



**HAL**  
open science

# Une approche générale des équations diophantiennes

Jamel Ghannouchi

► **To cite this version:**

| Jamel Ghannouchi. Une approche générale des équations diophantiennes. 2013. hal-00790388v2

**HAL Id: hal-00790388**

**<https://hal.science/hal-00790388v2>**

Preprint submitted on 10 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une approche générale des équations diophantiennes

A proof of Pillai and Fermat-Catalan conjectures

Jamel Ghanouchi

Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis

jamel.ghanouchi@topnet.tn

## Sommaire

Nous commençons avec l'équation de Beal (ou Fermat-Catalan)  $U^c = X^a + Y^b$  puis nous définissons deux équations qui en sont conséquentes. Après en avoir déduit quelques résultats, nous généralisons l'approche à toutes les équations de Fermat-Catalan ; ce qui nous permet de relier le problème au théorème de Matyasevitch. En effet, nos investigations vont nous amener à établir des égalités qui ne s'expliquent que par l'indécidabilité de certaines conjectures inhérentes aux équations diophantiennes. Notre approche nous permet alors également de proposer une nouvelle conjecture concernant les équations de Fermat-Catalan généralisées. Nous proposons, d'autre part, une démonstration de la conjecture de Fermat-Catalan. (MSC=11D04) Mots clés : Fermat-Catalan ; Equations diophantiennes ; Analyse ; Suites ; Séries ; Séries de Fourier ; Conjecture.

## Abstract

We begin with Beal equation (or Fermat-Catalan)  $U^c = X^a + Y^b$  and establish two equivalent equations. We generalize the approach to all Fermat-Catalan equations which allows us to relate the problem to Matyasevich theorem. Our approach will lead us to propose a new conjecture concerning Fermat-Catalan equations. (MSC=11D04) Keywords : Fermat-Catalan ; Diophantine equations ; Analysis ; Series ; Fourier series ; Conjecture.

## L'approche

Posons

$$u = U^{2c}$$

$$x = U^c X^a$$

$$y = U^c Y^b$$

$$z = X^a Y^b$$

Ainsi posé, nous avons

$$u = U^{2c} = U^c(X^a + Y^b) = x + y \quad (1)$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{X^a Y^b} = \frac{U^{2c}}{U^c X^a U^c Y^b} \\ &= \frac{u}{xy} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{aligned} \quad (2)$$

**Lemme 1** Si  $U, X, Y, a, b, c$  sont des entiers vérifiant  $U^c = X^a + Y^b$ , alors  $u, x, y, z$  comme définis plus haut vérifient simultanément (1) e (2) qui suivent

$$u = x + y \quad (1)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (2)$$

Ou encore

$$z = X^a Y^b$$

$$u = (X^a + Y^b)^2$$

$$x = X^a(X^a + Y^b)$$

$$y = Y^b(X^a + Y^b)$$

Définissons les suites dont les premiers termes sont

$$x_1 = x$$

Et

$$y_1 = y$$

Or  $\forall x_1, y_1, \exists z_1$  vérifiant

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1}$$

Et

$$z_1 = \frac{xy}{x+y} = z$$

Soit

$$(x_1 + y_1)z_1 = x_1y_1$$

Ou encore

$$x_1(y_1 - z_1) = z_1y_1$$

Posons encore

$$y_2 = y_1 - z_1 = \frac{z_1y_1}{x_1}$$

Et

$$y_1(x_1 - z_1) = z_1x_1$$

Posons ici aussi

$$x_2 = x_1 - z_1 = \frac{z_1x_1}{y_1}$$

Nous avons donc

$$x_2y_2 = z_1^2$$

Ou

$$x_1 = x_2 + z_1 = x_2 + \sqrt{x_2y_2}$$

Et

$$y_1 = y_2 + z_1 = y_2 + \sqrt{x_2y_2}$$

Avec

$$u_1 = u = (x_1 + y_1) = (\sqrt{x_2} + \sqrt{y_2})^2 > x_2 + y_2 > 0$$

$(x_1 + y_1)$  entier

$$x_1 = \sqrt{x_2}(\sqrt{x_2} + \sqrt{y_2}) > x_2 > 0$$

$x_1$  entier

$$y_1 = \sqrt{y_2}(\sqrt{x_2} + \sqrt{y_2}) > y_2 > 0$$

$y_1$  entier

$$z_1 = \frac{x_1 y_1}{x_1 + y_1} = X^{a+2} Y^{b+2} = \sqrt{x_2 y_2} > z_2 = \frac{x_2 y_2}{x_2 + y_2} > 0$$

$z_2$  rationnel

Puisque

$\forall x_2, y_2$  rationnel,  $\exists z_2$  rationnel qui vérifie

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2}$$

Et ainsi de proche en proche jusqu'à l'infini. A l'ordre  $i$

$$(x_i + y_i) = (\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}})^2 > x_{i+1} + y_{i+1} > 0$$

Et  $x_i + y_i$  rationnel pour  $i > 2$

$$x_i = \sqrt{x_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}}) > x_{i+1} > 0$$

$x_i$  rationnel pour  $i > 2$

$$y_i = \sqrt{y_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}}) > y_{i+1} > 0$$

$y_i$  rationnel pour  $i > 2$

$$z_i = \frac{x_i y_i}{x_i + y_i} = \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}} > z_{i+1} = \frac{x_{i+1} y_{i+1}}{x_{i+1} + y_{i+1}} > 0$$

$z_i$  rationnel pour  $i > 1$  et aussi, bien entendu

$$\frac{1}{z_{i+1}} = \frac{1}{x_{i+1}} + \frac{1}{y_{i+1}}$$

**Lemme 2** Les expressions des suites sont les suivantes

$$(x_i + y_i) = (\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}})^2$$

$$x_i = x^{2^{i-1}} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{2^j} + y^{2^j})^{-1} \quad (3)$$

$$y_i = y^{2^{i-1}} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{2^j} + y^{2^j})^{-1} \quad (4)$$

**Démonstration du lemme 2** La preuve se fait par récurrence, nous avons

$$x = \sqrt{x_2}(\sqrt{x_2} + \sqrt{y_2}) = \sqrt{x_2}(x + y)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{x^2}{x + y}$$

Et également

$$y_2 = \frac{y^2}{x + y}$$

Le lemme est vérifié pour  $i = 2$ . Supposons-le vérifié à l'ordre  $i$ , tirons de (3) e (4)

$$x_i = \sqrt{x_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}}) = \sqrt{x_{i+1}}(x_i + y_i)^{\frac{1}{2}}$$

C'est-à-dire

$$x_{i+1} = x_i^2(x_i + y_i)^{-1}$$

Or le lemme est vérifié à l'ordre  $i$ , ce qui nous amène à

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x^{2^i} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{2^j} + y^{2^j})^{-2} (x^{2^{i-1}} + y^{2^{i-1}})^{-1} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{2^j} + y^{2^j}) \\ &= x^{2^i} \prod_{j=0}^{j=i-1} (x^{2^j} + y^{2^j})^{-1} \end{aligned}$$

Et voilà le lemme vérifié pour  $i + 1$ , la démonstration est la même pour  $y_i$ , nous en déduisons

$$x_i = x^{(2^{i-1})} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{(2^j)} + y^{(2^j)})^{-1}$$

Et pour  $y_i$

$$y_i = y^{(2^{i-1})} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{(2^j)} + y^{(2^j)})^{-1}$$

$$\forall i > 1$$

Mais

$$x - y = (x^{(2^{i-1})} - y^{(2^{i-1})}) \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{(2^j)} + y^{(2^j)})^{-1} \quad (5)$$

Et

$$\prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{(2^j)} + y^{(2^j)}) = \frac{(x^{(2^{i-1})} - y^{(2^{i-1})})}{x - y}$$

**Lemme 3** Il n'est pas nécessaire de passer par ce lemme, établissons-le quand même car il va nous permettre de retrouver les nombres de Fermat généralisés  $x^{2^{i-1}}$ . Nous devons supposer pour ce lemme que

$$x \neq y$$

ce qui signifie

$$x_i \neq y_i$$

$$x_i = \frac{x^{(2^{i-1})}}{x^{(2^{i-1})} - y^{(2^{i-1})}}(x - y) = U^c \frac{X^{(a)2^{i-1}}}{X^{(a)2^{i-1}} - Y^{(b)2^{i-1}}}(X^a - Y^b)$$

Et

$$y_i = \frac{y^{(2^{i-1})}}{x^{(2^{i-1})} - y^{(2^{i-1})}}(x - y) = U^c \frac{Y^{(b)2^{i-1}}}{X^{(a)2^{i-1}} - Y^{(b)2^{i-1}}}(X^a - Y^b)$$

$$u_i = x_i + y_i = U^c \frac{X^{(a)2^{i-1}} + Y^{(b)2^{i-1}}}{X^{(a)2^{i-1}} - Y^{(b)2^{i-1}}}(X^a - Y^b)$$

#### Lemme 4

$$x_i - y_i = x - y$$

D'après le lemme 3, ce lemme est évident, mais même pour  $x = y$ , nous avons

$$x_i - y_i = x_{i+1} - y_{i+1} = x - y$$

#### La résolution de l'équation de Catalan

Soit l'équation de Catalan

$$Y^p = X^q + 1$$

Posons

$$c = \frac{X^p - 1}{Y^{\frac{p}{2}}}; \quad c' = \frac{7 - X^p}{Y^{\frac{p}{2}}}$$

D'où

$$Y^{\frac{p}{2}} = \frac{6}{c + c'}$$

$$X^p = cY^{\frac{p}{2}} + 1 = \frac{6c}{c + c'} + 1 = \frac{7c + c'}{c + c'}$$

Et

$$X^q = Y^p - 1 = \frac{36 - (c + c')^2}{(c + c')^2}$$

Comme  $X^p > 7$  il vient que  $c' < 0$  et  $c > c'$  or  $Y^{\frac{p}{2}} \geq 3$  donc  $0 < c + c' \leq 2$ . Nous allons prouver que  $q + 1 = 2p$ . Deux cas se présentent :  $c^2 > 1$  et  $c^2 \leq 1$ .

$c^2 > 1$  Nous avons

$$\begin{aligned} X^q - X^{2p} &= \frac{36 - (c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &< \frac{36 - 36c^2}{(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

Donc

$$q + 1 \leq 2p$$

Mais aussi

$$\begin{aligned} 2c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{72c^2 - 2c^2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &> \frac{64c^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} = \frac{(c - c')(15c + c')}{(c + c')^2} > 0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36c^2 - (c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} \\ &< \frac{36c^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} = \frac{(c' - c)(13c + c')}{(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

Or

$$2c^2 X^{2p-1} \geq 2c^2 X^q > X^{2p} \Rightarrow 2c^2 > X$$



Posons

$$2c^2 = \frac{n+2}{n+1}, \quad X = \frac{m+2}{m+1}$$

Nous allons démontrer que  $X > 2c^2$ . Il est à noter que  $n < 0$  et  $m < 0$  ( $2X - 1 - X - 1 = X - 2 = \frac{-m}{m+1} > 0$ ). Pour  $u, v$  vérifiant  $v = -u$ ,  $(X - 1)(2c^2 - 1) > u = \frac{2}{3(n+1)} > \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (2u - v)^2 n^2 + (12u^2 - 6uv - 16u - 4v)n + 9u^2 - 12u + 4 \\ &= 9u^2 n^2 + (18u^2 - 12u)n + 9u^2 - 12u + 4 \\ &= (9n^2 + 18n + 9)u^2 - (12n - 12)u + 4 = 9(n+1)^2 u^2 - 12(n+1)u + 4 = 0 \\ &\Rightarrow ((2u + v)n + u - 2)^2 - 4u(2vn^2 + (2v - 2u + 2)n + 2 - 2u) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{u}{(X-1)^2} + \frac{(2u+v)n + u - 2}{X-1} + 2vn^2 + (2v - 2u + 2)n + 2 - 2u > 0 \\ &\Rightarrow u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)(m+1) - 2u - v + 3v + 2) + (u-2)(m+1) + 2 - 2u \\ &= u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)m + 3v + 2) + (u-2)m - u > 0 \\ &\Rightarrow (um + vn)(m-1) + (2n+2)(um + vn) + 2(u-1)m + 2(v+1)n \\ &= u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)m + 3v + 2) + (u-2)m - u > 0 \\ &\Rightarrow (um + vn)(m-1) + (2n+2)(um + vn) > -2(u-1)m - 2(v+1)n \\ &\Rightarrow (um + vn)(m-1 + 2n+2) = (um + vn)(m+2n+1) > -2(u-1)m - 2(v+1)n \\ &\Rightarrow (um + vn)\left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right) + (u-1)m + (v+1)n > 0 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} m+1+n &= \frac{2-X}{X-1} + \frac{2-2c^2}{2c^2-1} + 1 = \frac{1}{2c^2-1} + \frac{2-X}{X-1} \\ &= \frac{2X-1+4c^2-2-2c^2X}{(X-1)(2c^2-1)} = \frac{X(2-c^2)+c^2(4-X)-3}{(2c^2-1)(X-1)} < 0 \\ &\Rightarrow (2n+1)(m+1) < 0 < 2(n+1) \Rightarrow -1-m < -1 + \frac{1}{-2n-1} = \frac{2n+2}{-2n-1} \\ &\Rightarrow -m < \frac{1}{-2n-1} \Rightarrow m(2n+1) < 1 \\ &\Rightarrow m+2mn-1 < 0 \Rightarrow 2m+2n+2mn < m+2n+1 \\ &\Rightarrow (um+vn)(m+n+mn) + (u-1)m + (v+1)n > (um+vn)\left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right) + (u-1)m + (v+1)n > 0 \\ &\Rightarrow m(un+um+umn+u-1) + n(vm+vn+vmn+v+1) > 0 \\ &\Rightarrow um(m+1)(n+1) - m + vn(m+1)(n+1) + n > 0 \\ &\Rightarrow \frac{u(m+1)^2(n+1) + n + 1 + v(n+1)^2(m+1) - (m+1)}{(m+1)(n+1)} > u+v \\ &\Rightarrow \frac{u(m+1)^2+1}{m+1} + \frac{v(n+1)^2-1}{n+1} > u+v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow um + u - u + \frac{1}{m+1} + vn + v - v - \frac{1}{n+1} = um + X - 1 + vn - 2c^2 + 1 > 0$$

