



HAL
open science

Modélisation TS et commande H-infinie d'une machine de rééducation des membres inférieurs

Lynda Seddiki, Kevin Guelton, Said Moughamir, Badr Mansouri, J. Zaytoon

► **To cite this version:**

Lynda Seddiki, Kevin Guelton, Said Moughamir, Badr Mansouri, J. Zaytoon. Modélisation TS et commande H-infinie d'une machine de rééducation des membres inférieurs. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 2007, 41 (2), pp.199-218. 10.3166/jesa.41.199-218 . hal-00793231

HAL Id: hal-00793231

<https://hal.science/hal-00793231v1>

Submitted on 21 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation T-S et commande H_∞ d'une machine de rééducation des membres inférieurs

**Lynda Seddiki — Kevin Guelton — Saïd Moughamir
Badr Mansouri — Janan Zaytoon**

*CRéSTIC, Centre de Recherche en Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication
Université de Reims Champagne-Ardenne
Moulin de la housse, BP 1039, F-51687, Reims cedex 2
kevin.guelton@univ-reims.fr*

RÉSUMÉ. Ce papier propose une commande non linéaire pour une machine de rééducation des membres inférieurs basée sur un multimodèle de type Takagi-Sugeno (T-S). Une loi de commande de type « parallel distributed compensation » est utilisée pour stabiliser le système en boucle fermée. L'effort de l'utilisateur appliqué au bras de la machine est considéré comme une perturbation externe à la dynamique du système. De plus, afin d'atténuer cette perturbation, un critère H_∞ est appliqué avec des conditions de stabilité pour une classe de modèles T-S perturbés. Enfin, un générateur de consigne permettant la conduite volontaire du système par l'utilisateur est spécifié par une machine à états discrets.

ABSTRACT. This paper deals with the nonlinear control of a lower limbs isokinetic rehabilitation device based on a Takagi-Sugeno modelling. A Parallel Distributed Compensation control law is used to stabilize the closed-loop system in the whole operational space. The human force applied to the device's arm is considered as an external disturbance to the system dynamics. To attenuate this disturbance, an H_∞ criterion is considered and classical stability conditions were adapted for a class of external perturbed T-S model. The voluntary control of the movement by the patient is finally proposed with the use of a discrete state machine.

MOTS-CLÉS: machine de rééducation, commande Takagi-Sugeno, critère H_∞ , stabilité, LMI.

KEYWORDS: rehabilitation device, Takagi-Sugeno control, H_∞ criterion, stability, LMI.

DOI:10.3166/JESA.41.199-218© 2007 Lavoisier, Paris

1. Introduction

L'assistance aux techniques de rééducations fonctionnelles a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années (Dallaway, *et al.* 1995 ; Riener, 2005). Ainsi, un grand nombre de machines de rééducation ont été conçues pour répondre à des besoins spécifiques exprimés par les médecins rééducateurs. Par exemple, le système Lokomat®¹ est un dispositif permettant la rééducation de la marche pour des patients atteints de traumatismes neuromusculaires (Colombo *et al.*, 2000), le MotionMaker^{TM2} est un système exosquelettique d'entraînement et d'évaluation des membres inférieurs (Metrailier, *et al.* 2006).

Les machines isocinétiques sont, quant à elles, de plus en plus utilisées en milieu clinique pour aider les thérapeutes à rééduquer les patients suite à un traumatisme articulaire et/ou musculaire (ANAES, 2001). Ainsi, concernant la rééducation isocinétique des membres inférieurs, différents dispositifs sont disponibles. Par exemple, les machines Cybex³ et Biodex⁴ sont présentes depuis plus d'une vingtaine d'années en France (Kaufman *et al.*, 1991). Plus récemment, une machine adaptable pour la rééducation de plusieurs articulations appelée Multi-Joints⁵ a été proposée (Bardis *et al.*, 2004). Enfin, une machine de rééducation des membres inférieurs appelée Multi-Iso⁶, présentée figure 1, a été réalisée au CReSTIC (Moughamir, 1999). Cette dernière se distingue dans la mesure où elle propose de nouveaux modes de rééducation tels que l'entraînement physiocinétique. Celui-ci permet d'accroître l'interaction entre l'utilisateur et la machine en imposant des objectifs basés sur le suivi de trajectoires « idéales » lors d'un mouvement de rééducation (Afilal *et al.*, 2005).



Figure 1. Machine de rééducation : Multi-Iso

-
1. Hocoma AG Medical Engineering, Volketswil, Suisse.
 2. Fond. Suisse pour les Cyber thèses, Ecole Polytech. Lausanne, CHU Vaudois, Suisse.
 3. Cybex International, Inc, Medway, USA.
 4. Biodex Medical Systems, Shirley, NY, USA.
 5. CMV AG, Zürich, Suisse.
 6. CReSTIC-URCA, Reims, France.

La commande de tels dispositifs d'entraînements et de rééducation répond à des besoins biomécaniques qui consistent à maîtriser la vitesse et les efforts articulaires permettant ainsi la réalisation de mouvements prédéfinis. De ce fait, des lois de commandes en force, position et vitesse sont généralement utilisées (Moughamir *et al.*, 2002). Par ailleurs, les protocoles de rééducation évoluent en fonction des besoins cliniques exprimés pour répondre à de nombreuses pathologies. Ainsi une approche méthodologique de conception du système de contrôle commande a été développée sur Multi-Iso. En effet, l'exécution d'un protocole de rééducation peut être considérée comme un enchaînement séquentiel de mouvements génériques de flexion-extension (Moughamir *et al.*, 2002). Un contrôleur séquentiel a donc été proposé et permet la commutation successive de lois de commandes en force, position et vitesse afin de répondre à des objectifs précis en termes de suivi de trajectoires physiologiques (Afilal *et al.*, 2005).

La principale contrainte, en termes de commande pour une machine de rééducation, est de garantir la sécurité de l'utilisateur. Or, la commutation entre plusieurs contrôleurs continus pose certains problèmes vis-à-vis de la continuité du signal de commande (Liberzon, 2003). De ce fait, des à-coups peuvent être ressentis par l'utilisateur lors des commutations entre ceux-ci. De plus, bien que fonctionnelles, ces lois de commandes, synthétisées à l'aide d'outils issus de l'automatique linéaire, ne garantissent pas la stabilité de la machine de rééducation, ni le rejet des perturbations externes, sur l'ensemble de l'espace opérationnel.

