



**HAL**  
open science

## Classes de symétrie des solides piézoélectriques

Giuseppe Geymonat, Thibaut Weller

► **To cite this version:**

Giuseppe Geymonat, Thibaut Weller. Classes de symétrie des solides piézoélectriques. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 2002, 335, pp.847-852. 10.1016/S1631-073X(02)02573-6 . hal-00797446

**HAL Id: hal-00797446**

**<https://hal.science/hal-00797446>**

Submitted on 6 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Classes de symétrie des solides piézoélectriques

Giuseppe Geymonat, Thibaut Weller

Laboratoire de mécanique et génie civil, UMR 5508 CNRS-UM II, Université Montpellier II,  
c.c. 48, place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 05, France

Reçu et accepté le 1<sup>er</sup> octobre 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

---

## Résumé

On applique ici les techniques de décomposition harmonique et de Cartan à la classification des groupes de symétries des solides piézoélectriques. Nous montrons en particulier qu'il faut réduire de 19 à 17 le nombre des classes de symétries correspondant au phénomène piézoélectrique. *Pour citer cet article : G. Geymonat, T. Weller, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 847–852.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Symmetry classes of piezoelectric solids

## Abstract

We apply here the harmonic and Cartan decomposition techniques to piezoelectric material symmetries classification. We show in particular that we shall reduce from 19 to 17 the number of symmetry classes corresponding to the piezoelectric phenomenon. *To cite this article: G. Geymonat, T. Weller, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 847–852.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## Abridged English version

We extend to linearly piezoelectric solids the *physical* symmetries classification of hyperelastic solids derived in [2].

According to constitutive equations (1), we shall consider that the *behaviour* of a piezoelectric solid is given by a triplet  $(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) \in \text{Ela} \times \text{Piez} \times \text{Sym}$ , where  $\text{Ela}$ ,  $\text{Piez}$  and  $\text{Sym}$  are respectively the sets of hyperelastic tensors, piezoelectric tensors and symmetric tensors of order 2. The action  $\star$  of  $\mathbb{O}^3$  which follows from definition (2) of a piezoelectric solid symmetry group  $\mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S})$  is defined by  $(\mathbf{Q} \star \mathbf{M})_{\dots ijk \dots} = \dots Q_{ip} Q_{jq} Q_{kr} \dots M_{\dots pqr \dots}$  where  $\mathbf{Q}$  is an element of  $\mathbb{O}^3$  and  $\mathbf{M}$  a tensor of any order. Letting  $g(\mathbf{M}) = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3; \mathbf{Q} \star \mathbf{M} = \mathbf{M}\}$ , we then have  $\mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) = g(\mathbf{A}) \cap g(\mathbf{P}) \cap g(\mathbf{S})$ .

The harmonic decomposition (cf. [8]) maps each  $\mathbf{P} \in \text{Piez}$  onto a unique quadruplet  $(\mathbf{H}, \mathbf{C}, v, \mathbf{v}) \in \text{Hrm} \times \text{Dev} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\text{Hrm}$  and  $\text{Dev}$  being the spaces of harmonic tensors (totally symmetric and traceless) of third and second orders respectively.

Via the canonical isomorphism (3) between harmonic tensors and harmonic polynomials of corresponding degree, we transfer the  $\star$  action onto  $\mathcal{H}_n$ , the space of homogeneous harmonic polynomials of degree  $n$ .

---

Adresse e-mail : geymonat@lmgc.univ-montp2.fr (G. Geymonat).

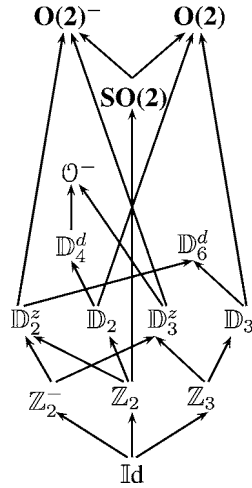


Figure 1. – Characteristic tree of Piez symmetry classes.