$$-um - vn = u(n - m) = u\left(\frac{X - 2c^2}{(X - 1)(2c^2 - 1)}\right)$$

$$(X - 2c^2)\left(1 - \frac{u}{(X - 1)(2c^2 - 1)}\right) > 0$$

$$\Rightarrow X - 2c^2 > 0 \Rightarrow X > 2c^2 > X$$

$$\Rightarrow X^{q+1} > 2c^2 X^q > X^{2p} \geq X^{q+1} \Rightarrow q + 1 = 2p$$

Ainsi

$$2c^2 > X > 2c^2 \Rightarrow X = 2c^2$$

$$\Rightarrow 2c^2 Y^p = 2(X^p - 1)^2 = XY^p = X^{q+1} + X$$

$$\Rightarrow \frac{2}{X} = X^q + 1 - 2X^{2p-1} + 4X^{p-1} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow X = 2 \Rightarrow -2^{2p-1} + 2^{p+1} = 0 \Rightarrow q = 2p - 1 = 3$$

$$\Rightarrow Y = \pm 3$$

$$c^2 \leq 1$$

$$2X^q - X^{2p} = \frac{72 - 2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2}$$

$$> \frac{64 - 49c^2}{(c + c')^2} > 0$$

D'où

$$X^q \geq X^{2p-1}$$

Où

$$q + 1 \geq 2p$$

Mais aussi

$$2c^2 X^q - X^{2p} = \frac{72c^2 - 2c^2(c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2}$$

$$> \frac{64c^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} = \frac{(c - c')(15c + c')}{(c + c')^2} > 0$$

Et

$$c^2 X^q - X^{2p} = \frac{36c^2 - (c + c')^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2}$$

$$< \frac{36c^2 - (7c + c')^2}{(c + c')^2} = \frac{(c' - c)(13c + c')}{(c + c')^2} < 0$$

Posons

$$2c^{-2} = \frac{n+2}{n+1}, \quad X = \frac{m+2}{m+1}$$

Comme  $n < 0$  et  $m < 0$  ( $2X - 1 - X - 1 = X - 2 = \frac{-m}{m+1} > 0$ ). Et

$$2c^{-2} = 1 + \frac{1}{n+1} > 3 \Rightarrow n < -\frac{1}{2}$$

Pour  $u, v$  vérifiant  $v = -u, (X - 1)(2c^{-2} - 1) > u = \frac{2}{3(n+1)} > 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (2u - v)^2 n^2 + (12u^2 - 6uv - 16u - 4v)n + 9u^2 - 12u + 4 \\
&\quad = 9u^2 n^2 + (18u^2 - 12u)n + 9u^2 - 12u + 4 \\
&= (9n^2 + 18n + 9)u^2 - (12n - 12)u + 4 = 9(n + 1)^2 u^2 - 12(n + 1)u + 4 = 0 \\
&\Rightarrow (2u - v)^2 n^2 + (12u^2 - 6uv - 16u - 4v)n + 9u^2 - 12u + 4 = 0 \\
&\Rightarrow ((2u + v)n + u - 2)^2 - 4u(2vn^2 + (2v - 2u + 2)n + 2 - 2u) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{u}{(X - 1)^2} + \frac{(2u + v)n + u - 2}{X - 1} + 2vn^2 + (2v - 2u + 2)n + 2 - 2u > 0 \\
&\Rightarrow u(m + 1)^2 + n(2vn + (2u + v)(m + 1) - 2u - v + 3v + 2) + (u - 2)(m + 1) + 2 - 2u \\
&\quad = u(m + 1)^2 + n(2vn + (2u + v)m + 3v + 2) + (u - 2)m - u > 0 \\
&\Rightarrow (um + vn)(m - 1) + (2n + 2)(um + vn) + 2(u - 1)m + 2(v + 1)n \\
&\quad = u(m + 1)^2 + n(2vn + (2u + v)m + 3v + 2) + (u - 2)m - u > 0 \\
&\Rightarrow (um + vn)(m - 1) + (2n + 2)(um + vn) > -2(u - 1)m - 2(v + 1)n \\
&\Rightarrow (um + vn)(m - 1 + 2n + 2) = (um + vn)(m + 2n + 1) > -2(u - 1)m - 2(v + 1)n \\
&\quad \Rightarrow (um + vn)\left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right) + (u - 1)m + (v + 1)n > 0
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
m + 1 + n &= \frac{2 - X}{X - 1} + \frac{2 - 2c^{-2}}{2c^{-2} - 1} + 1 = \frac{1}{2c^{-2} - 1} + \frac{2 - X}{X - 1} \\
&= \frac{2X - 1 + 4c^{-2} - 2 - 2c^{-2}X}{(X - 1)(2c^{-2} - 1)} = \frac{X(2 - c^{-2}) + c^{-2}(4 - X) - 3}{(2c^2 - 1)(X - 1)} < 0 \\
&\Rightarrow (2n + 1)(m + 1) < 0 < 2(n + 1) \Rightarrow -1 - m < -1 + \frac{1}{-2n - 1} = \frac{2n + 2}{-2n - 1} \\
&\quad \Rightarrow -m < \frac{1}{-2n - 1} \Rightarrow m(2n + 1) < 1 \\
&\quad \Rightarrow m + 2mn - 1 < 0 \Rightarrow 2m + 2n + 2mn < m + 2n + 1 \\
&\Rightarrow (um + vn)(m + n + mn) + (u - 1)m + (v + 1)n > (um + vn)\left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right) + (u - 1)m + (v + 1)n > 0 \\
&\quad \Rightarrow m(un + um + umn + u - 1) + n(vm + vn + vmn + v + 1) > 0 \\
&\quad \Rightarrow um(m + 1)(n + 1) - m + vn(m + 1)(n + 1) + n > 0 \\
&\Rightarrow \frac{u(m + 1)^2(n + 1) + n + 1 + v(n + 1)^2(m + 1) - (m + 1)}{(m + 1)(n + 1)} > u + v = 0 \\
&\quad \Rightarrow \frac{u(m + 1)^2 + 1}{m + 1} + \frac{v(n + 1)^2 - 1}{n + 1} > u + v = 0 \\
&\Rightarrow um + u + \frac{1}{m + 1} + vn + v - \frac{1}{n + 1} = um + u + X - 1 + vn + v - 2c^{-2} + 1 > 0 \\
&\quad -um - vn = u(n - m) = u\left(\frac{X - 2c^{-2}}{(X - 1)(2c^{-2} - 1)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (X - 2c^{-2})\left(1 - \frac{u}{(X-1)(2c^{-2}-1)}\right) > 0 \\
& \Rightarrow X - 2c^{-2} > 0 \Rightarrow X > 2c^{-2} \\
& \Rightarrow X^{2p} > c^2 X^q > 2X^{q-1} \geq 2X^{2p-2} \Rightarrow q+1 = 2p; q = 2p
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
0 > (c^2 - 1)Y^p &= X^{2p} - 2X^p - X^q = X^{2p} - 2X^p - X^{2p-1} > X^{2p-1} - 2X^p > 0 \\
&\Rightarrow (c^2 - 1)Y^p = 0 = X^p(X^{p-1} - 2) \Rightarrow (X, p, q) = (2, 2, 3) \Rightarrow Y = \pm 3
\end{aligned}$$

### Généralisation aux équations de Pillai et Fermat-Catalan

Pillai est  $Y^p = X^q + a$ , posons  $a = 1_a 1_a$  ainsi

$$Y^p = X^q + 1_a 1_a$$

et Fermat-Catalan  $Y^p = X^q + Z^a$ . Soit  $Z^a = 1_a 1_a$ . Ainsi

$$Y^p = X^q + 1_a 1_a$$

Posons

$$c = \frac{X^p - 1_a}{Y^{\frac{p}{2}}}, \quad c' = \frac{7_a - X^p}{Y^{\frac{p}{2}}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
Y^{\frac{p}{2}} &= \frac{6_a}{c + c'} \\
X^p &= cY^{\frac{p}{2}} + 1_a = \frac{6_a c}{c + c'} + 1_a = \frac{7_a c + 1_a c'}{c + c'}
\end{aligned}$$

Et

$$X^q = Y^p - 1_a 1_a = \frac{36_a 1_a - 1_a 1_a (c + c')^2}{(c + c')^2}$$

Comme  $X^p > 7_a$  il vient que  $c' < 0$  et  $c > c'$  et  $Y^{\frac{p}{2}} \geq 3_a$  donc  $0 < c + c' \leq 2$  Deux cas  $c^2 > 1$  et  $c^2 \leq 1$

$c^2 > 1$  On a

$$\begin{aligned}
X^q - X^{2p} &= \frac{36_a 1_a - 1_a 1_a (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\
&< \frac{36_a 1_a - 36_a 1_a c^2}{(c + c')^2} < 0
\end{aligned}$$

D'où

$$q + 1 \leq 2p$$

Aussi

$$\begin{aligned}
2c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{72_a 1_a c^2 - 2_a 1_a c^2 (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\
&> \frac{64_a 1_a c^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} = 1_a 1_a \frac{(c - c')(15c + c')}{(c + c')^2} > 0
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} c^2 X^q - X^{2p} &= \frac{36_a 1_a c^2 - 1_a 1_a (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\ &< \frac{36_a 1_a c^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} = 1_a 1_a \frac{(c' - c)(13c + c')}{(c + c')^2} < 0 \end{aligned}$$

Or

$$2c^2 X^{2p-1} \geq 2c^2 X^q > X^{2p} \Rightarrow 2c^2 > X$$

Posons

$$2c^2 = \frac{n+2}{n+1}, \quad X = \frac{m+2}{m+1}$$

Mais  $n < 0$  et  $m < 0$  ( $2X - 1 - X - 1 = X - 2 = \frac{-m}{m+1} > 0$ ). Pour  $u, v$  vérifiant  $v = -u$ ,  $(X - 1)(2c^2 - 1) > u = \frac{2}{3(n+1)} > \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (2u - v)^2 n^2 + (12u^2 - 6uv - 16u - 4v)n + 9u^2 - 12u + 4 \\ &= 9u^2 n^2 + (18u^2 - 12u)n + 9u^2 - 12u + 4 \\ &= (9n^2 + 18n + 9)u^2 - (12n - 12)u + 4 = 9(n+1)^2 u^2 - 12(n+1)u + 4 = 0 \\ &\Rightarrow ((2u + v)n + u - 2)^2 - 4u(2vn^2 + (2v - 2u + 2)n + 2 - 2u) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{u}{(X-1)^2} + \frac{(2u+v)n + u - 2}{X-1} + 2vn^2 + (2v - 2u + 2)n + 2 - 2u > 0 \\ &\Rightarrow u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)(m+1) - 2u - v + 3v + 2) + (u-2)(m+1) + 2 - 2u \\ &= u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)m + 3v + 2) + (u-2)m - u > 0 \\ &\Rightarrow (um + vn)(m-1) + (2n+2)(um + vn) + 2(u-1)m + 2(v+1)n \\ &= u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)m + 3v + 2) + (u-2)m - u > 0 \\ &\Rightarrow (um + vn)(m-1) + (2n+2)(um + vn) > -2(u-1)m - 2(v+1)n \\ &\Rightarrow (um + vn)(m-1 + 2n+2) = (um + vn)(m+2n+1) > -2(u-1)m - 2(v+1)n \\ &\Rightarrow (um + vn)\left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right) + (u-1)m + (v+1)n > 0 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} m+1+n &= \frac{2-X}{X-1} + \frac{2-2c^2}{2c^2-1} + 1 = \frac{1}{2c^2-1} + \frac{2-X}{X-1} \\ &= \frac{2X-1+4c^2-2-2c^2X}{(X-1)(2c^2-1)} = \frac{X(2-c^2)+c^2(4-X)-3}{(2c^2-1)(X-1)} < 0 \\ &\Rightarrow (2n+1)(m+1) < 0 < 2(n+1) \Rightarrow -1-m < -1 + \frac{1}{-2n-1} = \frac{2n+2}{-2n-1} \\ &\Rightarrow -m < \frac{1}{-2n-1} \Rightarrow m(2n+1) < 1 \\ &\Rightarrow m+2mn-1 < 0 \Rightarrow 2m+2n+2mn < m+2n+1 \\ &\Rightarrow (um+vn)(m+n+mn) + (u-1)m + (v+1)n > (um+vn)\left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right) + (u-1)m + (v+1)n > 0 \\ &\Rightarrow m(un+um+umn+u-1) + n(vm+vn+vmn+v+1) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow um(m+1)(n+1) - m + vn(m+1)(n+1) + n > 0 \\
\Rightarrow \frac{u(m+1)^2(n+1) + n + 1 + v(n+1)^2(m+1) - (m+1)}{(m+1)(n+1)} &> u + v \\
&\Rightarrow \frac{u(m+1)^2 + 1}{m+1} + \frac{v(n+1)^2 - 1}{n+1} > u + v \\
\Rightarrow um + u - u + \frac{1}{m+1} + vn + v - v - \frac{1}{n+1} = um + X - 1 + vn - 2c^2 + 1 &> 0 \\
-um - vn = u(n-m) = u\left(\frac{X - 2c^2}{(X-1)(2c^2-1)}\right) \\
(X - 2c^2)\left(1 - \frac{u}{(X-1)(2c^2-1)}\right) &> 0 \\
\Rightarrow X - 2c^2 > 0 \Rightarrow X > 2c^2 > X
\end{aligned}$$

