



HAL
open science

Nombres dyadiques

Claire David

► **To cite this version:**

| Claire David. Nombres dyadiques. 2013. hal-00794001

HAL Id: hal-00794001

<https://hal.science/hal-00794001>

Preprint submitted on 25 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Au sujet des intégrales de Wallis : une
démonstration sans récurrence pour les termes
d'indice pair

Claire David

25 février 2013

Claire David

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
Laboratoire Jacques Louis Lions - UMR 7598
Boîte courrier 187, 4 place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

On rappelle qu'un nombre dyadique est une fraction rationnelle de la forme $\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Considérons maintenant l'ensemble des rationnels dyadiques, i.e. de la forme $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Une propriété remarquable de l'ensemble des rationnels dyadiques est sa densité dans \mathbb{R} :

tout nombre réel est donc limite d'une suite de nombres rationnels dyadiques. Ainsi, tout réel r peut être approché à $\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, par ses valeurs approchées dyadiques par défaut et par excès ; comme

$$E(2^n r) - 1 < E(2^n r) \leq 2^n r < E(2^n r) + 1 \quad (1)$$

on obtient en effet :

$$\frac{1}{2^n} E(2^n r) - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} E(2^n r) \leq r < \frac{1}{2^n} E(2^n r) + \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

On rappelle aussi que tout réel r de l'intervalle $[0, 1[$ admet un développement en base 2 de la forme :

$$r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} \quad , \quad r_n \in \{0, 1\} \quad (3)$$

L'intérêt d'une décomposition en base 2, qui est binaire - des 0 et des 1 - est la facilité d'application à des calculs numériques - l'ordinateur ne faisant que du binaire. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point, qui est une des motivations de la théorie des ondelettes.

Considérons maintenant l'espace \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}^*$.

La topologie de \mathbb{R}^d fait, naturellement, appel à la boule unité $\mathcal{B}(0, 1)$, qui permet

facilement de se « repérer » dans \mathbb{R}^d : il y a les éléments situés à l'intérieur de cette boule, et les autres.

Utilisons, maintenant, les nombres dyadiques pour cette topologie. Pour commencer, considérons les valeurs approchées dyadiques de 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{2^n} E(2^n r) - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} E(2^n r) \leq r < \frac{1}{2^n} E(2^n r) + \frac{1}{2^n} \quad (4)$$

et, en particulier, pour $n = 2$:

$$\frac{1}{2^2} E(2^2) - \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2^2} E(2^2) \leq 1 < \frac{1}{2^2} E(2^2) + \frac{1}{2^2} \quad (5)$$

et donc, bien évidemment :

$$1 - \frac{1}{2^2} \leq 1 < 1 + \frac{1}{2^2} \quad (6)$$

puis :

$$\frac{3}{4} \leq 1 \quad (7)$$

ce qui conduit à considérer non plus la boule unité, mais la boule $\mathcal{B}(O; \frac{3}{4})$.

Cherchons maintenant à obtenir un recouvrement de \mathbb{R}^d par des couronnes « dyadiques », centrées en O , dont le rayon intérieur tende vers zéro, et sur lesquelles on puisse définir des distributions à supports disjoints. Il est naturel, pour la première couronne, de choisir $\frac{3}{4}$ comme rayon intérieur. Tout élément x de cette couronne sera donc tel que :

$$\|x\| \geq \frac{3}{4} \quad (8)$$

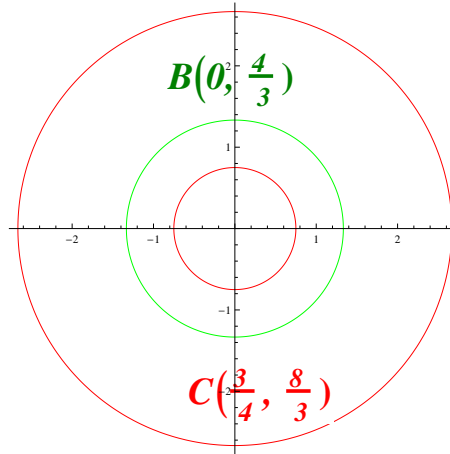
L'idée du recouvrement et des « supports à disjointre » conduit alors à considérer, en même temps, les éléments x' tels que :

$$\|x'\| \leq \frac{3}{4} \quad (9)$$

soit :

$$\frac{1}{\|x'\|} \geq \frac{4}{3} \quad (10)$$

et, par là-même, la boule $\mathcal{B}\left(O; \frac{4}{3}\right)$.



