



**HAL**  
open science

## Sur l'uniformisation des orbifolds Kählériens compacts

Philippe Eyssidieux

► **To cite this version:**

| Philippe Eyssidieux. Sur l'uniformisation des orbifolds Kählériens compacts. 2013. hal-00790592

**HAL Id: hal-00790592**

**<https://hal.science/hal-00790592>**

Submitted on 20 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur l'uniformisation des orbifolds Kählériens compacts

Philippe Eyssidieux

3 Février 2013

Cet article généralise aux orbifolds kählériens les résultats généraux sur l'uniformisation des variétés kählériennes compactes présentés par l'auteur au premier congrès joint des Sociétés Mathématiques Vietnamiennes et Françaises organisé à Huê du 20 au 24 Août 2012.

## 1 Conjecture de Shafarevich champêtre

### 1.1 Uniformisation champêtre

Soit  $\mathcal{X}$  un orbifold Kählérien connexe (séparé). Soit  $\gamma : \mathcal{X} \rightarrow X$  le morphisme canonique vers son espace de modules qui est un espace analytique normal à singularités quotient, propre si  $\mathcal{X}$  l'est. Par exemple,  $\mathcal{X}$  peut être l'analytifié d'un champ algébrique de Deligne Mumford séparé et lisse sur  $\mathbb{C}$  auquel cas  $X$  est l'analytifié d'un espace algébrique, c'est à dire un espace de Moishezon si  $\mathcal{X}$  est propre. On fait de plus l'hypothèse que  $\mathcal{X}$  n'a pas de groupe d'inertie au point générique, de sorte que  $\gamma$  est une équivalence au dessus d'un ouvert dense de  $X$ .

Par un abus de langage, on identifiera  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}^{Betti}$  le champ topologique correspondant qui est de Deligne-Mumford à groupes d'inertie finis<sup>1</sup>. Soit  $x \in \mathcal{X}(\mathbb{C})$  un point complexe et  $\pi_1(\mathcal{X}, x)$  le groupe fondamental de  $\mathcal{X}$ . Pour  $x, y \in \mathcal{X}(\mathbb{C})$ , toute application continue  $\gamma : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (\mathcal{X}, x, y)$  définit un isomorphisme  $\gamma_* : \pi_1(\mathcal{X}, x) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}, y)$ . De plus si  $I_y := \pi_1^{loc}(\mathcal{X}, y)$  est le groupe d'inertie en  $\bar{y}$  (qui est fini) on a un morphisme de groupe naturel  $l_y : \pi_1^{loc}(\mathcal{X}, y) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}, y)$  puis  $\gamma_*^{-1} \circ l_y : \pi_1^{loc}(\mathcal{X}, y) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}, x)$ . Ces morphismes de groupes seront appelés les morphismes locaux d'inertie [Noo04]. Le groupe fondamental étale de  $\mathcal{X}$  est par définition le complété profini  $\pi_1^{et}(\mathcal{X}, x)$  de  $\pi_1(\mathcal{X}, x)$  et le composé  $l_y^{et} : \pi_1^{loc}(\mathcal{X}, y) \rightarrow \pi_1^{et}(\mathcal{X}, y)$  de  $l_y : \pi_1^{loc}(\mathcal{X}, y) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}, y)$  avec la surjection canonique  $l : \pi_1(\mathcal{X}, y) \rightarrow \pi_1^{et}(\mathcal{X}, y)$  sera appelé le morphisme étale-local d'inertie en  $y$ .

**Définition 1** *On dit que  $\mathcal{X}$  est développable (ou uniformisable en topologie transcendante) si tous les morphismes locaux d'inertie sont injectifs, resp. uni-*

---

<sup>1</sup>Nous utilisons la référence commode [Noo04, Noo05] pour les champs topologiques.

*formisable (ou uniformisable en topologie étale) si tous les morphismes étale-locaux d'inertie sont injectifs.*

Le champ propre  $\mathcal{X}$  est uniformisable si et seulement si il existe un espace analytique normal connexe propre et lisse  $U$ , un groupe  $G$  fini et une action de  $G$  sur  $U$  telle que  $\mathcal{X} = [U/G]$ . Si l'espace des modules de  $\mathcal{X}$  est projectif-algébrique, resp. Kählérien, resp. quasi-projectif, on voit aisément que  $U$  est également projectif-algébrique, resp. Kählérien, resp. quasi-projectif.

