



**HAL**  
open science

## Mécanique des Milieux Discrets

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

| Jean-Paul Caltagirone. Mécanique des Milieux Discrets. 2013. hal-00788639

**HAL Id: hal-00788639**

**<https://hal.science/hal-00788639>**

Preprint submitted on 14 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mécanique des Milieux Discrets

## Discrete Mechanics

Jean-Paul Caltagirone

Institut de Mécanique et d'Ingénierie - Bordeaux,  
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295  
6 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex  
[calta@ipb.fr](mailto:calta@ipb.fr)

### Mots clés

Décomposition de Hodge-Helmholtz, géométrie différentielle, calcul extérieur, mécanique des milieux continus, thermodynamique des milieux continus, équation de Navier-Stokes, lois de Cauchy, loi de Stokes.

### Résumé

Les équations de la Mécanique sont établies à partir de la notion de milieu discret, pour un élément de volume formé de surfaces et de segments orientés et de points. Des éléments de géométrie différentielle sont utilisés pour obtenir les équations de conservation vectorielles de quantité de mouvement et de chaleur. Le principal fondamental de la dynamique appliqué sur un contour orienté conduit à la loi de conservation discrète du mouvement. Les inconnues de ces équations vectorielles sont les composantes de la vitesse et celles du flux de chaleur.

Comme l'hypothèse de milieu continu, celle de l'équilibre thermodynamique local est abandonnée. Les évolutions lagrangiennes locales des potentiels locaux, masse volumique, température, pression, sont obtenues à partir des flux de quantité de mouvement et de chaleur; ces potentiels sont considérés comme des accumulateurs servant à maintenir l'équilibre mécanique. L'intégration des évolutions des potentiels thermodynamiques dans les équations vectorielles de conservation discrètes permet d'obtenir un système autonome, sans loi d'état. Seuls les coefficients thermodynamiques et les paramètres de transport, viscosité de cisaillement et conductivité thermique sont nécessaires à l'établissement du système vectoriel.

La décomposition de l'équation du mouvement en deux parties, une composante à rotationnel nul et une autre à divergence nulle, conduit à formuler le vecteur quantité de mouvement comme la somme de ces deux termes. C'est une décomposition formelle de Hodge-Helmholtz de l'équation du mouvement.

### Keywords

Hodge-Helmholtz decomposition, Differential Geometry, Discrete Exterior Calculus, Continuum Mechanics, Continuum Thermodynamics, Navier-Stokes equation, Cauchy's laws, Stokes's law.

### Abstract

The equations of mechanics are based on the discrete medium concept for a volume formed by oriented surfaces and edges, and points. Elements of differential geometry are used to establish the vectors conservation laws for transfer phenomena, momentum and heat. The Newton's fundamental principle and flux conservation law lead to the discrete flow and heat transfer equations. The unknowns in these equations are the velocity and the heat flux components. Naturally the balance laws are based on the edge rather than a point as continuum mechanics. Lagrangian evolutions of potentials, density, temperature and pressure are obtained from the balance of momentum and heat fluxes. These potentials are considered as accumulators to maintain mechanical equilibrium.

As the continuum medium hypothesis, the local thermodynamic equilibrium is set aside. Construction of this model leads to discrete physical intrinsic conservation of momentum and flux, the scalar potentials, density, temperature and pressure are raised in order to ensure the conservation of mass and energy. The integration of the evolution of thermodynamic potentials into the vector discrete equations conservation laws provides a standalone system without thermodynamic state law.

The decomposition of the equation of motion into a rotation-free and divergence-free components, leads to the formulation of momentum as the sum of these two terms. This is a formally exact Hodge-Helmholtz decomposition of equation of motion.

# Mécanique des Milieux Discrets

Jean-Paul Caltagirone

Institut de Mécanique et d'Ingénierie - Bordeaux,  
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295  
6 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex  
[calta@ipb.fr](mailto:calta@ipb.fr)

## Mots clés

Décomposition de Hodge-Helmholtz, géométrie différentielle, calcul extérieur, mécanique des milieux continus, thermodynamique des milieux continus, équation de Navier-Stokes, loi de Cauchy, loi de Stokes.

## Résumé

Les équations de la Mécanique sont établies à partir de la notion de milieu discret; ces lois de conservation ne sont plus obtenues pour un milieu continu mais pour un élément de volume polyédrique formé de surfaces, de segments et de points. Des éléments élémentaires de géométrie différentielle sont utilisés pour établir des équations discrètes vectorielles limitées aux seules phénomènes de transfert de quantité de mouvement et de chaleur. Les inconnues de ces équations sont la vitesse et le flux de chaleur ou plutôt les composantes de ces quantités dans une base correspondante aux nombres de segments du polyèdre de référence. Le vecteur vitesse, le flux de chaleur ou d'éventuels tenseurs ne sont plus connus sur une base orthonormée, seules leurs composantes sont nécessaires et parfaitement localisées dans le domaine discret. Les évolutions lagrangiennes des potentiels, masse volumique, température et pression sont obtenues à partir de bilans des flux de quantité de mouvement et de chaleur. Ces potentiels sont considérés comme des accumulateurs pour maintenir l'équilibre mécanique.

Comme la notion de milieu continu, celle de l'Equilibre Thermodynamique Local est abandonnée. De la construction même du modèle physique discret, la quantité de mouvement et le flux mais aussi les quantités scalaires, masse, énergie, ... sont conservées intrinsèquement. Seuls les coefficients thermodynamiques doivent être connus en fonction des potentiels, la loi d'état en tant que telle devient inutile. Les phénomènes hors d'équilibre thermodynamique comme certains écoulements à grande vitesse peuvent ainsi être modélisés en sauvegardant exactement la masse, le rotationnel, etc. L'ensemble des hypothèses conduit à un système d'équations discrètes sur les quantités vectorielles et de remontées des potentiels scalaires pour la description d'un nouvel état d'équilibre mécanique. Des conditions aux limites spécifiques, cohérentes avec le modèle, sont explicitées. Les évolutions lagrangiennes des différentes quantités scalaires peuvent être transformées ensuite en repère eulérien.

La dérivée particulaire de la vitesse de l'équation du mouvement discrète se présente comme la somme de deux termes, un gradient d'un potentiel scalaire  $\Phi$  et un rotationnel d'un potentiel vecteur  $\Psi$ . La décomposition de Hodge-Helmholtz d'un vecteur en une partie à rotationnel nul et d'une autre à divergence nulle est à la base même du modèle présenté. Les propriétés  $\nabla \times \nabla \Phi = 0$  et  $\nabla \cdot \nabla \times \Psi = 0$  vraies en continu sont supposées aussi exactement satisfaites en discret. Le rôle de l'équation du mouvement discrète obtenu est ainsi de séparer toute perturbation de l'équilibre mécanique en un gradient ou un rotationnel. Seul ce dernier potentiel conduit à un mouvement du fluide.

L'exposé est essentiellement consacré au milieu fluide mais son extension aux milieux élastiques isotropes est rapidement présentée. Les formulations sont en parfaite cohérence et permettent le calcul du déplacement ou de la vitesse ou des deux dans un même système d'équations. Notamment les équations de la Mécanique des Fluides sont revisitées à l'aune de ces concepts discrets et de la décomposition de Hodge-Helmholtz.

# Contents

<b>1</b>	<b>Bases du modèle physique</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction . . . . .	4
1.1.1	Hypothèses de Non Equilibre Local et de Milieu Discret . . . . .	5
1.1.2	Notion de volume élémentaire . . . . .	6
1.1.3	Définitions . . . . .	7
1.2	Contrainte discrète . . . . .	9
1.2.1	Expression d'une contrainte discrète . . . . .	9
1.2.2	Contrainte et tenseur de Cauchy . . . . .	12
1.2.3	Condition à l'interface de deux fluides . . . . .	14
1.2.4	Equation discrète du mouvement . . . . .	17
1.2.5	Equilibre mécanique . . . . .	20
1.3	Ecoulements de référence . . . . .	24
1.3.1	Equilibre d'un tétraèdre . . . . .	24
1.3.2	Ecoulement de Couette plan . . . . .	25
1.3.3	Tourbillon visqueux . . . . .	26
1.3.4	Ecoulement de Poiseuille diphasique . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Conservation de la quantité de mouvement et du flux de chaleur</b>	<b>29</b>
2.1	Equation de la quantité de mouvement . . . . .	29
2.1.1	Décomposition de Hodge-Helmholtz Discrète . . . . .	30
2.2	Conservation du flux de chaleur . . . . .	32
2.2.1	Introduction . . . . .	32
2.2.2	Equation du flux . . . . .	32
2.3	Insuffisances du modèle physique . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Non Equilibre Thermodynamique</b>	<b>37</b>
3.1	Hypothèses . . . . .	37
3.2	Coefficients thermodynamiques . . . . .	38
3.3	Evolution des potentiels . . . . .	39
3.3.1	Masse volumique . . . . .	40
3.3.2	Température . . . . .	41
3.3.3	Pression . . . . .	46
3.4	Système d'équations . . . . .	47
3.4.1	Expressions des potentiels . . . . .	47
3.4.2	Système d'équations et potentiels . . . . .	48
3.4.3	Relèvement eulérien . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Propriétés du modèle physique</b>	<b>50</b>
4.1	Système d'équations représentatif . . . . .	50
4.1.1	Conséquences . . . . .	51
4.2	Couplage fluide-ondes . . . . .	55
4.2.1	Onde de choc droite . . . . .	56
4.3	Elasticité linéaire . . . . .	57
4.3.1	Cas d'un glacier de montagne . . . . .	58
4.3.2	Nécessité d'un vecteur d'accumulation . . . . .	61
4.4	Couplage fluide-structure . . . . .	62
4.5	Extension à la simulation numérique . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>64</b>

# 1 Bases du modèle physique

## 1.1 Introduction

La Mécanique des Milieux Discrets est établie sur d'autres concepts que la Mécanique des Milieux Continus. Elle reprend essentiellement des résultats élémentaires de géométrie différentielle pour établir des bilans sur un volume discret. Le principe Fondamental de la Dynamique sert bien sûr de point de départ à l'établissement de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Même si le titre évoque le contexte général de la Mécanique, ce document est consacré quasi-exclusivement à la Mécanique des Fluides.

Une partie des concepts utilisés en Mécanique des Milieux Continus sera abandonnée; c'est ainsi que la notion même de milieu continu ne sera pas nécessaire à l'obtention d'équations discrètes. De même l'hypothèse d'Equilibre Thermodynamique Local sera levée, au sein du volume élémentaire la satisfaction d'une équation d'état n'est pas requise. La notion de tenseur sera remplacée par des concepts de géométrie différentielle et des opérateurs, gradient, rotationnel, divergence qui permettent d'établir le lien entre quantités ponctuelles, des vecteurs orientés, des surfaces orientées et des volumes ainsi que le lien inverse. De même les projections sur un système d'axe orthonormé ne sera pas nécessaire pour établir les équations de conservation.

Même si ce formalisme conduit à une équation du mouvement différente de l'équation de Navier-Stokes, leurs applications à des écoulements simples montrera des résultats identiques. La Décomposition Discrète de Hodge-Helmholtz jouera un rôle essentiel pour montrer comment l'équation du mouvement permet de séparer tout terme de cette équation en une partie à divergence nulle et une partie à rotationnel nul.

En Mécanique des Fluides la pression de l'équation du mouvement ne peut pas être réduite au rôle de pression mécanique. Cette équation représente un équilibre instantané et la pression thermodynamique, qui joue le rôle d'accumulateur des contraintes, dépend non seulement de quantités comme la température ou la masse volumique mais aussi du flux de chaleur et de la vitesse. En se limitant aux seuls effets mécaniques et thermiques, le rôle des divergences du flux et de la vitesse pour le relèvement de la pression thermodynamique sera mis en avant.

Les éléments de géométrie différentielle, d'algèbre différentielle, de calcul extérieur, ... seront omis pour une présentation la plus simple possible utilisant les théorèmes classiques, Ostrogradski, Stokes, ... et les propriétés des opérateurs différentiels standards.