La boule $\mathcal{B}\left(O; \frac{4}{3}\right)$ et la couronne $\mathcal{C}\left(O; \frac{3}{4}; \frac{8}{3}\right)$

Pour tout réel positif r , il existe un entier naturel n_r tel que :

$$2^{n_r+2} \leq 3r \leq 2^{n_r+3} \quad (11)$$

et donc :

$$2^{n_r} \frac{4}{3} \leq r \leq 2^{n_r} \frac{8}{3} \quad (12)$$

puis :

$$\frac{4}{3} \leq \frac{r}{2^{n_r}} \leq \frac{8}{3} \quad (13)$$

Ainsi, pour tout x de \mathbb{R}^d , il existe un entier n_x tel que :

$$\frac{4}{3} \leq \frac{\|x\|}{2^{n_x}} \leq \frac{8}{3} \quad (14)$$

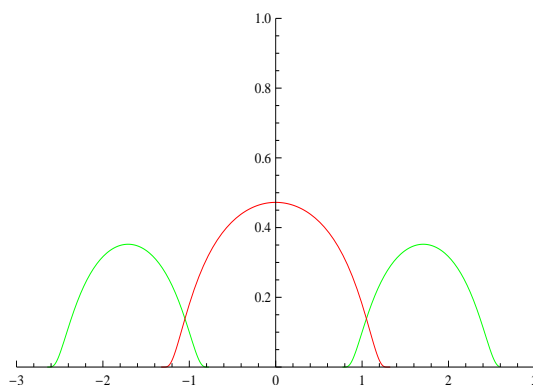
ce qui signifie que $\frac{x}{2^{n_x}}$ appartient à la couronne $\mathcal{C}\left(O; \frac{3}{4}; \frac{8}{3}\right)$.

x appartient donc à la couronne $\mathcal{C}\left(O; 2^{n_x} \frac{3}{4}; 2^{n_x} \frac{8}{3}\right)$.

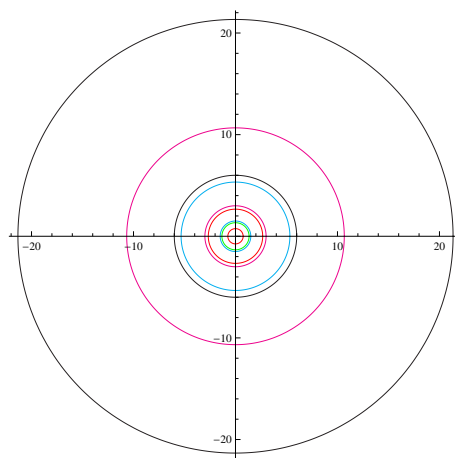
Tout élément de \mathbb{R}^d peut donc être « localisé » dans une couronne de la forme $\mathcal{C}\left(O; 2^n \frac{3}{4}; 2^n \frac{8}{3}\right)$.

Cela amène alors naturellement à la décomposition dyadique de l'unité [1] : il existe deux fonctions radiales $\chi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{B}\left(O; \frac{4}{3}\right)\right)$ et $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{C}\left(O; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)\right)$, à valeurs dans $[0, 1]$, telles que, pour tout ξ de \mathbb{R}^d :

$$\chi(x) + \sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 1 \tag{15}$$



Les fonctions φ et χ .