Si  $\mathcal{X}$  est développable, on dispose d'une variété complexe connexe et simplement connexe  $\widetilde{X}^u$ , d'une action proprement discontinue de  $\pi_1(\mathcal{X}, x)$  sur  $\widetilde{X}$  et d'un isomorphisme  $\mathcal{X} \rightarrow [\pi_1(\mathcal{X}, x) \backslash \widetilde{X}^u]$ . Si  $\mathcal{X}$  est uniformisable, écrivant  $\mathcal{X} = [U/G]$  comme ci-dessus,  $\widetilde{X}^u$  s'identifie au revêtement universel de  $U$ .

Les deux notions uniformisable et uniformisable en topologie transcendante ne sont pas équivalentes a priori mais nous ne savons pas s'il est possible de construire un champ de Deligne-Mumford propre et lisse uniformisable en topologie transcendante sans être uniformisable.

## 1.2 Problème de Serre champêtre

Le problème de caractériser la classe des groupes kählériens (groupes de présentation finie pouvant apparaître comme un groupe fondamental de la forme  $\pi_1(X, x)$  avec  $X$  variété kählérienne compacte) est connu sous le nom de problème de Serre. Serre a montré que tout groupe fini est kählérien mais il y a des obstructions pour les groupes infinis. Par exemple l'abélianisé d'un groupe kählérien est de rang impair par la théorie de Hodge. Le problème de Serre s'étend naturellement à caractériser les groupes kählériens orbifolds (groupes de présentation finie pouvant apparaître comme un groupe fondamental de la forme  $\pi_1(\mathcal{X}, x)$  avec  $\mathcal{X}$  orbifold kählérien compact). Je ne connais pas d'obstruction à ce que les restrictions connues portant sur les groupes kählériens (voir [ABCKT] pour un survey) s'étendent aux groupes kählériens orbifold. Une instance particulière du problème de Serre est la conjecture de Toledo qui prédit qu'un groupe kählérien a un second nombre de Betti positif. Il est donc tentant d'étendre la conjecture de Toledo aux groupes kählériens orbifolds.

La classe des groupes de présentation finie pouvant apparaître comme un groupe fondamental de la forme  $\pi_1(\mathcal{X}, x)$  avec  $\mathcal{X}$  l'analytifié d'un champ algébrique sur  $\mathbb{C}$  séparé, propre, lisse et de Deligne-Mumford (groupes DM-projectifs) est a priori plus vaste que la classe des groupes fondamentaux des variétés projectives lisses ou d'espaces algébriques propres et lisses (groupes projectif-algébriques).

Il n'est pas connu si la classe des groupes kählériens orbifolds est plus vaste que celle des groupes DM-projectifs, ni si celle des groupes kählérien est plus vaste que celle des groupes projectifs-algébriques. Cependant:

**Lemme 2** *Si  $\mathcal{X}$  est uniformisable (resp. un champ algébrique de Deligne-Mumford uniformisable), son groupe fondamental est kählérien (resp. projectif-algébrique).*

Preuve: Soit  $U \rightarrow \mathcal{X}$  un revêtement étale propre comme plus haut. Soit  $G = \pi_1(\mathcal{X})/\pi_1(U)$  le quotient fini correspondant. Soit  $S$  une surface projective lisse telle que  $\pi_1(S) = G$ . Soit  $S'$  son revêtement universel. Le groupe  $\pi_1(\mathcal{X}, x)$  agit sur  $S'$  via son quotient  $G$  et son action diagonale sur  $\widetilde{X}^u \times S'$  est propre et sans point fixe. Par suite, posant  $X' = \pi_1(\mathcal{X}, x) \backslash \widetilde{X}^u \times S'$ ,  $\pi_1(X') = \pi_1(\mathcal{X})$ .  $\square$

### 1.3 Convexité holomorphe

**Définition 3** *Un espace complexe normal  $S$  est holomorphiquement convexe s'il existe une application holomorphe propre à fibres connexes  $\pi : S \rightarrow T$  telle que  $T$  est un espace de Stein normal. On appelle  $T = \text{Red}(S)$  la réduction de Cartan-Remmert de  $S$ .*

La conjecture de Shafarevich sur l'uniformisation (voir [Eys11] pour une introduction) stipule que le revêtement universel d'une variété projective lisse est holomorphiquement convexe.

La conjecture de Shafarevich est invariante biméromorphiquement. Par suite, la convexité holomorphe du revêtement universel d'un espace algébrique propre et lisse résulte de celle du revêtement universel d'un modèle birationnel projectif. De même, elle implique aussi que si  $\mathcal{X}$  est un champ de Deligne-Mumford lisse propre et uniformisable alors  $\mathcal{X}^u$  est holomorphiquement convexe. En revanche, le cas Kählérien ne résulte pas du cas projectif.