Cet article propose une nouvelle structure de contrôle-commande pour la machine Multi-Iso. L'objectif est, d'une part, de démontrer la stabilité de la machine soumise à des perturbations externes afin de garantir une utilisation sécuritaire sur l'ensemble de son espace de fonctionnement et, d'autre part, de permettre une conduite volontaire de la machine par l'utilisateur. Cette structure de contrôle-commande, présentée figure 2, est basée sur deux étages :

- un étage de commande continue du système mécanique que constitue Multi-Iso. Afin de fournir un comportement sûr, cet étage doit assurer la stabilité de la partie mécanique quel que soit l'effort appliqué par l'utilisateur. Dans ce cas, on peut considérer l'action de l'utilisateur comme une perturbation externe qu'il convient d'atténuer ou de rejeter. De plus, l'utilisation d'une loi de commande non linéaire unique permettra de s'affranchir des discontinuités du signal de commande. Toutefois, cet étage n'autorise pas, à lui seul, la conduite volontaire du système par l'utilisateur ;
- un étage discret assure la génération de trajectoires relatives à un mouvement de rééducation spécifié par les cliniciens (flexion-extension isocinétique, isométrique, isotonique...). Il est basé sur une machine à états discrets et permet la conduite volontaire du système par l'utilisateur. Ainsi, selon l'effort appliqué par l'utilisateur sur le dispositif et le mode de rééducation choisi, une trajectoire désirée et cohérente est générée.

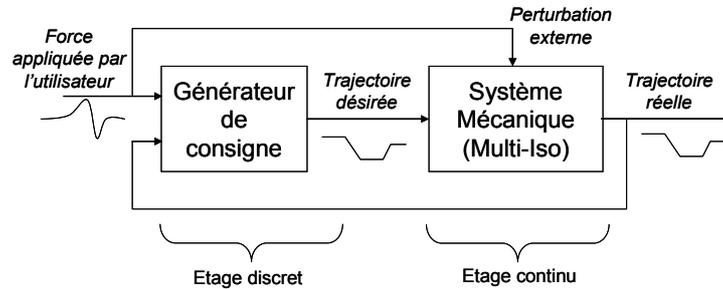


Figure 2. Structure de contrôle-commande de la machine Multi-Iso

Dans un premier temps, une loi de commande de type « parallel distributed compensation » (PDC) basée sur une modélisation Takagi-Sugeno (T-S) (Tanaka et Wang, 2001) sera substituée aux lois de commandes en force, position et vitesse, proposées par (Moughamir *et al.*, 2002). Celle-ci permettra d'assurer la continuité du signal de commande tout en respectant le caractère non linéaire du système. Des conditions de stabilité pour une classe de multimodèle T-S perturbés seront proposées sur la base de celles fournies par (Chiang *et al.*, 2001). Pour se faire, et afin d'atténuer les perturbations externes, un critère H_∞ sera utilisé. Ensuite, afin de permettre un contrôle actif du mouvement par l'utilisateur, la force appliquée sur le bras mobile de Multi-Iso sera considérée comme une entrée de l'étage discret. Ce dernier constituera un générateur de consigne dont le fonctionnement séquentiel sera synthétisé par une machine à états discrets. Enfin, une validation expérimentale sera présentée afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

2. Modélisation T-S et commande de la machine Multi-Iso

L'objectif de cette section est de proposer une méthodologie de synthèse d'une loi de commande non linéaire pour assurer la stabilité et la robustesse vis-à-vis des perturbations externes de la machine Multi-Iso. Considérons le schéma de commande proposé à la figure 3.

$y_d(t) \in \mathbb{R}$ est la trajectoire désirée. $y(t) = \theta(t) \in \mathbb{R}$ est la sortie, *i.e.* la position angulaire du bras mobile de Multi-Iso qu'il s'agit de contrôler. $x(t)$ est le vecteur d'état du système. $u(t) \in \mathbb{R}$ est le signal de commande correspondant au couple moteur. Notons que le dimensionnement de la motorisation impose une limite de fonctionnement en couple de $\bar{u} = -\underline{u} = 1000 \text{ Nm}$. De ce fait, l'entrée $u_{sat}(t) \in \mathbb{R}$ correspond au couple moteur saturé. Il s'agit donc ici d'une caractéristique technique et non physiologique du système. Cette valeur a été choisie de manière à outrepasser les performances humaines et de garantir le bon fonctionnement de

l'ensemble {Machine, Utilisateur} par la maîtrise du signal de commande et, de ce fait, tout danger pour l'utilisateur est écarté. Pour spécifier une trajectoire désirée, un modèle inverse est nécessaire de manière à fournir une consigne $u_d(t)$ homogène à un couple. Ce modèle inverse sera spécifié dans la section 2.3. Enfin, $f_p \in \mathbb{R}$ est la force appliquée par le patient sur le bras mobile de Multi-Iso. La synthèse de la loi de commande sera réalisée en section 2.2 sur la base du modèle dynamique de la machine Multi-Iso réécrit sous la forme d'un multimodèle de type Takagi-Sugeno (Takagi et Sugeno, 1985) présenté dans la section suivante.

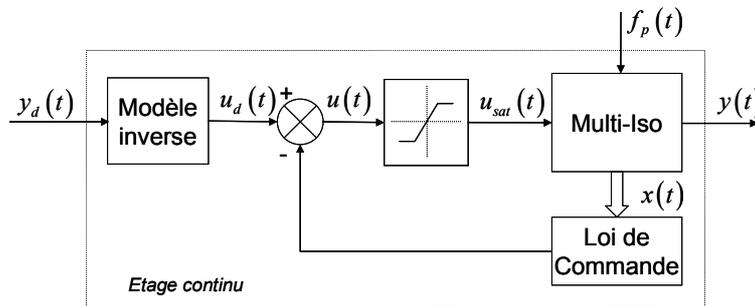


Figure 3. Etage de commande continu de la machine Multi-Iso

2.1. Modélisation T-S de la machine Multi-Iso

La figure 4 présente le principe mécanique de la machine Multi-Iso. Il consiste à appliquer un couple, généré par un moteur électrique, au bras mobile.

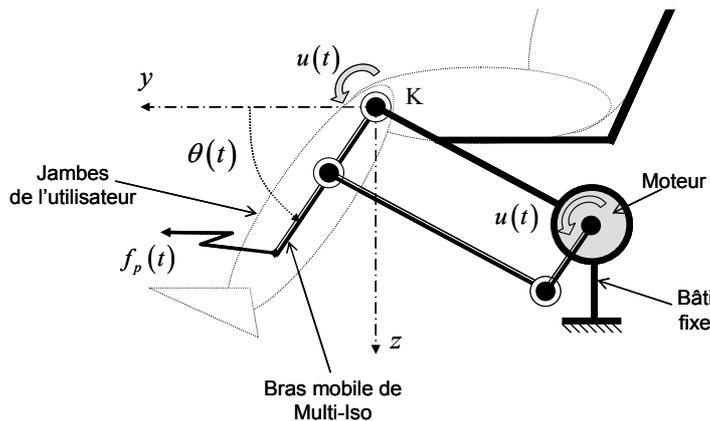


Figure 4. Principe mécanique de la machine de rééducation

Une structure mécanique à parallélogramme déformable permet de supposer que le couple du moteur $u(t)$ correspond au couple appliqué au niveau des genoux sous l'hypothèse de l'alignement de l'axe de rotation des genoux (noté K dans le plan (y, z)) et de la liaison pivot du bras mobile de Multi-Iso.