The Cartan decomposition (cf. [4]), which is a way to see  $\mathcal{H}_n$  as the direct sum of  $n - 1$  subspaces of dimension 2 and one subspace of dimension 1 is the final step to derive the symmetry classes of any  $\mathbf{P} \in \text{Piez}$ . We then show that symmetry classes of piezoelectric tensors are found to be 14 and ranged as shown in Fig. 1.

These physical (or *constitutive*) symmetries correspond to piezoelectric behaviour of materials whose crystallographic system (or *material* symmetry classe, cf. Section 5 for further explanations about these terms) is either triclinic ( $\text{Id}$ ), monoclinic ( $\mathbb{Z}_2$  and  $\mathbb{Z}_2^-$ ), orthorhombic ( $\mathbb{D}_2$  and  $\mathbb{D}_2^z$ ), trigonal ( $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{D}_3$  and  $\mathbb{D}_3^z$ ), tetragonal ( $\mathbb{D}_4^d$ ), hexagonal ( $\mathbb{D}_6^d$ ) or tetrahedral ( $T$ ). Moreover, the transverse hemitropy ( $\text{SO}(2)$ ) and transverse isotropy ( $\text{O}(2)$ ,  $\text{O}(2)^-$ ) physical symmetries correspond to the tetragonal or hexagonal crystallographic system.

Finally we show that crystalline symmetries respectively written  $\bar{4}$ ,  $(6, \bar{6})$ ,  $622$ ,  $6mm$  and  $23$  cannot be seen as constitutive ones but as the trace on the tetrahedral, hexagonal and cubic crystallographic systems respectively of superior physical symmetries as shown in the order relation derived in [4]. This fact allows us to reduce to 17 the number of the piezoelectric solids physical symmetries up to now considered to be 19.

### 1. Définitions et notations

On note  $\text{Lin}$  l'ensemble des tenseurs du deuxième ordre,  $\mathbf{I}$  l'identité dans  $\text{Lin}$  et  $\mathbf{L}^T$  le transposé d'un élément  $\mathbf{L} \in \text{Lin}$ . On définit alors les ensembles  $\text{Sym} = \{\mathbf{L} \in \text{Lin}; \mathbf{L} = \mathbf{L}^T\}$  et  $\mathbb{O}^3 = \{\mathbf{L} \in \text{Lin}; \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{I}\}$  des tenseurs du deuxième ordre respectivement *symétriques* et *orthogonaux*. Le sous-groupe des *rotations* est l'ensemble des éléments de  $\mathbb{O}^3$  dont le déterminant vaut 1, il est noté  $\mathbb{O}_+^3$ .

On définit les espaces  $\mathbb{E}la$  et  $\text{Piez}$  des tenseurs hyperélastiques  $\mathbf{A}$  et piézoélectriques  $\mathbf{P}$  vérifiant respectivement  $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$  et  $P_{pqr} = P_{qpr}$ , les composantes des tenseurs étant prises dans une base orthonormée  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  fixée.

On considère ici un solide linéairement piézoélectrique. La loi de comportement d'un tel matériau lie le tenseur des contraintes  $\mathbf{T} \in \text{Sym}$  et le vecteur déplacement électrique  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$  au tenseur des déformations  $\mathbf{E} \in \text{Sym}$  et au vecteur gradient du potentiel électrique  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ . Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{E}, \mathbf{g}) = \mathbf{A}[\mathbf{E}] - \mathbf{P}[\mathbf{g}], \\ \mathbf{d}(\mathbf{E}, \mathbf{g}) = \mathbf{P}^T[\mathbf{E}] + \mathbf{S}[\mathbf{g}], \end{cases} \quad (1)$$

où  $(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) \in \mathbb{E}la \times \mathbb{P}iez \times \mathbb{S}ym$ .