Depuis plus de deux siècles, Leonhard Euler, Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant, Louis Augustin de Cauchy, Claude Louis Marie Henri Navier, George Gabriel Stokes, et bien d'autres de leurs contemporains ont permis l'éclosion de la Mécanique telle que nous la connaissons aujourd'hui. En effet les multiples tentatives, voire les polémiques, du début du siècle dernier et les progrès plus récents sur certains points plus spécifiques, les principes de la Mécanique n'ont pas été remis en cause.

De son côté la Thermodynamique a connu au milieu du siècle dernier un essor important notamment en Thermodynamique des Processus Irreversibles avec des contributions importantes comme celles de Ilya Prigigine. Dans un même temps Clifford Ambrose Truesdell[29] ou Walter Noll[30] ont créé la Mécanique Rationnelle et ont formalisé le lien entre Mécanique et Thermodynamique. D'autres mécaniciens importants comme , G.I. Taylor[25], G.K. Batchelor[6] au Royaume Uni ou Paul Germain[17] en France ont permis la vulgarisation de ces notions importantes auprès de leur étudiants. De nombreux ouvrages sur l'Histoire des Sciences permet de comprendre la genèse des idées et leurs évolutions au cours du temps.

La vision originale proposée ci-dessous repose sur les grands principes élaborés précédemment tout en revisitant l'établissement des équations de conservation à l'aide de concepts plus récents.

### 1.1.1 Hypothèses de Non Equilibre Local et de Milieu Discret

#### Milieu discret

Les notions de Milieu Continu et d'Equilibre Thermodynamique Local conduisent à des formes continues des équations de conservation. Sont-elles indispensables à l'établissement d'équations représentatives des écoulements de fluides visqueux? C'est la question qui va être discutée dans les chapitres suivants.

Le Milieu Continu est associé à l'existence de fonctions de points, de vecteurs, de tenseurs définis en un point  $P$  à partir d'une intégration sur un volume élémentaire représentatif autour du point  $P$  contenant suffisamment de particules. En fluide par exemple, tant que la taille du système n'est pas inférieure à l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des molécules, alors on pourra transférer au point  $P$  les propriétés du volume élémentaire. C'est ainsi que masse volumique, pression, température trouvent un sens lorsque ces grandeurs sont affectées au point. Cette approche qui introduit une notion de moyenne des différentes quantités sur un volume élémentaire représentatif reste cependant assez subjective.

Le tenseur des contraintes de Cauchy est lui même lié à cette hypothèse de milieu continu; ce n'est que parce que la contrainte doit être exprimée localement qu'il est nécessaire de construire celle-ci dans un repère orthonormé et ainsi de définir un tenseur du second ordre qui doit être symétrique pour la même raison. Pour autant nous considérerons les échelles spatiales du système très supérieures au libre parcours moyen des molécules.

L'approche la Mécanique des Milieux Discrets correspond à un point de vue très différent: il existe des variables scalaires affectées aux sommets d'un certain volume élémentaire, des composantes des vecteurs associés aux segments orientés reliant ces points, ces segments formant des surfaces elles aussi orientées pour constituer un volume fermé. Dès lors les outils de la géométrie différentielle, théorèmes, calcul extérieur, opérateur discrets de rotationnel, gradient et divergence, opérateur de Hodge, ... pourront être appliqués. La notion de potentiel introduite ici remplace celle de moyenne; elle est basée sur un bilan de flux à travers des surfaces délimitant un volume.

Une autre différence importante de cette approche réside dans l'absence d'orientation des grandeurs vectorielles ou tensorielles. Le vecteur vitesse par exemple ne sera pas défini par ses trois composantes dans un repère déterminé mais par ses composantes portées par l'ensemble des segments d'une facette ou d'un volume.

#### Non Equilibre Thermodynamique Local

L'existence de lois d'état du milieu n'est pas une nécessité. Seuls les coefficients thermodynamiques ont une existence réelle et sont mesurables de manière robuste c'est à dire avec des quantités elles-mêmes quantifiables comme la masse ou le volume. La loi d'état n'est qu'un moyen commode de compiler les variations des propriétés thermodynamiques.

Rien ne permet conclure à la satisfaction de cette loi d'état localement, en chaque point du système. Certains phénomènes physiques très rapides comme les ondes de choc n'ont aucune raison de satisfaire ce principe. D'autres plus lents conduisent à des dissociations ou des recombinaisons chimiques qui sont aussi hors d'équilibre.

Classiquement l'utilisation de lois d'état permet de satisfaire au principe d'égalité entre les inconnues et les équations. Seule la confusion entre certaines équations de conservation conduit à fermer le système par une loi d'état supplémentaire. Si l'on admet que la conservation de la quantité de mouvement est une équation autonome et que la pression est un accumulateur comme définie plus haut, alors la loi d'état devient inutile. Encore faut-il intégrer les contraintes

de toute origine dans l'équation du mouvement. Contrairement à ce qui est généralement admis, la loi de conservation de la masse doit servir à calculer la masse volumique et non à calculer la pression.

L'exposé sera ainsi scindé en une partie consacrée aux lois de conservation des flux (vitesse ou chaleur) alors qu'une autre partie définira les potentiels thermodynamiques en fonction des propriétés thermodynamiques et de transport.

### Existence d'un état d'équilibre mécanique

On définira l'équilibre mécanique comme étant l'état d'un système fluide où la vitesse est nulle  $\mathbf{W} = 0$  ou pour un déplacement nul  $\mathbf{U} = 0$  en solide.

En fluide homogène isotrope la seule contrainte est celle qui est représentée par la pression thermodynamique  $p$ . Tout déséquilibre, d'origine mécanique, thermique, massique, engendrera une modification de la pression locale qui amènera le système physique vers un autre état d'équilibre et une autre pression. La pression est ainsi perçue comme un accumulateur du retour à l'équilibre du système au cours de son évolution. Même à vitesse nulle la pression reste bien sûr une fonction de point.

Pour un milieu quelconque nous montrerons que la contrainte d'équilibre peut être écrite sous la forme:

$$\mathbf{T}^o = -p^o \mathbf{n} - \boldsymbol{\omega}^o$$

où  $p^o$  est la pression thermodynamique d'équilibre,  $\mathbf{n}$  est ici le vecteur unitaire normal à une surface qui sera définie plus loin et  $\boldsymbol{\omega}^o$  est le vecteur dual d'un tenseur antisymétrique  $\boldsymbol{\Omega}^o$ .

En mécanique du solide la pression est insuffisante à décrire l'état d'équilibre d'un système dont les déplacements seraient nuls. L'accumulation des contraintes doit se réaliser à l'aide d'un vecteur  $\boldsymbol{\omega}^o$ . Il permettra notamment la restitution de l'énergie élastique emmagasinée dans le solide lorsque la contrainte aura disparue. Par exemple la remise à l'équilibre d'un solide contraint en cisaillement générera des ondes longitudinales dans la direction du cisaillement mais aussi des ondes transverses dont la célérité est différente des ondes longitudinales.

On remarquera déjà que dans les deux cas, solide et fluide, la notion d'accumulation introduit celle de temps. Certaines propriétés seront ainsi intimement attachées à la constante de temps du phénomène comme par exemple la viscosité de compression et d'autres pas comme la viscosité de cisaillement.

*En mécanique des milieux continus le tenseur des contraintes d'équilibre s'écrirait:*

$$\boldsymbol{\sigma}^o = -p^o \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^o$$

*où  $p$  est la pression thermodynamique et  $\boldsymbol{\tau}$  la partie non diagonale du tenseur des contraintes d'équilibre;  $\mathbf{I}$  est ici le tenseur unitaire. Ce tenseur  $\boldsymbol{\sigma}^o$  est quelquefois nommé tenseur résiduel.*

#### 1.1.2 Notion de volume élémentaire

Considérons un volume de contrôle  $\Omega$  limité par une surface  $\Sigma$  munie d'une normale extérieure  $\mathbf{n}$ . Ce volume est un polyèdre d'un nombre de facettes quelconque mais pour simplifier l'exposé un tétraèdre sera choisi. Ce tétraèdre de référence (figure 1) n'est pas un infiniment petit, son volume est égal à une valeur finie  $V$ . Il est limité par des surfaces planes de normales  $\mathbf{n}$ , elles-mêmes délimitées par des segments dont les extrémités sont des points, sommets du tétraèdre.

Les segments reliant deux points et les surfaces seront orientés. De même le sens de parcours en rotation des faces de la topologie duale orthogonales aux segments sera défini.

La vitesse  $\mathbf{W}$  n'est pas définie au sein du volume élémentaire, elle n'existe que par ses composantes  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{t}$  qui sont localisées au milieu des segments. La pression ainsi que toutes les

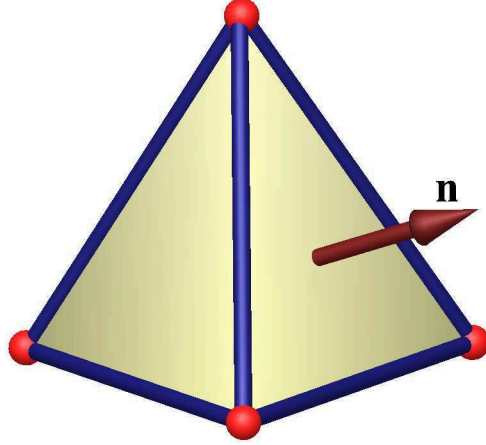


Figure 1: Polyèdre élémentaire

autres quantités scalaires utilisées ultérieurement sont positionnées sur les sommets du tétraèdre. Le rotationnel de la vitesse est calculé à partir des composantes de la vitesse de chacune des faces.

Ce volume élémentaire est soumis à des forces extérieures de volume définies par une densité volumique  $\mathbf{f}$  et par des contraintes de surface définies par une densité surfacique  $\mathbf{T}$ .

Nous admettrons que les propriétés des opérateurs, établies en milieu continu, sont vérifiées en discret pour l'élément de volume.

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla f = 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0 \end{cases}$$

Ces propriétés peuvent être obtenues sur tout type de topologie, dans un plan et dans l'espace  $\mathbf{R}^3$ . Elles sont essentielles dans tous les développements et démonstrations qui vont suivre.

### 1.1.3 Définitions

Le polyèdre élémentaire est composé de points  $P$  joints par des segments  $\Lambda$  qui forment des surfaces  $\Sigma$  définissant le volume élémentaire  $\Omega$ . Sur chaque point  $P$  seront définis les quantités scalaires, pression thermodynamique  $p$ , température  $T$ , masse volumique  $\rho$ . Les composantes  $\mathbf{V}$  de la vitesse ainsi que les composantes du potentiel vecteur  $\Psi$  seront positionnés sur les segments du polyèdre. Les barycentres de chaque facette seront nommés  $M$  et porteront la viscosité qui sera supposée constante sur toute la facette.

Les composantes de la vitesse sur chaque segment du polyèdre seront notées  $V_k$ , la vitesse au sein du volume élémentaire sera ainsi

$$\mathbf{W} = \sum_k V_k \mathbf{t}_k$$

où  $\mathbf{t}_k$  est le vecteur unitaire porté par chaque segment.

La composante de la vitesse  $\mathbf{W}$  le long du segment de longueur  $[0, L]$  qui joint deux points du polygone formant une face du polyèdre sera définie par l'expression:

$$V_k = \frac{1}{L} \int_{\Gamma_k} \mathbf{W} \cdot \mathbf{t}_k dl$$



Par la suite nous noterons simplement  $\mathbf{V}$  cette composante. La vitesse  $\mathbf{W}$  peut être ainsi calculée par face en utilisant les composantes de celle-ci ou pour le volume avec toutes des composantes du polyèdre. Les inconnues seront les seules composantes du vecteur vitesse et l'on pourra calculer celle-ci *a posteriori* ou calculer sa projection sur une facette avec les composantes du plan de celle-ci.