Le modèle dynamique de Multi-Iso, obtenu à partir des équations de Lagrange, et donné par (Moughamir, 1999):

$$J_m \ddot{\theta}(t) + (f_m - k |\dot{\theta}(t)|) \dot{\theta}(t) - M_1 \cos \theta(t) - M_2 \sin \theta(t) = u(t) + L \cdot f_p(t) \quad [1]$$

où $u(t)$ est le couple moteur, $f_p(t)$ est la force appliquée par l'utilisateur sur le bras de la machine, $\theta(t)$ est la position angulaire du bras par rapport à l'axe horizontal. Les paramètres sont définis dans le tableau 1.

Paramètre	Désignation	Valeur	Unité
J_m	Inertie	33.8	kgm^2
f_m	Frottements visqueux	103.6	$N(rad/s)^{-1}$
M_1	Coefficient gravitation	110	Nm
M_2	Coefficient gravitation	31	Nm
L	Longueur du bras	0.5	m
k	Coefficient de Coriolis	70	$Nm(rad/s)^{-1}$

Tableau 1. Paramètres du modèle dynamique de la machine Multi-Iso

On pose $x(t) = [\dot{\theta}(t) \ \theta(t)]^T$ vecteur d'état du système décrit par [1]. Ce dernier peut être réécrit sous la forme de la représentation d'état non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t) + Hf_p(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad [2]$$

$$\text{avec } A(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{k|\dot{\theta}(t)| - f_m}{J_m} & \frac{M_1 \cos \theta(t) + M_2 \sin \theta(t)}{J_m \theta(t)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [1/J_m \quad 0]^T,$$

$$C = [0 \quad 1] \text{ et } H = [L/J_m \quad 0]^T.$$

Dans ce cas, l'action de l'utilisateur sur la machine $f_p(t)$ est considérée comme une perturbation externe.

REMARQUE. — Le modèle non linéaire [1] et, par extension, sa représentation d'état [2] sont singuliers en $\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque les membres inférieurs sont en extension complète. De ce fait, dans la suite de cet article, nous considérerons l'espace opérationnel réduit tel que $\theta \in [\pi/180 \quad 2\pi/3]$ (rad). Dans ce cas, la borne supérieure de θ correspond à la flexion maximale que peut réaliser la machine Multi-Iso.

Takagi et Sugeno ont proposé une méthode élégante de modélisation des systèmes qui permet d'étendre les résultats de l'automatique linéaire aux systèmes non linéaires de type T-S (Takagi et Sugeno, 1985 ; Sala *et al.*, 2005). L'obtention d'un multimodèle T-S représentant le système non linéaire [2] peut se faire de manière exacte sur un espace compact des variables d'état en considérant la décomposition en secteurs non linéaires (Tanaka et Wang, 2001) des termes

$$\eta_1(x) = \frac{k|\dot{\theta}| - f_m}{J_m} \quad \text{et} \quad \eta_2(x) = M_1 \frac{\cos \theta}{J_m \theta} + M_2 \frac{\sin \theta}{J_m \theta} \quad \text{contenus dans } A(x(t)).$$

Manifestement, le terme $\eta_1(x)$ n'est pas borné sur \mathbb{R} mais, au regard des caractéristiques techniques de Multi-Iso, la vitesse angulaire est limitée à $\dot{\theta} \in [-2\pi \quad 2\pi]$ (rad · s⁻¹) et nous permet de considérer que $\eta_1(x) \in [\underline{\eta}_1 \quad \bar{\eta}_1]$ avec $\bar{\eta}_1 = -\underline{\eta}_1 = (2k\pi - f_m)/J_m$. De plus, en considérant l'espace de fonctionnement délimité par $\theta \in [\underline{\theta} \quad \bar{\theta}] = [\pi/180 \quad 2\pi/3]$, $\eta_2(x)$ est borné tel que $\eta_2(x) \in [\underline{\eta}_2 \quad \bar{\eta}_2]$. Ainsi, on peut écrire :

$$\eta_1(x) = \underbrace{\frac{\bar{\eta}_1 - \eta_1(x)}{\bar{\eta}_1 - \underline{\eta}_1}}_{\omega_{\eta_1}^1(x)} \times \underline{\eta}_1 + \underbrace{\frac{\eta_1(x) - \underline{\eta}_1}{\bar{\eta}_1 - \underline{\eta}_1}}_{\omega_{\eta_1}^2(x)} \times \bar{\eta}_1 \quad [3]$$

$$\eta_2(x) = \underbrace{\frac{\bar{\eta}_2 - \eta_2(x)}{\bar{\eta}_2 - \underline{\eta}_2}}_{\omega_{\eta_2}^1(x)} \times \underline{\eta}_2 + \underbrace{\frac{\eta_2(x) - \underline{\eta}_2}{\bar{\eta}_2 - \underline{\eta}_2}}_{\omega_{\eta_2}^2(x)} \times \bar{\eta}_2 \quad [4]$$

avec $\bar{\eta}_2 = M_1 \frac{\cos \bar{\theta}}{J_m \bar{\theta}} + M_2 \frac{\sin \bar{\theta}}{J_m \bar{\theta}} \approx 187.4$ et $\underline{\eta}_2 = M_1 \frac{\cos \underline{\theta}}{J_m \underline{\theta}} + M_2 \frac{\sin \underline{\theta}}{J_m \underline{\theta}} \approx -0.4$.