Et

$$X^{2p} < 2c^2 X^q = X^{q+1} \leq X^{2p} \Rightarrow q+1 = 2p$$

L'équation devient

$$Y^p = X^{2p-1} + 1_a 1_a$$

Et

$$\begin{aligned}
(2c^2 - X)Y^p = 0 = 2X^{2p} - 4_a X^p + 2_a 1_a - X^{2p} - 1_a 1_a X \\
\Rightarrow \frac{2_a 1_a}{X} = -X^{2p-1} + 4_a X^{p-1} + 1_a 1_a \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow X \leq 2_a 1_a
\end{aligned}$$

L'équation a donc un nombre fini de solutions pour  $1_a 1_a$  fixé et ce pour Pillai. Nous verrons ce qu'il en est pour Fermat-Catalan !

$$c^2 \leq 1$$

$$\begin{aligned}
2X^q - X^{2p} = \frac{72_a 1_a - 2_a 1_a (c + c')^2 - (7_a c + 1_a c')^2}{(c + c')^2} \\
> 1_a 1_a \frac{64 - 49c^2}{(c + c')^2} > 0
\end{aligned}$$

D'où

$$X^q \geq X^{2p-1}$$

Ou

$$q + 1 \geq 2p$$

Soit

$$2c^{-2} = \frac{n+2}{n+1}, \quad X = \frac{m+2}{m+1}$$

Or  $n < 0$  et  $m < 0$  ( $2X - 1 - X - 1 = X - 2 = \frac{-m}{m+1} > 0$ ). Pour  $u, v$  vérifiant  $v = -u$ ,  $(X-1)(2c^{-2}-1) > u = \frac{2}{3(n+1)} > 0$

$$\Rightarrow (2u - v)^2 n^2 + (12u^2 - 6uv - 16u - 4v)n + 9u^2 - 12u + 4$$

$$\begin{aligned}
&= 9u^2n^2 + (18u^2 - 12u)n + 9u^2 - 12u + 4 \\
&= (9n^2 + 18n + 9)u^2 - (12n - 12)u + 4 = 9(n+1)^2u^2 - 12(n+1)u + 4 = 0 \\
&\Rightarrow (2u-v)^2n^2 + (12u^2 - 6uv - 16u - 4v)n + 9u^2 - 12u + 4 = 0 \\
&\Rightarrow ((2u+v)n + u - 2)^2 - 4u(2vn^2 + (2v - 2u + 2)n + 2 - 2u) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{u}{(X-1)^2} + \frac{(2u+v)n + u - 2}{X-1} + 2vn^2 + (2v - 2u + 2)n + 2 - 2u > 0 \\
&\Rightarrow u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)(m+1) - 2u - v + 3v + 2) + (u-2)(m+1) + 2 - 2u \\
&= u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)m + 3v + 2) + (u-2)m - u > 0 \\
&\Rightarrow (um + vn)(m-1) + (2n+2)(um + vn) + 2(u-1)m + 2(v+1)n \\
&= u(m+1)^2 + n(2vn + (2u+v)m + 3v + 2) + (u-2)m - u > 0 \\
&\Rightarrow (um + vn)(m-1) + (2n+2)(um + vn) > -2(u-1)m - 2(v+1)n \\
&\Rightarrow (um + vn)(m-1 + 2n+2) = (um + vn)(m+2n+1) > -2(u-1)m - 2(v+1)n \\
&\Rightarrow (um + vn)\left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right) + (u-1)m + (v+1)n > 0
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
m+1+n &= \frac{2-X}{X-1} + \frac{2-2c^{-2}}{2c^{-2}-1} + 1 = \frac{1}{2c^{-2}-1} + \frac{2-X}{X-1} \\
&= \frac{2X-1+4c^{-2}-2-2c^{-2}X}{(X-1)(2c^{-2}-1)} = \frac{X(2-c^{-2})+c^{-2}(4-X)-3}{(2c^{-2}-1)(X-1)} < 0 \\
&\Rightarrow (2n+1)(m+1) < 0 < 2(n+1) \Rightarrow -1-m < -1 + \frac{1}{-2n-1} = \frac{2n+2}{-2n-1} \\
&\Rightarrow -m < \frac{1}{-2n-1} \Rightarrow m(2n+1) < 1 \\
&\Rightarrow m+2mn-1 < 0 \Rightarrow 2m+2n+2mn < m+2n+1 \\
&\Rightarrow (um+vn)(m+n+mn) + (u-1)m + (v+1)n > (um+vn)\left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right) + (u-1)m + (v+1)n > 0 \\
&\Rightarrow m(un+um+umn+u-1) + n(vm+vn+vmn+v+1) > 0 \\
&\Rightarrow um(m+1)(n+1) - m + vn(m+1)(n+1) + n > 0 \\
&\Rightarrow \frac{u(m+1)^2(n+1) + n + 1 + v(n+1)^2(m+1) - (m+1)}{(m+1)(n+1)} > u+v=0 \\
&\Rightarrow \frac{u(m+1)^2+1}{m+1} + \frac{v(n+1)^2-1}{n+1} > u+v=0 \\
&\Rightarrow um+u + \frac{1}{m+1} + vn+v - \frac{1}{n+1} = um+u+X-1+vn+v-2c^{-2}+1 > 0 \\
&-um-vn = u(n-m) = u\left(\frac{X-2c^{-2}}{(X-1)(2c^{-2}-1)}\right) \\
&(X-2c^{-2})\left(1 - \frac{u}{(X-1)(2c^{-2}-1)}\right) > 0 \\
&\Rightarrow X-2c^{-2} > 0 \Rightarrow X > 2c^{-2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X^{2p} > c^2 X^q > 2X^{q-1} \geq 2X^{2p-2} \Rightarrow q+1 = 2p; q = 2p$$

Or

$$X^{2p} > c^2 X^q > 2X^{q-1} \geq X^{2p-2}$$

Soit

$$q+1 = 2p$$

L'équation devient

$$Y^p = X^{2p-1} + 1_a 1_a$$

Et

$$\begin{aligned} 0 \geq (c^2 - 1)Y^p &= X^{2p} - 2_a X^p - X^q = X^{2p} - 2_a X^p - X^{2p-1} \geq 0 \\ \Rightarrow (c^2 - 1)Y^p = 0 &= X^{2p} - 2_a X^p - X^{2p-1} \\ &\Rightarrow \frac{2_a 1_a}{X} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Un nombre fini de solutions pour Pillai ! Et pour Fermat-Catalan

$$Y^p = X^q + Z^a$$

Nous avons les explications suivantes

$$1 + 2^3 = 3^2$$

Lorsque nous avons une équation du type

$$Y^p = X^q - 1_a 1_a$$

Notre approche est valable, mais non pour

$$Y^p = 1_a 1_a - X^q$$

Nous devons poser

$$c^2(-1_a 1_a + X^q) = -1_a 1_a - 2X^p + 2X^{2p}$$

Et

$$c'^2(-1_a 1_a + X^q) = -49_a 1_a - 2X^p + X^{2p}$$

Nous aurons  $q+1 = 2p$  pour l'une des équations suivantes mais non pour l'autre (for which  $q+2 = 2p$ ) :

$$7^2 = 3^4 - 2^5$$

Et

$$13^2 = -7^3 + 2^9$$

Nous n'avons pas

$$Y^p = X^q + 1_a 1_a$$

Car  $1_a 1_a$  est négative et ne peut être un carré. Mais pour

$$71^2 = 17^3 + 2^7$$



l'approche est valable, nous avons  $p = 2, X = 17, q = 3, Y = 71, 1_a 1_a = 2^7$  et les conditions sont satisfaites, ici  $q = 2p - 1$ , mais si  $p = 2, X = 2, q = 7, Y = 71, 1_a 1_a = 17^3$  nous n'avons pas  $X^p = 2^2 = 4$  plus grand que  $7_a$ , et  $q + 1$  n'est pas égal à  $2p$ . Aussi

$$3^5 + 11^4 = 122^2$$

$p = 2, X = 3, q = 5, Y = 122, 1_a 1_a = 11^4$  (aussi  $X = 11, q = 4, 1_a 1_a = 3^5$ ),  $X^2 = 9$  n'est pas plus grand que  $7_a$  donc  $q + 1$  ne sera pas égal à  $2p$ . Et pour

$$1549304^2 = 15613^3 - 33^8$$

Nous avons  $q + 1 = 2p = 3$ . Et pour

$$2213459^2 = 65^7 - 1414^3$$

et pour

$$15312283^2 = 113^7 - 9262^3$$

nous avons  $q + 1 = 2p$ . Mais pour

$$21062938^2 = 76271^3 + 17^7$$

Toutes les conditions sont satisfaites pour  $p = 2, X = 76271, q = 3, Y = 21062938, 1_a 1_a = 1$ , et pour

$$30042907^2 = 96222^3 + 43^8$$

ici  $p = 2, X = 96222, q = 3, Y = 30042907, 1_a 1_a = 43^8$  mais non pour  $p = 2, X = 43, q = 8, 1_a 1_a = 96222^3$  car  $43^2$  est inférieur à  $7_a$ . D'où L'équation de Fermat-Catalan est équivalent à

$$Y^p = X^{2p-1} + Z^{2p-1}$$

lorsque les conditions de nos calculs sont satisfaites, et alors

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p-1} = \frac{2p+2p-1}{p(2p-1)} = \frac{4p-1}{p(2p-1)} < 1$$

à a un nombre fini de solutions !

### Conclusion pour cette approche de Pillai et Fermat-Catalan

Catalan est résolue, puis nous avons généralisé à Pillai et Fermat-Catalan equations et prouvé qu'il y a un nombre fini de solutions !