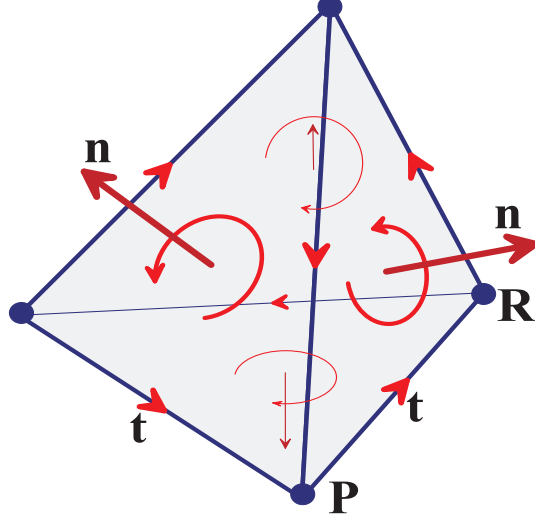


Figure 2: Volume élémentaire.

La contrainte discrète, la contrainte par facette ou simplement la contrainte  $\mathbf{T}$  sera exprimée ici à l'aide d'une contrainte locale  $\mathbf{T}_S$  sous la forme d'une moyenne sur la facette:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{[\Sigma]} \iint_{\Sigma} \mathbf{T}_S(M, \mathbf{n}) ds$$

Le vecteur  $\mathbf{T}$  n'est pas localisé sur la surface  $\Sigma$ , seules ses composantes seront définies sur la normale  $\mathbf{n}$  et sur les arêtes du polygone de la facette considérée.

Dans la suite la contrainte  $\mathbf{T}$  apparaîtra dans des équations de conservation mais ne sera pas une fonction de point au sens de la mécanique des milieux continus.

La masse volumique est une fonction de point localisée sur les sommets du polyèdre; toutefois nous aurons besoin d'évaluer la quantité de mouvement  $\rho \mathbf{V}$  au milieu d'un segment. Pour cela nous définirons une masse volumique associée à cette quantité:

$$\rho_k = \frac{1}{L} \int_{\Gamma_k} \rho dl$$

L'indice  $k$  sera oublié par la suite mais il n'y aura pas d'ambiguïté sur la masse volumique à retenir suivant les opérateurs utilisés. S'il s'agit de l'opérateur  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  appliqué à  $\rho$  ce sera une fonction de point; pour le calcul de la circulation le long d'un segment nous prendrons la définition précédente.

Une autre caractéristique importante est la viscosité  $\mu$  de cisaillement que nous appellerons ici viscosité de rotation pour des raisons présentées au chapitre suivant. Cette viscosité est positionnée en  $M$ , au barycentre de chacune des facettes du polyèdre, elle sera considérée par la suite comme constante sur toute la facette:

$$\mu_j = \frac{1}{[\Sigma]} \int_{\Sigma_j} \mu ds$$

L'indice sera omis par la suite car il n'y aura pas de confusion possible, la viscosité ne sera pas définie ailleurs dans le tétraèdre de référence.

## Matériaux anisotropes

L'extension du modèle présenté aux matériaux disposant de propriétés tensorielles comme la conductivité thermique, la perméabilité, certaines propriétés mécaniques, est immédiate. Comme les composantes du flux de chaleur, du déplacement ou de la vitesse, mais aussi la composante du gradient, sont portées par le segment reliant deux sommets du polyèdre, la projection  $\mathbf{k}$  d'un tenseur  $\mathbf{\Lambda}$  représentant la propriété sera aussi portée par le même segment.

$$\mathbf{k} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{t}$$

Cette propriété sera constante tout le long du segment; par exemple la composante du flux s'exprimera de manière cohérente par une loi du type  $\Phi = -\mathbf{k} \cdot \nabla u$  où  $u$  est le potentiel aux sommets.

Il est à noter que toute quantité supportée par le segment orienté de vecteur unitaire  $\mathbf{t}$ , sera notée indifféremment comme un scalaire constant sur tout le segment ou comme un vecteur orienté. Par exemple la conductivité sur le segment sera notée  $k$  et la composante du vecteur vitesse sera notée  $\mathbf{V}$ .

## 1.2 Contrainte discrète

### 1.2.1 Expression d'une contrainte discrète

La relation entre contrainte et vitesse est introduite ici de manière intuitive en se basant sur la loi de Newton. L'expérience évoquée est celle d'un écoulement plan, horizontal, cisaillé et stationnaire dont on pourrait mesurer la vitesse et la force d'entraînement du fluide. La mesure est réalisée globalement en maintenant un gradient de vitesse constant. Une relation linéaire locale est déduite *a priori* entre la contrainte normale à l'écoulement et un gradient de vitesse vertical et permet, par la mesure, de déterminer le coefficient de proportionnalité. Ce coefficient, appelé viscosité de cisaillement  $\mu$ , est parfaitement mesurable quel que soit le fluide.

Nous supposons dans tout ce qui suit que ce coefficient de viscosité  $\mu$  est constant par facette du volume élémentaire représenté sur la figure 2.

Nous introduisons la décomposition de la contrainte discrète sous la forme d'un postulat:

**Postulat** : la contrainte discrète  $\mathbf{T}$  est décomposée en une somme d'une contrainte normale associée uniquement à la pression et d'une contrainte tangentielle associée uniquement aux effets visqueux.

La contrainte surfacique  $\mathbf{T}$  est décomposée en une force portée par un segment de vecteur unitaire  $\mathbf{t}$ ,  $T_p = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t}$  et une force dans le plan de la facette  $\mathbf{T}_v = \mathbf{T} \times \mathbf{n}$ . La composante  $T_p$  sera associée à une contrainte due aux seuls efforts internes de pression au fluide tandis que la composante  $T_v$  sera attachée aux seules forces d'origine visqueuse.

Nous verrons que ce postulat s'avèrera important dans la formulation finale de l'équation du mouvement où la décomposition présentée induira directement la partition des différents termes de l'équation en gradients de potentiels scalaires et en rotationnels de potentiels vecteurs.

La contrainte totale  $\mathbf{T}$  est simplement la somme:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} + \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t}$$

Ces deux composantes sont ainsi colinéaires à la composante de la vitesse  $\mathbf{V}$ .

### Modélisation des effets de pression

La pression est une quantité locale définie au sommets du polyèdre. On sait que les efforts de pression ne s'exercent que normalement aux surfaces. La composante normale  $T_p$  de la force  $\mathbf{T}$ , qui est due à l'accumulation des différents efforts internes, sera représentée par le scalaire  $p$  définie comme la pression. La force  $\mathbf{F}_p$  normale au segment reliant deux points du polyèdre est proportionnelle à la surface  $\mathcal{S}$  de la topologie duale:

$$\mathbf{F}_p = -\mathcal{S} p \cdot \mathbf{t}$$

où  $[\mathcal{S}]$  est l'aire de la facette de la topologie duale orthogonale au segment de vecteur unitaire  $\mathbf{t}$ . Il est à noter que la contrainte de pression est constante sur toute la surface  $\mathcal{S}$  comme la pression elle-même. La contrainte est alors

$$\mathbf{T}_p = -p \cdot \mathbf{t}$$

### Modélisation des effets visqueux

Tout d'abord rappelons que la vitesse, ou le déplacement en solide, est appelée  $\mathbf{W}$  dans le volume. Sa projection sur la surface  $\mathcal{A}$  est égale à  $\mathbf{V} = \mathbf{W} \times \mathbf{n}$  (figure 3). La circulation du vecteur  $\mathbf{W}$  est égale à celle du vecteur  $\mathbf{V}$  et, en tenant compte du théorème de Stokes, au flux de leur rotationnel à travers la surface  $\mathcal{A}$ :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_{\mathcal{A}} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$$

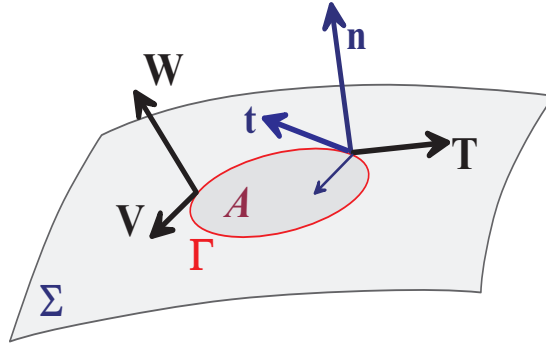


Figure 3: Contrainte sur un élément discret de surface  $\mathcal{A}$  de contour  $\Gamma$ .

La modélisation des effets visqueux peut être initiée à partir de la linéarité observée à la fois en solide et en fluide où les contraintes sont directement proportionnelles aux vitesses et déplacements au moins dans une certaine gamme de ceux-ci. La contrainte de viscosité exercée par le milieu extérieur qui s'oppose au mouvement s'écrirait

$$\mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} \propto -\mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}$$

si l'on considère uniquement l'effet de la viscosité que sur le segment considéré.

En fonction des effets visqueux du fluide dans le voisinage immédiat de ce segment on peut considérer deux cas: le cas du milieu poreux et celui du fluide pur et écrire directement la

contrainte sous la forme:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} = -\frac{\mu}{K} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} = -\tilde{\mu} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \end{cases}$$

La première expression concerne la contrainte nécessaire pour vaincre les forces de viscosité dans un milieu poreux de perméabilité  $K = \|\mathbf{K} \cdot \mathbf{t}\|$  où  $\mathbf{K}$  est le tenseur de perméabilité. Cette forme conduit à la loi linéaire de Darcy qui traduit la relation entre gradient de pression et vitesse de filtration en stationnaire.

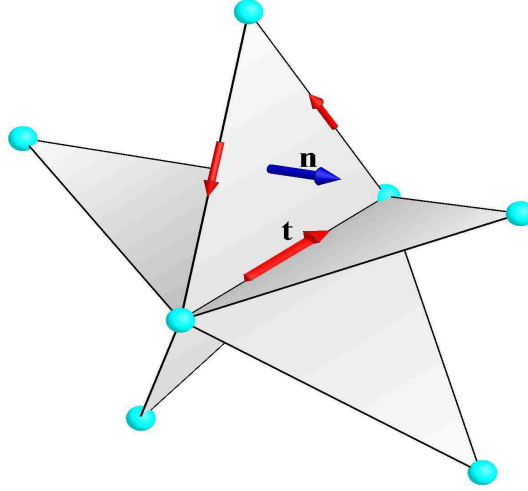


Figure 4: Modélisation des effets visqueux sur le segment dus à l'action des contraintes définies sur chaque facette.

La seconde relation est une loi modèle pour un fluide pur où  $\tilde{\mu}$  est une quantité homogénéisée associée à la viscosité. En effet les actions extérieures du fluide sur une portion du même fluide doivent être modélisées en prenant en compte les effets de tous les segments de toutes les faces ayant les mêmes extrémités que le segment considéré (figure 4). Nous utiliserons le principe de réciprocité: l'action de chacun des éléments du contour sur un seul sera identique à celui exercé par l'un d'entre eux sur tous les autres.

Les composantes  $\mathbf{V}$  de la vitesse sur tous les segments d'une facette mettent le fluide en rotation. Cette rotation considérée comme constante par définition ainsi que la viscosité associée à la facette considérée induit une force exercée sur le segment de vecteur unitaire  $\mathbf{t}$ . Le fluide est accéléré ou freiné suivant  $\mathbf{t}$  en fonction des vitesses des segments associés à son voisinage immédiat. La viscosité permet le transfert ainsi la quantité de mouvement  $\rho \mathbf{V}$  d'un segment à l'autre.

La contrainte  $\mathbf{T}_v$  sera donc calculée dans le plan de chacune des facettes à partir des composantes associées aux segments où la composante  $\mathbf{V}$  est définie. La circulation de  $\mathbf{V}$  permettra de calculer le rotationnel puis sa projection sur le segment de vecteur unitaire  $\mathbf{t}$ .

La force visqueuse du milieu extérieur sur un contour  $\Gamma$  ou sur une portion de celui-ci s'exprimera donc par la circulation de la vitesse  $\mathbf{W}$  ou par une transformation en intégrale de surface par le théorème de Stokes:

$$\mathbf{F}_v = - \int_{\Gamma} \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = - \int_{\Gamma} (\mu \mathbf{W} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} dl = - \iint_A \mu \nabla \times (\mathbf{W} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{\Gamma} (\mu \mathbf{W}, \mathbf{n}, \mathbf{t}) dl$$

où  $(\mu \mathbf{W}, \mathbf{n}, \mathbf{t})$  est le produit mixte.