En considérant la réécriture des termes non linéaires proposés dans les équations [3] et [4], on aboutit à la réécriture du modèle non linéaire sous la forme d'un multimodèle de type T-S donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(x(t)) A_i x(t) + B u(t) + H f_p(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad [5]$$

avec les fonctions de pondération $h_1(x(t)) = \omega_{\eta_1}^1 \omega_{\eta_2}^1$, $h_2(x(t)) = \omega_{\eta_1}^1 \omega_{\eta_2}^2$, $h_3(x(t)) = \omega_{\eta_1}^2 \omega_{\eta_2}^1$, $h_4(x(t)) = \omega_{\eta_1}^2 \omega_{\eta_2}^2$ à valeurs dans $[0,1]$, $\sum_{i=1}^4 h_i(x(t)) = 1$ et les matrices $A_1 = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_1 & \underline{\eta}_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 & \underline{\eta}_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Le modèle T-S donné par [5] représente donc de manière exacte le modèle non linéaire [1] de la machine Multi-Iso sur l'espace compact des variables d'état décrit par $\theta \in [\pi/180 \quad 2\pi/3] (rad)$ et $\dot{\theta} \in [-2\pi \quad 2\pi] (rad \cdot s^{-1})$.

2.2. Synthèse H_∞ de la loi de commande

Maintenant, il s'agit de proposer la synthèse H_∞ de lois de commandes pour une classe de modèles T-S perturbés dont l'équation [5] est un cas particulier. Cette synthèse sera effectuée sur la base de la résolution d'inégalités linéaires matricielles (LMI). Ainsi, des conditions LMI sont dérivées de celles proposées par (Chiang *et al.*, 2001) adaptées au cas des modèles T-S perturbés dont le vecteur des perturbations externes peut s'écrire sous la forme $\phi(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) H_i \varphi(t)$. On considère la classe des modèles T-S perturbés représentée par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + H_i \varphi(t)] \quad [6]$$

où $z(t)$ est le vecteur des variables d'indexation qui peuvent être dépendantes des grandeurs d'entrées, de sorties et d'états mesurables du système. Notons que dans le cadre de notre application, $z(t) = x(t)$.

Une loi de commande de type « parallel distributed compensation » (PDC) est utilisée afin de stabiliser le système T-S [6] (Tanaka et Wang, 2001). Il s'agit d'une structure de commande très utilisée dans ce cadre et qui permet d'associer à chaque modèle local un retour d'état linéaire en gardant la structure non linéaire du multimodèle T-S considéré, *i.e.* l'interconnexion par les fonctions non linéaires $h_i(z(t))$. Cette loi de commande est donnée par :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad [7]$$

Le système en boucle fermée s'écrit donc :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[(A_i - B_i K_j) x(t) + H_i \varphi(t) \right] \quad [8]$$

Par conséquent, l'objectif est la détermination des matrices de gains K_j qui assureront la stabilité du système [8] tout en atténuant le vecteur des perturbations externes $\varphi(t)$. Le résultat est donné par le théorème suivant :

THEOREME 1. — Le système en boucle fermée [8] est quadratiquement stable s'il existe des matrices régulières $N = N^T > 0$, Y_i et un taux d'atténuation $\eta > 0$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\text{Pour } i = 1, 2, \dots, r: \quad \begin{bmatrix} \psi_i & N \\ N & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad [9]$$

$$\text{Pour } i < j: \quad \begin{bmatrix} \Omega_{ij} & N \\ N & -\frac{1}{2}Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad [10]$$

avec $\psi_i = A_i N + N^T A_i^T - B_i Y_i - Y_i^T B_i^T + \frac{1}{\eta^2} H_i H_i^T$ et

$$\Omega_{ij} = A_i N + N^T A_i^T + A_j N + N^T A_j^T - B_i Y_j - Y_j^T B_j^T - B_j Y_i - Y_i^T B_j^T + \frac{1}{\eta^2} (H_i H_j^T + H_j H_i^T)$$

Les matrices de gains de retour d'état sont alors obtenues par les changements de variables bijectifs $K_i = Y_i N^{-1}$.

PREUVE. — On considère la fonction candidate quadratique de Lyapunov $v(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ et le critère H_∞ donné par :

$$\int_0^{\eta} (x(t)^T Q x(t)) dt \leq \eta^2 \int_0^{\eta} (\varphi(t)^T \varphi(t)) dt \quad [11]$$

où $P = P^T > 0$ est une matrice de Lyapunov commune à chaque modèle local, $Q > 0$ est une matrice de pondération et η est le taux d'atténuation des perturbations externes.

En tenant compte des conditions initiales $x(0)$ du vecteur d'état, le critère H_∞ [11] peut se réécrire :

$$\int_0^{\eta} (x(t)^T Q x(t)) dt \leq x(0)^T P x(0) + \eta^2 \int_0^{\eta} (\varphi(t)^T \varphi(t)) dt \quad [12]$$

En posant $\Upsilon_{ij} = (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j)$, le système en boucle fermée [8] est stable au regard du critère H_∞ [11] si $\dot{v}(t) < 0$, c'est-à-dire si :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \left[x^T(t) \Upsilon_{ij} x(t) + \varphi(t)^T H_i^T P x(t) + x(t)^T P H_i \varphi(t) \right] < 0 \quad [13]$$

On considère la propriété suivante (Zhou et Khargonedkar, 1998) : $\forall R, \forall S$ deux matrices de dimensions appropriées, $\exists \gamma > 0$ scalaire tel que :

$$R^T S + S^T R \leq \gamma R^T R + \gamma^{-1} S^T S \quad [14]$$

En appliquant la propriété [14] sur [13], il vient :

$$\dot{v}(t) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) x^T(t) \left[\Upsilon_{ij} + \gamma^{-1} P H_i H_i^T P \right] x(t) + \gamma \varphi^T(t) \varphi(t) < 0 \quad [15]$$

[15] est vérifiée au regard du critère H_∞ [11] si :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) x^T(t) \left[\Upsilon_{ij} + \gamma^{-1} P H_i H_i^T P + Q \right] x(t) < 0 \text{ avec } \gamma = \eta^2 \quad [16]$$

C'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) [\Upsilon_{ii} + \gamma^{-1} P H_i H_i^T P + Q] \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{j < i} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\frac{\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}}{2} + \frac{\gamma^{-1} P (H_i H_j^T + H_j H_i^T) P}{2} + Q \right] < 0 \end{aligned} \quad [17]$$

Dans ce cas, l'inégalité [17] est vraie si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\text{pour } i = 1, \dots, r, \quad \Upsilon_{ii} + \gamma^{-1} P H_i H_i^T P + Q < 0 \quad [18]$$

$$\text{pour } i \text{ et } j = 1, \dots, r, \quad i \neq j, \quad \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} + \gamma^{-1} P (H_i H_j^T + H_j H_i^T) P + 2Q < 0 \quad [19]$$

Ces conditions ne sont pas écrites sous la forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI) (Boyd *et al.*, 1994). En conséquence, il est difficile d'obtenir une solution numérique avec les outils classiques de l'optimisation convexe (Gahinet *et al.*, 1995). Afin d'obtenir des conditions LMI, des transformations matricielles sont nécessaires.

