



HAL
open science

Une inégalité de Cheeger pour le spectre de Steklov

Pierre Jammes

► **To cite this version:**

| Pierre Jammes. Une inégalité de Cheeger pour le spectre de Steklov. 2013. hal-00794974v1

HAL Id: hal-00794974

<https://hal.science/hal-00794974v1>

Preprint submitted on 26 Feb 2013 (v1), last revised 26 Sep 2015 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une inégalité de Cheeger pour le spectre de Steklov

Pierre Jammes

ABSTRACT.— We prove a Cheeger inequality for the first positive Steklov eigenvalue. It involves two isoperimetric constants.

MSC2010 : 35P15, 58J50

Soit M une variété compacte à bord et $\gamma \in C^1(M)$, $\rho \in C^0(\partial M)$ deux fonctions densités strictement positives sur M et ∂M respectivement. Le problème aux valeurs propres de Steklov consiste à résoudre l'équation, d'inconnues $\sigma \in \mathbb{R}$ et $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases} \quad (1)$$

où ν est un vecteur unitaire sortant normal au bord. On parle de problème de Steklov homogène quand $\gamma \equiv 1$ et $\rho \equiv 1$, et le cas $\gamma \not\equiv 1$ se rattache au problème de Calderón. L'ensemble des réels σ solutions du problème forme un spectre discret positif noté

$$0 = \sigma_0(M, g, \rho, \gamma) < \sigma_1(M, g, \rho, \gamma) \leq \sigma_2(M, g, \rho, \gamma) \dots \quad (2)$$

C'est le spectre d'un opérateur Dirichlet-Neumann $C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$ défini par $\Lambda_{\rho, \gamma} u = \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma u}{\partial \nu}$, où $\mathcal{H}_\gamma u$ est le prolongement harmonique de u pour la densité γ , c'est-à-dire que $\operatorname{div}(\gamma \nabla(\mathcal{H}_\gamma u)) = 0$. Il est auto-adjoint pour la norme de Hilbert $\|u\|^2 = \int_{\partial M} u^2 \rho dv_g$ (voir [Ba80], [SU90]). Ce spectre possède une caractérisation variationnelle, et on a en particulier pour la première valeur propre :

$$\sigma_1(M, g, \rho, \gamma) = \inf_{\substack{f \in H^1(\overline{M}) \\ \int_{\partial M} f^2 \rho dv_g = 0}} \frac{\int_M |df|^2 \gamma dv_g}{\int_{\partial M} f^2 \rho dv_g}. \quad (3)$$

L'objet de cet article est de donner une minoration de $\sigma_1(M)$ en fonction d'invariants isopérimétriques qui est analogue à l'inégalité de Cheeger pour la première valeur propre du laplacien. Pour ce faire, on introduit les notations suivantes : si D est un domaine de M , on note $\partial_E D = \partial D \cap \partial M$ le bord « extérieur » de D et $\partial_I D = \partial D \setminus \partial_E D$ son bord « intérieur ». Les volumes n et $(n-1)$ -dimensionnels seront calculés relativement aux densités γ et ρ et notés $|\cdot|_\gamma$ et $|\cdot|_\rho$. On pose alors

$$h(M, g, \rho, \gamma) = \inf_{|D|_\gamma \leq \frac{|M|_\gamma}{2}} \frac{|\partial_I D|_\gamma}{|D|_\gamma} \text{ et } h'(M, g, \rho, \gamma) = \inf_{|D|_\gamma \leq \frac{|M|_\gamma}{2}} \frac{|\partial_I D|_\gamma}{|\partial_E D|_\rho}. \quad (4)$$

Quand $\gamma \equiv 1$, la constante h est la constante de Cheeger classique ; la première valeur propre du laplacien de Neumann sur M est minorée par $h^2/4$ ([Ch70]). des analogues dans le cas $\gamma \not\equiv 1$ ont été introduit dans [Br85] et [CO97]. La constante h' intervient spécifiquement dans le problème de Steklov. Après avoir écrit la première version de cet article, j'ai appris que J. Escobar défini une constante presque identique à h' dans [Es97] dans le but de minorer σ_1 . On va ici montrer l'inégalité suivante, qui est plus simple et plus explicite que celle de [Es97] :

Théorème 5. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à bord munie des densités ρ et γ sur ∂M et M . On a $h'(M) > 0$ et $\sigma_1(M) \geq \frac{h(M) \cdot h'(M)}{4}$.