**Théorème de Ghanouchi** Nous allons démontrer que  $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  et  $u = x + y$  impliquent  $x = y$ . Justement, nous avons supposé  $x - y \neq 0$ . A priori rien ne permet de dire que  $x$  est différent ou égal à  $y$ . Pourtant, nos investigations nous ont amenés à un étrange résultat, à savoir que  $x = y$ , sans la moindre condition sur  $x$  et  $y$ . D'où vient ce curieux résultat impossible ? Nous pensons au théorème de Matyasavitch. Les équations diophantiennes n'ont pas toutes des solutions et les conjectures liées à ces équations ne sont pas toutes décidables. Or, les suites que nous avons établies sont valables pour toutes les équations de Fermat-Catalan, y

compris la suivante  $kU^n = k_1X_1^{n_1} + k_2X_2^{n_2} + \dots + k_iX_i^{n_i}$ . Cette équation résume toutes les équations de Fermat-Catalan. Dans l'état actuel de nos connaissances, nous ne savons pas quand elle a des solutions et quand elle n'en a pas. Or, si nous posons

$$\begin{aligned} u &= k^2U^{2n} \\ x &= kU^n(kU^n - k_jX_j^{n_j}) \\ y &= kU^n k_jX_j^{n_j} \\ z &= k_jX_j^{n_j}(kU^n - k_jX_j^{n_j}) \end{aligned}$$

Nous retrouvons le lemme (1), à savoir

$$u = x + y$$

et

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

S'il y a une indécidabilité en jeu, ces suites devraient conduire à un résultat impossible. Ce résultat impossible est  $xy(x - y) = 0$  pour tout  $x, y$ . Nous allons prouver que  $xy(x - y) = 0$ , justement. Nous en avons de très nombreuses démonstrations. En voici quelques unes. La première utilise les séries et, particulièrement, les séries de Fourier. En effet, comme

$$x_i = \frac{x^{2^{i-1}}}{x^{2^{i-1}} - y^{2^{i-1}}}(x - y)$$

Et

$$y_i = \frac{y^{2^{i-1}}}{x^{2^{i-1}} - y^{2^{i-1}}}(x - y)$$

Alors

$$x \geq y \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} (x_i) = x - y, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (y_i) = 0$$

Et

$$y \geq x \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} (y_i) = y - x, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (x_i) = 0$$

### Les séries

Comme nous l'avons vu

$$\sqrt{x_i y_i} = y_{i-1} - y_i = x_{i-1} - x_i$$

Soit

$$\begin{aligned} x_i - x_{i+1} &= \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}} \\ x_{i-1} - x_i &= \sqrt{x_i y_i} \\ &\dots \\ x_1 - x_2 &= x - x_2 = \sqrt{x_2 y_2} \end{aligned}$$

D'où la série télescopique

$$\sum_{j=2}^{j=i+1} (\sqrt{x_j y_j}) = x - x_2 + x_2 - x_3 + \dots + x_i - x_{i+1} = x - x_{i+1}$$

Et sa limite

$$\sum_{j=2}^{j=\infty} (\sqrt{x_j y_j}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (x - x_{i+1})$$

Si  $x \geq y$

$$\sum_{j=2}^{j=\infty} (\sqrt{x_j y_j}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (x - x_{i+1}) = x - (x - y) = y$$

Et si  $x \leq y$

$$\sum_{j=2}^{j=\infty} (\sqrt{x_j y_j}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (x - x_{i+1}) = x$$

### Les applications des séries

Supposons d'abord  $x \geq y$ . Nous avons toujours

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{j=i} ((-1)^j \sqrt{x_j y_j}) &= x - x_2 - (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) - \dots + (-1)^i (x_{i-1} - x_i) \\ &= x - 2x_2 + 2x_3 - \dots + 2(-1)^{i-1} x_{i-1} + (-1)^{i+1} x_i \\ &= 2 \sum_{j=2}^{j=i-1} ((-1)^{j+1} x_j) + x + (-1)^{i+1} x_i \\ &= 2 \sum_{j=1}^{j=i} ((-1)^{j+1} x_j) - x - (-1)^{i+1} x_i \\ &= \sum_{j=2}^{j=i-1} ((-1)^{j+1} x_j) + \sum_{j=1}^{j=i} ((-1)^{j+1} x_j) \\ &= 2 \sum_{j=2}^{j=i-1} ((-1)^{j+1} y_j) + y + (-1)^{i+1} y_i \\ &= 2 \sum_{j=1}^{j=i} ((-1)^{j+1} y_j) - y - (-1)^{i+1} y_i \\ &= \sum_{j=2}^{j=i-1} ((-1)^{j+1} y_j) + \sum_{j=1}^{j=i} ((-1)^{j+1} y_j) \end{aligned}$$

Ou encore

$$2 \sum_{j=1}^{j=i} ((-1)^{j+1} x_j) = \sum_{j=2}^{j=i} ((-1)^j \sqrt{x_j y_j}) + x + (-1)^{i+1} x_i$$

Et

$$2 \sum_{j=1}^{j=i} ((-1)^{j+1} y_j) = \sum_{j=2}^{j=i} ((-1)^j \sqrt{x_j y_j}) + y + (-1)^{i+1} y_i$$

Comme nous ne connaissons pas la limite de  $(-1)^{i+1} x_i$ , nous pouvons dire que

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} ((-1)^j x_j)$$

est peut-être divergente. Mais

$$\sum_{j=2}^{j=\infty} ((-1)^j \sqrt{x_j y_j})$$

est absolument convergente. Comme  $y_i$  tend vers zéro à l'infini, alors

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} ((-1)^j y_j)$$

est convergente. La limite de

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{j=i} ((-1)^j \sqrt{x_j y_j}) &= 2 \sum_{j=1}^{j=i} ((-1)^{j+1} y_j) - y - (-1)^{i+1} y_i \\ &= 2 \sum_{j=1}^{j=i} ((-1)^{j+1} x_j) - x - (-1)^{i+1} x_i \end{aligned}$$

existe et les series sont convergentes. Ce qui entraîne, selon nous et nous en avons des preuves, que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i) = x - y = 0$$

C'est confirmé par le fait que la limite du terme général de cette série est nulle. Démonstrons-le formellement ! Nous avons

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=2m} ((-1)^{k+1} x_k e^{-\frac{k}{\sqrt{2m}}}) \\ &= x e^{-\frac{1}{\sqrt{2m}}} - x_2 e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} + x_3 e^{-\frac{3}{\sqrt{2m}}} - \dots + (-1)^{2m+1} x_{2m} e^{-\frac{2m}{\sqrt{2m}}} \\ &= x e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} + x (e^{-\frac{1}{\sqrt{2m}}} - e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}}) - x_2 e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} + x_3 e^{-\frac{4}{\sqrt{2m}}} + x_3 (e^{-\frac{3}{\sqrt{2m}}} - e^{-\frac{4}{\sqrt{2m}}}) - x_4 e^{-\frac{4}{\sqrt{2m}}} + \dots - x_{2m} e^{-\frac{2m}{\sqrt{2m}}} \\ &= x e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) + x_3 e^{-\frac{4}{\sqrt{2m}}} (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) + \dots + x_{2m-1} e^{-\frac{2m}{\sqrt{2m}}} (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) + \\ &\quad + (x - x_2) e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} + (x_3 - x_4) e^{-\frac{4}{\sqrt{2m}}} + \dots + (x_{2m-1} - x_{2m}) e^{-\frac{2m}{\sqrt{2m}}} \\ &= (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) (x e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} + x_3 e^{-\frac{4}{\sqrt{2m}}} + \dots + x_{2m-1} e^{-\sqrt{2m}}) + (\sqrt{x_2 y_2} e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} + \sqrt{x_4 y_4} e^{-\frac{4}{\sqrt{2m}}} + \dots + \sqrt{x_{2m} y_{2m}} e^{-\frac{2m}{\sqrt{2m}}}) \\ &= (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}}) + \sum_{k=1}^{k=m} (\sqrt{x_{2k} y_{2k}} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}}) \end{aligned}$$

Et également

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{k=2m} ((-1)^{k+1} y_k e^{-\frac{k}{\sqrt{2m}}}) \\
&= y e^{-\frac{1}{\sqrt{2m}}} - y_2 e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} + y_3 e^{-\frac{3}{\sqrt{2m}}} - \dots + (-1)^{2m+1} y_{2m} e^{-\frac{2m}{\sqrt{2m}}} \\
&= (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}}) + \sum_{k=1}^{k=m} (\sqrt{x_{2k} y_{2k}} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}})
\end{aligned}$$

Mais

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}}) = S$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k+1}{\sqrt{2m}}}) &< S < (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-1}{\sqrt{2m}}}) \\
(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) e^{-\frac{3}{\sqrt{2m}}} \sum_{k=1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}}) &< S < (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) e^{-\frac{1}{\sqrt{2m}}} \sum_{k=1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}})
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} ((e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}})) &= \lim_{m \rightarrow \infty} ((e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) y + (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=2}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}})) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} ((e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=2}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}})) = \lim_{m \rightarrow \infty} (S)
\end{aligned}$$

Nous avons

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-p}{\sqrt{2m}}}) = A$$

Et

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-p+1}{\sqrt{2m}}}) < A < (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}})$$

Ou

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} \sum_{k=p}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}}) < A < (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}})$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} ((e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}})) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} ((e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) y_{2p-1} e^{-\frac{p-1}{\sqrt{2m}}} + (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p+1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}}))
\end{aligned}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p+1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}}) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} (A) = \lim_{m \rightarrow \infty} (S)$$

Alors

$$p+1 = m \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (A) = \lim_{m \rightarrow \infty} (S) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) y_{2m-1} e^{-\frac{m}{\sqrt{2m}}} \right) = 0$$

Conséquentement

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (y_{2k-1} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}}) \right) = 0$$

De la même façon

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}}) = S$$

Nous avons

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k+1}{\sqrt{2m}}}) < S < (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-1}{\sqrt{2m}}})$$

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) e^{-\frac{3}{\sqrt{2m}}} \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}}) < S < (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) e^{-\frac{1}{\sqrt{2m}}} \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}})$$

D'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}}) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) x + (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=2}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}}) \right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=2}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-2}{\sqrt{2m}}}) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} (S)$$

Nous avons

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-p}{\sqrt{2m}}}) = A$$

Et

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-p+1}{\sqrt{2m}}}) < A < (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}})$$

Ou

$$(e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) e^{-\frac{2}{\sqrt{2m}}} \sum_{k=p}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}}) < A < (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}})$$

Donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}}) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) x_{2p-1} e^{-\frac{p-1}{\sqrt{2m}}} + (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p+1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}}) \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=p+1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k-p-1}{\sqrt{2m}}}) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} (A) = \lim_{m \rightarrow \infty} (S)
\end{aligned}$$

Ou

$$p + 1 = m \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (A) = \lim_{m \rightarrow \infty} (S) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) x_{2m-1} e^{-\frac{m}{\sqrt{2m}}} \right) = 0$$

Conséquemment

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( (e^{\frac{1}{\sqrt{2m}}} - 1) \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}}) \right) = 0$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
0 &< \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{k=2m} ((-1)^{k+1} x_k e^{-\frac{k}{\sqrt{2m}}}) \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{k=2m} ((-1)^{k+1} x_k e^{-\frac{k}{\sqrt{2m}}}) \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{k=m} (\sqrt{x_{2k} y_{2k}} e^{-\frac{2k}{\sqrt{2m}}}) \right) < \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{k=m} (\sqrt{x_{2k} y_{2k}}) \right) \\
&< \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{k=2m} (\sqrt{x_k y_k}) \right) = y
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{k=2m} ((-1)^{k+1} (x_k - y_k) e^{-\frac{k}{\sqrt{2m}}}) \right) = 0 \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (x - y) \sum_{k=1}^{k=2m} (e^{-\frac{k}{\sqrt{2m}}}) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( (x - y) e^{-\frac{1}{\sqrt{2m}}} \frac{1 - e^{-\sqrt{2m}}}{1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{2m}}}} \right) = \frac{x - y}{2} = 0
\end{aligned}$$

Et

$$x - y = 0$$

Récapitulons

$$x_i > x_{i+1}, \quad y_i > y_{i+1} \Rightarrow x = y$$

$$x_i = x_{i+1} = x_{i+1} + \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}} \Rightarrow xy = 0$$

$$y_i = y_{i+1} = y_{i+1} + \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}} \Rightarrow xy = 0$$

$$\Rightarrow xy(x - y) = 0$$

Autre preuve, si  $x \geq y$  soit  $d_i = \frac{y_i}{x_i}$ , et pour un certain  $n$

$$(x - y)^{n+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} (x_i^{n+1}) \geq 1 \geq 0 = \lim_{i \rightarrow \infty} ((x_i + 1)y_i^n)$$

Donc

$$x_i^n(x_i^{n+1} - (x_i + 1)y_i^n) \geq 0 \geq -y_i^{2n+1}$$

Conséquemment

$$x_i^n(x_i^{n+1} - y_i^n) \geq y_i^n(x_i^{n+1} - y_i^{n+1})$$

Et

$$x_i^{2n+1} \geq y_i^n(x_i^{n+1} - y_i^{n+1}) + x_i^n y_i^n$$

Donc

$$\frac{x_i^n}{y_i^n} \geq \frac{x_i^{n+1} - y_i^{n+1}}{x_i^{n+1}} + \frac{1}{x_i}$$

Nous avons

$$\frac{1}{d_i^n} \geq 1 - d_i^{n+1} + \frac{1 - d_i}{x - y}$$

Ou si  $d_i \neq 1$

$$\frac{1}{d_i^n(1 - d_i)} \geq \frac{1 - d_i^{n+1}}{1 - d_i} + \frac{1}{x - y} = 1 + \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_i^2} + \dots + \frac{1}{d_i^n} + \frac{1}{x - y}$$

Et

$$\frac{1}{d_i^n(1 - d_i)} - \frac{1}{d_i^n} = \frac{1}{d_i^{n-1}(1 - d_i)} \geq 1 + \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_i^2} + \dots + \frac{1}{d_i^{n-1}} + \frac{1}{x - y}$$

Jusque

$$\frac{1}{d_i(1 - d_i)} \geq 1 + \frac{1}{d_i} + \frac{1}{x - y}$$

Qui signifie

$$\frac{1}{d_i(1 - d_i)} - \frac{1}{d_i} = \frac{1}{1 - d_i} \geq 1 + \frac{1}{x - y}$$

Ou

$$\frac{x_i}{x - y} \geq 1 + \frac{1}{x - y}$$

Et

$$x_i - 1 \geq x - y = x_i - y_i \Rightarrow y_i \geq 1$$

Ou

$$y_i = \frac{y_i}{x_i - y_i}(x - y) \geq 1 \Rightarrow y_i(x - y) \geq x - y \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} (y_i(x - y)) = 0 \geq x - y \geq 0$$