Les couronnes

0.1 Application à la théorie des profils

L'idée est la suivante : montrer que la solution des équations de Navier-Stokes se décompose sous forme « dyadique » de la façon suivante :

i. Dans le cas de « non-explosion » :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 \Lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \mathcal{NS}(\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)})(x, t) \quad , \quad n \in N^* \quad (16)$$

où σ est une permutation de l'ensemble $\{1, 2\}$:

$\forall i \in \{1, 2\}$:

$$\sigma(i) \in \{1, 2\} \quad (17)$$

et où, pour tout entier n de $\{1, \dots, N\}$, $n \leq N$, et tout i de $\{1, 2\}$, $\sigma^k(i)$ désigne l'itérée $k^{\text{ème}}$ de $\sigma(i)$.

$\mathcal{NS}(\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)})$ désigne la solution de l'équation de Navier-Stokes associée au profil $\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}$, et

$$\frac{1}{\lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}} \mathcal{NS}(\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}) \left(\frac{t}{\lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}^2}, \frac{x - x \lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}}{\lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)}} \right) \quad (18)$$

Pour alléger les écritures, on notera désormais :

$$\gamma_{i, \sigma^n(i)} \quad (19)$$

pour

$$\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \quad (20)$$

et

$$\Lambda_{i, \sigma^n(i)} \quad (21)$$

pour

$$\Lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{n-1}(i) \sigma^n(i)} \quad (22)$$

Les profils intervenant dans cette décomposition sont définis de façon récursive et orthogonale, par :

$$\gamma_1 \in \mathcal{B}(0, 1) \quad , \quad \gamma_2 \in \mathcal{C}_1 \quad (23)$$

où \mathcal{C}_1 est la couronne dyadique $\mathcal{C}\left(O; \frac{r_{int}}{2}; 2r_{ext}\right)$, puis :

$$\gamma_{1,1} \in \mathcal{B}(0, 1)^+ \quad , \quad \gamma_{1,2} \in \mathcal{C}_1^+ \quad (24)$$

ii. Dans le cas de l'« explosion », la solution présente une structure « fractale », de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 \Lambda_{i, \sigma^\infty(i)} \mathcal{NS}(\gamma_{i, \sigma^\infty(i)})(x, t) \quad (25)$$

avec des notations analogues à celle du *i.* :

$$\gamma_{i, \sigma^\infty(i)} \quad (26)$$

pour

$$\gamma_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^\infty(i)} \quad (27)$$

et :

$$\Lambda_{i, \sigma^\infty(i)} \quad (28)$$

pour

$$\Lambda_{i, \sigma(i), \dots, \sigma^\infty(i)} \quad (29)$$

Définition 0.1.1. Sous-profils (faibles)

On appelle *sous-profil (faible)* un champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \tilde{\gamma}(x)$ auquel on puisse, par construction, associer un profil γ , un cœur x , et une échelle λ , tels que, grâce aux propriétés d'invariance par changement d'échelle :

$$\|\tilde{\gamma}\| = \|\gamma\| \quad (30)$$

Définition 0.1.2. Sous-profils (forts)

On appelle *sous-profil (fort)* un champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \tilde{\gamma}(x)$ auquel on puisse, par construction, associer une famille de profils $\gamma_j, j = 1, \dots, N$, une famille de cœurs $x_j, j = 1, \dots, N$, et une famille d'échelles $\lambda_j, j = 1, \dots, N$, vérifiant les conditions d'orthogonalité :

$$j \neq j' \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} + \frac{\lambda_{j'}}{\lambda_j} \right) = +\infty \\ \text{ou} \\ \frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} \equiv 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_j - x_{j'}|}{\lambda_j} = +\infty \end{cases} \quad (31)$$

Définition 0.1.3. Voisinage extérieur d'une boule

On appellera voisinage extérieur d'ordre $\varepsilon > 0$ d'une boule $\mathcal{B}(x_B, r_B)$, de centre $x_B \in \mathbb{R}^d$, de rayon $r_B \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}(x_B, r_B)} + \varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{B}(x_B, r_B)} \quad , \quad r_B < |x - x_B| < r_B + \varepsilon \right\} \quad (32)$$