La projection sur la normale  $\mathbf{n}$  à la facette de la contrainte visqueuse peut s'exprimer par la circulation du vecteur  $\mathbf{V}$  le long du contour  $\Gamma$  pour définir la contrainte moyenne sur la facette en utilisant le théorème de Stokes:

$$-\mu \nabla_p \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{[\mathcal{A}]} \int_{\Gamma} \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl$$

Cette contrainte est constante sur toute la facette sera ainsi associée à la composante inscrite dans le plan de la surface:

$$\mathbf{T}_v = -\mu \nabla_p \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}$$

Comme  $\mu$  est constante ainsi que le rotationnel de la vitesse sur la facette, c'est le produit  $\mu \nabla \times \mathbf{V}$  qui est aussi un pur rotationnel.

### Expression de la contrainte

Finalemnt la contrainte locale sera la somme de la contrainte de pression et de la contrainte visqueuse  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_v$ :

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{t} - \mu \nabla_p \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}$$

L'intérêt principal de cette formulation de la contrainte est liée à la colinéarité potentielle des actions de pression portées directement par le segment et des actions de viscosité définies sur la surface et projetées sur le segment de vecteur unitaire  $\mathbf{t}$ . Ces actions seront elles-mêmes colinéaires aux projections de l'accélération  $\boldsymbol{\gamma}$ , de la vitesse  $\mathbf{V}$  et des forces volumiques  $\mathbf{f}$ .

L'établissement de l'expression de la contrainte  $\mathbf{T}$  ne résulte que d'un seul constat: la linéarité entre la contrainte et la vitesse. Le vecteur  $\mathbf{T}$  est bien dissocié en deux parties, une contrainte normale et une contrainte tangentielle mais ici c'est la surface associée à ces deux vecteurs qui n'est pas la même: la contrainte de pression adresse directement la surface normale au contour tandis que la contrainte visqueuse est associée aux surfaces incluant le contour  $\Gamma$ . Le recours à un tenseur du second ordre devient dès lors inutile, les efforts normal et tangentiel pouvant être décrits par de simples vecteurs.

Même s'il n'est pas nécessaire de réintroduire à ce stade un tenseur, on vérifiera que la contrainte visqueuse s'écrit aussi en fonction du tenseur des taux de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\mu \nabla \times \mathbf{W} \times \mathbf{n} = -\mu \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}$$

En adoptant cette expression de la contrainte avec deux paramètres physiques  $p$ , la pression thermodynamique et  $\mu$  la viscosité de cisaillement nous verrons comment les effets de compressibilité associés à une évolution temporelle de la pression fera apparaître naturellement un terme en  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  pondéré par un coefficient thermodynamique robuste.

Par la suite nous identifierons la projection de la vitesse  $\mathbf{W}$  sur le plan  $\mathcal{A}$  par  $\mathbf{V} = \mathbf{W} \times \mathbf{n} = \mathbf{V} \times \mathbf{n}$  sans distinction.

### 1.2.2 Contrainte et tenseur de Cauchy

Le second postulat de Cauchy suppose que les actions mécaniques exercées à travers une surface intérieure sur une portion de milieu continu par son environnement et définie par une densité surfacique de force ne dépend que de la normale à l'interface; soit  $\mathbf{T}(P, \mathbf{n}, t)$  ce vecteur contrainte. Le théorème de Cauchy montre par l'étude de l'équilibre d'un petit tétraèdre que la contrainte dépend linéairement de la normale  $\mathbf{n}$  à une surface unique où sont exprimées toutes

ses composantes. Cette nécessité est attachée à l'hypothèse même de milieu continu car les forces de volume sont négligées devant les actions de contact lorsque le tétraèdre devient infiniment petit.

L'expression d'une linéarité avec la normale extérieure nécessite dès lors la création d'un tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\sigma}$  qui permet d'exprimer le vecteur contrainte sous la forme :

$$\mathbf{T}(P, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}$$

Toutefois la genèse exacte de la création d'une loi exprimant la contrainte  $\mathbf{T}$  en fonction d'un tenseur du second ordre serait importante à connaître. On peut imaginer que l'utilisation du théorème de la divergence permettant de transformer une intégrale de surface en intégrale de volume et nécessitant un produit scalaire avec la normale extérieure conduit naturellement à la construction d'un tenseur du second ordre adéquat. L'obtention de la loi locale de Cauchy (ou première loi de Cauchy) permettrait de décrire alors l'équilibre au sens du milieu continu.

Le postulat de Cauchy et l'hypothèse de milieu continu sont les deux principes fondateurs de la mécanique des milieux continus tel qu'elle est présentée aujourd'hui. Toutes les conséquences et formulations qui en découlent, même si elles sont parfaitement démontrées, sont attachées à ces principes. La discussion sur le bien fondé de sa remise en cause ne peut porter que sur ces principes fondateurs.

Afin de préciser les différences entre contrainte locale  $\mathbf{T}(P, \mathbf{n})$  définie au sens des milieux continus et la contrainte discrète du modèle présenté, reprenons l'expression de la contrainte exprimée à l'aide du tenseur de Cauchy pour un fluide newtonien:

$$\mathbf{T}(P, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (-p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur de Cauchy et  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses. On consultera par exemple l'ouvrage de J. Coirier et al.[15] pour une référence en Mécanique des Milieux Continus.

La contrainte s'écrit alors classiquement:

$$\mathbf{T}(P, \mathbf{n}) = -p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} + 2 \mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$$

Ecrivons le dernier terme de cette expression en fonction de  $\mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}$ ; on trouve

$$2 \mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} + 2 \mu (\nabla^t \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$$

La contrainte pourrait alors aussi s'écrire:

$$\mathbf{T}(P, \mathbf{n}) = -p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} + \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} + 2 \mu (\nabla^t \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$$

Soit les deux expressions équivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}(P, \mathbf{n}) = -p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} + 2 \mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{T}(P, \mathbf{n}) = - (p \mathbf{I} - \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} - 2 \mu \nabla^t \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} - \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} \end{array} \right.$$

La différence sur la contrainte entre les deux formulations continue et discrète porte sur deux termes supplémentaires pour la contrainte de Cauchy portés par la normale.

Cherchons maintenant la divergence du tenseur des contraintes visqueuses de Cauchy; il vient

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= \nabla \cdot (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{D}) \\
&= \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + 2 \mu \nabla \cdot \mathbf{D} + 2 \nabla \mu \cdot \mathbf{D} \\
&= \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \nabla \cdot \mathbf{V} \nabla \lambda + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) \\
&= (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{V} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) \\
&= (\lambda + 2 \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{V} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V})
\end{aligned}$$

*L'approche Mécanique des Milieux Continus introduit avec le tenseur des contraintes de Cauchy d'autres termes dont la signification physique, au moins en fluide, n'est pas claire.*

*Pour la seule contrainte normale trois paramètres sont présents dans cette relation, la pression et les deux coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$ . Pour un fluide newtonien isotrope le second terme  $2\mu\nabla \cdot \mathbf{V}$  n'a pas de raison d'apparaître. D'abord parce que la viscosité de cisaillement ne doit pas être associée à la variation de volume et ensuite parce qu'un fluide a un module de cisaillement nul, le module de compressibilité  $K$  est ainsi égal à  $K = \lambda$ .*

*De même un deuxième coefficient de viscosité, ou viscosité de compression,  $\lambda$  est introduit à ce stade du fait de l'existence même du tenseur des contraintes et de la réduction de ses coefficients pour un fluide isotrope. Comme on le verra plus loin la loi de Stokes  $3\lambda + 2\mu = 0$  n'est pas applicable à un fluide, quel qu'il soit. Les valeurs de  $\lambda$  mesurées par de nombreux auteurs sont très discordantes et dépendent largement du principe de la mesure.*

Nous verrons que l'approche discrète permet d'obtenir une expression très différente du terme de viscosité:

$$-\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$$

On note ici que le terme important correspondant aux effets visqueux de cisaillement-rotation au sein de l'équation du mouvement est bien ce dernier et il s'écrit aussi  $\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}$  (à  $\mu$  constant) où  $\boldsymbol{\Omega}$  est le tenseur antisymétrique des taux de rotation. Paradoxalement, alors que le tenseur de Cauchy doit être symétrique, la partie visqueuse la plus importante de ce tenseur est antisymétrique.

### 1.2.3 Condition à l'interface de deux fluides

La condition à la limite à l'interface de deux fluides de viscosités différentes est obtenue à partir d'une forme locale du théorème de l'action et de la réaction qui exprime l'égalité des contraintes  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ . La contrainte normale est associée à la pression, égale de chaque côté de l'interface  $\Sigma$  et les effets visqueux sont portés par la composantes du plan tangent au point  $M$  (figure 5).

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 \quad \begin{cases} p_1 = p_2 \\ \mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2 \end{cases}$$

La seconde condition revient à écrire l'égalité des circulations le long des contours fermés  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ :

$$\int_{\Gamma_1} \mu_1 \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{t}_1 dl = - \int_{\Gamma_2} \mu_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{t}_2 dl$$

La projection sur le plan tangent s'écrit à partir de la vitesse elle-même:

$$\mu_1 \nabla \times \mathbf{W}_1 \times \mathbf{n} = -\mu_2 \nabla \times \mathbf{W}_2 \times \mathbf{n}$$

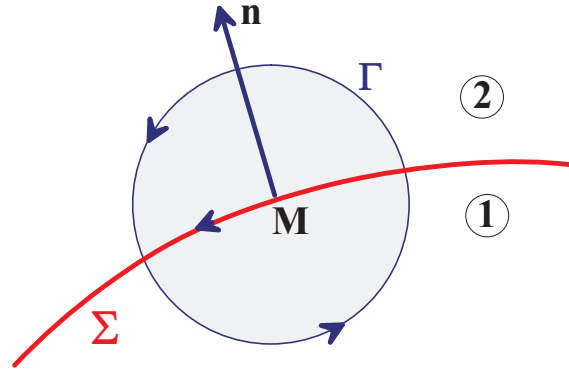


Figure 5: Condition à l'interface de deux fluides.

### Effets capillaires

En présence d'une interface  $\Sigma$  séparant deux fluides non miscibles une force capillaire doit être prise en compte sur l'interface; cette force de surface s'écrit  $\sigma \kappa \mathbf{n} \delta$  où  $\sigma$  est la tension superficielle du couple de fluide,  $\kappa$  est la courbure moyenne,  $\mathbf{n}$  la normale à l'interface et  $\delta$  une fonction de présence de l'interface.

La décomposition de Hodge-Helmholtz permet de séparer l'effet de surpression capillaire des effets de mouvement des fluides générés par le terme de rotation:

$$\sigma \kappa \mathbf{n} \delta = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$$

La condition à la limite généralisée aux forces capillaires s'écrit ainsi:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 \quad \begin{cases} p_1 = p_2 + \Phi \\ \mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2 + \nabla \times \Psi \end{cases}$$

La fonction  $\Psi$  est non nulle chaque fois que la tension de surface  $\sigma(T)$  est une fonction de la température non uniforme à l'interface (effet Marangoni) ou que la courbure n'est pas une constante (comme dans le cas d'une sphère par exemple).

Dans la cas statique où les vitesses sont nulles et sans effet Marangoni on retrouve la loi de Laplace :

$$p_1 - p_2 = \sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

où  $R$  et  $R'$  sont les deux rayons de courbure principaux de l'interface. Cet écart exprime la surpression due à la courbure de l'interface. La surpression est localisée dans le fluide qui a sa surface convexe.

Pour une goutte sphérique de rayon  $R$  on obtient :

$$\Delta p = \frac{2 \sigma}{R}$$

et pour une bulle, qui comprend deux interfaces, on a :

$$\Delta p = \frac{4 \sigma}{R}$$

*En Mécanique des Milieux Continus la condition à la limite s'écrit en égalant les contraintes normale et tangentielles à partir du tenseur des contraintes  $\sigma$ :*



$$\left(\sigma_{ik}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(1)}\right) n_k = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) n_i - \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$$

soit

$$\left(\tau_{ik}^{(1)} - \tau_{ik}^{(2)}\right) n_k = (p_1 - p_2) n_i - \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) n_i + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$$

On retrouve bien sûr le même résultat en projection.