Donc  $x = y$ . Autre preuve : Nous avons

$$x_i - y_i + 1 \geq x_i \geq x_i - y_i$$



Donc

$$\frac{x_i - y_i + 1}{x_i y_i} \geq \frac{x_i}{x_i y_i}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_i} - \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_i y_i} &\geq \frac{1}{y_i} \\ -\frac{1}{y_i} - \frac{1}{x_i} + \frac{2}{y_i} + \frac{1}{x_i y_i} &\geq \frac{1}{y_i} \end{aligned}$$

Ou

$$-\frac{1}{z_i} + \frac{1}{x_i y_i} \geq \frac{-1}{y_i}$$

Ou

$$\frac{1}{y_i} \geq \frac{1}{\sqrt{x_{i+1} y_{i+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x_{i+1} y_{i+1}} (x_i + y_i)}$$

Et

$$\frac{1}{\sqrt{y_{i+1}} (\sqrt{x_i + y_i})} \geq \frac{x_i + y_i - 1}{\sqrt{x_{i+1} y_{i+1}}}$$

Qui signifie

$$\frac{\sqrt{x_{i+1}}}{\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}}} \geq x_i + y_i - 1$$

Ou

$$\frac{2\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}}}{\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}}} \geq x_i + y_i$$

$\forall i > 1$  particulièrement à l'infini

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (2\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}}) = 2\sqrt{x-y} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} (\sqrt{(x_i + y_i)^3}) = \sqrt{(x-y)^3} \geq 2\sqrt{x-y}$$

Ou

$$x - y = 0$$

Autre preuve : comme

$$\begin{aligned} y_i^2 - x_i^2 &= (y - x)(x_i + y_i) = (y_{i+1} - x_{i+1})(x_{i+1} + y_{i+1} + 2\sqrt{x_{i+1} y_{i+1}}) \\ &= y_{i+1}^2 - x_{i+1}^2 + 2\sqrt{x_{i+1} y_{i+1}}(y_{i+1} - x_{i+1}) \end{aligned}$$

$\sqrt{y_{i+1}} = Z$  est solution de

$$Z^4 + 2\sqrt{x_{i+1}} Z^3 - 2\sqrt{x_{i+1}^3} Z - x_{i+1}^2 + x_i^2 - y_i^2 = 0$$

Et  $\sqrt{x_{i+1}} = Z'$  est solution de

$$Z'^4 + 2\sqrt{y_{i+1}} Z'^3 - 2\sqrt{y_{i+1}^3} Z' - y_{i+1}^2 + y_i^2 - x_i^2 = 0$$

Et

$$Z^4 + 2Z' Z^3 - 2Z'^3 Z - Z'^4 + x_i^2 - y_i^2 = 0$$

Aussi

$$Z'^4 + 2Z Z'^3 - 2Z^3 Z' - Z^4 + y_i^2 - x_i^2 = 0$$

Posons

$$Z = u - \frac{Z'}{2}$$

Mais

$$(u - \frac{Z'}{2})^4 + 2Z'(u - \frac{Z'}{2})^3 - 2Z'^3(u - \frac{Z'}{2}) - Z'^4 + x_i^2 - y_i^2 = 0$$

Et

$$\begin{aligned} & u^4 + \frac{Z'^4}{16} - 2u^3Z' + \frac{3}{2}u^2Z'^2 + \\ & -\frac{1}{2}uZ'^3 + 2Z'u^3 - 3u^2Z'^2 + \frac{3}{2}uZ'^3 - \frac{1}{4}Z'^4 + \\ & -2Z'^3u + Z'^4 - Z'^4 + x_i^2 - y_i^2 = 0 \\ & = u^4 - (\frac{3}{2}Z'^2)u^2 - Z'^3u - \frac{3}{16}Z'^4 + x_i^2 - y_i^2 = 0 \end{aligned}$$

Ou

$$(u^2 - \frac{3}{4}Z'^2)^2 - \frac{3}{4}Z'^4 - Z'^3u + x_i^2 - y_i^2 = 0 \quad (5)$$

Et  $Z' = v - \frac{Z}{2}$  d'où

$$(v - \frac{Z}{2})^4 + 2Z(v - \frac{Z}{2})^3 - 2Z^3(v - \frac{Z}{2}) - Z^4 + y_i^2 - x_i^2 = 0$$

Ou

$$\begin{aligned} & v^4 + \frac{Z^4}{16} - 2v^3Z + \frac{3}{2}v^2Z^2 + \\ & -\frac{1}{2}vZ^3 + 2Zv^3 - 3v^2Z^2 + \frac{3}{2}vZ^3 - \frac{1}{4}Z^4 + \\ & -2Z^3v + Z^4 - Z^4 + y_i^2 - x_i^2 = 0 \\ & = v^4 - (\frac{3}{2}Z^2)v^2 - Z^3v - \frac{3}{16}Z^4 + y_i^2 - x_i^2 = 0 \end{aligned}$$

Ou

$$(v^2 - \frac{3}{4}Z^2)^2 - \frac{3}{4}Z^4 - Z^3v + y_i^2 - x_i^2 = 0 \quad (6)$$

Additionnant (5) et (6), nous avons

$$\begin{aligned} & (u^2 - \frac{3}{4}Z'^2)^2 + (v^2 - \frac{3}{4}Z^2)^2 - \frac{3}{4}(Z^4 + Z'^4) - Z'^3u - Z^3v = 0 \\ & = (Z^2 + \frac{Z'^2}{4} + ZZ' - \frac{3}{4}Z^2)^2 + (Z'^2 + \frac{Z^2}{4} + Z'Z - \frac{3}{4}Z'^2)^2 - \frac{3}{4}(Z^4 + Z'^4) - ZZ'^3 - Z^3Z' - \frac{Z'^4 + Z^4}{2} = 0 \\ & = (\frac{Z^2 + Z'^2}{4} + ZZ')^2 + (\frac{Z^2 + Z'^2}{4} + Z'Z)^2 - \frac{5}{4}(Z^4 + Z'^4) - ZZ'(Z^2 + Z'^2) = 0 \\ & = \frac{Z^4 + Z'^4 + 2Z^2Z'^2}{8} + 2Z^2Z'^2 + ZZ'(Z^2 + Z'^2) - \frac{5}{4}(Z^4 + Z'^4) - ZZ'(Z^2 + Z'^2) = 0 \\ & = -\frac{9}{8}(Z^4 + Z'^4) + \frac{9}{4}Z^2Z'^2 = 0 \\ & = -(Z^2 - Z'^2)^2 \frac{9}{8} = 0 \end{aligned}$$

La solution est

$$Z^2 - Z'^2 = y_{i+1} - x_{i+1} = y - x = 0$$

Autre preuve : nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{x_{i-1}} + \sqrt{x_i} &= \frac{x_{i-1} - x_i}{\sqrt{x_{i-1}} - \sqrt{x_i}} = \frac{\sqrt{x_i y_i}}{\sqrt{x_{i-1}} - \sqrt{x_i}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x_{i-1}}{x_i y_i}} - \sqrt{\frac{x_i}{x_i y_i}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}}}{\sqrt{x_i y_i}}} - \frac{1}{\sqrt{y_i}}} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt[4]{x_{i-1} + y_{i-1}} - \sqrt[4]{x_i}}{\sqrt[4]{x_i} \sqrt[4]{y_i}}} = \frac{\sqrt[4]{x_i} \sqrt[4]{y_i}}{\sqrt[4]{x_{i-1} + y_{i-1}} - \frac{\sqrt{x_{i-1}}}{\sqrt[4]{x_{i-1} + y_{i-1}}}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{x_i} \sqrt[4]{y_i} (\sqrt[4]{x_{i-1} + y_{i-1}})}{\sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}} - \sqrt{x_{i-1}}} \leq \frac{\sqrt[4]{x_i} \sqrt[4]{y_i} \sqrt[4]{x_{i-1} + y_{i-1}}}{\sqrt[4]{y_{i+1}}} \end{aligned}$$

Car

$$\sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}} - \sqrt{x_{i-1}} = \frac{y_{i-1}}{\sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}} + \sqrt{x_{i-1}}} \geq \sqrt[4]{y_{i+1}}$$

$$y_{i-1} = \sqrt{y_i} \sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}} \geq \sqrt[4]{y_{i+1}} (\sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}} + \sqrt{x_{i-1}}) = \frac{\sqrt{y_i}}{\sqrt[4]{x_i + y_i}} (\sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}} + \sqrt{x_{i-1}})$$

Et

$$\sqrt[4]{x_i + y_i} \sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}} \geq \sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}} + \sqrt{x_{i-1}}$$

Car

$$\sqrt[4]{x_i + y_i} = \frac{\sqrt[4]{x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2}}{\sqrt[4]{x_{i-1} + y_{i-1}}} \geq 1 + \sqrt{\frac{x_{i-1}}{x_{i-1} + y_{i-1}}}$$

Et

$$\sqrt[4]{x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2} \geq \sqrt[4]{x_{i-1} + y_{i-1}} + \sqrt[4]{x_{i-1} + y_{i-1}} \frac{\sqrt{x_{i-1}}}{\sqrt{x_{i-1} + y_{i-1}}}$$

Nous en déduisons

$$\sqrt{x_{i-1}} + \sqrt{x_i} \leq \frac{\sqrt[4]{x_i} \sqrt[4]{y_i}}{\sqrt[4]{y_{i+1}}} = \frac{\sqrt[4]{x_i} \sqrt[4]{y_{i+1}} (\sqrt[4]{x_i + y_i})}{\sqrt[4]{y_{i+1}}} = \sqrt[4]{x_i} (\sqrt[4]{x_i + y_i})$$

A l'infini

$$0 < \sqrt{x - y} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} (\sqrt{x_{i-1}} + \sqrt{x_i}) = 2\sqrt{x - y} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{x_i} \sqrt[4]{x_i + y_i}) = \sqrt{x - y}$$

Et

$$\sqrt{x - y} = 2\sqrt{x - y} = 0$$

Autre preuve. Soit

$$x_i = a_i x_{i+1} = x_{i+1} + \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}} \Rightarrow a_i = 1 + \sqrt{\frac{y_{i+1}}{x_{i+1}}} = 1 + \frac{y_i}{x_i}$$

Et

$$y_i = b_i y_{i+1} = y_{i+1} + \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}} \Rightarrow b_i = 1 + \sqrt{\frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}} = 1 + \frac{x_i}{y_i}$$

Ou

$$a_i = 1 + \frac{a_i}{b_i} = 1 + \frac{y_i}{x_i}$$

Et

$$b_i = 1 + \frac{b_i}{a_i} = 1 + \frac{x_i}{y_i}$$

Avec

$$a_i b_i = a_i + b_i$$

Nous avons

$$x_i = b_i \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}}, \quad y_i = a_i \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}}$$

Posons

$$a_i = c_i a_{i+1}, \quad b_i = d_i b_{i+1}$$

Nous avons

$$x_i = x_{i+1} + \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}} = a_i x_{i+1} = c_i a_{i+1} x_{i+1} = c_i (x_{i+1} + y_{i+1})$$

On en déduit

$$(c_i - 1)(x_{i+1} + y_{i+1}) = \frac{x - y}{b_i}$$

De même

$$(d_i - 1)(x_{i+1} + y_{i+1}) = \frac{y - x}{a_i}$$

D'où

$$\begin{aligned} (c_i + d_i - 2)(x_{i+1} + y_{i+1}) &= (x - y) \left( \frac{a_i - b_i}{a_i b_i} \right) = \frac{-(x - y)^2}{a_i x_i} = \frac{-(x - y)^2}{x_i + y_i} \\ &= \frac{-(c_i - 1)^2 (x_{i+1} + y_{i+1})^2 b_i^2}{x_i + y_i} \end{aligned}$$