Définition 0.1.4. Voisinage extérieur d'une couronne

On appellera *voisinage extérieur d'ordre $\varepsilon > 0$* d'une couronne $\mathcal{C}(x_C; r_C^{int}, r_C^{ext})$, de centre $x_C \in \mathbb{R}^d$, de rayon intérieur $r_C^{int} \in \mathbb{R}^*$, de rayon extérieur $r_C^{ext} \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble

$$\overline{\mathcal{C}(x_C; r_C^{int}, r_C^{ext})} + \varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{C}(x_C; r_C^{int}, r_C^{ext})} \quad , \quad r_C^{ext} < |x - x_C| < r_C^{ext} + \varepsilon \right\} \quad (33)$$

Définition 0.1.5. Largeur d'une couronne

On appellera *largeur* d'une couronne $\mathcal{C}(x_{\mathcal{C}}; r_{\mathcal{C}}^{int}, r_{\mathcal{C}}^{ext})$, de centre $x_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^d$, de rayon intérieur $r_{\mathcal{C}}^{int} \in \mathbb{R}^*$, de rayon extérieur $r_{\mathcal{C}}^{ext} \in \mathbb{R}^*$, le réel positif

$$r_{\mathcal{C}}^{ext} - r_{\mathcal{C}}^{int} \quad (34)$$

Dans un premier temps, montrons que tout champ de vecteurs de l'espace \mathbb{R}^d ($d = 3$), $x \mapsto v(x)$, donnée initiale de l'équation de \mathcal{NS} , est la somme d'une série de sous-profils $\tilde{\gamma}_i$, $i \in \mathbb{N}$. On cherche à en déduire la densité de « l'espace des profils » dans \mathbb{R}^d , ce qui revient finalement à « orthogonaliser » la famille de sous-profils.

Grâce à la décomposition dyadique, on écrit, dans un premier temps, pour tout x de \mathbb{R}^d :

$$v(x) = v(x) \chi(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right) \quad (35)$$

où $\chi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{B}\left(0, \frac{4}{3}\right)\right)$ et $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathcal{C}\left(0; \frac{3}{4}, \frac{8}{3}\right)\right)$

On notera, dans ce qui suit, $\mathcal{B}_u = \mathcal{B}\left(0, \frac{4}{3}\right)$, qui est donc notre « boule unité », et, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{C}_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^d / \frac{3}{4} \leq \left\| \frac{x}{2^j} \right\| \leq \frac{8}{3} \right\} \quad (36)$$

(Je n'exclus pas de renormaliser et considérer la boule unité et des couronnes plus « naturelles ».)

On notera, dans ce qui suit, r_u le rayon de la boule unité.

Grâce au recouvrement de \mathbb{R}^d par la boule \mathcal{B}_u et les couronnes dyadiques \mathcal{C}_j , $j \in \mathbb{N}$, on a donc une « décomposition dyadique en champs de vecteurs » du champ de vecteurs v .

Dans un premier temps, on suppose que le champ de vecteurs v est $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. La décomposition infinie en sous-profils faibles est donc, finalement, une somme finie. La première possibilité est, tout simplement, d'associer à chaque sous-profil (faible)

$x \mapsto v(x) \chi(x)$ ou $x \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right)$ un profil γ_j auquel on associe un cœur dans la boule unité pour le sous-profil faible $x \mapsto v(x) \chi(x)$, et dans la couronne \mathcal{C}_j pour chacun des sous-profils faibles $x \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right)$.

Afin que les conditions d'orthogonalité de la famille de profils ainsi obtenue soient respectées, on leur associe, comme échelles, 1 pour le profil associé au sous-profil faible $x \mapsto v(x) \chi(x)$, et λ_j pour chacun des profils respectivement associés aux sous-profils faibles $x \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right)$, où la suite $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est telle que :

$$\lambda_0 = 1 \quad , \quad \lambda_{j+1} = \frac{\lambda_j}{2^{N+j}} \quad (37)$$

où N est un entier choisi $\gg 1$.