La conjecture de Shafarevich est ouverte. Une classe d'exemples où elle n'est pas à ce jour décidée est celle des surfaces projectives fibrées en courbes de genre 2. Plus généralement, on étudie la question suivante <sup>2</sup>: sous quelles conditions portant sur  $(\mathcal{X}, H)$  avec  $H \subset \pi_1(\mathcal{X}, x)$  un sous groupe distingué peut on affirmer que  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u$  est holomorphiquement convexe? Si cela a lieu on dit que  $(\mathcal{X}, H)$  vérifie (HC) .

**Lemme 4** *Soit  $(\mathcal{X}, H)$  vérifiant (HC). Le groupe  $\Gamma_H = \pi_1(\mathcal{X}, x)/H$  opère proprement discontinuement sur  $\text{Red}(H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u)$ , l'application naturelle  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u \rightarrow \text{Red}(H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u)$  est  $\Gamma_H$ -équivariante et définit une application holomorphe de champs analytiques  $\mathfrak{s}^H : \mathcal{X}^{an} \rightarrow [\Gamma_H \backslash \text{Red}(H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u)]$ .*

**Corollaire 5** *Soit  $(\mathcal{X}, H)$  vérifiant (HC) et tel que toute application holomorphe définie sur  $X$  est finie ou constante. Alors ou bien  $\Gamma_H$  est fini ou bien  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u$  est une variété de Stein.*

Preuve: Passant à l'espace grossier  $\mathfrak{s}^H$  induit une application holomorphe  $s : X \rightarrow s(X) = \Gamma \backslash \text{Red}(H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u)$ . L'hypothèse implique que ou bien  $s$  est constante ou bien  $s$  a toutes ses fibres de dimension 0. En particulier  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u \rightarrow \text{Red}(H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u)$  est ou bien constant (auquel cas  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u$  est compact et  $\Gamma$  fini) ou bien à fibre finies et connexes c'est à dire un isomorphisme d'espaces normaux.  $\square$

L'hypothèse est vérifiée par exemple si  $X$  est un espace projectif.

<sup>2</sup>À partir de ce point on suppose  $\mathcal{X}$  compact.

**Corollaire 6** *Soit  $\mathcal{X}$  développable tel que  $h^{1,1}(X) = 1$ . Supposons que  $\pi_1(\mathcal{X})$  n'a pas de quotient infini violant la propriété de Kazhdan. Alors  $\widetilde{\mathcal{X}}^u$  est une variété de Stein.*

Preuve: L'hypothèse est qu'il existe  $H \subset \pi_1(\mathcal{X})$  distingué tel que  $\Gamma = H \backslash \pi_1(\mathcal{X})$  a un module hilbertien  $L^2$  tel que  $H^1(\Gamma, L^2) \neq 0$ . Mok a construit sous cete hypothèse une autre module hilbertien  $L_*^2$  et une application holomorphe équivariante non constante vers un espace de Hilbert  $F : \widetilde{\mathcal{X}}^u \rightarrow L_*^2$ . La  $(1, 1)$  forme  $i\partial F \wedge \bar{\partial} F$  descend au champ  $\mathcal{X}$ . La classe de cohomologie résultante dans  $H^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) = H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  est kählérienne par hypothèse. Ceci observé, la preuve donnée par [Eys04], dans le cas non champêtre donne que  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u$  est de Stein, puis que  $\widetilde{\mathcal{X}}^u$  est Stein puisque le revêtement universel d'une variété de Stein est Stein.

□

## 1.4 Obstructions à la convexité holomorphe

Une obstruction à ce que  $(\mathcal{X}, H)$  soit (HC) est la présence de chaines de Nori au sens suivant:

**Définition 7** *Un sous champ complexe analytique fermé de  $\mathcal{X}$  est une chaîne de Nori pour  $(\mathcal{X}, H)$  si et seulement si les composantes connexes de son image réciproque dans  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u$  est une réunion de composantes irréductibles compactes.*

L'auteur ne connaît pas d'exemples où cette obstruction est effectivement présente. En revanche, un autre type d'obstruction est bien présent. Soit  $A$  un tore complexe compact de dimension  $g$  et  $\lambda : \pi_1(A) = \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}^r$  un morphisme surjectif. On considère  $(\mathcal{X}, H) = (A, \ker(\lambda))$ . Le théorème de Remmert-Morimoto permet de décomposer  $\ker(\lambda) \backslash \widetilde{A}^u$  comme un produit de la forme  $\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^{*b} \times A'$  où  $A'$  est un quotient de  $\mathbb{C}^m$  n'ayant pas de fonction holomorphe non constante. Si  $A'$  est un tore complexe compact  $\ker(\lambda) \backslash \widetilde{A}^u$  est holomorphiquement convexe, mais si  $A'$  est non compact ce n'est trivialement pas le cas. Si  $r < g$  et  $A$  est simple (c'est à dire n'a pas de sous tore non compact), un tel quasi tore de Cousin est automatiquement présent et la propriété (HC) est violée.