Le groupe de symétrie d'un matériau linéairement piézoélectrique, que l'on considère comme la donnée d'un tel triplet  $(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S})$ , est défini par [5] :

$$\mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) = \{ \mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3; \mathbf{Q}\mathbf{T}(\mathbf{E}, \mathbf{g})\mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{g}), \mathbf{Q}\mathbf{d}(\mathbf{E}, \mathbf{g}) = \mathbf{d}(\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{g}), \forall (\mathbf{E}, \mathbf{g}) \in \mathbb{S}ym \times \mathbb{R}^3 \}. \quad (2)$$

On définit donc l'action  $\star$  de  $\mathbb{O}^3$  sur  $\mathbb{E}la \times \mathbb{P}iez \times \mathbb{S}ym$  par  $\mathbf{Q} \star (\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) = (\mathbf{Q} \star \mathbf{A}, \mathbf{Q} \star \mathbf{P}, \mathbf{Q} \star \mathbf{S})$  où  $(\mathbf{Q} \star \mathbf{M})_{...ijk...} = \dots Q_{ip} Q_{jq} Q_{kr} \dots M_{...pqr...}$  pour un tenseur d'ordre quelconque  $\mathbf{M}$ . On a alors  $\mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) = \{ \mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3; \mathbf{Q} \star (\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) = (\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) \}$ . Si l'on note  $g(\mathbf{M}) = \{ \mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3; \mathbf{Q} \star \mathbf{M} = \mathbf{M} \}$  le groupe de symétrie de  $\mathbf{M}$  on a alors  $\mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) = g(\mathbf{A}) \cap g(\mathbf{P}) \cap g(\mathbf{S})$ . Il est important de noter que les  $g(\mathbf{M})$  sont des sous-groupes fermés de  $\mathbb{O}^3$ .

On s'intéresse dans la suite à l'étude des  $g(\mathbf{P})$  pour  $\mathbf{P} \in \mathbb{P}iez$ , renvoyant à [2] et [3] en ce qui concerne les groupes de symétrie  $g(\mathbf{A})$  et  $g(\mathbf{S})$  des couples  $(\mathbf{A}, \mathbf{S}) \in \mathbb{E}la \times \mathbb{S}ym$ . Le type de symétrie d'un tenseur donné étant indépendant de la base orthonormée choisie, on dira que les tenseurs  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  de  $\mathbb{P}iez$  possèdent la même *classe* de symétrie (i.e. sont équivalents) si leurs groupes de symétrie sont *conjugués*, ce qui s'écrit  $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2 \Leftrightarrow \{ \exists \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3; g(\mathbf{P}_1) = \mathbf{Q}g(\mathbf{P}_2)\mathbf{Q}^T \}$ . Il est aisé de voir que  $\sim$  définit une relation d'équivalence parmi les sous-groupes fermés de  $\mathbb{O}^3$  que l'on résume en écrivant que  $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2 \Leftrightarrow g(\mathbf{P}_1) \sim g(\mathbf{P}_2)$ . Les classes d'équivalence pour  $\sim$  des sous-groupes fermés de  $\mathbb{O}^3$  se rangent selon une relation d'ordre naturelle décrite dans [4]. Il conviendrait en toute rigueur de noter ces classes entre accolades, ce que nous omettrons dans la suite pour ne pas alourdir les notations, tout en pensant à chaque fois en terme de classes d'équivalence.

Enfin, si  $G$  est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{O}^3$ , on notera  $\mathbb{P}iez(G)$  l'ensemble des tenseurs piézoélectriques dont le groupe de symétrie est un conjugué de  $G$  via  $\sim$ .