La famille de profils ainsi construite vérifie bien les conditions d'orthogonalité attendues.

La question est alors la suivante : que représente la somme de la série de profils ainsi obtenue ?

Grâce aux conditions d'orthogonalité et d'invariance par changement d'échelle, la solution de \mathcal{NS} obtenue par la somme de cette série de profils est globale.

Evidemment, on veut montrer que la somme de cette série de profils est égale au champ de vecteurs v initial.

L'extrême avantage de cette décomposition serait, aussi, à partir d'un champ de vecteurs donnée initiale de \mathcal{NS} , d'obtenir directement la forme des profils qui nous intéressent, car, a priori, hormis le fait qu'ils vérifient des conditions d'orthogonalité et génèrent des solutions de \mathcal{NS} vérifiant aussi un certain nombre de conditions, on ne sait pas grand chose d'eux ...

A cet effet, la seule solution pour le démontrer semble être d'utiliser une décomposition des sous-profils (version forte) en profils. Là, chaque sous-profil (faible) $\tilde{\gamma}_j$ génère un nombre N_j de profils. Il faudrait pouvoir montrer que, pour tout j , $N_j = 1$, ce qui serait en cohérence avec la « décomposition naturelle », grâce aux sous-profils (version faible), obtenue ci-dessus.

Pour le démontrer, un raisonnement par l'absurde semblerait le plus approprié.

Au champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \chi(x)$, on associe donc la décomposition en profils

$$v(x) \chi(x) = \sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{\lambda_{i,0}} \varphi^{i,0} \left(\frac{x - x_{i,0}}{\lambda_{i,0}} \right) + \psi^{N_0}(x) \quad (38)$$

où, pour tout i de $\{1, \dots, N_0\}$, $x_{i,0} \in \mathcal{B}_u$, $\lambda_{1,0} = 1$, et, pour tout i de $\{1, \dots, N_0 - 1\}$, $\lambda_{i+1,0} = \frac{\lambda_{i,0}}{2^{N+i}}$, $N \in \mathbb{N} \gg 1$, de façon à ce que les conditions d'orthogonalité soient vérifiées.

Le sous-profil $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \chi(x)$ se décompose donc en somme de N_0 profils, modulo un reste ψ^{N_0} .

De façon très intéressante, il est à noter que, du fait de la présence de la fonction indicatrice $x \mapsto \chi(x)$, qui est identiquement nulle en dehors de la boule unité, la décomposition en profils ainsi obtenue sera telle que le reste ψ^{N_0} sera identiquement nul en dehors de cette même boule unité; d'autre part, le profil $x \mapsto \frac{1}{\lambda_{i,0}} \varphi^{i,0} \left(\frac{x - x_{i,0}}{\lambda_{i,0}} \right)$ ne sera non identiquement nul que si :

$$\left\| \frac{x - x_{i,0}}{\lambda_{i,0}} \right\| \leq r_u \quad (39)$$

soit :

$$\|x - x_{i,0}\| \leq \lambda_{i,0} r_u \quad (40)$$

ce qui revient à se placer sur une couronne centrée en $x_{i,0}$, de largeur $\lambda_{i,0} r_u$.

$x_{i,0}$ étant donné, il existe donc une unique couronne du recouvrement considéré qui contienne l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant cete dernière condition.

Il faut, ensuite, déterminer une décomposition du deuxième sous-profil

$x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \varphi \left(\frac{x}{2^1} \right)$ en somme de N_1 profils $x \mapsto \frac{i}{\lambda_{i,1}} \varphi^{i,1} \left(\frac{x - x_{i,1}}{\lambda_{i,1}} \right)$, modulo un reste ψ_{N_1} , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité avec les N_0 premiers profils soient vérifiées : on choisit de considérer un premier cœur $x_{1,1}$ situé dans un voisinage extérieur d'ordre $\frac{1}{2^N}$ de la forme $\overline{\mathcal{B}_u} + \frac{1}{2^N}$ de $\overline{\mathcal{B}_u}$, des échelles $\lambda_{i,1}$, $i = 1, \dots, N_1$, telles que $\lambda_{1,1} = 1$, et, pour tout i de $\{1, \dots, N_1 - 1\}$, $\lambda_{i+1,1} = \frac{\lambda_{i,1}}{2^{N+i}}$, où $N \in \mathbb{N} \gg 1$ est l'entier introduit plus haut.

