÜTŐ, *Thermodynamic limit and proof of condensation for trapped bosons*, J. Statist. Phys., 112 (2003), pp. 375–396.
- [54] R. F. WERNER, *Large deviations and mean-field quantum systems*, in Quantum probability & related topics, QP-PQ, VII, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, pp. 349–381.
- [55] T. T. WU, *Bose-Einstein condensation in an external potential at zero temperature : General theory*, Phys. Rev. A, 58 (1998), pp. 1465–1474.
- [56] H.-T. YAU AND J. YIN, *The second order upper bound for the ground energy of a Bose gas*, J. Stat. Phys., 136 (2009), pp. 453–503.
- [57] J. YNGVASON, *The interacting Bose gas : A continuing challenge*, Phys. Particles Nuclei, 41 (2010), pp. 880–884.