Après congruence avec $N = P^{-1}$ et en utilisant le changement de variable bijectif $Y_i = K_i N$, les inégalités [18] et [19] deviennent :

$$\text{pour } i = 1, \dots, r, \quad A_i N + N^T A_i^T - B_i Y_i - Y_i^T B_i^T + \gamma^{-1} H_i H_i^T + N Q N < 0 \quad [20]$$

$$\text{pour } i \text{ et } j = 1, \dots, r, \quad i \neq j, \quad \begin{pmatrix} A_i N + N^T A_i^T + A_j N + N^T A_j^T \\ -B_i Y_j - Y_j^T B_i^T - B_j Y_i - Y_i^T B_j^T \\ + \gamma^{-1} (H_i H_j^T + H_j H_i^T) + 2N Q N \end{pmatrix} < 0 \quad [21]$$

L'application du complément de Schur sur [20] et [21] mène aux conditions LMI [9] et [10] du théorème 1. ■

REMARQUE. — Le théorème 1 est utilisable pour une classe générique de modèles T-S perturbés où les B_i , C_i et H_i ne sont pas communs. Dans le cadre de l'application à la machine Multi-Iso, les matrices B , C et H étant constantes, elles sont communes à chaque modèle local.

2.3. Résultats et simulations de l'étage continu

Un multimodèle inverse, adapté au cas non linéaire de la forme générale classiquement utilisée en commande linéaire par retour d'état, pour le suivi de trajectoires (De Larminat, 1993) des modèles T-S est donné par :

$$u_d(t) = \left(C \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 h_i(z(t)) h_j(z(t)) (BK_j - A_i) \right)^{-1} B \right)^{-1} y_d(t) \quad [22]$$

Ce modèle inverse contient les mêmes non-linéarités à prendre en compte que le modèle de la machine Multi-Iso. Par conséquent, l'écriture de celui-ci sous forme T-S se fait en gardant la même structure d'interconnexion non linéaire ($h_i(z(t))$).

Les matrices des gains K_i sont obtenues par la résolution des inégalités linéaires matricielles (LMI) du théorème 1 à l'aide de la LMI Toolbox de MATLAB® (Gahinet *et al.*, 1995). Ainsi, connaissant les matrices A_1, A_2, A_3, A_4, B et H déduites de la formalisation T-S du modèle non linéaire [1] et, après avoir choisi la matrice de pondération $Q = \text{diag}[1350 \ 1300]$ et le taux d'atténuation $\eta = 0.5$, les gains de retours d'état K_1, K_2, K_3, K_4 et la matrice P sont déterminés automatiquement par l'algorithme LMI :

$$P = \begin{bmatrix} 442 & 3644 \\ 3644 & 35832 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 12690 \\ 106820 \end{bmatrix}^T, K_2 = \begin{bmatrix} 12690 \\ 100480 \end{bmatrix}^T, \\ K_3 = \begin{bmatrix} 12200 \\ 106820 \end{bmatrix}^T \text{ et } K_4 = \begin{bmatrix} 12200 \\ 100480 \end{bmatrix}^T \quad [23]$$

De ce fait, puisqu'ils satisfont le théorème 1, la stabilité de la machine Multi-Iso est garantie sur l'ensemble de l'espace compact des variables d'état considéré.

REMARQUE. — La détermination de la matrice de pondération Q et du taux d'atténuation a été obtenue par essais-erreurs de manière à établir, en simulation, un compromis performances/capacités techniques (vitesse maximale, couple admissible...).

En pratique, la force f_p est mesurée par un capteur qui se trouve sur le bras mobile de Multi-Iso. Notons que cette mesure n'est pas nécessaire à l'étage de commande continue. En effet, celui-ci atténue les perturbations externes comprises entre deux bornes préalablement fixées par le biais de la synthèse H_∞ .

La figure 5 présente la stabilisation autour de $\theta = \pi/4$ pour une position initiale $\theta_0 = \pi/2$ avec une perturbation sinusoïdale $f_p(t) = 200 \sin(4\pi t)$.

L'amplitude de cette perturbation est de l'ordre de 10 % des capacités maximales en charge de la machine, c'est-à-dire une force maximale $\bar{f}_p = 200N$ appliquée à $0.5m$ du centre de rotation avec un couple moteur maximum égal à $\bar{u}_{sat} = 1000N$. De plus, cette perturbation est choisie afin de surpasser, en simulation, les performances humaines de manière à garantir une utilisation sûre de la machine.

L'état d'équilibre est atteint en moins de $0.35s$. Notons que cette réponse est contrainte par la limitation du couple moteur à $1000Nm$. De ce fait, on remarque que de $t = 0$ à $t = 0.32s$, le couple moteur $u(t)$ est saturé. Ce résultat montre que la loi de commande H_∞ atténue avec succès la perturbation externe en la compensant par le signal d'entrée malgré les limitations techniques de la machine.

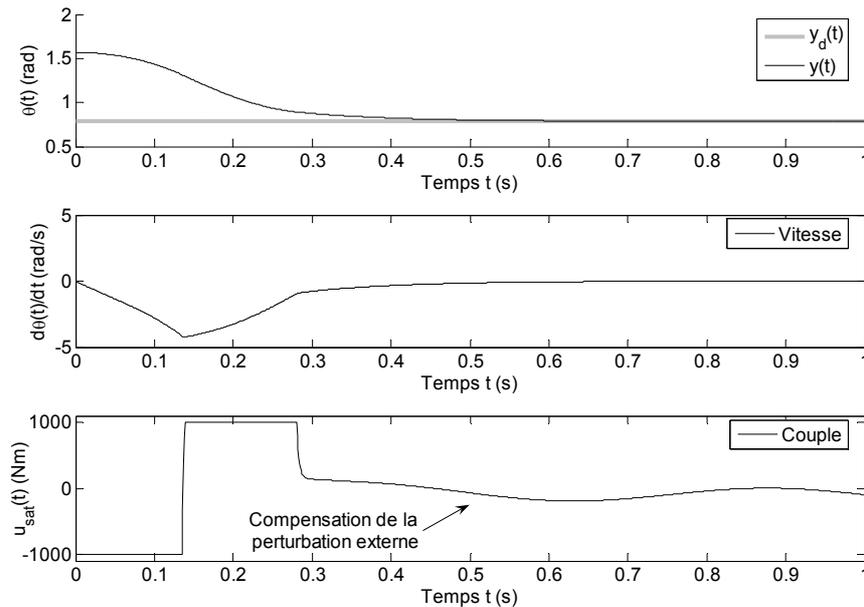


Figure 5. Réponse à l'échelon en simulation de la machine Multi-Iso soumise à une perturbation sinusoïdale

Dans la simulation précédente, une position est imposée à la machine de rééducation et l'action de l'utilisateur sur le bras mobile est atténuée. De ce fait, la conduite volontaire du système par l'utilisateur n'est pas prise en compte. C'est-à-

dire, quel que soit l'effort appliqué sur la machine, celle-ci effectuera la tâche spécifiée par la trajectoire désirée $y_d(t)$. Dans la suite, nous proposons un générateur de consigne qui tient compte de l'action de l'utilisateur sur la machine pour la génération du mouvement de rééducation. Cet étage de supervision du système permettra alors la conduite active du mouvement de rééducation par l'utilisateur.