### Remarque

L'intégration d'un terme capillaire  $\sigma \kappa \mathbf{n} \delta$  où  $\delta$ , où est une fonction de présence, au sein de l'équation du mouvement doit être compatible avec l'approche discrète adoptée. Notamment la normale  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire orthogonal à la véritable interface en chacun de ses points mais les efforts capillaires doivent se projeter sur le vecteur  $\mathbf{t}$  de chaque segment intersecté par l'interface. La normale discrète sera donc écrite sous la forme:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} = \mathbf{t}$$

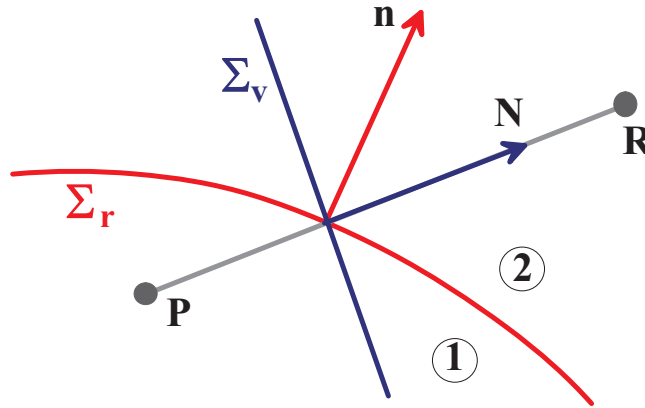


Figure 6: Interface réelle  $\Sigma_r$  et virtuelle  $\Sigma_v$  intersectant un segment entre deux sommets  $P$  et  $R$  d'un polyèdre.

Ce n'est qu'à la condition d'écrire le terme capillaire sous la forme  $\sigma \kappa \mathbf{N} \delta$ , que par exemple, une goutte parfaitement sphérique de courbure  $\kappa = 2/R$  n'engendrera aucun mouvement. La pression dans la goutte sera alors  $p + p_c$  où  $p_c$  est la pression capillaire donnée plus haut. Tout autre choix conduira à l'existence d'un rotationnel et donc à un mouvement du fluide déformant l'interface.

La figure 6 montre l'interface réelle  $\Sigma_r$  entre les deux fluides et  $\Sigma_v$ , l'interface virtuelle représentée dans la topologie adoptée qui, dans la plupart des cas, est non conforme en tout point et à chaque instant à l'interface réelle.

Lorsqu'une surface de discontinuité traverse le volume élémentaire il est nécessaire de revoir les lois de conservations en équations aux discontinuités. Ces surfaces sont de deux types, les interfaces pour lesquelles  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0$  et les ondes de choc qui sont traversées par un débit de fluide. Pour une interface entre deux fluides immiscibles il est nécessaire d'ajouter un terme dans l'équation du mouvement qui correspond au saut du terme capillaire.

Avec le modèle présenté, l'intégration du terme capillaire dans l'équation du mouvement devient ainsi complètement cohérente. Le terme volumique s'écrirait ainsi:

$$\mathbf{F}_C = \sigma \kappa \nabla \xi$$

où  $\xi$  est la fonction indicatrice de la phase, par exemple  $\xi = 1$  dans le fluide ① et  $\xi = 0$  dans le fluide ②.

Si  $\sigma$  et  $\kappa$  sont des constantes alors  $\sigma \kappa \nabla \xi$  sera un vrai gradient; dans le cas contraire ce terme se répartira entre un gradient et un rotationnel qui, calculé dans la topologie duale, génèrera un mouvement du fluide.

Lorsque le terme capillaire est intégré dans l'équation du mouvement sans une décomposition préalable en parties à divergence et à rotationnel nuls, c'est celle-ci qui réalise naturellement la décomposition en séparant le terme de pression capillaire qui vient modifier la pression thermodynamique et le terme rotationnel qui modifie l'accélération du fluide sur le segment.

Lorsque la topologie de l'interface réelle  $\Sigma_r$  coïncide avec le vecteur tangent  $\mathbf{t}$  les forces capillaires s'écrivent directement en reprenant la définition de l'un des vecteurs courbure principaux en fonction de l'arc curviligne  $s$ :

$$\mathbf{K}_1 = \frac{d \mathbf{t}_1}{d s} = (\mathbf{t}_1 \cdot \nabla) \mathbf{t}_1$$

où la courbure principale s'écrit  $\kappa_1 = \|\mathbf{K}_1\|$  et de même pour  $\mathbf{K}_2$ . La courbure moyenne est égale à  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ .

Si, de plus, la tension superficielle dépend de la température c'est la variation du produit  $\sigma \mathbf{t}$  le long de l'arc qui doit être considérée.

## 1.2.4 Equation discrète du mouvement

### Loi fondamentale de la dynamique sur un segment

La formulation de la loi fondamentale de la Mécanique exprimée pour un élément de volume n'est pas complètement satisfaisante dans le contexte discret. Essayons d'établir une forme discrète de cette loi sur un segment curviligne dont les extrémités sont  $P$  et  $R$  (figure 7).

Reprenons la loi fondamentale pour un point  $\mathbf{F} = m \boldsymbol{\gamma}$  et étendons celle-ci au contour curviligne  $\Gamma$  entre les deux points  $P$  et  $R$ .

$$\int_{\Gamma} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\Gamma} \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\Gamma} \mathbf{T}_g \cdot \mathbf{t} dl$$

où  $\rho = \bar{\rho}$  est la moyenne intégrale définie plus haut de la masse volumique sur le segment,  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent orienté de  $\Gamma$ . Les forces représentent respectivement  $\mathbf{T}_p$  la force de pression,  $\mathbf{T}_v$ , la force visqueuse et  $\mathbf{T}_g$  les autres sources.

La loi de la dynamique discrète curviligne pourrait ainsi s'écrire:

$$\rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} + \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} + \mathbf{T}_g \cdot \mathbf{t}$$

Cette expression traduit l'équilibre des forces et de l'accélération sur une ligne. Compte tenu de la définition de  $\rho$  elle représente aussi la conservation de la quantité de mouvement:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} dl$$

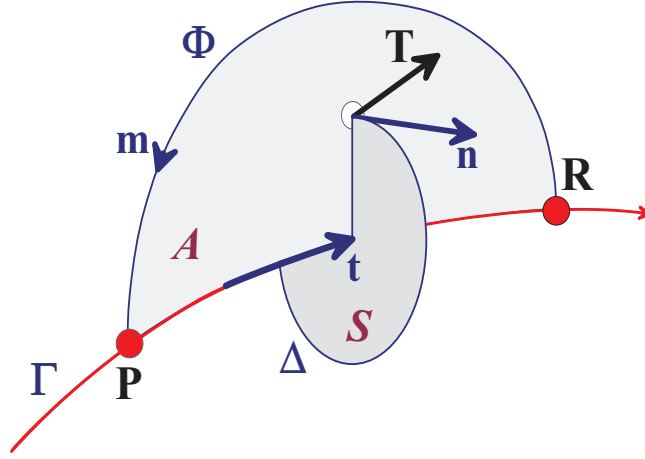


Figure 7: Loi de la dynamique sur un segment

La dérivée d'une intégrale curviligne du premier membre peut être développée de la manière suivante:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{b} \times \mathbf{V} + \nabla (\mathbf{b} \cdot \mathbf{V}) \right) \cdot \mathbf{t} dl$$

ou

$$\frac{d}{dt} \int_P^R \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} dl = \int_P^R \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{b} \times \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{t} dl + [\mathbf{b} \cdot \mathbf{V}]_P^R$$

L'application à la quantité de mouvement  $\bar{\rho} \mathbf{V}$  donne en tenant compte de la définition de la masse volumique sur le segment:

$$\frac{d}{dt} \int_P^R \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \int_P^R \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{t} dl + \left[ \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right]_P^R = \int_P^R \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} dl + \left[ \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right]_P^R$$

Le dernier terme représente la composante de la quantité de mouvement qui est par définition considérée comme constante sur le segment  $PR$ . Le dernier terme est donc nul et nous définirons la dérivée particulière discrète de circulation de l'accélération sur un segment comme:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \rho \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t} dl$$

ou encore, en développant la dérivée particulière de la vitesse en coordonnées eulérienne:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \left( \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \right) \cdot \mathbf{t} dl$$

Reprenons maintenant l'examen des autres termes de la loi fondamentale de la dynamique. La dernière intégrale curviligne correspond simplement à la projection de la force sur le segment orienté  $PR$  de vecteur unitaire  $\mathbf{t}$ .

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}_g \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} dl$$

où  $\mathbf{f}$  est la somme des termes sources des différents effets, gravité rotation, capillaires, etc.

Le terme des forces de pression  $\mathbf{T}_p$  est défini sur le segment comme la différence de pression entre  $P$  et  $R$ :

$$\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} = -(p_R - p_P) = -\frac{1}{L} \int_P^R dp dl = - \int_{\Gamma} \nabla p \cdot \mathbf{t} dl$$

La pression elle même est définie sur les sommets du polyèdre élémentaire et il est ainsi logique de calculer les forces de pression sur une surface  $\mathcal{S}$  de la topologie duale orthogonale au vecteur  $\mathbf{t}$ .

La contrainte de pression  $\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t}$  des effets de pression s'écrit finalement:

$$\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{t} = - \int_{\Gamma} \nabla p \cdot \mathbf{t} dl$$

La contrainte visqueuse  $\mathbf{T}_v$  est bâtie sur le rotationnel des composantes d'une facette et sur la viscosité de cisaillement  $\mu$  pour les topologies primale et duale. Deux opérateurs seront ainsi définis:

$$\begin{cases} \nabla_p \times (\mu \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{[\mathcal{A}]} \int_{\Phi} \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{m} dl \\ \nabla_d \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{[\mathcal{S}]} \int_{\Delta} (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} dl \end{cases}$$

où  $\mu$  est toujours constante sur la facette  $\mathcal{A}$

Il est à noter que la projection de la contrainte visqueuse pour une facette peut s'écrire avec le produit mixte:

$$\mathbf{T}_v \cdot \mathbf{t} = (-\mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = (-\mu \nabla \times \mathbf{V}, \mathbf{n}, \mathbf{t})$$

Le schéma ci-dessous permet de montrer les différentes phases du calcul de la contrainte visqueuse sur le contour  $\Gamma$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \Gamma \\ \mu \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} & \longrightarrow & \mu \nabla_p \times \mathbf{V} & \longrightarrow & \mu \nabla_p \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} & \longrightarrow & \nabla_d (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) & \longrightarrow & \nabla_d (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{t} \end{array}$$

L'équation discrète du mouvement sur le contour  $\Gamma$  et plus exactement sur le segment  $PR$  s'écrit en reprenant l'ensemble des termes:

$$\int_{\Gamma} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{t} dl = - \int_{\Gamma} \nabla p \cdot \mathbf{t} dl - \int_{\Gamma} \nabla_d \times (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} dl$$

soit

$$\int_{\Gamma} \left( \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla p + \nabla_d \times (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) - \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{t} dl$$

Les projections de l'accélération, de la vitesse, du gradient de pression et de la force volumique sont constantes par définition sur le segment  $PR$ . On peut ainsi extraire une formulation discrète de la loi de conservation de la quantité de mouvement:

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p - \nabla_d \times (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) + \mathbf{f}}$$

où les rotationnels  $\nabla_p \times \mathbf{V}$  et  $\nabla_d \times \mathbf{T}_v$  correspondent respectivement aux circulations du vecteur  $\mathbf{V}$  pour la topologie primale sur le contour  $\Gamma$  et du vecteur  $\mathbf{T}_v$  pour la topologie duale sur le

contour  $\Gamma$ . Ces notations ne seront pas reprises par la suite mais l'utilisation de ces opérateurs pour les topologies primale et duale est essentiel.