Les éléments de  $\mathbb{P}iez$  étant des tenseurs d'ordre impair,  $(-\mathbf{I})$  agit comme  $-\mathbf{I}$ . Les résultats de [4], p. 119, et suivantes permettent d'énumérer les sous-groupes fermés  $G$  qui résultent d'une telle *représentation* de  $\mathbb{O}^3$ . D'une part il y a les sous-groupes fermés de  $\mathbb{O}_+^3$ , à savoir des conjugués de :  $\mathbb{I}d$ , le sous-groupe formé de l'identité  $\mathbf{I}$ ;  $\mathbb{Z}_n$  ( $n \geq 2$ ), l'ensemble des rotations d'axe  $\mathbf{k}$  et d'angle  $2\pi/n$ ;  $\mathbb{D}_n$  ( $n \geq 2$ ), généré par  $\mathbb{Z}_n$  et la réflexion d'axe  $\mathbf{i}$ ;  $\mathcal{T}$ , le groupe des symétries du tétraèdre;  $\mathcal{O}$ , le groupe des symétries du cube;  $\mathcal{I}$ , le groupe des symétries de l'icosaèdre;  $\mathbf{SO}(2)$ , le groupe des rotations laissant  $\mathbf{k}$  invariant;  $\mathbf{O}(2)$ , le groupe des rotations qui appliquent  $\mathbf{k}$  sur  $\pm\mathbf{k}$ , et enfin  $\mathbb{O}_+^3$ . D'autre part il y a des sous-groupes fermés qui ne sont pas contenus dans  $\mathbb{O}_+^3$  et qui ne contiennent pas  $-\mathbf{I}$ , à savoir (on renvoie à [4] pour leurs définitions) :  $\mathbb{Z}_{2m}^-$  ( $m \geq 1$ ),  $\mathbb{D}_{2m}^d$  ( $m \geq 2$ ),  $\mathbb{D}_m^z$  ( $m \geq 2$ ),  $\mathcal{O}^-$  et  $\mathbf{O}(2)^-$ .

## 2. Décomposition harmonique

On sait que tout tenseur du deuxième ordre  $\mathbf{L}$  peut être décomposé de façon unique comme la somme d'un tenseur symétrique  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$  et d'un tenseur antisymétrique  $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$  auquel est associé un vecteur axial  $\mathbf{w}$  tel que  $W_{ij} = \varepsilon_{ijk} w_k$ , où  $\varepsilon_{ijk}$  sont les composantes du tenseur d'orientation. Puisque  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^D + \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{S})\mathbf{I}$ , où  $\mathbf{E}^D$  est la partie déviatorique de  $\mathbf{E}$ , on établit un isomorphisme entre  $\mathbb{L}in \ni \mathbf{L} = \mathbf{E}^D + \mathbf{W} + \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{L})\mathbf{I}$  et  $\mathbb{D}ev \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ni (\mathbf{E}^D, \mathbf{w}, \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{L})$ , où  $\mathbb{D}ev$  est l'espace des tenseurs symétriques du deuxième ordre de trace nulle. On a ainsi  $\mathbf{Q} \star \mathbf{L} = \mathbf{Q} \star (\mathbf{E}^D, \mathbf{W}, \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{L})\mathbf{I}) = (\mathbf{Q} \star \mathbf{E}^D, \det(\mathbf{Q})(\mathbf{Q} \star \mathbf{w}), \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{L})$ . Les classes de symétrie de  $\mathbf{L}$  vérifient par conséquent  $g(\mathbf{L}) = g(\mathbf{E}^D) \cap g_{\det(\mathbf{w})}$  où  $g_{\det(\mathbf{w})} = \{ \mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3; \mathbf{Q} \star \mathbf{w} = \det(\mathbf{Q})\mathbf{w} \}$ . L'isomorphisme défini ci-dessus est donc  $\mathbb{O}_+^3$ -invariant, c'est à dire que  $\mathbf{Q} \star \mathbf{L} = \mathbf{Q} \star (\mathbf{E}^D, \mathbf{w}, \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{L})$  pour tout  $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3$ .

La généralisation de cette correspondance aux tenseurs d'ordre quelconque (cf. [7] et [8]) est appelée *décomposition harmonique*, un tenseur harmonique étant un tenseur *totalelement symétrique* (ses composantes sont invariantes par toute permutation d'indices) de trace nulle (la trace vis à vis de  $n$  importe quelle paire d'indices est nulle). Appliquée aux tenseurs piézoélectriques, cette décomposition permet

d'identifier  $\mathbf{P} \in \text{Piez}$  au quadruplet  $(\mathbf{H}, \mathbf{C}, \nu, \mathbf{v}) \in \text{Hrm} \times \text{Dev} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , où  $\text{Hrm}$  est l'espace des tenseurs harmoniques du troisième ordre (l'espace  $\text{Hrm}$  étant de dimension 7 et  $\text{Dev}$  de dimension 5, on retrouve bien que  $\mathbf{P}$  a 18 composantes). Cette correspondance est un isomorphisme  $\mathbb{O}_+^3$ -invariant car  $\mathbf{Q} \star \mathbf{P} = (\mathbf{Q} \star \mathbf{H}, \det(\mathbf{Q})(\mathbf{Q} \star \mathbf{C}), \mathbf{Q} \star \nu, \mathbf{Q} \star \mathbf{v})$  pour tout  $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3$ . Ainsi  $g(\mathbf{P}) = g(\mathbf{H}) \cap g_{\det}(\mathbf{C}) \cap g(\nu) \cap g(\mathbf{v})$  pour tout  $\mathbf{P} \in \text{Piez}$ .