**Définition 8** *Un compact laminé  $K \subset \mathcal{X}$  est de Cousin pour  $(\mathcal{X}, H)$  si et seulement si  $K$  est minimal et il existe un voisinage ouvert  $K \subset K^+$  tel que  $\text{Im}(\pi_1(K^+) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}))$  est fini.*

**Lemme 9** *Si  $(\mathcal{X}, H)$  est (HC) tout compact laminé de Cousin est contenu dans un sous champ analytique propre  $Z \subset \mathcal{X}$  tel que  $\text{Im}(\pi_1(Z) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}))$  est fini.*

Preuve: La préimage de  $K^+$  dans  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u$  est une réunion d'ouverts relativement compacts, donc il en va ainsi de la préimage de  $K$ . Par minimalité toute feuille de  $K$  est dense et donc les fonctions holomorphes de  $H \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u$  sont constantes sur

toute composante connexe  $K'$  de la préimage de  $K$ . Par (HC) l'intersection des ensembles de niveaux des fonctions holomorphes de  $H \setminus \mathcal{X}^u$  définis par leurs valeurs sur  $K'$  est un sous espace analytique compact de  $H \setminus \mathcal{X}^u$  contenant  $K'$ . Son image dans  $\mathcal{X}$  est le sous champ annoncé.  $\square$

La conjecture de Shafarevich serait donc réfutée si on pouvait exhiber une variété projective-algébrique de groupe fondamental infini avec une chaîne de Nori ou un compacts laminé de Cousin Zariski-dense.

## 2 Le cas linéaire

La conjecture de Shafarevich est démontrée pour une variété Kählérienne dont le groupe fondamental est linéaire, c'est à dire qu'il admet une représentation fidèle dans  $GL_N(\mathbb{C})$ , [EKPR09, CCE13]. Nous donnons dans cette section un énoncé plus général étendu au cadre champêtre.

### 2.1 Un résultat général de convexité holomorphe

Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire réductif sur  $\mathbb{Q}$ . Le groupe  $\pi_1(\mathcal{X})$  est de présentation finie. On définit  $R = R_B(\mathcal{X}, G)$  comme le schéma des représentations de  $\pi_1(\mathcal{X})$  dans  $G$ , c'est à dire que  $R$  représente le foncteur

$$A \mapsto \text{Hom}_{\text{Grp}}(\pi_1(\mathcal{X}), G(A))$$

$A$  parcourant la catégorie des  $\mathbb{Q}$ -algèbres. Il est connu que  $R$  est affine de type fini. On note  $\bar{A}[R]$  son anneau des fonctions régulières et on désigne par  $\rho_G^\infty : \pi_1(\mathcal{X}) \rightarrow G(\bar{A}[R])$  sa représentation tautologique.

On note  $M = M_B(\mathcal{X}, G) := R_B(\mathcal{X}, G)/G$  où  $G$  agit par conjugaison sur  $R$ . Le foncteur représenté par  $M$  n'a pas la même expression simple que pour  $R$  mais les points de  $M$  à valeurs dans un corps algébriquement clos de caractéristique nulle  $\Omega$  sont les classes de conjugaisons de l'action de  $G(\Omega)$  sur  $R(\Omega)^{ss}$  par conjugaison. La notation  $R(\Omega)^{ss}$  désigne l'ensemble des représentations à valeurs dans  $G(\Omega)$  qui sont semisimples, i.e.: l'adhérence de Zariski de leur image est réductive. Pour chaque composante irréductible  $i$  de  $M$  on note  $\bar{\rho}_G^{0,i} : \pi_1(\mathcal{X}) \rightarrow G(\Omega_i)$  un représentant du point générique de  $i$ . On note  $\rho_G^i$  une des représentations complexes obtenues en utilisant l'axiome du choix pour plonger le corps  $\Omega_i$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 10** *Soit  $\mathcal{X}$  un orbifold Kählérien compact développable. On considère les sous groupes suivants  $H_G^\infty = H_G^\infty(\mathcal{X}) := \ker(\rho_G^\infty)$  et pour  $I$  un ensemble fini non vide de composantes irréductibles de  $M$   $H_G^{0,I} = H_G^{0,I}(\mathcal{X}) := \bigcap_{i \in I} \ker(\rho_G^i)$ . Alors  $(\mathcal{X}, H_G^\infty)$  et  $(\mathcal{X}, H_G^{0,I})$  vérifient (HC).*

Preuve: Les résultats positifs généraux de [Eys04] [EKPR09] [CCE13] établissent cette conclusion si  $\mathcal{X}$  est une variété kählérienne compacte.