L'équation discrète du mouvement s'écrit finalement:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left( p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f}$$

En comparant cette expression à la loi de Cauchy on note des différences fondamentales. Tout d'abord la notion de tenseur n'est pas nécessaire pour définir les contraintes et seul le coefficient de viscosité de rotation-cisaillement a été introduit comme une grandeur positive. Le second coefficient de viscosité  $\lambda$  n'apparaît plus dans l'équation du mouvement à ce stade de la formulation. Par ailleurs, compte tenu de la définition de la masse volumique  $\rho = \bar{\rho}$  le terme correspondant à l'énergie cinétique peut être intégré dans le gradient de pression de manière formelle pour donner la pression de Bernoulli.

### 1.2.5 Equilibre mécanique

En l'absence de forces de volume et d'accélération le volume  $\Omega$  doit être en équilibre mécanique. Il doit être aussi en équilibre thermodynamique c'est à dire qu'aucune action interne ou externe ne vient modifier l'équilibre du système. La notion de retour à l'équilibre sera un aspect développé plus loin.

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Sigma} \mathbf{T} ds = 0 \\ \iint_{\Sigma} \mathbf{OM} \times \mathbf{T} ds = 0 \end{array} \right.$$

La contrainte  $\mathbf{T}$  sur chacune des facettes du polyèdre sera partitionnée en deux forces:

- une contrainte normale  $T_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$  représentant les efforts mécaniques exercées sur chaque facette qui traduisent les actions des cumulée dans le volume au cours du mouvement du système. Cette accumulation sera représentée par un scalaire, la pression thermodynamique  $p$ .
- une contrainte tangentielle  $\mathbf{T}_t = \mathbf{T} \times \mathbf{n}$  qui représente les effets visqueux.

#### Contrainte normale

Le théorème de la divergence pour un champ scalaire régulier permet d'écrire:

$$-\iint_{\Sigma} p \cdot \mathbf{n} ds = -\iiint_{\Omega} \nabla p dv$$

Tout d'abord il est nécessaire de répondre à la question suivante : est-ce qu'un gradient de pression conduit à une accélération du fluide? Pour répondre à cette question reprenons le polyèdre élémentaire et cherchons à déterminer si la présence d'un gradient de pression ou d'une quantité scalaire quelconque peut accélérer le fluide.

La pression définie sur les sommets du tétraèdre peut permettre d'introduire un vecteur  $\mathbf{U}$  qui serait la projection sur le segment de la vitesse induite par la seule différence de pression:

$$p_B - p_A = \int_A^B \nabla p \cdot \mathbf{t} dl = \int_A^B \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} dl$$

Plaçons-nous maintenant sur une facette du tétraèdre; pour un domaine simplement connexe, sans singularité, la circulation le long du contour fermé  $\Gamma$  satisfait à :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} \, dl = 0$$

Comme le théorème de Stokes permet de l'écrire

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} \, dl = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

on a bien

$$\int_{\Gamma} \nabla p \cdot \mathbf{t} \, dl = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \nabla p) \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

Pour une facette, le gradient de pression n'induit aucun mouvement.

L'effet d'un gradient de pression projeté sur toutes les facettes du polyèdre conduit à une contrainte nulle et, par extension au volume, l'équilibre mécanique relative à la contrainte normale est alors:

$$- \iint_{\Sigma} p \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

En effet si la projection du gradient de pression l'ensemble des facettes du polyèdre n'engendre aucun effet, c'est le gradient de pression lui-même qui conduit à une accélération nulle du volume.

### Contrainte tangentielle

$$\sum_k \iint_{\Sigma_k} \mu_k \nabla \times \mathbf{V} \, ds = \sum_i \int_{\Gamma_i} \mu_k \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, dl$$

Chaque arête est parcourue deux fois dans chaque sens mais avec des viscosités différentes. Compte tenu de la condition à la limite exprimée entre deux facettes ① et ② de même arête,

$$\mu_1 \nabla \times \mathbf{V}^1 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}^2$$

la somme des termes  $\mu \nabla \times \mathbf{V}$  ayant en commun une arête, le segment reliant deux sommets, est nulle.

En conclusion on retrouve bien l'équilibre d'un volume élémentaire:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{T} \, ds = 0$$

### Equilibre sur les moments

En l'absence d'accélération  $\gamma$  et pour des forces volumiques  $\mathbf{f}$  nulles l'équilibre sur le bilan de quantité de mouvement est donné par:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{OM} \times \mathbf{T} \, ds = 0$$

où le changement  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  permet de simplifier l'écriture.

En reprenant l'expression de la contrainte:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{r} \times (-p \mathbf{n} - \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}) \, ds = 0$$

On peut introduire ici le tenseur de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  dont que le rotationnel est son dual

$$\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{n}$$

Les intégrales de surfaces peuvent être transformées par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Sigma} \mathbf{r} \times f \mathbf{n} ds = \iiint_{\Omega} \mathbf{r} \times \nabla f dv \\ \iint_{\Sigma} \mathbf{r} \times \mathbf{A} \mathbf{n} ds = \iiint_{\Omega} \mathbf{r} \times \nabla \cdot \mathbf{A} dv + \iiint_{\Omega} \eta : \mathbf{A} dv \end{array} \right.$$

où  $\eta$  est le tenseur d'orientation,  $f$  une fonction scalaire et  $\mathbf{A}$  un tenseur du second ordre.

La forme intégrale de l'équilibre sur les moments devient

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{r} \times (-\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})) dv - \iiint_{\Omega} \eta : \boldsymbol{\Omega} dv = 0$$

Il faut donc montrer que

$$\iiint_{\Omega} \eta : \boldsymbol{\Omega} dv = 0$$

$\boldsymbol{\Omega}$  est un tenseur antisymétrique et peut ainsi s'exprimer par son vecteur dual  $\mathbf{V}$  tel que  $\nabla \times \mathbf{V} = \eta : \boldsymbol{\Omega}$ , soit

$$\iiint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{V} dv = - \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \times \mathbf{n} ds$$

Les composantes du vecteur  $\mathbf{V}$  comprises dans le plan tangent de la surface  $\Sigma$  sont disposées sur les segments du polyèdre définissant cette surface. Ces composantes sont alors définies comme le gradient d'un potentiel scalaire  $\Phi$ :

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi$$

On a alors:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \times \nabla \Phi dv = 0$$

et on obtient:

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{r} \times (-\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})) dv = 0$$

et comme l'expression du mouvement discrète est

$$-\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) = 0$$

En conclusion, l'équilibre mécanique sur les moments d'un système non soumis à des forces volumiques où à des accélérations s'écrit donc sur le volume discret  $\Omega$  de frontières  $\Sigma$ :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{OM} \times \mathbf{T} ds = 0$$

*En Mécanique des Milieux Continus le terme  $\eta : \mathbf{A}$  est nul que lorsque le tenseur  $\mathbf{A}$  est symétrique,  $\eta : \mathbf{A}^S = 0$  où  $\mathbf{A}^S$  est la partie symétrique du tenseur. La symétrie du tenseur*

des contraintes résulte donc d'une contrainte locale dont le fondement est lié au choix d'adopter l'hypothèse de milieu continu.

### Autre démonstration de l'équilibre sur les moments

Essayons d'établir directement de l'équilibre sur les moments à partir de la forme initiale:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{r} \times (-p \mathbf{n} - \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}) ds = 0$$

sur une hexaèdre dans une base cartésienne orthonormée et désignons par  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  les normales suivants  $(x_1, x_2, x_3)$ ; le vecteur  $\mathbf{r}$  a pour composantes  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ .

Appelons  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  les vecteurs des plans ① et ② dont les composantes sont disposées sur les segments du polyèdre de référence (figure 8).

Calculons la composante suivant l'axe  $x_3$  du moment résultant, on trouve:

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{r} \times \mathbf{T}_1 ds - \iint_{\Sigma_2} \mathbf{r} \times \mathbf{T}_2 ds$$

les autres contributions des autres surfaces sont nulles ainsi que les contributions des contraintes normales; soit

$$\iint_{\Sigma_1} r_1 (\mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1) ds - \iint_{\Sigma_2} r_2 (\mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2) ds$$

Ici  $\nabla \times \mathbf{V}_1$  et  $\nabla \times \mathbf{V}_2$  sont les projections du vecteur  $\nabla \times \mathbf{V}$  sur les deux plans.

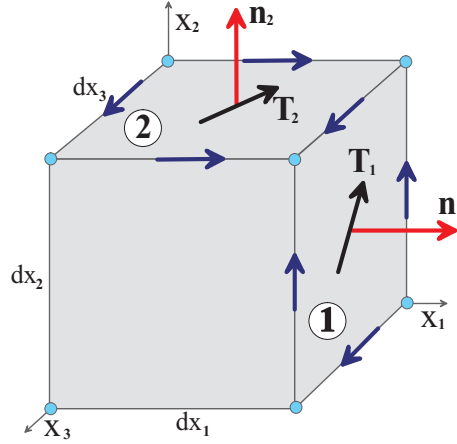


Figure 8: Equilibre d'un volume élémentaire soumis à des contraintes sur ses facettes.

Ces intégrales peuvent être écrites à partir des circulations le long des contours fermés  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ :

$$\int_{\Gamma_1} r_1 \mu_1 \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{t} dl - \int_{\Gamma_2} r_2 \mu_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{t} dl$$

où  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{V}$  sur les segments de chaque facette.

Comme la contrainte est constante sur chaque facette du polyèdre il vient:

$$r_1 [\Sigma_1] \mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 - r_2 [\Sigma_2] \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2$$



En remplaçant les surfaces en fonction de  $dx_1, dx_2, dx_3$  on trouve

$$dx_1 dx_2 dx_3 \mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 - dx_1 dx_2 dx_3 \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2$$

Comme l'équilibre sur la résultante s'écrit:

$$\mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2$$

Alors on montre l'équilibre sur les moments pour deux facettes; ce résultat s'étend aux autres couples de facettes du polyèdre, d'où

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{r} \times \mathbf{T} ds = 0$$

Les expressions sur la résultante et les moments traduisent l'équilibre d'un élément de volume discret non soumis à une accélération ou à des couples extérieurs.

*En mécanique des milieux continus l'équilibre sur les moments conduit à une écriture de la relation entre contrainte et déformation comme une fonction linéaire entre la contrainte et un tenseur symétrique  $\mathbf{T}(P, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ; cette symétrie du tenseur de Cauchy est devenue une nécessité à cause même de la définition de la contrainte locale au sens du milieu continu.*

### 1.3 Ecoulements de référence

Examinons le bien-fondé d'une telle écriture de la contrainte  $\mathbf{T}$  en choisissant quelques écoulements élémentaires parmi les plus emblématiques des équilibres entre potentiels scalaire et vectoriel. Cet exercice illustre simplement les résultats et démonstrations qui précèdent.

#### 1.3.1 Equilibre d'un tétraèdre

Le problème posé ici correspond à l'équilibre mécanique d'un élément de volume non soumis à un couple extérieur. L'écoulement éventuel sera considéré comme incompressible. Nous allons simplement soumettre ce système à une force volumique spécifique  $\mathbf{f} = \nabla\Phi$ , un champ de gradient d'une fonction scalaire queconque. Le volume, un tétraèdre composé de 4 points, 6 segments, 4 faces est soumis à une force  $\mathbf{f}^t = \nabla^t\Phi = (-1, -2, -3, -1, -2, -1)$ . On peut vérifier que  $\nabla \times \mathbf{f} = 0$  puisque  $\nabla \times \nabla\Phi = 0$  quel que soit le potentiel scalaire  $\Phi$ .

L'équation du mouvement discrète est intégrée avec cette force de volume à partir d'une pression nulle,  $p = 0$ :

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \nabla\Phi \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases}$$

Sa solution est obtenue par la résolution de celle-ci de manière instantanée: la pression devient égale à  $\Phi$  et la vitesse devient nulle au cours de la résolution:

$$\begin{cases} p = \Phi = (0, 1, 2, 3) \\ \mathbf{V} = 0 \end{cases}$$

La pression n'est bien sûr définie qu'à une constante près.