3. Génération de consigne

Dans la section précédente, la loi de commande PDC, basée sur une modélisation de type Takagi-Sugeno, a été synthétisée pour assurer la stabilité de la machine de rééducation tout en atténuant l'action de l'utilisateur sur le bras mobile de Multi-Iso. Dès lors, afin de permettre la conduite de mouvements isocinétiques par l'utilisateur, un générateur de consigne basé sur la mesure de la force $f_p(t)$ est nécessaire (cf. figure 2). Des générateurs de trajectoires ont été proposés et répondent à des protocoles de rééducations standardisés tels que le mouvement isocinétique, isotonique ou encore isométrique (Moughamir, 2002). Néanmoins, ceux-ci impliquent la commutation entre plusieurs lois de commande et entraînent des discontinuités du signal d'entrée. Dans notre cas, l'utilisation d'une seule loi de commande continue permet de s'affranchir de ce problème. Il convient alors d'imposer au système continu une consigne spécifique, conduite par l'utilisateur et paramétrée par les cliniciens en fonction des pathologies. Ainsi, l'utilisation d'un générateur de consigne séquentiel basé sur une machine à états discrets est proposée. Un exemple est traité afin d'illustrer l'intérêt de cette approche. Il permet la conduite active du système par l'utilisateur pour des mouvements de rééducation isocinétiques en flexion-extension des membres inférieurs. Son principe est présenté figure 6 et comprend trois modes :

- le mode 1 est l'état où la machine de rééducation doit rester immobile dans sa position courante ;
- le mode 2 est l'état où la machine de rééducation effectue un mouvement de montée isocinétique de son bras mobile avec une vitesse angulaire constante α_e ($rad.s^{-1}$). Le mouvement des membres inférieurs réalisé correspond alors à l'extension de l'articulation des genoux dans le plan sagittal ;
- le mode 3 est l'état où la machine de rééducation effectue un mouvement de descente isocinétique de son bras mobile avec une vitesse angulaire constante α_e ($rad.s^{-1}$). Le mouvement des membres inférieurs réalisé correspond alors à la flexion de l'articulation des genoux dans le plan sagittal.

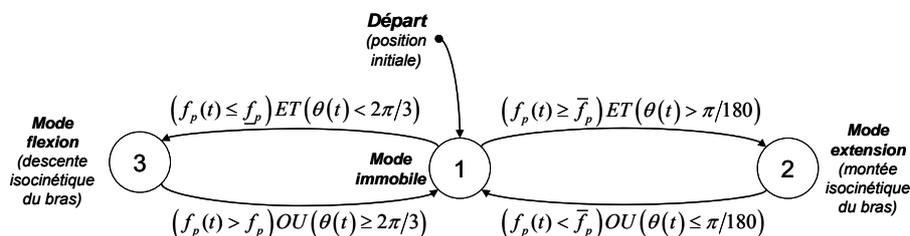


Figure 6. Machine d'états du générateur de trajectoire

Le passage d'un mode à l'autre est régi par des règles de transitions qui dépendent de la force appliquée par l'utilisateur sur le bras mobile ainsi que de sa position courante :

- au démarrage du système, le mode 1 est activé ;
- le passage du mode 1 au mode 2 s'effectue si la force de l'utilisateur $f_p(t)$ est supérieure à un seuil \bar{f}_p prédéterminé par le thérapeute et si la position courante du bras mobile n'a pas atteint (ou éventuellement dépassé) la limite inférieure de l'espace opérationnel ($\theta = \pi/180$) ;
- le passage du mode 2 au mode 1 s'effectue si la force $f_p(t)$ passe sous le seuil \bar{f}_p (après avoir été supérieure à ce seuil) ou si la position courante du bras mobile a atteint la limite inférieure de l'espace opérationnel (correspondant à l'extension maximum des membres inférieurs fixée à $\theta = \pi/180$). Ainsi, l'intégrité physique de l'utilisateur est respectée en écartant les possibilités d'hyper-extension de l'articulation du genou ;
- le passage du mode 1 au mode 3 s'effectue si la force $f_p(t)$ est inférieure à un seuil \underline{f}_p et que la position courante du bras mobile n'a pas atteint la limite supérieure de l'espace opérationnel ($\theta = 2\pi/3$) ;
- le passage du mode 3 au mode 1 s'effectue si la force $f_p(t)$ passe au-dessus du seuil \underline{f}_p (après avoir été inférieure à ce seuil) ou si la position courante du bras mobile a atteint la limite supérieure de l'espace opérationnel (correspondant à la flexion maximum autorisée pour les membres inférieurs $\theta = 2\pi/3$). Ainsi, l'intégrité physique de l'utilisateur est respectée en écartant les positions contraignantes en hyper-flexion de l'articulation du genou.

La figure 7 décrit les résultats de la simulation d'un mouvement de flexion-extension du membre inférieur. Les paramètres de génération de la trajectoire peuvent être fixés au préalable par le corps médical afin de répondre à des besoins de rééducation spécifiques et adaptés à la pathologie d'un patient donné. Ils sont ici

fixés tels que les seuils d'activation des mouvements isocinétiques correspondent à $\bar{f}_p = -\underline{f}_p = 30\text{ N}$ avec des vitesses de montées et descentes du bras mobile de $\alpha_c = -\alpha_e = \pi/3\text{ rad.s}^{-1}$.