Soit  $K$  un corps et  $\rho : \pi_1(\mathcal{X}) \rightarrow G(K)$  une représentation linéaire d'image  $\Gamma$ . Par un théorème de Malcev, il existe un sous groupe normal d'indice fini

$H \triangleleft \pi_1(\mathcal{X})$  tel que  $\rho(H)$  est sans torsion. Soit  $e : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$  le revêtement étale fini correspondant à  $H$ . L'image de la représentation  $e^*\rho : \pi_1(\mathcal{X}') \rightarrow G(K)$  ne contient pas d'élément de torsion non trivial. Soit  $\gamma : \mathcal{X}' \rightarrow X'$  le morphisme naturel de  $\mathcal{X}'$  sur son espace de modules. Comme l'image par  $\rho$  des groupes d'inertie de  $\mathcal{X}'$  est triviale il suit du théorème de Zariski-Van Kampen de [Noo04] que  $e^*\rho = \gamma^*\rho'$  où  $\rho' : \pi_1(X') \rightarrow G(K)$  est une représentation. On peut de plus considérer une résolution des singularités  $\mu : \bar{X}' \rightarrow X'$  et construire  $\mu^*\rho' : \pi_1(\bar{X}') \rightarrow G(K)$  une représentation de groupe kählérien.

Supposons que  $K$  soit un corps local, possiblement non archimédien, et que  $\rho$  est réductive au sens de [Eys04]. La représentation  $\mu^*\rho'$  est alors réductive et on peut alors construire une application harmonique  $\mu^*\rho'$ -équivariante comme dans [Eys04]. Cette application contracte les fibres de  $\mu$  et donc est définie sur le revêtement universel de  $X'$  donc sur celui de  $\mathcal{X}'$ . Par suite, on peut construire un fibré de Higgs  $\rho$ -équivariant harmonique sur le revêtement universel de  $\mathcal{X}$  dont la représentation d'holonomie est  $\rho$  obtenant ainsi une généralisation orbifold de [Sim92] dans le cas où  $K$  est archimédien, de [GroSch92] dans le cas non archimédien. On peut utiliser la déformation  $(E, t\theta)_{t \rightarrow 0}$  du fibré de Higgs  $(E, \theta)$  [Sim88, Sim92] pour conclure que toute représentation linéaire de  $\pi_1(\mathcal{X})$  se déforme à une variation de structure de Hodge complexe en raisonnant comme dans l'extension de ce résultat au cas kählérien donnée dans [CCE13].

En utilisant [CCE13, Lemme 3.13, Lemme 5.3] avec  $X := \bar{X}'$  nous voyons que si  $C$  est une composante irréductible de  $M_B(\pi_1(\mathcal{X}), G)$ , les composantes irréductibles de sa préimage dans  $M_B(\pi_1(\mathcal{X}'), G)$  correspondent à des constructibles absolus de  $M_B(X', G)$ . Ce point étant acquis, les arguments de [CCE13] permettent de conclure.

□

On ne sait en revanche pas si pour toute représentation semisimple de  $\pi_1(\mathcal{X})$  le revêtement  $\ker(\rho) \backslash \widetilde{\mathcal{X}}^u$  est (HC). Par [CCE13], il n'y a pas de chaîne de Nori au sens de la définition 7 pour  $(\mathcal{X}, \ker(\rho))$ . En revanche, des obstructions de Cousin sont bel et bien présentes comme nous l'avons vu à la section 1.4 ce qui nécessite de prendre des représentations linéaires bien choisies ayant des noyaux suffisamment gros.

## 2.2 Morphisme de Shafarevich linéaire

Soit  $G$  un groupe algébrique réductifs défini sur  $\mathbb{Q}$  et  $\mathfrak{s}_G : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{S}_G(X)$  le morphisme de champs analytiques obtenu en appliquant le lemme 4 à  $H = \ker(\rho_G^\infty)$  au vu du théorème 10. En passant à l'espace de modules nous obtenons une fibration d'espaces analytiques normaux  $sh_G : X \rightarrow sh_G(\mathcal{X})$  dont les fibres sont les sous espaces analytiques connexes  $Z$  maximaux de  $X$  tels que  $\rho_G^\infty(\pi_1(Z \times_X \mathcal{X}))$  est fini.