### 3. La décomposition de Cartan

Soit  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  et soit  $\mathcal{P}_n$  l'espace des polynômes homogènes de degré  $n$  en trois variables. Il existe un isomorphisme classique  $\psi$  avec l'espace des tenseurs totalement symétriques d'ordre  $n$  :

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} \mapsto \psi(T_{i_1 i_2 \dots i_n}) = T_{i_1 i_2 \dots i_n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} \in \mathcal{P}_n. \tag{3}$$

L'espace des tenseurs harmoniques est isomorphe via  $\psi$  à  $\mathcal{H}_n$ , l'espace des polynômes homogènes harmoniques (au sens du Laplacien) de degré correspondant. L'action  $\star$  s'étend ainsi naturellement (cf. [3]) à  $\mathcal{H}_n$  qui possède une décomposition  $\mathbf{SO}(2)$ -invariante  $K_0 \oplus K_1 \oplus \dots \oplus K_n$ , où  $K_0 = \text{vect}(u)$ ,  $K_l = \text{vect}(s_l, t_l)_{(1 \leq l \leq 3)}$  et où  $u, \dots, s_n, t_n$  sont des polynômes harmoniques homogènes de degré  $n$ , dits polynômes de base. Cette décomposition est appelée décomposition de Cartan (cf. [4], p. 110).

Pour  $\mathbf{H} \in \text{Hrm}$  on a donc  $\psi(\mathbf{H}) = \lambda u + \alpha_l s_l + \beta_l t_l$  ( $1 \leq l \leq 3$ ). En posant  $\mathbf{U} = \psi^{-1}(u)$ ,  $\mathbf{S}_l = \psi^{-1}(s_l)$ ,  $\mathbf{T}_l = \psi^{-1}(t_l)$ , on peut écrire  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3$  où  $\mathbf{H}_0 = \lambda \mathbf{U}$  et, pour  $1 \leq l \leq 3$ ,  $\mathbf{H}_l = \alpha_l \mathbf{S}_l + \beta_l \mathbf{T}_l$ . Il est d'usage courant de dire que  $\mathbf{S}_l$  est horizontal et  $\mathbf{T}_l$  vertical dans  $K_l$ .

PROPOSITION 1. – Soit  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3$  un tenseur harmonique de degré 3, on a :

- (i)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbf{SO}(2) \Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathbf{O}(2)^- \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_k^{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{Z}_k$  ( $k \geq 4$ ) ;
- (ii)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbf{O}(2) \Leftrightarrow \mathbf{H} = 0 \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_{2k}^d \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{Z}_{2k}^- \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_k$  ( $k \geq 4$ ) ;
- (iii)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{Z}_2 \Leftrightarrow \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_3 = 0$  ;
- (iv)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{Z}_3 \Leftrightarrow \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = 0$  ;
- (v)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_2 \Leftrightarrow \mathbf{H}$  est vertical dans  $K_2 \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathcal{T} \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_4^d \Leftrightarrow g(\mathbf{H}) \supset \mathcal{O}^-$  ;
- (vi)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_3 \Leftrightarrow \mathbf{H}$  est horizontal dans  $K_3$  ;
- (vii)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{Z}_2^- \Leftrightarrow \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_2 = 0$  ;
- (viii)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{Z}_4^- \Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_2$  ;
- (ix)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{Z}_6^- \Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_3$  ;
- (x)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_6^d \Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_3$  avec  $\mathbf{H}_3$  horizontal dans  $K_3$  ;
- (xi)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_2^{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_2$  avec  $\mathbf{H}_2$  horizontal dans  $K_2$  ;
- (xii)  $g(\mathbf{H}) \supset \mathbb{D}_3^{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_3$  avec  $\mathbf{H}_3$  vertical dans  $K_3$  ;