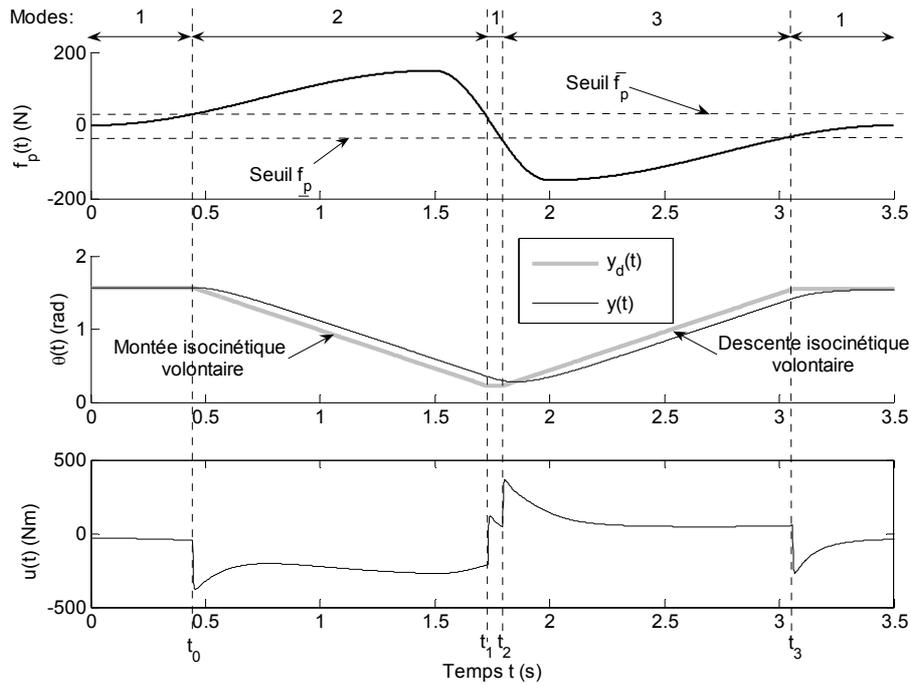


Figure 7. Simulation du système global incluant l'étape de génération de consigne

Les phases de la simulation présentée correspondent à la séquence suivante :

- la position angulaire initiale de la machine est $\theta_0 = \pi/2$;
- à partir de $t = 0\text{ s}$, l'utilisateur applique un effort positif signifiant sa volonté d'entreprendre une extension des membres inférieurs. Tant que cet effort ne dépasse pas le seuil \bar{f}_p , le bras reste immobile (mode 1) ;
- à partir de $t_0 = 0,45\text{ s}$, la force $f_p(t)$ dépasse le seuil \bar{f}_p et le bras mobile effectue un mouvement de montée isocinétique à la vitesse α_e (mode 2, extension des membres inférieurs) ;
- à partir de $t_1 = 1,73\text{ s}$, la force $f_p(t)$ passe sous le seuil \bar{f}_p et reste supérieure au seuil \underline{f}_p jusqu'à $t_2 = 1,8\text{ s}$. Durant cette phase, l'utilisateur signifie sa volonté

d'effectuer un mouvement isocinétique dans le sens opposé au précédent. Le bras reste immobile (mode 1) pendant un court instant (jusqu'à ce que la force appliquée passe sous le seuil \underline{f}_p) ;

– à partir de $t_2 = 1,8s$, la force $f_p(t)$ passe sous le seuil \underline{f}_p et le bras mobile effectue un mouvement de descente isocinétique à la vitesse α_c (mode 3, flexion des membres inférieurs) ;

– enfin, à partir de $t_3 = 3,06s$, l'utilisateur relâche son effort, la force $f_p(t)$ est comprise entre les seuils \bar{f}_p et \underline{f}_p et le bras reste immobile (mode 1).

On note qu'un faible retard de la trajectoire simulée sur la trajectoire désirée apparaît (de l'ordre de $0,1s$). Celui-ci est du au compromis performances/capacités techniques obtenu lors du réglage de la loi de commande et n'affecte pas de manière significative la qualité des protocoles de rééducation proposés.

4. Résultats et validation expérimentale

La structure de contrôle-commande proposée a été implantée et testée sur la machine Multi-Iso.

La commande en temps réel a été réalisée sous l'environnement xPC Target® pour Matlab®. La période d'échantillonnage utilisée pour la communication en temps réel est de $1ms$. Les seuils de commutation \bar{f}_p et \underline{f}_p sont fixés respectivement à $100N$ et $-100N$. Les vitesses de montée et descente isocinétique sont fixées telles que $\alpha_c = -\alpha_e = \pi/3 \text{ rad.s}^{-1}$. Notons que pour des raisons de précaution, l'utilisateur étant placé sur un prototype expérimental, l'espace opérationnel est réduit de telle sorte que $\theta \in [\pi/9 \quad \pi/2] \text{ (rad)}$. Les phases des mouvements réalisés par l'utilisateur consistent à tester le passage d'un mode à l'autre en réalisant une succession d'efforts appliqués sur le bras mobile. Celles-ci reprennent le fonctionnement décrit par la machine à états discrets présentée à la section précédente (cf. figure 6).

Les résultats expérimentaux, présentés à la figure 8 sont conformes à ceux obtenus en simulation. Ils permettent de vérifier l'exécution du mouvement isocinétique imposé par le générateur de consigne en fonction de l'effort appliqué par l'utilisateur sur le bras mobile.

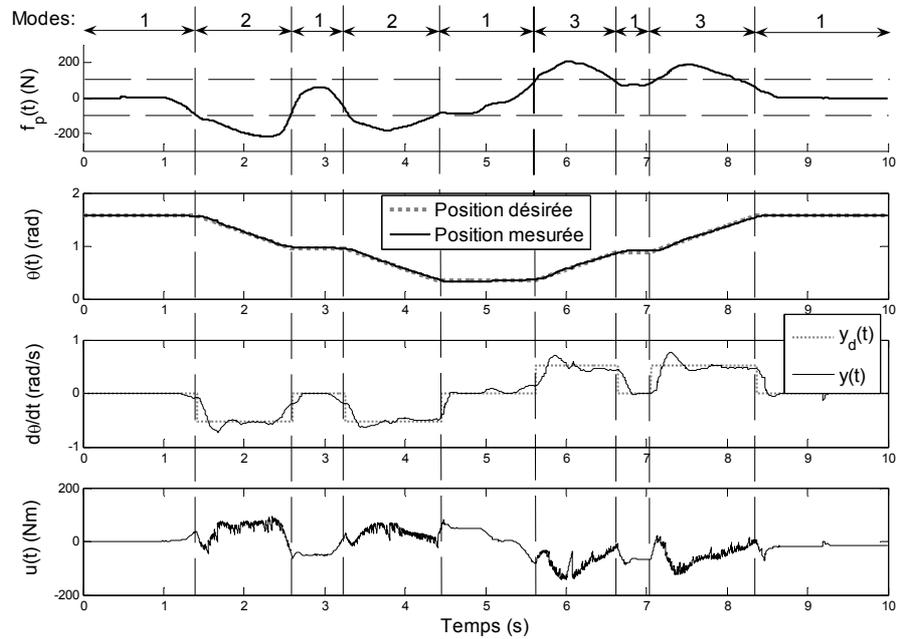


Figure 8. Validation expérimentale de la structure de commande proposée

On constate que le suivi de trajectoire est assuré tout en atténuant l'effort de l'utilisateur par l'étage de commande continu. Toutefois, on remarque que l'allure du signal de vitesse mesuré présente des fluctuations autour de la vitesse désirée. En effet, cette mesure correspond à la vitesse réelle de l'axe du moteur et non à celle du bras mobile. Ainsi, ces fluctuations sont absorbées par le système d'entraînement mécanique et ne sont donc pas ressenties par l'utilisateur. Par ailleurs, la dynamique de la loi de commande proposée étant importante, du fait du critère H_∞ , le signal $u(t)$ est sensible aux bruits de mesure et présente également des fluctuations. Cependant, celles-ci n'affectent pas la qualité du mouvement dans la mesure où ce bruit est absorbé par la constante de temps de l'ensemble motoréducteur.