Le cas  $G = GL_1$  est classique. En effet  $sh_{GL_1}$  est exactement la factorisation de Stein de l'application d'Albanese de  $\mathcal{X}$ .

Si  $i : G \rightarrow G'$  est un morphisme de noyau fini de groupes algébriques réductifs les fibres de  $sh_G$  contiennent celles de  $sh'_G$  et a une factorisation  $sh'_G = sh_G \circ \sigma_i$ . En particulier, la suite de fibrations holomorphes  $sh_{GL_N} :$

$X \rightarrow sh_{GL_{N+1}}(\mathcal{X}) \rightarrow sh_{GL_N}(\mathcal{X})$  stationne pour  $N$  assez grand car  $R_N := X \times_{sh_{GL_N}(\mathcal{X})} X$  forme une suite décroissante de fermés analytiques propres de  $X$ . On appelle morphisme de Shafarevich linéaire la fibration  $sh_{lin} : \mathcal{X} \rightarrow sh_{lin}(X)$  définie par  $sh_{GL_N}$  pour  $N \in \mathbb{N}$  assez grand. Par construction, on a:

**Proposition 11** *Les fibres de  $sh_{lin}$  sont les sous espaces analytiques connexes  $Z$  maximaux de  $X$  tels que  $\rho_{GL_N}^\infty(\pi_1(Z \times_X \mathcal{X}))$  est fini pour tout  $N \in \mathbb{N}$ .*

La dimension de Shafarevich linéaire de  $\mathcal{X}$  est par définition la dimension de  $sh_{lin}(X)$ . Elle est plus grande que la dimension d'Albanese de  $\mathcal{X}$  et s'y substitue avantageusement dans plusieurs applications. Par exemple, nous obtenons aisément une amélioration du résultat classique de Napier [Nap90]:

**Théorème 12** *Soit  $\mathcal{X}$  un orbifold kählérien compact développable de dimension 2. On suppose que sa dimension de Shafarevich linéaire est 2 et que  $\mathcal{X}$  n'a pas de chaîne de Nori au sens de la définition 7. Alors,  $\widetilde{\mathcal{X}}^u$  est holomorphiquement convexe.*

Preuve: La preuve de [Nap90] s'applique sans modification substantielle. On notera qu'une éventuelle chaîne de Nori serait supportée par une courbe exceptionnelle du morphisme  $sh_{lin}$ .  $\square$

Dans tous les exemples que l'auteur a pu analyser complètement, il se trouve que l'application  $\mathcal{X} \rightarrow sh_{lin}(\mathcal{X})$  est un morphisme de Shafarevich pour  $\mathcal{X}$ , c'est à dire que les fibres de  $sh_{lin}$  sont les sous espaces analytiques connexes  $Z$  maximaux de  $X$  tels que  $\text{Im}(\pi_1(Z \times_X \mathcal{X}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}))$  est fini. Lorsque cette propriété plus forte est vérifiée, il découle du théorème 10 que  $\widetilde{\mathcal{X}}^u$  est holomorphiquement convexe. Cependant, à la connaissance de l'auteur, personne n'a pu exclure qu'un groupe kählérien ait un complété profini infini (c'est à dire que l'intersection des noyaux des morphismes vers des groupes finis est un groupe d'indice infini) et égal à son complété proalgébrique. Ceci se produirait si et seulement si toutes ses représentations linéaires de dimension finie étaient d'image finie. Une telle variété serait de dimension de Shafarevich linéaire nulle. Les exemples de Toledo [Tol93] de variétés projectives de groupe fondamental non résiduellement fini vérifient que  $Sh_{lin}(X) = X$  ce qui implique que leur revêtement universel est de Stein.

Finissons par une remarque. Puisque le morphisme d'Albanese d'une variété projective lisse possède une construction purement algébrique, le morphisme  $sh_{GL_1}$  également et on peut le définir sur un corps de base de caractéristique positive. Nous ignorons complètement si c'est le cas pour les  $sh_G$  dont la construction est transcendante. Une construction et une interprétation purement algébrique serait sans doute très intéressante, par exemple pour des questions d'arithmétique. On peut notamment espérer qu'une variété algébrique  $X$  définie sur un corps de nombres  $K$  telle qu'il existe  $G$  avec  $sh_G = \text{id}_X$  vérifie  $X(K) < +\infty$  si elle ne contient pas de sous variété abélienne. Le cas  $G = GL_1$  est un théorème classique de Faltings.