De même que précédemment, du fait de la présence de la fonction $x \mapsto \varphi \left(\frac{x}{2^1} \right)$, qui est identiquement nulle en dehors de la couronne \mathcal{C}_1 , la décomposition en profils ainsi obtenue sera telle que le reste ψ^{N_1} sera identiquement nul en dehors de cette même couronne; d'autre part, le profil $x \mapsto \frac{1}{\lambda_{i,10}} \varphi^{i,1} \left(\frac{x - x_{i,1}}{\lambda_{i,1}} \right)$ ne sera non

identiquement nul que si :

$$\frac{3}{4} \leq \left\| \frac{x - x_{i,1}}{2 \lambda_{i,1}} \right\| \leq \frac{8}{3} \quad (41)$$

soit :

$$\frac{3 \times 2 \lambda_{i,1}}{4} \leq \|x - x_{i,1}\| \leq \frac{8 \times 2 \lambda_{i,1}}{3} \quad (42)$$

ce qui revient à se placer sur une couronne centrée en $x_{i,1}$, de rayon intérieur $\frac{3 \times 2 \lambda_{i,1}}{4}$, et de rayon extérieur $\frac{8 \times 2 \lambda_{i,1}}{3}$.

On construit alors la décomposition du troisième sous-profil $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x) \varphi\left(\frac{x}{2^2}\right)$ en somme de N_2 profils $x \mapsto \frac{1}{\lambda_{i,2}} \varphi^{i,2} 2 \left(\frac{x - x_{i,2}}{\lambda_{i,2}}\right)$, modulo un reste ψ_{N_2} , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité avec les premiers profils soient vérifiées : on choisit de considérer des cœurs $x_{i,2}$, $i = 1, \dots, N_2$, situés dans un voisinage extérieur de la forme $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_1 + \frac{1}{2^N}$ de $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_1$, des échelles $\lambda_{1,2} = 1$ et, pour tout i de $\{1, \dots, N_2 - 1\}$, $\lambda_{i+1,2} = \frac{\lambda_{i,2}}{2^{N+i}}$, où $N \in \mathbb{N} \gg 1$ est l'entier introduit plus haut.

De proche en proche, par récurrence, on obtient ainsi une suite de profils $(\varphi^i)_{i \in \mathbb{N}}$, et une suite de restes $(\psi^{N_i})_{i \in \mathbb{N}}$, conduisant à la décomposition dyadique suivante, pour tout x de l'espace \mathbb{R}^d :

$$v(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{\lambda_{i,n}} \varphi^n \left(\frac{x - x_{i,n}}{\lambda_{i,n}} \right) + \psi_i(x) \right\} \quad (43)$$

où, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\lambda_{1,n} = \lambda_{2,n} = 2^N \lambda_{1,n-1} \quad (44)$$

avec $x_{i,n}$ situé dans un voisinage extérieur de la forme $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_n + \frac{1}{\lambda_{i,n}}$ de $\overline{\mathcal{B}_u} + \mathcal{C}_n$.

Il reste à montrer :