Remarque 1. – Un tenseur harmonique du troisième ordre  $\mathbf{H}$  est a priori la donnée de 7 constantes (les 3 couples  $(\alpha_l, \beta_l)_{(1 \leq l \leq 3)}$  ainsi que  $\lambda$ ). La décomposition de Cartan s'applique particulièrement bien à la détermination du nombre de constantes qui découlent d'une symétrie donnée. Ainsi, pour prendre un exemple, la partie (iii) indique que la symétrie  $\mathbb{Z}_2$  nécessite la connaissance de 3 constantes seulement (1 pour  $\mathbf{H}_0$  et 2 pour  $\mathbf{H}_2$ ). En appliquant cette méthode aux autres éléments de la décomposition harmonique, on obtient le nombre minimum de constantes d'un tenseur  $\mathbf{P} \in \text{Piez}$  ayant une symétrie donnée. Il faut cependant noter que la détermination du repère optimal, dans lequel un tenseur donné s'écrit effectivement avec le minimum de constantes, nécessite une étude spécifique (cf. [1] pour le cas de l'élasticité).

Démonstration. – Les relations concernant les sous-groupes fermés de  $\mathbb{O}_+^3$  ont été démontrées dans [3] et sont une conséquence immédiate de la décomposition de Cartan. Les autres résultats se déduisent facilement de [4], pp. 122 et 123. □

#### 4. Les classes de symétrie de $\mathbb{P}iez$

On établit d'abord le

LEMME 1. – Soit  $\mathbf{C} \in \mathbb{D}ev$  et soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . Alors :

- (a)  $g_{\det}(\mathbf{C})$  est conjugué à  $\mathbb{D}_2$ ,  $\mathbb{D}_4^d$ ,  $\mathbf{O}(2)$  ou  $\mathbb{O}^3$ ,
- (b)  $g(\mathbf{v})$  est conjugué à  $\mathbf{O}(2)^-$  ou  $\mathbb{O}^3$ .

*Démonstration.* – (a) C'est une extension du Théorème 3 de [2] : si les 3 valeurs propres de  $\mathbf{C}$  sont distinctes et si aucune d'entre elles n'est nulle alors il n'existe pas de rotation qui transforme  $\mathbf{C}$  en  $-\mathbf{C}$ . On est alors dans le cas de [2]. Si l'une seulement des valeurs propres est nulle, alors les deux autres sont opposées et non nulles. Les rotations d'angle  $\pi$  autour des axes propres laissent  $\mathbf{C}$  invariant tandis qu'une interversion des axes propres associés aux valeurs propres non nulles change  $\mathbf{C}$  en  $-\mathbf{C}$ . Ce sous-groupe est un conjugué de  $\mathbb{D}_4^d$ .

(b) Si  $\mathbf{v}$  n'est pas nul alors il existe une rotation  $\mathbf{Q}$  telle que  $\mathbf{Q} \star \mathbf{v}$  soit parallèle à  $\mathbf{k}$ . On a donc  $g(\mathbf{v}) = \mathbf{O}(2)^-$ .  $\square$

De la Proposition 1 et du Lemme 1 découle le

COROLLAIRE 1. – Soit  $\mathbf{P} \in \mathbb{P}iez$ , on a :

- (a)  $g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{Z}_k \Leftrightarrow g(\mathbf{P}) \supset \mathbf{SO}(2)$  ( $k \geq 4$ ),
- (b)  $g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{D}_k \Leftrightarrow \mathbf{P} = 0 \Leftrightarrow g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{Z}_{2k}^- \Leftrightarrow g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{D}_{2k}^d$  ( $k \geq 4$ ),
- (c)  $g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{Z}_4^- \Rightarrow \{\exists \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3; g(\mathbf{Q} \star \mathbf{P}) \supset \mathbb{D}_4^d\}$ ,
- (d)  $g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{Z}_6^- \Rightarrow \{\exists \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3; g(\mathbf{Q} \star \mathbf{P}) \supset \mathbb{D}_6^d\}$ ,
- (e)  $g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{Z}_{2k}^- \Leftrightarrow g(\mathbf{P}) \supset \mathbf{O}(2)$  ( $k \geq 4$ ),
- (f)  $g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{D}_k^{\tilde{z}} \Leftrightarrow g(\mathbf{P}) \supset \mathbf{O}(2)^-$  ( $k \geq 4$ ),
- (g)  $g(\mathbf{P}) \supset \mathcal{T} \Leftrightarrow g(\mathbf{P}) \supset \mathcal{O}^-$ .