### 3 Observations relatives au cas singulier

Une courbe rationnelle nodale a pour revêtement universel une chaîne infinie de composantes irréductibles rationnelles et compactes. En particulier, il n'est pas holomorphiquement convexe. Nous pensons que ceci est relié au fait que l'homologie d'une telle courbe est pure de poids zéro.

Il semble cependant possible de trouver des familles  $F$  de représentations du groupe fondamental d'une variété kählérienne singulière  $Z$  telle que

$$\widetilde{Z}_F = \bigcap_{\rho \in F} \ker(\rho) \backslash \widetilde{Z}^u$$

soit holomorphiquement convexe. Par exemple, s'il existe  $i : Z \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme vers un orbifold lisse et  $\rho_G^\infty$  est comme dans le théorème 10, il suit de ce même théorème que  $\ker(i^* \rho_G^\infty) \backslash \widetilde{Z}^u$  est holomorphiquement convexe. Ceci suggère l'existence d'une théorie de Hodge Mixte pour le  $H^1$  non abélien  $H^1(Z, G)$  de sorte que les sous ensembles de représentations correspondant une sous structure de Hodge pure de poids 1 forment une famille  $F$  de représentations de  $\pi_1(Z)$  telle que  $\bigcap_{\rho \in F} \ker(\rho) \backslash \widetilde{Z}^u$  soit holomorphiquement convexe. Malheureusement, nous ne savons pas développer les éléments nécessaires d'une théorie de Hodge mixte non abélienne.

Voici toutefois un résultat dans cette direction que nous avons utilisé sans donner de démonstration dans [CCE13].

**Théorème 13** *Soit  $Z$  un espace complexe kählérien compact et  $H \subset H^1(Z, \mathbb{Q})$  une sous structure de Hodge pure de poids 1 de la structure de Hodge mixte de Deligne sur  $H^1(Z, \mathbb{Q})$ . Alors il existe une application holomorphe de la seminormalisation  $sn : Z^{sn} \rightarrow Z$ <sup>3</sup> vers un tore complexe  $a : Z^{sn} \rightarrow T$  telle que  $H$  soit l'image de  $a^* : H^1(T, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(Z^{sn}, \mathbb{Q}) = H^1(Z^{sn}, \mathbb{Q})$ .*

*En particulier,  $\bigcap_{\rho \in H} \ker(\rho) \backslash \widetilde{Z}^u$  est holomorphiquement convexe.*

Preuve: Soit  $S$  un tore complexe compact. Considérons deux points distincts  $x, y \in S$  et construisons une variété kählérienne seminormale  $S_{x \sim y}$  en identifiant  $x$  et  $y$ . On a un morphisme naturel  $S \rightarrow S_{x \sim y}$  qui donne lieu à une extension de structures de Hodge mixtes entières:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}(0) \rightarrow H^1(S_{x \sim y}) \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Le groupe des extensions de structures de Hodge mixtes entières de  $H^1(S, \mathbb{Z})$  par  $\mathbb{Z}(0)$  est exactement  $S$  et l'extension précédente a pour classe l'invariant d'Abel Jacobi  $x - y \in S$ . Par suite, cette extension n'est jamais scindée.

Plus généralement, l'extension est scindée sur  $\mathbb{Q}$  si et seulement si  $x - y$  est un point de torsion.

Soit  $T$  un tore complexe tel que  $H^1(T, \mathbb{Q}) = H$  comme  $\mathbb{Q}$ -structure de Hodge. Quitte à prendre une isogénie de  $T$  on peut supposer l'existence d'un morphisme de SHM  $H^1(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(Z, \mathbb{Z})$ .

---

<sup>3</sup>Noter que  $sn$  est un homéomorphisme et que  $sn_* O_{Z^{sn}}$  est le sous faisceau du faisceau des fonctions continues de  $Z$  qui sont holomorphes sur la partie lisse de  $Z$ .

Supposons d'abord que  $Z$  est normale. Dans ces conditions la structure de Hodge de  $H^1(Z)$  est pure et le résultat découle de la théorie du morphisme d'Albanese.

Supposons maintenant que la normalisation  $Z^{no}$  de  $Z$  est irréductible. Considérons le morphisme  $a : Z^{no} \rightarrow T$  construit au pas précédent. Fixons deux points distincts  $p, q$  de  $Z^{no}$  ayant même image dans  $Z$ . On a un diagramme  $Z^{no} \rightarrow Z_{p \sim q}^{no} \rightarrow Z^{sn} \rightarrow Z$ .