Donc

$$(d_i - 1)(x_{i+1} + y_{i+1}) = -(c_i - 1) \left( \frac{(c_i - 1)(x_{i+1} + y_{i+1})^2 b_i^2}{x_i + y_i} + x_{i+1} + y_{i+1} \right)$$

$$\frac{d_i - 1}{1 - c_i} (x_{i+1} + y_{i+1}) = \frac{b_i}{a_i} (x_{i+1} + y_{i+1}) = \frac{x_i}{y_i} (x_{i+1} + y_{i+1})$$

$$= \frac{(c_i - 1)(x_{i+1} + y_{i+1})^2 b_i^2}{x_i + y_i} + x_{i+1} + y_{i+1}$$

$$= \frac{(x - y)(x_{i+1} + y_{i+1})^2 b_i^2}{b_i^2 y_i} + x_{i+1} + y_{i+1}$$

$$\frac{(x - y)(x_{i+1} + y_{i+1})}{y_i} = \frac{(x - y)(x_{i+1} + y_{i+1})^2 b_i^2}{b_i^2 y_i}$$

$$= \frac{(x - y)(x_{i+1} + y_{i+1})^2}{y_{i+1} + \sqrt{x_{i+1} y_{i+1}}}$$

Et

$$x - y = 0$$

Autre preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{y}{x} = \frac{a^2 + b}{b^2 + a} = \frac{y(y + x_i)}{x(x + y_i)} \\
&= \frac{y^2 + yx_i}{x^2 + xy_i} = \frac{y^2 + by_2x_i}{x^2 + ax_2y_i} = \frac{a^2 + b}{b^2 + a} = a - 1 \\
b^2y^2 + b^3y_2x_i + ay^2 + aby_2x_i &= a^2x^2 + a^3x_2y_i + bx^2 + abx_2y_i \\
b^2yx_i + ay^2 + ayx_i &= a^2xy_i + bx^2 + bxy_i \\
&= ((a + b^2)x_i + ay)y = ((a^2 + b)y_i + bx)x \\
\frac{y}{x} &= \frac{(a^2 + b)y_i + bx}{(b^2 + a)x_i + ay} = \frac{a^2 + b}{b^2 + a} \\
(a^2 + b)(b^2 + a)y_i + b(b^2 + a)x &= (a^2 + b)(b^2 + a)x_i + a(a^2 + b)y \\
(a^2 + b)(b^2 + a)(x_i - y_i) &= (a^2 + b)(b^2 + a)(x - y) = b(b^2 + a)x - a(a^2 + b)y \\
&= \frac{(b^2 + a)^2}{a^2 + b}ax - \frac{(a^2 + b)^2}{b^2 + a}by \\
&= ax \left( \frac{(b^2 + a)^3 - (a^2 + b)^3}{(a^2 + b)(b^2 + a)} \right) \\
(a^2 + b)^2(b^2 + a)^2(x - y) &= (x + y)((b^2 + a)^3 - (a^2 + b)^3) \\
&= (x + y)(b^2 + a - a^2 - b)((b^2 + a)^2 + (a^2 + b)(b^2 + a) + (a^2 + b)^2) \\
&= (x + y)(b - a)(ab - 1)((b^2 + a)^2 + (b^2 + a)(a^2 + b) + (a^2 + b)^2) \\
&= (a + b)(x - y)(ab - 1)((b^2 + a)^2 + (b^2 + a)(a^2 + b) + (a^2 + b)^2) \\
&= (x - y)((ab - 1)ab((b^2 + a)^2 + (b^2 + a)(a^2 + b) + (a^2 + b)^2)
\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}
(a^2 + b)(b^2 + a)((a^2 + b)(b^2 + a) - ab(ab - 1)) &= ab(ab - 1)((b^2 + a)^2 + (a^2 + b)^2) \\
&= (a^2 + b)(b^2 + a)(b^3 + a^3 + 2ab)
\end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b)((b^2 + a)(a^3 + b^3 + 2ab) - 2ab(ab - 1)) \\
&= (b^2 + a)(2ab(ab - 1) - (a^2 + b)(a^3 + b^3 + 2ab))
\end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}
&a((b^2 + a)(a^3 + b^3 + 2ab) - 2ab(ab - 1)) \\
&= b(2ab(ab - 1) - (a^2 + b)(a^3 + b^3 + 2ab))
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
(a^3 + b^3 + 2ab)(ab^2 + a^2 + a^2b + b^2) - 2a^2b^2(ab - 1) &= 0 \\
= (a^3 + b^3 + 2ab)(a^2b^2 + a^2 + b^2) - 2a^2b^2(ab - 1) &= 0 \\
= (a^3 + b^3 + 2ab)(2a^2b^2 - 2ab) - 2a^2b^2(ab - 1) &= 0 \\
a^3 + b^3 + 2ab - 2ab &= 0 = a^3 + b^3
\end{aligned}$$

Et c'est impossible ! Donc

$$x - y = 0$$

Autre preuve : Si  $x > y$ , nous avons

$$\begin{aligned}
& a_i x_i = b_i y_i = x_i + y_i \\
& \frac{2-a}{b_i-2} = \frac{y_i}{x}, \quad \frac{2-a_i}{b-2} = \frac{y}{x_i} \\
& \frac{x_i x}{y y_i} - 1 = \frac{(b-2)(b_i-2)}{(2-a)(2-a_i)} - 1 \\
& = \frac{x_i x - y_i y}{y_i y} = \frac{b_i b - 2b_i - 2b - a_i a + 2a + 2a_i}{(2-a)(2-a_i)} \\
& = \frac{(x-y)x_i + y(x_i - y_i)}{y_i y} = \frac{(x-y)(x_i + y)}{y_i y} = \frac{(b_i - a_i)b + a_i(b-a) + 2(a-b) + 2(a_i - b_i)}{(2-a)(2-a_i)} \\
& = \frac{(a_i - b_i)(2-b) + (a-b)(2-a_i)}{(2-a)(2-a_i)} \\
& = \frac{\sqrt{x_{i+1}y_{i+1}x_2y_2}((a_i - b_i)(2-b) + (a-b)(2-a_i))}{\sqrt{x_{i+1}y_{i+1}x_2y_2}(2-a)(2-a_i)} \\
& = \frac{(y-x)(2\sqrt{x_2y_2} - x) + (y-x)(2\sqrt{x_{i+1}y_{i+1}} - y_i)}{(2\sqrt{x_2y_2} - y)(2\sqrt{x_{i+1}y_{i+1}} - y_i)} \\
& = \frac{(y-x)(\sqrt{x_2}(\sqrt{y_2} - \sqrt{x_2}) - \sqrt{y_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{y_{i+1}}))}{\sqrt{y_2}(\sqrt{x_2} - \sqrt{y_2})\sqrt{y_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{y_{i+1}})} \\
& = (y-x) \left( \frac{-x}{y\sqrt{y_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{y_{i+1}})} - \frac{1}{\sqrt{y_2}(\sqrt{x_2} - \sqrt{y_2})} \right) = (x-y) \left( \frac{x_i}{y_i y} + \frac{1}{y_i} \right)
\end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}
& (x-y) \left( \frac{x}{y\sqrt{y_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{y_{i+1}})} - \frac{x_i}{y\sqrt{y_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}})} + \frac{1}{\sqrt{y_2}(\sqrt{x_2} - \sqrt{y_2})} - \frac{1}{\sqrt{y_{i+1}}(\sqrt{x_{i+1}} + \sqrt{y_{i+1}})} \right) = 0 \\
& = (x-y) \left( \frac{b_i x}{b y_2 (b_i - 2) y_i} - \frac{x_i}{b y_2 b_i y_{i+1}} + \frac{b}{(b-2)y} - \frac{1}{y_i} \right) = 0 \\
& = (x-y) \left( \frac{b_i x}{y y_i (b_i - 2)} - \frac{x_i}{y y_i} + \frac{b}{(b-2)y} - \frac{1}{y_i} \right) = 0 \\
& = (x-y) \left( \frac{b_i(b-2)x - (b-2)(b_i-2)x_i + b(b_i-2)y_i - (b-2)y(b_i-2)}{(b-2)y(b_i-2)y_i} \right) = 0
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
& (x-y)((b-2)(b_i x - (b_i-2)x_i) + (b_i-2)(b y_i - (b-2)y)) = 0 \\
& = (x-y)((b-2)(b_i(x-x_i) + 2x_i) + (b_i-2)(b(y_i-y) + 2y)) = 0 \\
& = (x-y)((b-2)(b_i(y-y_i) + 2x_i) + (b_i-2)(-b(y-y_i) + 2y)) = 0 \\
& = (x-y)((y-y_i)(b_i(b-2) - b(b_i-2)) + 2(b_i y - 2y + b x_i - 2x_i)) = 0 \\
& = 2(x-y)((y-y_i)(b-b_i) + (b_i(y-y_i) + b_i y_i - 2y + b(x_i-x) + b x - 2x_i)) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(x-y)((y-y_i)(b-b_i+b_i-b)+b_i y_i-2y+bx-2x_i) = 0 = 2(x-y)(x_i+y_i-2y+bx-2x_i) \\
&= 2(x-y)(y_i-x_i-2y+bx) = 2(x-y)(-x-y+bx) = 2(x-y)(-by+bx) = 2b(x-y)^2 = 0
\end{aligned}$$

Donc  $x$  ne peut être différent de  $y$  et

$$x - y = 0$$

Autre preuve : Nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{a_i b_{i+1}}{b_i a_{i+1}} = \frac{b_i}{a_i} \\
&= \frac{b_{i+1} + \sqrt{a_{i+1} b_{i+1}}}{a_{i+1} + \sqrt{a_{i+1} b_{i+1}}} \\
&= \frac{b_{i+1} y_{i+2} + \sqrt{a_{i+1} b_{i+1} y_{i+2}^2}}{a_{i+1} y_{i+2} + \sqrt{a_{i+1} b_{i+1} y_{i+2}^2}} \\
&= \frac{y_{i+1} + a_{i+1} \sqrt{x_{i+2} y_{i+2}}}{(a_{i+1} - 1) b_{i+1} y_{i+2} + a_{i+1} \sqrt{x_{i+2} y_{i+2}}} \\
&= \frac{2y_{i+1}}{(a_{i+1} - 1) y_{i+1} + y_{i+1}} = \frac{2}{a_{i+1}} = b_i - 1
\end{aligned}$$

Donc

$$2 = a_{i+1}(b_i - 1) = \sqrt{a_{i+1} b_{i+1}}$$

Ou

$$\sqrt{a_{i+1} b_{i+1}} - 2 = 0 = a_i b_i - 4 = \frac{(x - y)^2}{x_i y_i} = 0$$

Autre preuve : hypothèse que  $x \neq y, \forall x_1 = p_1, y_1 = q_1, \exists r_1$  vérifient

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}$$

Et

$$r_1 = \frac{xy}{x - y} = r$$

Ou

$$(p_1 - q_1)r_1 = p_1 q_1$$

Et

$$p_1(r_1 - q_1) = r_1 q_1$$

Posons

$$q_2 = r_1 - q_1 = \frac{r_1 q_1}{p_1}$$

Et

$$q_1(r_1 + p_1) = r_1 p_1$$

Aussi

$$p_2 = r_1 + p_1 = \frac{r_1 p_1}{q_1}$$

Ou

$$p_2 q_2 = r_1^2$$

Et

$$p_1 = p_2 - r_1 = p_2 - \sqrt{p_2 q_2}$$

Et

$$q_1 = r_1 - q_2 = -q_2 + \sqrt{p_2 q_2}$$

Avec

$$w_1 = w = (p_1 - q_1) = (\sqrt{p_2} - \sqrt{q_2})^2$$

$(p_1 - q_1)$  entier

$$p_1 = \sqrt{p_2}(\sqrt{p_2} - \sqrt{q_2})$$

$p_1$  entier

$$q_1 = \sqrt{q_2}(\sqrt{p_2} - \sqrt{q_2})$$

$q_1$  entier

$$r_1 = \frac{x_1 y_1}{x_1 - y_1} = \sqrt{p_2 q_2}$$

$r_2$  rationnel

Car

$\forall p_2, q_2$  rationnel,  $\exists r_2$  rationnel vérifiant

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}$$

Jusqu'à l'infini. Pour  $i$

$$(p_i - q_i) = (\sqrt{p_{i+1}} - \sqrt{q_{i+1}})^2$$



Et  $p_i - q_i$  rationnel pour  $i > 2$

$$p_i = \sqrt{p_{i+1}}(\sqrt{p_{i+1}} - \sqrt{q_{i+1}})$$

$p_i$  rationnel pour  $i > 2$

$$q_i = \sqrt{q_{i+1}}(\sqrt{p_{i+1}} - \sqrt{q_{i+1}})$$

$q_i$  rationnel pour  $i > 2$

$$r_i = \frac{p_i q_i}{p_i - q_i} = \sqrt{p_{i+1} q_{i+1}}$$

$r_i$  rationnel pour  $i > 1$  et aussi, bien sûr

$$\frac{1}{r_{i+1}} = \frac{1}{q_{i+1}} - \frac{1}{p_{i+1}}$$

**Lemme a** Les expressions des suites sont

$$(p_i - q_i) = (\sqrt{p_{i+1}} - \sqrt{q_{i+1}})^2$$

$$p_i = x^{2^{i-1}} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{2^j} - y^{2^j})^{-1} \quad (5)$$

$$q_i = y^{2^{i-1}} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{2^j} - y^{2^j})^{-1} \quad (6)$$

**Preuve du lemme a** Par récurrence, nous avons

$$p = \sqrt{p_2}(\sqrt{p_2} - \sqrt{q_2}) = \sqrt{p_2}(x - y)^{\frac{1}{2}}$$

$$p_2 = \frac{x^2}{x - y}$$

Aussi

$$q_2 = \frac{y^2}{x - y}$$

Le lemme est vérifié pour  $i = 2$ . Supposons que ce soit vérifié à l'ordre  $i$ , de (5) et (6)

$$p_i = \sqrt{p_{i+1}}(\sqrt{p_{i+1}} - \sqrt{q_{i+1}}) = \sqrt{p_{i+1}}(p_i - q_i)^{\frac{1}{2}}$$