5. Conclusion

La dynamique non linéaire de la machine de rééducation des membres inférieurs Multi-Iso a été exprimée sous la forme d'un multimodèle de type Takagi-Sugeno. Une loi de commande par retour d'état de type PDC a été utilisée afin de garantir la stabilité en boucle fermée de la machine de rééducation sur l'ensemble de son espace opérationnel. L'effort de l'utilisateur appliqué au bras de la machine a été considéré, dans le cadre de la synthèse de cette loi de commande, comme une

perturbation externe à la dynamique du système. Dans ce contexte, un critère H_∞ a été utilisé afin d'atténuer l'action de l'utilisateur sur les mouvements intrinsèques du système. Des conditions de stabilité pour les modèles T-S perturbés basées sur un critère H_∞ ont été obtenues sur la base de celles fournies par (Chiang *et al.*, 2001). Afin de résoudre ces conditions, une mise sous forme LMI est requise et a été obtenue à partir de transformations matricielles usuelles. Des résultats en simulation ont alors montré la faculté du système à suivre une trajectoire isocinétique imposée à l'utilisateur. La stabilité sur l'ensemble de l'espace opérationnel confère à la machine un caractère sécuritaire pour l'utilisateur dès lors qu'elle permet d'écarter tout mouvement imprévisible de la machine. Par ailleurs, afin de permettre la conduite volontaire du mouvement isocinétique par l'utilisateur, un générateur de consignes, basé sur un automate à états discrets, a été proposé. Celui-ci permet au système mécanique de se mouvoir si et seulement si l'action de l'utilisateur sur le bras mobile de la machine de rééducation est supérieure à un seuil. Les paramètres de génération de la consigne peuvent être fixés au préalable par les thérapeutes afin de répondre à des besoins de rééducation spécifiques et adaptés à la pathologie de chaque patient. Ils correspondent ici aux efforts minimaux que doivent appliquer les utilisateurs afin de mettre en mouvement la machine de rééducation ainsi qu'à des contraintes liées à la position du bras mobile garantissant son utilisation en toute sécurité.

Remerciements

Les auteurs remercient la région Champagne-Ardenne pour son soutien financier dans le cadre du projet SYS-REEDUC.

6. Bibliographie

- Afilal L.-E., Manamanni N., Moughamir S., Zaytoon J., Méthode et système de personnalisation d'un appareil d'exercices physiques, Brevet n° 2870134, 18 novembre 2005.
- ANAES, « Les appareils d'isocinétisme en évaluation et en rééducation musculaire : intérêt et utilisation », *Agence National d'accréditation et d'évaluation en santé*, février 2001.
- Bardis C., Kalamara E., Loucaides G., Michaelides M., Tsaklis P., "Intramachine and intermachine reproducibility of concentric performance: A study of the Con-Trex MJ and the Cybex Norm dynamometers", *Isokinetics and Exercise Science*, vol. 12, n° 2, 2004, p. 91-97.
- Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V., "Linear matrix inequality in systems and control theory", *Studies in applied mathematics*, SIAM, Philadelphia, vol. 15, 1994.
- Chiang W. L., Chen T.W., Liu M.Y., Hsu C. J., "Application and robust control of PDC fuzzy controller for nonlinear systems with external disturbance", *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 9, n° 2, 2001, p. 84-90.

- Colombo G., Joerg M., Schreier R., Dietz V., "Treadmill training of paraplegic patients with a robotic orthosis", *J. Rehabil. Res. Dev.*, vol. 37, 2000, p. 693-700.
- Dallaway J. L., Jackson R. D., Timmers P. H. A., "Rehabilitation robotics in europe", *IEEE Trans. Rehab. Eng.*, vol. 3, n° 1, 1995, p. 35-45.
- De Larminat P., *Automatique, commande des systèmes linéaires*, Paris, Hermès, 1993.
- Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., Chilali M., *LMI Control Toolbox*, The Mathworks Inc, Natick, MA, 1995.
- Kaufman K. R., An K.-N., Litchy W. J., Morrey B. F., Chao E. Y. S., "Dynamic joint forces during knee isokinetic exercise", *Amer. Jour. Sports Med.*, vol. 19, n° 3, 1991, p. 305-316.
- Liberzon D., *Switching in Systems and Control*, Boston, MA, Birkhauser, 2003.
- Metrailler P., Blanchard V., Perrin I., Brodard R., Frischknecht R., Schmitt C., Fournier J., Bouri M., Clavel R., "Improvement of rehabilitation possibilities with the MotionMakerTM", *IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechanics*, Pisa, Italy, 2006, p. 359-364.
- Moughamir S., Conception et développement d'une machine d'entraînement et de rééducation des membres inférieurs, Thèse de doctorat de l'université de Reims Champagne Ardenne, France, 1999.
- Moughamir S., Zaytoon J., Manamanni N., Afilal L., "A system approach for control development of lower-limbs training machines", *Control Engineering Practice*, vol. 10, 2002, p. 287-299.
- Riener R., "Control of robots for rehabilitation", *EUROCON, Belgrade*, 2005, p. 33-36.
- Sala A., Guerra T.-M., Babuska R., "Perspectives of fuzzy systems and control", *Fuzzy Sets & Systems*, vol. 153, n° 3, 2005, p. 432-444.
- Takagi T., Sugeno M., "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", *IEEE trans. Syst. Man. Cybern.*, vol. 15, 1985, p. 116-132.
- Tanaka K., Wang H.O., *Fuzzy control systems design and analysis. A linear Matrix Inequality Approach*, Willey-Interscience, 2001.
- Zhou K., Khargonedkar P., "Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty", *Sys. Cont. Letters*, vol. 10, 1988, p. 17-20.