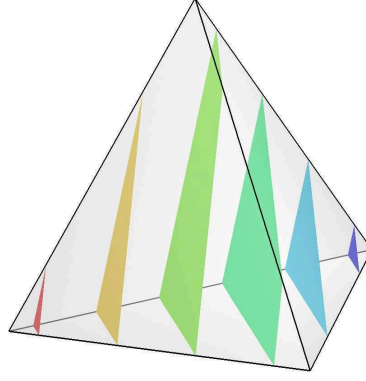


Figure 9: Equilibre d'un polyèdre soumis à un champ de gradient; visualisation de quelques isobares interpolées dans le volume.

Cet exemple montre que l'équilibre mécanique d'un volume discret est assuré quel que soient le potentiel scalaire  $\Phi$  choisi et la viscosité définie sur les faces du tétraèdre. Ce volume ne se translate pas et n'est pas animé d'un mouvement de rotation, toutes les composantes de la vitesse sont nulles. L'équation du mouvement est d'abord déséquilibrée par la présence d'un terme source alors que les champs de pression et de vitesse sont nuls puis le transfert de quantité de mouvement vient alimenter l'accumulation dans le potentiel  $p$  et le système retourne à l'équilibre mécanique. Avec la formulation décrite plus loin cet équilibre est en fait obtenu instantanément.

Les démonstrations précédentes sur l'équilibre d'un système sur les forces et les moments et ce petit exemple montrent que l'équation du mouvement discrète possède bien ces propriétés essentielles.

### 1.3.2 Ecoulement de Couette plan

Considérons un écoulement incompressible cisailé défini par le champ de vitesse  $\mathbf{V} = u(y) \mathbf{e}_x$  avec  $u(y) = a y$  et un champ de pression nul  $p = 0$ .

*Le calcul de la contrainte en Mécanique des Milieux Continus s'écrit  $\mathbf{T} = -p \mathbf{n} + 2 \mu \mathbf{D}$ . Le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  ne fait apparaître que deux composantes non nulles, la contrainte locale; constante dans tout le domaine, est alors  $\tau_{xy} = \mu a$ .*

Si l'on reprend l'expression de la contrainte introduite plus haut:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{t} - \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}$$

on retrouve bien la valeur de la contrainte de cisaillement:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{V} = -\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{n} = 1 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{T} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_x = \mu a \mathbf{e}_x \end{array} \right.$$

On peut remarquer que cet écoulement dérive d'un potentiel vectoriel  $\Psi = (0, 0, \Psi)$  tel que

$$\Psi = \frac{a}{2} y^2 \mathbf{e}_z$$

d'où l'on peut extraire la vitesse axiale  $u = \partial\Psi/\partial y$ .

Dans le cas général un écoulement dérive à la fois d'un potentiel scalaire  $\Phi$  et d'un potentiel vectoriel  $\Psi$ .

### 1.3.3 Tourbillon visqueux

On considère dans cet exemple un écoulement visqueux généré par un cylindre de rayon  $r = R = 1$  dans un milieu infini de viscosité constante égale à  $\mu$ . La vitesse tangentielle imposée sur le cylindre interne est égale à  $\mathbf{V} = V_0 \mathbf{e}_\theta$ .

La solution théorique de ce problème classique satisfait au système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_\theta) \right) = 0 \\ V_\theta = V_0 \text{ en } r = 1 \\ V_\theta = 0 \text{ pour } r \Rightarrow \infty \end{array} \right.$$

La solution en est:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(r) = -\rho \frac{V_0^2}{2 r^2} \\ V_\theta(r) = \frac{V_0}{r} \end{array} \right.$$

Cet exemple a été repris (figure 10) en adoptant une condition à la limite pour  $r = 2$  correspondant à la solution théorique du tourbillon dans un milieu infini. La solution obtenue

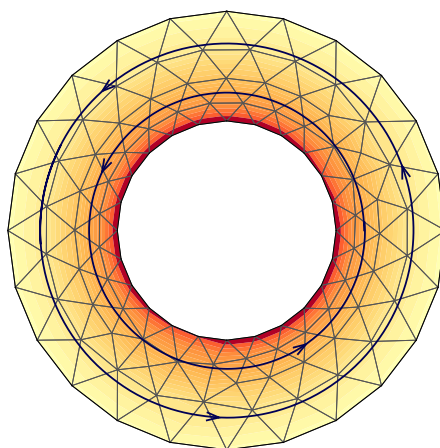


Figure 10: Tourbillon de circulation positive entre deux cercles coaxiaux de rayons  $r = 1$  et  $r = 2$ ; la figure montre deux lignes de courant et le champ de pression en stationnaire pour une tessellation à base de triangles. Le rotationnel est localement nul.

correspond parfaitement avec la solution théorique à la fois sur la pression et sur le champ des vitesses. Le rotationnel local est bien égal à zéro.

La contrainte calculée à partir du tenseur des taux de déformation conduit à

$$\tau_{r\theta} = -\frac{2\mu V_0}{r^2}$$

Comme le rotationnel local est nul on pourrait en déduire qu'avec l'expression de la contrainte  $\mathbf{T} = -p \mathbf{t} - \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}$  la contrainte est aussi nulle.

Il est toutefois à remarquer que la circulation le long d'un contour fermé n'est pas nulle:

$$\int_0^{2\pi} V_\theta(r) r d\theta = 2\pi V_0$$

D'après le théorème de Liouville il existe donc une singularité ici à l'origine pour ce domaine non simplement connexe.

Si l'on définit le rotationnel en utilisant le théorème de Stokes

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{[\Sigma]} \int_0^{2\pi} V_\theta(r) r d\theta = \frac{2\pi V_0}{r^2}$$

On a:

$$\mathbf{T}_v = -\mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} = \frac{2\mu V_0}{r^2} \mathbf{e}_\theta$$

On retrouve ainsi la contrainte visqueuse issue de  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ .

### 1.3.4 Écoulement de Poiseuille diphasique

Examinons pour commencer le cas d'un écoulement monophasique entre deux plans parallèles généré par un gradient de pression imposé  $\Delta p/L = -\alpha$ . Si c'est la vitesse qui est fixée le gradient de pression s'en déduit alors:  $\alpha = 3\mu V_0$ . Cet écoulement en régime de Stokes, dit de Poiseuille, est stationnaire et incompressible. Le système obtenu dans tous les cas s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = -\alpha = \mu \frac{d^2u}{dy^2} = -\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_z \\ \frac{du}{dy} = 0 \text{ en } y = 0 \\ u = 0 \text{ en } y = 1 \end{cases}$$

Pour un domaine  $y \in [-1, +1]$  et  $x \in [-1, +1]$  la solution s'écrit:

$$\begin{cases} p(x) = \alpha (1 - x) \\ u(y) = \frac{3}{2} V_0 (1 - y^2) = \frac{\alpha}{2\mu} (1 - y^2) \end{cases}$$

Le rotationnel correspondant à cet écoulement dans un domaine simplement connexe est égal à  $\nabla \times \mathbf{V} = 3V_0 y = \alpha y/\mu$ . La contrainte  $\mathbf{T} = (-p + 3\mu V_0 y) \mathbf{e}_x$  correspond bien à celle obtenue avec celle issue du tenseur des contraintes  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ .

Pour cet écoulement les termes d'inertie sont nuls et la compétition entre effets de viscosité et de pression traduit l'équilibre obtenu. Toutefois  $-\alpha$  est aussi bien le gradient du potentiel scalaire  $p$  que le rotationnel du potentiel vectoriel  $\boldsymbol{\Psi}$  tel que  $\mathbf{V} = \nabla \times \boldsymbol{\Psi}$ :

$$\begin{cases} p(x) = \alpha (1 - x) \\ \boldsymbol{\Psi}(y) = \frac{\alpha}{2\mu} \left( y - \frac{y^3}{3} \right) \mathbf{e}_z \end{cases}$$

soit

$$-\alpha = \nabla p = -\nabla \times (\mu \nabla \times \nabla \times \Psi)$$

Ces potentiels ne sont définis qu'à une constante près.

Comme on le voit le "gradient de pression moteur" peut être en réalité le rotationnel d'une autre fonction. Pour un domaine connexe on montre que l'égalité d'un gradient et d'un rotationnel ne peut être qu'à une constante.

Considérons maintenant le cas d'un écoulement de deux fluides dont le rapport de viscosité est différent de un. Le canal contient les deux fluides occupant chacun la moitié de la hauteur de celui-ci. Les deux fluides qui sont soumis à un même gradient de pression constant  $\alpha$  admettent la solution suivante:

La solution s'écrit :

$$\begin{cases} u_1(y) = \frac{\alpha}{2\mu_1} y^2 + \frac{\mu_2 \alpha (\mu_1 - \mu_2 - 4\mu_1)}{4\mu_1 (\mu_2^2 - \mu_1 \mu_2 + 2\mu_1 \mu_2)} y \\ u_2(y) = \frac{\alpha}{2\mu_2} y^2 + \frac{\alpha (\mu_1 - \mu_2 - 4\mu_1)}{2 (\mu_2^2 - \mu_1 \mu_2 + 2\mu_1 \mu_2)} y - \left( \frac{\alpha}{4\mu_2} + \frac{\alpha (\mu_1 - \mu_2 - 4\mu_1)}{4 (\mu_2 \mu_2^2 - \mu_1 \mu_2 + 2\mu_1 \mu_2)} \right) \end{cases}$$

La partie gauche de la figure 11 montre le profil de vitesse obtenu sur une base de quadrangles alors que la partie droite correspond à une base de triangles réguliers. Dans les deux cas la solution est exacte.

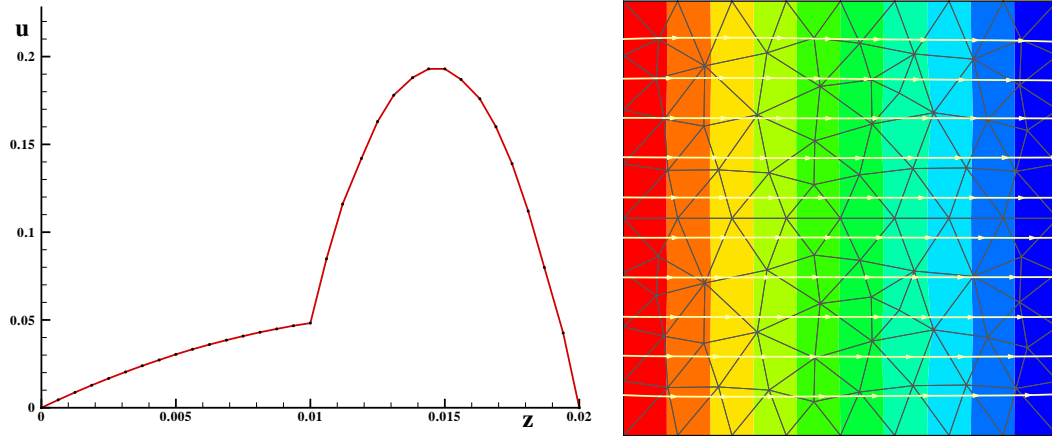


Figure 11: Écoulement de Poiseuille diphasique, les deux fluides ont des viscosité tel que  $\mu_1/\mu_2 = 2.7$ . La figure de gauche représente le profil obtenu avec 32 quadrangles sur la hauteur, la figure de droite représente les lignes de courant pour une tessellation à base de triangles. Le champ de pression correspond à une évolution linéaire le long de l'axe.

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 \quad \begin{cases} p_1 = p_2 \\ \mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2 \end{cases}$$

La condition à la limite d'égalité des contraintes appliquée à une interface entre deux fluides immiscibles permet ainsi de retrouver la solution théorique.

## 2 Conservation de la quantité de mouvement et du flux de chaleur

### 2.1 Equation de la quantité de mouvement

La loi fondamentale de la dynamique établie sur un contour  $\Gamma$  est associée à l'expression de la contrainte  $\mathbf{T}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (\rho \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{f} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{t} \, dl = 0 \\ \mathbf{T} = -p \mathbf{t} - \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} \end{array} \right.$$

La loi fondamentale de la dynamique a conduit à une loi discrète de conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f}$$

où les deux rotationnels successifs du terme visqueux correspondent respectivement aux circulations du vecteur  $\mathbf{V}$  pour la topologie primale sur le contour  $\Phi$  et du vecteur  $\mathbf{T}$  pour la topologie duale sur le contour  $\Delta$ .