*Démonstration.* – On ne montre ici que la partie (c) avec  $\mathbf{P} = (\mathbf{H}, \mathbf{C}, \nu, \mathbf{v})$  : si  $g(\mathbf{P}) \supset \mathbb{Z}_4^-$  alors  $g_{\det}(\mathbf{C}) \supset \mathbb{D}_4^d$  d'après la partie (a) du Lemme 1 et  $\nu = \mathbf{v} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2$  d'après la partie (ix) de la Proposition 1. Mais comme il existe une rotation  $\mathbf{Q} \in \mathbf{SO}(2)$  qui rend  $\mathbf{H}_2$  vertical dans  $K_2$ , on conclut grâce à la partie (v) de la Proposition 1 ci-dessus et au Lemme 2 de [2].  $\square$

On obtient dès lors trivialement le

COROLLAIRE 2. – Soient  $k \geq 4$  et  $m \geq 2$ , alors  $\mathbb{P}iez(\mathbb{Z}_k)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_k)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_{2k}^d)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_k^{\tilde{z}})$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{Z}_{2m}^-)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathcal{T})$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathcal{O})$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathcal{I})$  et  $\mathbb{P}iez(\mathbb{O}_+^3)$  sont vides. De plus,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{O}^3) = \{\mathbf{0}\}$ .

Ce résultat ne signifie pas qu'aucun tenseur piézoélectrique ne peut posséder, par exemple, une symétrie  $\mathbb{Z}_k$  pour  $k \geq 4$  mais qu'un tel tenseur possède alors nécessairement une symétrie supérieure dans la relation d'ordre telle qu'on peut la trouver dans [4].

On peut alors établir le

THÉORÈME 1. – Les ensembles  $\mathbb{P}iez(\text{Id})$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{Z}_2)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{Z}_3)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{Z}_2^-)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_2^{\tilde{z}})$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_3^{\tilde{z}})$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_2)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_3)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_4^d)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbb{D}_6^d)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathcal{O}^-)$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbf{SO}(2))$ ,  $\mathbb{P}iez(\mathbf{O}(2))$  et  $\mathbb{P}iez(\mathbf{O}(2)^-)$  ne sont pas vides.

*Démonstration.* – La méthode consiste à choisir convenablement chacun des éléments de la décomposition harmonique de  $\mathbf{P} = (\mathbf{H}, \mathbf{C}, \nu, \mathbf{v})$  d'une manière similaire à celle utilisée dans [3]. Ainsi, en choisissant par exemple  $\mathbf{H}$  vertical dans  $K_2$  comme seul élément non nul dans la décomposition harmonique d'un tenseur  $\mathbf{P}$  de  $\mathbb{P}iez$ , on a  $g(\mathbf{P}) = \mathcal{O}^-$ .  $\square$

La relation d'ordre selon laquelle s'ordonnent ces classes de symétrie fait l'objet de la Fig. 1.

## 5. Conséquences

Nous distinguons les symétries *matérielles* (ou symétries cristallines) des symétries *constitutives* (relatives au comportement). On trouvera dans [9] des développements concernant ces distinctions.

Il est clair que la donnée d'un triplet  $(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{S}) \in \mathbb{E}la \times \mathbb{P}iez \times \mathbb{S}ym$  donne accès à des informations de type constitutif. Ainsi, lorsque l'on dit, par exemple, que  $\mathbb{P}iez(\mathbb{Z}_6)$  est vide (cf. Corollaire 2), cela ne signifie pas qu'il n'existe pas de cristaux piézoélectriques hexagonaux mais que des matériaux de ce type ont alors nécessairement un *comportement* hémitrope transverse (cette classe de symétrie se note  $\mathbf{SO}(2)$ ).