Ou

$$p_{i+1} = p_i^2(p_i - q_i)^{-1}$$

Le lemme est vérifié pour  $i$ , d'où

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= x^{2^i} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{2^j} - y^{2^j})^{-2} (x^{2^{i-1}} - y^{2^{i-1}})^{-1} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{2^j} - y^{2^j}) \\ &= x^{2^i} \prod_{j=0}^{j=i-1} (x^{2^j} - y^{2^j})^{-1} \end{aligned}$$

Le lemme est donc vérifié pour  $i + 1$ , de même pour  $q_i$ , nous déduisons

$$p_i = x^{(2^{i-1})} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{(2^j)} - y^{(2^j)})^{-1}$$

Et pour  $q_i$

$$q_i = y^{(2^{i-1})} \prod_{j=0}^{j=i-2} (x^{(2^j)} - y^{(2^j)})^{-1}$$

Mais

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{x_i}{y_i} = \sqrt{\frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}} = \sqrt{\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}}$$

Ou

$$\frac{p_i}{x_i} = \frac{q_i}{y_i}$$

Donc

$$p_i y_i = q_i x_i$$

Mais, soit

$$p_i x_i - q_i y_i = q_i x_i \left( \frac{p_i}{q_i} - \frac{y_i}{x_i} \right) = q_i x_i \left( \frac{x_i}{y_i} - \frac{y_i}{x_i} \right) = q_i x_i \left( \frac{x_i^2 - y_i^2}{x_i y_i} \right)$$

D'où

$$\begin{aligned} x_i \left( p_i - q_i \frac{x_i^2}{y_i} \right) &= y_i (q_i - q_i y_i) \\ \frac{x_i}{y_i} &= \frac{q_i(1 - y_i)}{p_i - q_i \frac{x_i^2}{y_i}} = \frac{q_i(1 - y_i)}{p_i - p_i x_i} = \frac{q_i(1 - y_i)}{p_i(1 - x_i)} = \frac{y_i(1 - y_i)}{x_i(1 - x_i)} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{x_i^2}{y_i^2} = \frac{1 - y_i}{1 - x_i}$$

Ou

$$x_i^2 - x_i^3 - y_i^2 + y_i^3 = 0 = (x - y)(x_i + y_i - x_i^2 - y_i^2 - x_i y_i)$$

Et

$$x - y = 0$$

Autre preuve : nous avons

$$x_2 = \frac{x^2}{x+y} = \frac{x^2}{x^2-y^2}(x-y), \quad y_2 = \frac{y^2}{x+y} = \frac{y^2}{x^2-y^2}(x-y)$$

Et

$$p_2 = \frac{x^2}{x-y} = \frac{x^2}{x^2-y^2}(x+y), \quad q_2 = \frac{y^2}{x-y} = \frac{y^2}{x^2-y^2}(x+y)$$

Or

$$(p_2 + x_2)(x - y) = \frac{2x^3}{x+y} = 2x_2x, \quad (q_2 + y_2)(x - y) = \frac{2y^3}{x+y} = 2y_2y$$

Et

$$\begin{aligned} (p_2 - q_2 + x_2 - y_2)(x - y) &= (x + y + x - y)(x - y) = 2x(x - y) \\ &= 2x_2x - 2y_2y = 2(x_2 - y_2)x + 2y_2(x - y) = 2(x - y)(x + y_2) \end{aligned}$$

Donc, encore une fois,  $x$  ne peut être différent de  $y$

$$2(x - y)(x + y_2 - x) = 0 = y_2(x - y)$$

Autre preuve : nous avons

$$\begin{aligned} x+y = p_2 - q_2 &= p_3 + q_3 - 2\sqrt{p_3q_3} = p_4 - q_4 - 2\sqrt{p_3q_3} = \dots = p_{2k} - q_{2k} - 2\sqrt{p_3q_3} - 2\sqrt{p_5q_5} - \dots - 2\sqrt{p_{2k-1}q_{2k-1}} \\ &= p_{2k+1} + q_{2k+1} - 2\sqrt{p_3q_3} - 2\sqrt{p_5q_5} - \dots - 2\sqrt{p_{2k+1}q_{2k+1}} \\ &= p_{2k} - q_{2k} + 2(p_2 - p_3) + 2(p_4 - p_5) + \dots + 2(p_{2k-2} - p_{2k-1}) \\ &= p_{2k} - q_{2k} - 2(q_3 + q_2) - 2(q_5 + q_4) + \dots - 2(q_{2k-1} + q_{2k-2}) \\ &= p_{2k+1} + q_{2k+1} + 2(p_2 - p_3) + 2(p_4 - p_5) + \dots + 2(p_{2k} - p_{2k+1}) \\ &= q_{2k+1} - p_{2k+1} + 2p_2 - 2p_3 + 2p_4 - 2p_5 + \dots + 2p_{2k} \\ &= p_{2k+1} + q_{2k+1} - 2(q_3 + q_2) - 2(q_5 + q_4) + \dots - 2(q_{2k+1} + q_{2k}) \\ &= -q_{2k+1} + p_{2k+1} - 2q_2 - 2q_3 - 2q_4 - 2q_5 \dots - 2q_{2k} \end{aligned}$$

Donc

$$2p_2 + 2q_2 - 2p_3 + 2q_3 + 2p_4 + 2q_4 - \dots + 2p_{2k-2} + 2q_{2k-2} - 2p_{2k-1} + 2q_{2k-1} = 0$$

Et

$$\begin{aligned} 2q_{2k+1} - 2p_{2k+1} + 2p_2 + 2q_2 - 2p_3 + 2q_3 + 2p_4 + 2q_4 - \dots - 2p_{2k-1} + 2q_{2k-1} + 2p_{2k} - 2q_{2k} &= 0 \\ = 2q_{2k+1} - 2p_{2k+1} + 2p_{2k} - 2q_{2k} &= 2q_{2k+1} - 2p_{2k+1} + 2p_{2k+1} + 2q_{2k+1} - 4\sqrt{p_{2k+1}q_{2k+1}} = 0 \\ &= 4q_{2k+1} - 4\sqrt{p_{2k+1}q_{2k+1}} = 0 = 4q_{2k+1}\left(1 - \sqrt{\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}}\right) \\ &= 4q_{2k+1}\left(1 - \frac{x_{2k}}{y_{2k}}\right) = 4q_{2k+1}\left(\frac{y-x}{y_{2k}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Et c'est impossible, l'hypothèse ( $x \neq y$ ) est fautive ! Prouvons maintenant la conjecture de Beal ! Celle-ci stipule que  $z^{c+2} = x^{a+2} + y^{b+2}$  est impossible pour  $a > 0$  et  $b > 0$  et  $c > 0$  avec  $x, y, z$  premiers dans l'ensemble. Il y aurait des solutions pour  $abc = 0$ .

## Preuve de la conjecture de Beal

L'équation est  $Z^c = X^a + Y^b$

$$u = \frac{X^c - 1}{Z^{\frac{c}{2}}}, \quad u' = \frac{7 - X^c}{Z^{\frac{c}{2}}}$$

Donc

$$(u + u')Z^{\frac{c}{2}} = X^c - 1 + 7 - X^c = 6 \Rightarrow Z^{\frac{c}{2}} = \frac{6}{u + u'}$$

$$Z^c = \frac{36}{(u + u')^2}$$

Soit

$$X^c = uZ^{\frac{c}{2}} + 1 = \frac{6u}{u + u'} + 1 = \frac{7u + u'}{u + u'}$$

Et

$$X^a = Z^c - Y^b = \frac{36 - Y^b(u + u')^2}{(u + u')^2}$$

Soit

$$v = \frac{Y^c - 1}{Z^{\frac{c}{2}}}, \quad v' = \frac{7 - Y^c}{Z^{\frac{c}{2}}}$$

Et

$$(v + v')Z^{\frac{c}{2}} = Y^c - 1 + 7 - Y^c = 6 \Rightarrow Z^{\frac{c}{2}} = \frac{6}{v + v'}$$

Soit

$$Y^c = vZ^{\frac{c}{2}} + 1 = \frac{7v + v'}{v + v'}$$

Et

$$Z^c = \frac{36}{(v + v')^2}$$

Ainsi

$$Y^b = Z^c - X^a = \frac{36 - X^a(v + v')^2}{(v + v')^2}$$

Soit  $m$  et  $v$  tels que  $v = \frac{(13-10^{-m})u+(5-10^{-m-1})u'}{32(u^2-u'^2)}$  : on a

$$7u - u' = 32v(u + u')(u - u') > 4(u + u')$$

Car

$$7u - u' = (13 - 10^{-m})u + (5 - 10^{-m-1})u' > 4u + 4u'$$

Ou

$$u(7 - 32v(u + u')) = (1 - 32v(u + u'))u'$$

Et

$$(X^c - 1)(7 - 32v(u + u')) = (32v(u + u') - 1)(X^c - 7)$$

$$0 < X^c(64v(u + u') - 8) = (256v(u + u') - 14)$$

Car

$$64v(u + u') - 8 = \frac{2((13 - 10^{-m})u + (5 - 10^{-m-1})u') - 8(u - u')}{u - u'}$$

$$= \frac{(18 - 2(10^{-m}))u + (18 - 2(10^{-m-1}))u'}{u - u'} = \frac{6(u + u')}{u - u'} > 0$$

Soit

$$\begin{aligned} X^c &= \frac{128v(u + u') - 7}{32v(u + u') - 4} \\ &= \frac{(45 - 4(10^{-m}))u + (13 - 10^{-m-1})u'}{(13 - 10^{-m})u + (5 - 10^{-m-1})u'} < 16 \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} &(163 - 12(10^{-m}))u + (67 - 15(10^{-m-1}))u' \\ &= -\left(\frac{978 - 163(10^{-m-1})}{6}\right)u' + \frac{163(10^{-m})}{6}u - 12(10^m)u + (67 - 15(10^{-m-1}))u' \\ &= \frac{-576 + 73(10^{-m-1})}{6}u' + \frac{91(10^{-m})}{6}u > 0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} X^{2c} - 64 &= \frac{(7u + u')^2}{(u + u')^2} - 64 \\ &= \frac{(-u - 7u')(15u + 9u')}{(u + u')^2} > 0 \\ &8 < X^c < 16 \end{aligned}$$

$$X^c = 9$$

Soit  $m$  et  $w$  tels que  $w = \frac{(13-10^{-m})v+(5-10^{-m-1})v'}{32(v^2-v'^2)}$  : on a

$$7v - v' = 32w(v + v')(v - v') > 4(v + v')$$

Car

$$7v - v' = (13 - 10^{-m})v + (5 - 10^{-m-1})v' > 4v + 4v'$$

Ou

$$v(7 - 32w(v + v')) = (1 - 32w(v + v'))v'$$

Et

$$\begin{aligned} (Y^c - 1)(7 - 32w(v + v')) &= (32w(v + v') - 1)(Y^c - 7) \\ 0 < Y^c(64w(v + v') - 8) &= (256w(v + v') - 14) \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} 64w(v + v') - 8 &= \frac{2((13 - 10^{-m})v + (5 - 10^{-m-1})v') - 8(v - v')}{v - v'} \\ &= \frac{(18 - 2(10^{-m}))v + (18 - 2(10^{-m-1}))v'}{v - v'} = \frac{6(v + v')}{v - v'} > 0 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} Y^c &= \frac{128w(v + v') - 7}{32w(v + v') - 4} \\ &= \frac{(45 - 4(10^{-m}))v + (13 - 10^{-m-1})v'}{(13 - 10^{-m})v + (5 - 10^{-m-1})v'} < 16 \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned}
& (163 - 12(10^{-m}))v + (67 - 15(10^{-m-1}))v' \\
&= -\left(\frac{978 - 163(10^{-m-1})}{6}\right)v' + \frac{163(10^{-m})}{6}v - 12(10^m)v + (67 - 15(10^{-m-1}))v' \\
&= \frac{-576 + 73(10^{-m-1})}{6}v' + \frac{91(10^{-m})}{6}v > 0
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
Y^{2c} - 64 &= \frac{(7v + v')^2}{(v + v')^2} - 64 \\
&= \frac{(-v - 7v')(15v + 9v')}{(v + v')^2} > 0 \\
8 &< Y^c < 16 \\
Y^c &= 9 \\
Z^2 &= 3^a + 3^b
\end{aligned}$$

Pas de solutions car  $X, Y, Z$  sont premiers entre eux! Pour  $abc = 0$ , nous avons les solutions suivantes

$$\begin{aligned}
1^m + 2^3 &= 3^2 \\
2^5 + 7^2 &= 3^4 \\
13^2 + 7^3 &= 2^9 \\
2^7 + 17^3 &= 71^2 \\
3^5 + 11^4 &= 122^2 \\
33^8 + 1549034^2 &= 15613^3 \\
1414^3 + 2213459^2 &= 65^7 \\
9262^3 + 15312283^2 &= 113^7 \\
17^7 + 76271^3 &= 21063928^2 \\
43^8 + 96222^3 &= 30042907^2
\end{aligned}$$