Remarque 6. On peut en fait montrer deux inégalités différentes : si on modifie légèrement les définitions de h et h' en remplaçant la condition $|D|_\gamma \leq |M|_\gamma/2$ par $|\partial_E D|_\rho \leq |\partial M|_\rho/2$ la démonstration reste valide mais les constantes isométriques ne sont plus les mêmes. En particulier, la constante h' est remplacée par la constante définie par Escobar.

Remarque 7. Si on multiplie la métrique par λ^2 ($\lambda > 0$), alors σ_1 et h sont divisées par λ et h' est invariant. Pour des raisons d'homogénéité, on ne peut donc pas avoir une minoration de σ_1 de la forme $c \cdot h^\alpha \cdot h'^\beta$ où $c > 0$, $\alpha \neq 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes universelles. Le cas $\alpha = 1$ et $\beta < 1$ est exclu par l'exemple qui suit.

Exemple 8. Soit (M, g) une variété close. Le spectre de Steklov (homogène) de $M_n = M \times [0, \frac{1}{n}]$ a été calculé dans [CESG11] (lemme 6.1) et $\sigma_1(M_n) \sim \frac{1}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$. On peut encadrer $h(M_n)$ uniformément : étant donné un domaine D de M_n , on considère $2n$ copies de M_n qu'on recolle le long de leurs bords pour obtenir une variété $M \times S^1$ dont la métrique est indépendante de n , et on construit un domaine $D' \subset M \times S^1$ en recollant les domaines D par réflexion le long du bord. On alors $|D'| = 2n|D|$ et $|\partial D'| = 2n|\partial_I D|$ donc $|\partial_I D|/|D| = |\partial D'|/|D'| \geq h(M \times S^1)$ et $h(M_n) \geq h(M \times S^1)$. On considérant un domaine de la forme $D = U \times [0, \frac{1}{n}]$ avec $U \subset M$, on voit que $h(M_n)$ est majoré par un constante.

On peut aussi estimer h' : l'exemple d'un domaine $U \times [0, \frac{1}{n}]$ montre que $h'(M_n) \leq \frac{c}{n}$ pour une constante $c > 0$. Réciproquement, pour un domaine D fixé, $|\partial D_E|$ est indépendant de n et le volume de ∂D_I sur M_n vérifie $|\partial D_I|_n \geq |\partial D_I|_1/n$. Par conséquent, $h'(M_n) \geq h'(M_1)/n$.

On voit que sur cet exemple, l'exposant de h' dans l'inégalité est optimal.

Exemple 9. Dans [GP10] (section 2), A. Girouard et I. Polterovich construisent des exemples de domaines du plan (formés de deux disques qui se chevauchent légèrement ou reliés par une anse fine) pour lesquels σ_1 , h et h' tendent vers zéro. Contrairement à la remarque et l'exemple qui précèdent, le volume reste borné inférieurement et supérieurement.

Démonstration du théorème : On fixe une métrique g et des densités ρ et γ . Pour montrer que $h' > 0$ il suffit de traiter le cas homogène, le cas général s'y ramène car les densités sont continues, donc encadrées par des constantes strictement positives. On se donne un $\varepsilon \in]0, 1]$ dont la valeur précise sera fixée plus tard. Si $|\partial_E D| \leq (1 - \varepsilon)|\partial M|$, J. Escobar montre dans [Es99] que le rapport $|\partial_I D|/|\partial_E D|$ est minoré par une constante $K(\varepsilon) > 0$ (il ne traite que le cas $\varepsilon = \frac{1}{2}$ mais sa démonstration se généralise immédiatement). Si $|\partial_E D| \geq (1 - \varepsilon)|\partial M|$ on utilise le fait que le volume de $M \setminus D$ est minoré par $|M|/2$ pour tout D , et donc qu'il existe une constante $C(g) > 0$ telle que $|\partial(M \setminus D)| > C$. On a alors $|\partial_I D| = |\partial(M \setminus D)| - |\partial M \setminus \partial_E D| \geq C + |\partial_E D| - |\partial M| \geq C - \varepsilon|\partial M|$. En choisissant ε suffisamment petit par rapport à C et $|\partial M|$, on a donc $|\partial_I D| \geq \varepsilon|\partial M| \geq \varepsilon|\partial_E D|$ ce qui permet de conclure.