Inversement, considérons le tenseur piézoélectrique  $\mathbf{P}$  d'un matériau ayant la symétrie cristalline dénommée  $\bar{4}$  (cf. [6]), correspondant au sous-groupe fermé  $\mathbb{Z}_4^-$ . Cette symétrie nécessite a priori la connaissance de 4 constantes (2 pour  $\mathbf{H}$ , 2 pour  $\mathbf{C}$ ,  $\nu$  et  $\mathbf{v}$  étant nuls). On sait désormais grâce à la partie (c) du Corollaire 1 que ce type de symétrie (cristalline) implique l'existence d'un repère dans lequel  $\mathbf{P}$  possède la symétrie (constitutive)  $\mathbb{D}_4^d$ , notée  $\bar{4}2m$  en cristallographie et à laquelle ne sont associées que 2 constantes (1 pour  $\mathbf{H}$ , 1 pour  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\nu$  étant nuls).

5.1. *Symétries constitutives des solides piézoélectriques.* – Ce sont les classes de symétrie de  $\mathbb{E}la \times \mathbb{P}iez \times \mathbb{S}ym$  dans  $\mathbb{O}^3$ . Connaissant (cf. [2]) les classes de symétrie de  $\mathbb{E}la$  (à savoir  $\pm\mathbf{I}$  conjugué avec chacun des sous-groupes de  $\mathbb{O}_+^3$  suivants :  $\mathbb{I}d, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathcal{O}, \mathbf{O}(2), \mathbb{O}_+^3$ ) et de  $\mathbb{S}ym$  (à savoir  $\pm\mathbf{I}$  conjugué avec :  $\mathbb{D}_2, \mathbf{O}(2), \mathbb{O}_+^3$ ), on obtient par intersection les classes de symétrie recherchées :  $\mathbb{I}d, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2^-, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_2^z, \mathbb{Z}_3, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_3^z, \mathbb{Z}_4, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_4^z, \mathbb{D}_4^d, \mathbb{D}_6^d, \mathcal{O}^-, \mathbf{SO}(2), \mathbf{O}(2)^-$  et  $\mathbf{O}(2)$ .

Alors qu'il est communément admis qu'il y a 19 classes de « symétrie piézoélectrique », on montre donc que les matériaux piézoélectriques se rangent en fait en 17 classes de symétrie constitutive.

5.3. *Extension.* – La démarche utilisée ici pour établir l'ordonnancement des classes de symétrie des solides piézoélectriques s'étend à tous les matériaux présentant un couplage « du troisième ordre symétrique », dont la (piézo)magnétoélasticité linéaire est un autre exemple.

## Références bibliographiques

- [1] Y. Berthaud, M. François, G. Geymonat, Determination of the symetries of an experimentally determined stiffness tensor: application to acoustic measurements, *Int. J. Solids Structures* 35 (31–32) (1998) 4091–4106.
- [2] S. Forte, M. Vianello, Symmetry classes for elasticity tensors, *J. Elasticity* 43 (1996) 81–108.
- [3] S. Forte, M. Vianello, Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors, *Int. J. Engrg. Sci.* 35 (14) (1997) 1317–1326.
- [4] M. Golubitsky, D.G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. I, Springer, 1985.
- [5] L. Landau, E. Lifchitz, *Electrodynamique des Milieux Continus*, Mir, 1969.
- [6] D. Royer, E. Dieulesaint, *Ondes élastiques dans les solides*, Tome I, Masson, 1996.
- [7] J.A. Schouten, *Tensor Analysis for Physicists*, Clarendon Press, 1954.
- [8] A.J.M. Spencer, A note on the decomposition of tensors into traceless symmetric tensors, *Int. J. Engrg. Sci.* 8 (1970) 475–481.
- [9] Q.-S. Zheng, J.P. Boehler, The description, classification and reality of material and physical symmetries, *Acta Mech.* 102 (1994) 73–89.