Une autre application est l'équation diophantienne suivante

$$U^n = X_1^{n_1} + X_2^{n_2} + \dots + X_i^{n_i}$$

$X_j, X_k$  copremiers deux à deux  $\forall j, k, j \neq k$  La conjecture que nous proposons est que cette équation n'a pas de solution pour  $n > i(i-1)$  et  $n_j > i(i-1)$ ,  $\forall j \in \{1, 2, \dots, i\}$ . L'approche est sensiblement la même que plus haut. Démontrons que si  $X_i, (i \geq 2), n_i, U, n, X_1, X_2, \dots, X_i$  copremiers et entiers plus grands que zéro, alors  $X_a X_b = 0$ , ou  $X_a^{n_a} = X_b^{n_b} \forall a, b = 1, 2, \dots, i$

$$n_k > i(i-1), \forall k = 1, 2, \dots, i, n > i(i-1)$$

pour l'équation (e) suivante

$$X_1^{n_1} + X_2^{n_2} + \dots + X_i^{n_i} = U^n$$

quand  $n \leq i(i-1), n_k \leq i(i-1), k = 1, 2, \dots, i$  il y a des solutions, par exemple :  
 $i = 2$  a

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

et  $i = 3$  a

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

et

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$$

et  $i = 4$  a

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

etc... Supposons que (e) est vérifiée et que  $X_k$  sont copremiers deux à deux,  
 $k \in \{1, 2, \dots, i\}; i \geq 2$ , effectivement

$$x_k = U^{(i-1)n} X_k^{n_k}$$

$$k = 1, 2, \dots, i$$

Et

$$u = U^{in}$$

Et

$$v = X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_i^{n_i}$$

D'où

$x_k, k = 1, 2, \dots, i$ ,  $u, v$  vérifient (8)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i = U^{(i-1)n} (X_1^{n_1} + X_2^{n_2} + \dots + X_i^{n_i}) = U^{in} = u$$

Et

(9)

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_i^{n_i}} = \frac{U^{i(i-1)n}}{U^{(i-1)n} X_1^{n_1} U^{(i-1)n} X_2^{n_2} \dots U^{(i-1)n} X_i^{n_i}} = \frac{u^{(i-1)}}{x_1 x_2 \dots x_i}$$

Définissons les premiers termes de ces nouvelles suites

$$x_{k,0} = x_k$$

$$u_0 = u$$

$$v_0 = v$$

Et

$$x_{k,1} = x_k^i (x_1 + x_2 + \dots + x_i)^{-(i-1)}$$

$$k = 1, 2, \dots, i$$

Qui implique

$$u = x_1 + x_2 + \dots + x_i = (x_{1,1}^{\frac{1}{i}} + x_{2,1}^{\frac{1}{i}} + \dots + x_{i,1}^{\frac{1}{i}})^i > u_1 > 1$$

Et

$$\begin{aligned} x_{k,0} &= x_k = x_{k,1}^{\frac{1}{i}} (x_1 + x_2 + \dots + x_i)^{\frac{(i-1)}{i}} \\ &= x_{k,1}^{\frac{1}{i}} (x_{1,1}^{\frac{1}{i}} + x_{2,1}^{\frac{1}{i}} + \dots + x_{i,1}^{\frac{1}{i}})^{(i-1)} > x_{k,1} > 0 \end{aligned}$$

Et

$$v = \frac{x_{1,0}x_{2,0}\dots x_{i,0}}{u^{(i-1)}} = x_{1,1}^{\frac{1}{i}}x_{2,1}^{\frac{1}{i}}\dots x_{i,1}^{\frac{1}{i}} > v_1 = \frac{x_{1,1}x_{2,1}\dots x_{i,1}}{u_1^{(i-1)}} > 0$$

Le raisonnement est valable jusqu'à l'infini. Nous avons

$$u_j = x_{1,j} + x_{2,j} + \dots + x_{i,j} = (x_{1,j+1}^{\frac{1}{i}} + x_{2,j+1}^{\frac{1}{i}} + \dots + x_{i,j+1}^{\frac{1}{i}})^i > u_{j+1} > 1$$

Et

$$x_{k,j} = x_{k,j+1}^{\frac{1}{i}} (x_{1,j+1}^{\frac{1}{i}} + x_{2,j+1}^{\frac{1}{i}} + \dots + x_{i,j+1}^{\frac{1}{i}})^{(i-1)} > x_{k,j+1} > 0$$

Et

$$k = 1, 2, \dots, i$$

Et

$$v_j = \frac{x_{1,j}x_{2,j}\dots x_{i,j}}{u_j^{(i-1)}} = x_{1,j+1}^{\frac{1}{i}}x_{2,j+1}^{\frac{1}{i}}\dots x_{i,j+1}^{\frac{1}{i}} > v_{j+1} = \frac{x_{1,j+1}x_{2,j+1}\dots x_{i,j+1}}{u_{j+1}^{(i-1)}} > 0$$

$x_{k,j}, v_j, u_j$  sont positifs  $\forall j > 1, \forall k = 1, 2, \dots, i$ .

(P) est l'expression :

$$x_{k,j} = x_k^{i^j} \left( \prod_{l=0}^{j-1} (x_1^{i^l} + x_2^{i^l} + \dots + x_i^{i^l}) \right)^{-(i-1)}$$

qui se démontre par récurrence. Pour  $j = 1$  c'est vérifié de par la définition de  $x_{k,1}, u_1$  et  $v_1$ , supposons (P) vraie, or avec l'expression de  $u_j$  ceci implique, avec (P), que

$$x_{k,j} = x_{k,j+1}^{\frac{1}{i}} (x_{1,j+1}^{\frac{1}{i}} + x_{2,j+1}^{\frac{1}{i}} + \dots + x_{i,j+1}^{\frac{1}{i}})^{(i-1)}$$

Mais

$$x_{k,j+1}^{\frac{1}{i}} = x_{k,j} (x_{1,j+1}^{\frac{1}{i}} + x_{2,j+1}^{\frac{1}{i}} + \dots + x_{i,j+1}^{\frac{1}{i}})^{-(i-1)}$$

Et

$$x_{k,j+1} = x_{k,j}^i (x_{1,j+1}^{\frac{1}{i}} + x_{2,j+1}^{\frac{1}{i}} + \dots + x_{i,j+1}^{\frac{1}{i}})^{-(i-1)i} = x_{k,j}^i (x_{1,j} + x_{2,j} + \dots + x_{i,j})^{-(i-1)}$$

$$= x_k^{i^{j+1}} \prod_{l=0}^{j-1} (x_1^{i^l} + x_2^{i^l} + \dots + x_i^{i^l})^{-i(i-1)} (x_1^{i^j} + x_2^{i^j} + \dots + x_i^{i^j})^{-(i-1)}.$$

$$\begin{aligned} & \prod_{l=0}^{j-1} (x_1^{i^l} + x_2^{i^l} + \dots + x_i^{i^l})^{-(i-1)^2} \\ &= x_k^{i^{j+1}} \prod_{l=0}^{j-1} (x_1^{i^l} + x_2^{i^l} + \dots + x_i^{i^l})^{-(i-1)} \end{aligned}$$



Nous avons bien

$$x_{k,j} = x_k^{ij} \prod_{l=0}^{l=j-1} (x_1^{i^l} + x_2^{i^l} + \dots + x_i^{i^l})^{-(i-1)}$$

La solution  $\forall k \geq 2$  est ici aussi

$$X_k = X_m$$

pout tout  $k, m$ . La démonstration est simple, nous l'avons déjà rencontrée, effectivement

$$\begin{aligned} u &= U^{2n} \\ x &= U^n X_k^{n_k} \\ y &= U^n (U^n - X_k^{n_k}) \\ z &= X_k^{n_k} (U^n - X_k^{n_k}) \end{aligned}$$

Et

$$u = x + y$$

Et

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Et c'est le lemme 1. Sa solution est, comme déjà vu

$$U = X_k = 0; \forall k \in \{1, 2, \dots, i\}$$

Ceci est dû au fait que cette équation n'a pas un algorithme qui en prouve la possibilité ou l'impossibilité por tout  $i$ . La conjecture que nous proposons est que les équations de Fermat-Catalan généralisées ainsi définies n'ont pas de solutions qui se situent dans  $n > i(i-1)$  et  $n_k > i(i-1)$ . Il n'existe pas de formule explicite pour  $i$  donnant les solutions : pour certains  $i$ , c'est  $i$ , pour d'autres  $i+1$ , mais les solutions se trouvent toujours pour  $n \leq i(i-1)$  ou  $n_k \leq i(i-1)$ . Pourquoi  $n \leq i(i-1)$ ,  $n_k \leq i(i-1)$ ? Pour répondre, supposons

$$n = n_k = i(i-1)$$

Les formules sont alors

$$\begin{aligned} x_{k,j} &= x_k^{ij} \left( \prod_{l=0}^{l=j-1} x_1^{i^l} + x_2^{i^l} + \dots + x_i^{i^l} \right)^{-(i-1)} \\ &= U^{nij} X_k^{n_k i^j} \left( \prod_{l=0}^{l=j-1} (U^{ni^l} X_1^{n_1 i^l} + U^{ni^l} X_2^{n_2 i^l} + \dots + U^{ni^l} X_i^{n_i i^l}) \right)^{-(i-1)} \\ &= U^{i(i-1)ij} X_k^{i(i-1)ij} \left( \prod_{l=0}^{l=j-1} (U^{i(i-1)i^l} X_1^{i(i-1)i^l} + \dots + U^{i(i-1)i^l} X_i^{i(i-1)i^l}) \right)^{-(i-1)} \\ &= U^{(i-1)i^{j+1}} X_k^{(i-1)i^{j+1}} \left( \prod_{l=0}^{l=j-1} (U^{(i-1)i^{l+1}} X_1^{(i-1)i^{l+1}} + \dots + U^{(i-1)i^{l+1}} X_i^{(i-1)i^{l+1}}) \right)^{-(i-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U^{(i-1)i^{j+1}} X_k^{(i-1)i^{j+1}} \left( \prod_{l=1}^{l=j} (U^{(i-1)i^l} X_1^{(i-1)i^l} + \dots + U^{(i-1)i^l} X_i^{(i-1)i^l}) \right)^{-(i-1)} \\
&= (U^{i^{j+1}} X_k^{i^{j+1}} \left( \prod_{l=1}^{l=j} (U^{(i-1)i^l} X_1^{(i-1)i^l} + \dots + U^{(i-1)i^l} X_i^{(i-1)i^l}) \right)^{-1})^{i-1}
\end{aligned}$$

C'est l'expression des  $x_{k,j+1}$  de l'exposant  $i - 1$ . S'il y a des solutions pour  $i - 1$ , il y aura des solutions pour les exposants  $i(i - 1)$ . Ce n'est pas le cas pour l'exposant  $i$ , à cause de l'exposant  $i - 1$  dans les formules.

**Exceptions** Pour l'équation suivante

$$kU^n = X^n + Y^n$$

Et pour  $k$  entier comme 7, il y a des solutions, pour d'autres tel 2, il n'y en a pas. Si nous posons

$$\begin{aligned}
u &= (kU^n)^2 \\
x &= kU^n X^n \\
y &= kU^n Y^n \\
z &= X^n Y^n
\end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
u &= kU^n (X^n + Y^n) = x + y \\
\frac{1}{z} &= \frac{k^2 U^{2n}}{kU^n X^n kU^n Y^n} = \frac{u}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

Et si

$$\begin{aligned}
u &= U^{2n} \\
x &= U^n X^n \\
y &= U^n Y^n \\
z &= X^n Y^n
\end{aligned}$$

Et

$$u = U^{2n} = \frac{kU^n (X^n + Y^n)}{k^2} = \frac{x + y}{k}$$

Et

$$\frac{1}{z} = \frac{U^{2n}}{U^n X^n U^n Y^n} = \frac{u}{xy} = \frac{x + y}{kxy} = \frac{1}{kx} + \frac{1}{ky}$$

Des équations incompatibles qui prouvent bien l'inexistence d'un algorithme général d'impossibilité!

**Conclusion** Cette approche des équations de Fermat-Catalan nous a permis de faire une allusion au théorème de Matyasevich et de généraliser les équations de Fermat-Catalan à une nouvelle conjecture. Nous avons démontré que l'équation de Beal n'a pas de solution pour  $a > 0$  et  $b > 0$  et  $c > 0$  quand  $x, y, z$  sont copremiers. Et il y a des solutions pour  $abc = 0$ .

## Références

- [1] Darmon, H. and Granville, A. "On the Equations and ." *Bull. London Math. Soc.* , **27**, 513-543 (1995).
- [2] Elkies, N. "The ABCs of Number Theory." *Harvard Math. Rev.* **1**, 64-76 (2007).
- [3] Mauldin, R. D. "A Generalization of Fermat's Last Theorem : The Beal Conjecture and Prize Problem." *Not. Amer. Math. Soc.* , **44**, 1436-1437 (2003).