\rightsquigarrow la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{\lambda_{i,n}} \varphi^n \left(\frac{x - x_{i,n}}{\lambda_{i,n}} \right)$, et la convergence de la

somme des restes $\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x)$ vers 0 ; a priori, cette convergence est assurée

par le fait que chaque reste ψ_i n'est non identiquement nul que sur une des composantes du recouvrement dyadique de l'espace. Ainsi, tout x de l'espace \mathbb{R}^d pouvant être « localisé » soit dans la boule unité, soit dans l'une des couronnes dyadiques \mathcal{C}_{i_x} , il en résulte, dans le cas où x est localisé dans la couronne \mathcal{C}_{i_x} :

$$\begin{aligned} \left\| v(x) - \sum_{i=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{\lambda_{i,n}} \varphi^n \left(\frac{x - x_{i,n}}{\lambda_{i,n}} \right) + \psi_i(x) \right\} \right\| &= \left\| v(x) - \left\{ \sum_{i=1}^{N_{i_x}} \frac{1}{\lambda_{i_x,n}} \varphi^n \left(\frac{x - x_{i_x,n}}{\lambda_{i_x,n}} \right) + \psi_{i_x}(x) \right\} \right\| \\ &\leq \left\| v(x) - \sum_{i=1}^{N_{i_x}} \frac{1}{\lambda_{i_x,n}} \varphi^n \left(\frac{x - x_{i_x,n}}{\lambda_{i_x,n}} \right) - \psi_{i_x}(x) \right\| \end{aligned} \quad (45)$$

Par construction, le reste ψ_{i_x} tend vers zéro lorsque x est donné dans \mathcal{C}_{i_x} . La convergence de la somme des restes $\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x)$ vers 0 en découle, cette somme pouvant elle-même être considérée comme une décomposition dyadique.

Propriété 0.1.1. *Pour tout champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v(x)$ à support compact, borné dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, et tout entier naturel n :*

$$E \left(2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) - 1 < 2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < E \left(2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) + 1 \quad (46)$$

\Downarrow

$$\frac{1}{2^n} E \left(2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) - \frac{1}{2^n} < \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \frac{1}{2^n} E \left(2^n \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) + \frac{1}{2^n} \quad (47)$$

On en déduit alors, grâce aux propriétés d'invariance par changement d'échelle que, pour toute échelle λ , et tout cœur x_0 :

$$\frac{1}{2^n} E \left(2^n \left\| \frac{1}{\lambda_{i,n}} v \left(\frac{\cdot - x_0}{\lambda_{i,n}} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) - \frac{1}{2^n} < \left\| \frac{1}{\lambda_{i,n}} v \left(\frac{\cdot - x_0}{\lambda_{i,n}} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \frac{1}{2^n} E \left(2^n \left\| \frac{1}{\lambda_{i,n}} v \left(\frac{\cdot - x_0}{\lambda_{i,n}} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right) + \frac{1}{2^n} \quad (48)$$

Remarque 0.1.1.

Sur une idée de Jean-Yves Chemin :

Pourrait-on, à partir d'un champ de vecteurs de \mathbb{R}^d , borné, à support compact, construire « à la main », une donnée initiale générant une solution globale ?

A cet effet, considérons un tel champ v , borné dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$, à support compact contenu dans la boule $\mathcal{B}(O, r)$ de centre O , de rayon $r > 0$.

Compte tenu de l'identité :

$$\|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \quad (49)$$

et des propriétés d'invariance par changement d'échelle et translations, on a, pour tout entier naturel n , et tout cœur x_n de l'espace \mathbb{R}^d :

$$\|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} = \left\| \frac{1}{2^n} v \left(\frac{\cdot - x_n}{2^n} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \quad (50)$$

où on désigne par $v \left(\frac{\cdot - x_n}{2^n} \right)$ le champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v \left(\frac{x - x_n}{2^n} \right)$.

Pour tout entier naturel n , et tout cœur $x_n \in \mathbb{R}^d$:

$$\left\| \frac{x - x_n}{2^n} \right\| < r \Leftrightarrow \|x - x_n\| < 2^n r \quad (51)$$

Il est donc naturel de considérer un recouvrement de l'espace par des couronnes \mathcal{C}_n , de centre O , de rayon intérieur $2^n r$, et de rayon extérieur $2^{n+1} r$.

A chacune de ces couronnes, on associe le champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v_n(x) = \frac{1}{2^n} v \left(\frac{x - x_n}{2^n} \right)$, où le cœur x_n appartient à la couronne \mathcal{C}_n .