On dispose d'un diagramme dont les lignes horizontales sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}(0) & \rightarrow & H^1(T_{a(p) \sim a(q)}, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(T, \mathbb{Z}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}(0) & \rightarrow & H^1(Z_{p \sim q}^{no}, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(Z^{no}, \mathbb{Z}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Ceci identifie comme  $\mathbb{Z}$ -structure de Hodge mixte à  $H^1(T_{a(p) \sim a(q)}, \mathbb{Z})$  la préimage de  $H^1(T, \mathbb{Z})$  dans  $H^1(Z_{p \sim q}^{no}, \mathbb{Z})$ . Mais le morphisme de SHM  $H^1(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(Z^{no}, \mathbb{Z})$  factorise comme  $H^1(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(Z, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(Z^{no}, \mathbb{Z})$  et on a un morphisme de SHM  $H^1(Z, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(Z_{p \sim q}^{no}, \mathbb{Z})$  qui permet de construire un morphisme de SHM  $H^1(T, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(Z_{p \sim q}^{no}, \mathbb{Z})$  scindant  $H^1(T_{a(p) \sim a(q)}, \mathbb{Z})$ . Donc  $a(p) - a(q)$  est nul. Ceci implique que l'application  $a$  descend ensemblistement à  $Z$  et on voit aisément qu'elle y est continue. Ceci donne bien une application holomorphe  $Z^{sn} \rightarrow T$ .

Dans le cas général  $Z = Z_1 \cup Z_2$  avec  $Z_1$  et  $Z_2$  non vides connexes. Si  $Z_1 \cap Z_2 = \{o\}$  est composé d'un seul point on recolle  $a|_{Z_1}$  avec  $a|_{Z_2}$  en translatant la seconde de manière à ce que l'application soit uniquement définie en  $o$ . Cela est cohérent car  $H^1(Z) = H^1(Z_1) \oplus H^1(Z_2)$  dans le cas présent. Dans le cas général, on choisit deux points base de  $Z_1$  et  $Z_2$  s'identifiant dans  $Z$ , on construit  $Z'$  en identifiant ces deux points bases et le raisonnement précédent s'applique pour voir que deux points de  $Z'$  s'identifiant dans  $Z$  ont même image par  $a : Z' \rightarrow T$ .  $\square$

## References

- [ABCKT] Jaume Amorós, Marc Burger, Kevin Corlette, Dieter Kotschick and Domingo Toledo *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs **44**, American Mathematical Society (1996).
- [CCE13] F. Campana, B. Claudon, P. Eyssidieux *Représentations linéaires des groupes kählériens : Factorisations et conjecture de Shafarevich linéaire*, Preprint (2013).
- [Eys04] P. Eyssidieux, *Sur la convexité holomorphe des revêtements linéaires réductifs d'une variété projective algébrique complexe*, Inv. Math. **156** (2004), 503-564.
- [EKPR09] P. Eyssidieux, L. Katzarkov, T. Pantev, M. Ramachandran *Linear Shafarevich Conjecture*, Annals of Math. **176** (2012), 1545–1581.

- [Eys11] P. Eyssidieux *Lectures on the Shafarevich Conjecture on uniformization* dans *Uniformisation des variétés complexes*, M. Brunella, S. Dumitrescu, L. Meersseman, A. Glutsyuk, M. Nicolau, éditeurs. Panoramas et Synthèses **34**, Société Mathématique de France (2013), 101–148 ( paraître).
- [GroSch92] M. Gromov, R. Schoen *Harmonic maps into singular spaces and  $p$ -adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Publ. Math. IHES **76** (1992), 165-246.
- [Nap90] T. Napier, *Convexity properties of coverings of smooth projective varieties*, Math. Ann. 286 (1990), no. 1-3, 433–479.
- [Noo04] B. Noohi *Fundamental groups of algebraic stacks* Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu **3** (2004), 69-103.
- [Noo05] B. Noohi *Foundations of topological stacks* Arxiv math/0503247 (2005).
- [Sim88] C. Simpson *Constructing Variations of Hodge Structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*. Journ. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867-918.
- [Sim92] C. Simpson *Higgs bundles and local systems*, Pub. Math. IHES **75** (1992), 5-95.
- [Sim93] C. Simpson *Some Families of Local Systems Over Smooth Projective Varieties* Ann. Math. **138**(1993), 337-425 .
- [Tol93] D. Toledo *Projective varieties with non residually finite fundamental group*, Pub. Math. IHES **77** (1993), 103-119.

Philippe Eyssidieux  
 Institut Universitaire de France et Université Grenoble I. Grenoble, France  
 philippe.eyssidieux@ujf-grenoble.fr  
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eyssi/>