On montre maintenant la minoration de σ_1 . Afin d'alléger les notations on n'explicitera pas les références aux densités, celles-ci étant généralement évidentes. Soit f une fonction propre sur M de la première valeur propre $\sigma_1(M)$. On choisit son signe

de sorte que $M^+ = f^{-1}([0, +\infty[)$ vérifie $|M^+| \leq |M|/2$ (ou $|\partial_E M^+| \leq |\partial M|/2$ si on suit la remarque 6). La fonction f restreinte à M^+ est alors la première fonction propre du problème de Steklov sur M^+ avec condition de Dirichlet sur $\partial_I M^+$, pour la valeur propre σ_1 . Rappelons que problème de Steklov avec condition de Dirichlet sur une partie du bord de la variété est bien défini, que son spectre est strictement positif et qu'on a aussi la relation $\sigma_1 = \int_{M^+} |df|^2 / \int_{\partial M^+} f^2$ (cf. [Ag05]). Par conséquent on peut écrire, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\int_{M^+} |df|^2}{\int_{\partial M^+} f^2} = \frac{(\int_{M^+} f^2) (\int_{M^+} |df|^2)}{(\int_{M^+} f^2) (\int_{\partial M^+} f^2)} \geq \frac{(\int_{M^+} f |df|)^2}{(\int_{M^+} f^2) (\int_{\partial M^+} f^2)} \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{(\int_{M^+} |d(f^2)|)^2}{(\int_{M^+} f^2) (\int_{\partial M^+} f^2)} = \frac{1}{4} \frac{\int_{M^+} |d(f^2)|}{\int_{M^+} f^2} \cdot \frac{\int_{M^+} |d(f^2)|}{\int_{\partial M^+} f^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

En posant $D_t = f^{-1}([\sqrt{t}, +\infty[)$, la formule de la co-aire ([KP08], ch. 5) donne les trois relations

$$\int_{M^+} |d(f^2)| = \int_{t \geq 0} |\partial_I D_t| dt, \quad \int_{M^+} f^2 = \int_{t \geq 0} |D_t| dt \quad \text{et} \quad \int_{\partial M^+} f^2 = \int_{t \geq 0} |\partial_E D_t| dt. \quad (11)$$

Comme $|D_t| \leq |M^+| \leq |M|/2$ (ou $|\partial_E D_t| \leq |\partial_E M^+| \leq |\partial M|/2$) pour tout $t \geq 0$, on en déduit que $\int_{M^+} |d(f^2)| \geq h \int_{M^+} f^2$ et $\int_{M^+} |d(f^2)| \geq h' \int_{\partial M^+} f^2$, et donc que $\sigma_1 \geq \frac{1}{4} h h'$. ■

Références

- [Ag05] M. S. AGRANOVICH – « On a mixed Poincaré-Steklov Type Spectral Problem in a Lipschitz Domain », *Russ. J. Math. Phys.*, 13 (3), p. 239–244, 2005.
- [Ba80] C. BUNDLE – *Isoperimetric inequalities and applications*, volume 7 de *Monographs and Studies in Mathematics*, Pitman, 1980.
- [Br85] R. BROOKS – « The bottom of the spectrum of a riemannian covering », *J. Reine Angew. Math.*, 357, p. 101–114, 1985.
- [CESG11] B. COLBOIS, A. EL SOUFI et A. GIROUARD – « Isoperimetric control of the Steklov spectrum », *J. Funct. Anal.*, 261 (5), p. 1384–1399, 2011.
- [Ch70] J. CHEEGER – « A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian », Dans *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, Princeton Univ. Press, 1970.
- [CO97] S.-Y. CHENG et K. ODEN – « Isoperimetric inequalities and the gap between the first and second eigenvalues of an Euclidean domain », *J. Geom. Anal.*, 7 (2), p. 217–239, 1997.
- [Es97] J. F. ESCOBAR – « The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue », *J. Funct. Anal.*, 150 (2), p. 544–556, 1997.
- [Es99] J. F. ESCOBAR – « An isoperimetric Inequality and the first Steklov Eigenvalue », *J. Funct. Anal.*, 165 (1), p. 101–116, 1999.
- [GP10] A. GIROUARD et I. POLTEROVICH – « On the Hersch-Payne-Schiffer inequalities for Steklov eigenvalues », *Functional Analysis and its Applications*, 44 (2), p. 106–117, 2010.
- [KP08] S. T. KRANTZ et H. R. PARKS – *Geometric Integration Theory*, Birkäuser, 2008.
- [SU90] J. SYLVESTER et G. UHLMANN – « The Dirichlet to Neumann map and applications », Dans *Inverse problems in partial differential equations (Arcata, CA, 1989)*, pages 101–139, SIAM, 1990.