Claire David

Pour gérer une solution globale, il ne faut pas qu'il y ait de sauts de discontinuité du champ de vecteurs donn e initiale lors du passage d'une couronne à l'autre.

Le problème peut être résolu par un procédé de lissage consistant à considérer, pour tout réel $\varepsilon > 0$, le champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v_\varepsilon(x) = \frac{1}{2^n r - \varepsilon} v\left(\frac{x - x_{n,\varepsilon}}{2^n r}\right)$, où le cœur $x_{n,\varepsilon}$ appartient à la frontière entre la couronne \mathcal{C}_n et la couronne \mathcal{C}_n

Remarque 0.1.2. Au sujet des profils

Considérons un champ v , borné dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$, à support compact contenu dans la boule $\mathcal{B}(O, r)$ de centre O , de rayon $r > 0$.

Compte tenu des propriétés d'invariance par changement d'échelle et translations, on a, pour tout réel $\lambda > 0$, et tout cœur $x_{\text{cœur}}$ de l'espace \mathbb{R}^d :

$$\|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} = \left\| \frac{1}{\lambda} v \left(\frac{\cdot - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \quad (52)$$

où on désigne par $v \left(\frac{\cdot - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right)$ le champ de vecteurs $x \in \mathbb{R}^d \mapsto v \left(\frac{x - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right)$.

Le champ v étant à support compact contenu dans la boule $\mathcal{B}(O, r)$, pour que le champ $v \left(\frac{\cdot - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right)$ ne soit pas identiquement nul, il faut donc :

$$\left\| \frac{\cdot - x_{\text{cœur}}}{\lambda} \right\| < r \Leftrightarrow \|x - x_{\text{cœur}}\| < \lambda r \quad (53)$$

ce qui signifie donc que x doit appartenir à la boule $\mathcal{B}(x_{\text{cœur}}, \lambda r)$ de centre $x_{\text{cœur}}$ et de rayon λr .

Considérons, maintenant, deux échelles λ_i et λ_j , et les coeurs associés x_i et x_j , de façon à ce que les conditions d'orthogonalité soient vérifiées :

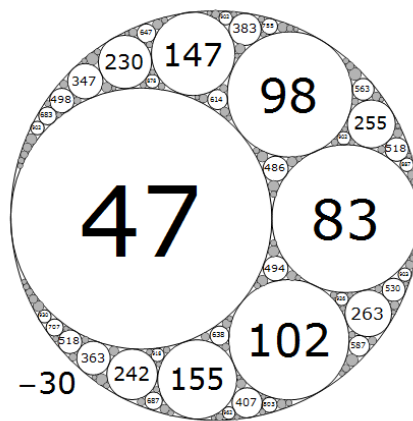
$$j \neq j' \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} + \frac{\lambda_{j'}}{\lambda_j} \right) = +\infty \\ \text{ou} \\ \frac{\lambda_j}{\lambda_{j'}} \equiv 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_j - x_{j'}|}{\lambda_j} = +\infty \end{cases} \quad (54)$$

Générer une solution globale à partir d'une famille de champs $v \left(\frac{\cdot - x_i}{\lambda_i} \right)$, $i \in I$, de façon à ce que les conditions d'orthogonalité ci-dessus soient vérifiées, revient donc à obtenir un recouvrement/pavage de l'espace \mathbb{R}^d par des boules \mathcal{B}_i telles que :

- i.* deux boules voisines (ou « proches ») seront telles que le rayon de la première sera soit très grand, soit très petit par rapport à celui de la seconde ;
- ii.* deux boules éloignées auront des rayons équivalents.



On tombe finalement sur un problème de géométrie - qui ressemble fortement aux cercles de Descartes :



Pour générer une solution globale, il ne faut pas qu'il y ait de sauts de discontinuité du champ de vecteurs donnée initiale lors du passage d'une boule à l'autre.

Le problème peut être résolu par un procédé de lissage (A PRECISER).

Claire David

Bibliographie

- [1] J.Y. Chemin et al., *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Springer, 2011.