En exprimant la dérivée particulaire de la vitesse en cohérence avec le reste de l'équation, c'est à dire en privilégiant la forme rotationnelle du terme d'inertie, l'équation discrète du mouvement s'écrit finalement:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left( p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f}$$

Le terme  $\rho \mathbf{V}^2/2$  est une pression dite dynamique due à la recompression (ou à la détente) du fluide dans certaines zones de l'écoulement notamment à l'impact sur un objet. Comme les autres pressions elle ne génère aucun mouvement, elle peut être associée à la pression thermodynamique pour former la pression dite de Bernoulli:

$$p_B = p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2}$$

La transformation de l'énergie cinétique en pression doit s'effectuer suivant un processus cohérent, si la pression  $p$  est un potentiel scalaire alors  $\rho \mathbf{V}^2/2$  doit être aussi un potentiel scalaire. C'est le cas ici grâce à la définition de la masse volumique sur le segment  $\rho = \bar{\rho}$ .

*La différence entre la forme continue et la forme discrète du terme d'inertie dans l'équation du mouvement est limitée mais cependant révélatrice de certaines difficultés de cohérence du concept de milieu continu.*

*En Mécanique des Milieux Continus le terme d'inertie s'écrit:*

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \rho \nabla \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right)$$

*En présence de variations de la masse volumique dans l'écoulement, l'énergie cinétique génère elle-même un mouvement car le dernier terme de cette expression n'est pas un pur gradient.*

Il contient une partie de rotationnel que l'on peut extraire par une décomposition de Hodge-Helmholtz.

### 2.1.1 Décomposition de Hodge-Helmholtz Discrète

La Décomposition de Hodge-Helmholtz (HHD) et sa version discrète, la Décomposition de Hodge-Helmholtz Discrète (DHHD) permet de décomposer un vecteur de manière unique en trois champs sous la forme  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Phi + \mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_h = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi + \mathbf{V}_h$  où  $\Phi$  est le potentiel scalaire et  $\Psi$  est le potentiel vecteur. Le champ  $\mathbf{V}_h$  est à la fois à divergence et à rotationnel nuls. Il s'écrit  $\mathbf{V}_h = \nabla\Phi_h = \nabla \times \Psi_h$ . Une revue très complète sur la décomposition de Helmholtz-Hodge a été réalisée par des chercheurs de la communauté IEEE, H. Bathia et al.[7].

La solution sur les potentiels dépend bien sûr des conditions aux limites au bord du domaine. Plusieurs méthodes de décomposition orthogonales d'un champ vectoriel sont possibles, l'une d'entre-elles est particulièrement efficace (Ph. Angot et al.[4]) car elle est basée sur décomposition vectorielle similaire à l'équation du mouvement elle-même[9].

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est en effet un extracteur des parties à rotationnel et à divergence nuls. Un terme source quelconque  $\mathbf{F}$  est décomposé naturellement en  $\nabla\Phi$  et  $\nabla \times \Psi$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\Phi + \mathbf{F}_\Psi = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$$

On admet toujours ici que la viscosité est constante par face. Le terme  $\mathbf{V}_h$  n'est pas retenu car il s'intègre dans l'un des deux autres.

Dans l'équation du mouvement le potentiel scalaire  $p$  est bien sûr la pression thermodynamique. Pour un milieu fluide c'est elle qui accumule les contraintes de toute nature. Le second terme en  $\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$  assure le transfert de quantité de mouvement dans le fluide visqueux.

Considérons une fonction scalaire  $\Phi(\mathbf{x})$  et appliquons l'opérateur gradient pour obtenir un terme source volumique  $\mathbf{F} = \nabla\Phi$  ajouté purement et simplement à l'équation du mouvement et ce terme est directement associé au  $\nabla p$  existant. La solution en vitesse n'en est pas affectée mais la pression obtenue après résolution devient  $p^*$  tel que

$$p^* = p + \Phi$$

Cette nouvelle pression ne correspond évidemment pas à la pression thermodynamique. On peut vérifier ainsi que l'ajout du gradient d'une fonction quelconque ne modifie pas la solution en vitesse de l'équation du mouvement.

Corrélativement on peut considérer que le potentiel vectoriel tel que  $\mathbf{V}_\Psi = \nabla \times \Psi$  est le véritable moteur du mouvement.

La décomposition est souvent utilisée dans un contexte différent d'une méthodologie numérique afin d'obtenir le potentiel  $p$  tel que  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  pour un écoulement incompressible. Une revue exhaustive des méthodes de projection a été présentée par J.L. Guermond et al.[18].

Appliquons maintenant la décomposition de Hodge-Helmholtz directement à l'équation du mouvement pour une formulation discrète:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f}$$

Symboliquement cette équation peut être écrite sous la forme:

$$\rho \gamma = -\nabla\Phi - \nabla \times \Psi$$

On retrouve alors de manière condensée, ici pour l'unité de volume, la forme originelle de la loi fondamentale de la dynamique pour un point matériel

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}$$

Pour le milieu discret l'équation s'écrit:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left( p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f}$$

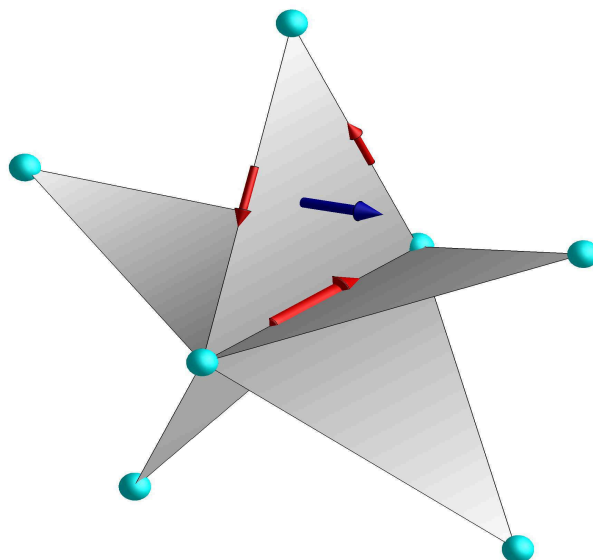


Figure 12: "Moteur Virtuel" du mouvement d'un fluide visqueux.

La figure figure 12 montre le principe de fonctionnement du moteur virtuel d'un fluide visqueux: le fluide, dont la composante de vitesse  $\mathbf{V}$  représentée par une flèche sur le segment principal, est accéléré (ou freiné) en fonction de deux types d'actions, l'inertie et la viscosité du fluide. L'inertie est représentée par l'action des rotationnels de toutes les facettes dont le vecteur est placé au barycentre des polygones et orthogonal à celles-ci et qui sont exprimées le terme  $\rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ . La viscosité qui freine (ou accélère) le mouvement est représentée par le terme  $\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$ . Les deux termes qui s'écrivent en parfaite cohérence sont en compétition pour fixer le signe de l'accélération  $\rho d\mathbf{V}/dt$ .

Dans un fluide chaque facette échange de la quantité de mouvement avec les autres, de cette cellule élémentaire mais aussi avec ses autres voisines. L'ensemble de ces échanges s'étend jusqu'aux limites du domaine pour en assurer la cohérence physique. Les scalaires définis sur chaque sommet accumulent les contraintes liées aux déséquilibres instantanés dû aux différentes sources, mécanique, thermique, etc.

Cette forme de l'équation du mouvement est différente de l'équation de Navier-Stokes mais reste proche de celle-ci si l'on considère que les quantités  $\rho$  et  $\mu$  sont des constantes dans cette dernière. Il est alors possible de transformer le terme d'inertie et le terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes pour en faire ressortir les formes rotationnelles. Dans le cas général elles sont différentes



## 2.2 Conservation du flux de chaleur

### 2.2.1 Introduction

Le Premier Principe de la Thermodynamique exprime la conservation de l'énergie et conduit à une équation scalaire dont l'inconnue est la température, l'énergie interne, l'enthalpie ou encore l'entropie. Elle est combinée avec la loi de Cauchy pour faire émerger la dissipation de chaleur due aux frottements mécaniques d'origine visqueuse.

Nous exprimerons ici la conservation du flux de chaleur  $\Phi$ , le potentiel scalaire sera remonté à partir du flux mais aussi du flux de quantité de mouvement et des productions ou dissipations. Cette approche inversée possède quelques avantages mais conduit à une évolution du potentiel proche des expressions obtenue par une approche classique, seule la fonction de dissipation sera différente en raison de la définition de la contrainte mécanique  $\mathbf{T}$ .

Ce modèle évite en fait un écueil important, celui des formes divergentielles privilégiées dans la plupart des équations de conservation. L'application de l'opérateur divergence réduit l'ordre du résultat (du complexe  $k$  au complexe  $k - 1$ ), par exemple la divergence d'un vecteur est un scalaire. La perte d'information est importante.

En Mécanique des Fluides des milieux continus la définition d'un tenseur des contraintes  $\sigma$  introduit un opérateur d'ordre deux qui est transformé en un vecteur par la divergence. L'opérateur  $\nabla \times \nabla \times$  conserve par contre l'ordre du vecteur auquel il est appliqué.

L'opérateur divergence dans ce modèle ne s'applique qu'aux flux de chaleur et à la vitesse  $\nabla \cdot \Phi$  et  $\nabla \cdot \mathbf{V}$ . Ces quantités sont essentielles pour remonter les niveaux des potentiels suite à un déséquilibre thermodynamique.

### 2.2.2 Equation du flux

Généralement c'est la conservation de l'énergie qui est proposée d'emblée pour obtenir la température (ou un autre potentiel) puis le flux est calculé à posteriori comme un sous-produit de l'équation de l'énergie. Nous adopterons la démarche inverse qui consiste à obtenir une équation vectorielle discrète sur le flux puis la température sera remontée à partir du flux mais aussi de la divergence de la vitesse.

La conservation du flux  $\Phi$  s'exprime sous la forme d'une équation vectorielle discrète obtenue à partir d'un bilan sur un segment  $C$  orienté de vecteur unitaire  $\mathbf{t}$ :

$$\frac{d}{dt} \int_C \varepsilon \Phi \cdot \mathbf{t} dl = - \int_C \nabla T \cdot \mathbf{t} dl - \int_C \frac{1}{k} \Phi \cdot \mathbf{t} dl$$

Cette dérivée particulière d'une intégrale curviligne sur le flux exprime la conservation de celui-ci le long du contour  $C$ ; le premier terme du membre de droite représente l'augmentation (ou la diminution) du potentiel dû au passage du flux et le second terme est relatif à l'absorption du flux par le matériau. Le paramètre  $k$  est la conductivité thermique ou la composante sur  $\mathbf{t}$  pour un matériau anisotrope.  $\varepsilon$  est un paramètre qui définit la physique du phénomène. Aux petites constantes de temps l'évolution en temps doit être considérée, la vitesse des phonons n'est pas infinie et les effets hyperboliques se combinent au caractère diffusif du transfert de chaleur admis aux plus grandes échelles de temps. Le paramètre  $\varepsilon$  est d'ordre de grandeur de  $10^{-11} - 10^{-10} s^{-1}$  et le terme correspondant peut être négligé pour les cas pratiques. Pour des raisons d'homogénéité du formalisme adopté pour l'équation du mouvement ce terme sera quand même gardé pour la suite.

Pour des constantes de temps supérieures au temps de relaxation des phonons le paramètre  $\varepsilon \rightarrow 0$  et le terme instationnaire devient négligeable. La loi de Fourier devient valide et permet d'exprimer le flux d'accumulation avec le potentiel d'accumulation, la température  $\Phi = -k \nabla T$ .  $T$  représente ici le champ de température local d'équilibre.

Tout déséquilibre dû à un terme source, une vitesse, un flux imposé, une condition à une limite, ... modifiera le flux  $\Phi$  à travers  $\Sigma$ . Le rétablissement de l'équilibre sera réalisé en remontant la température à sa nouvelle valeur  $T^n$  ( $n$  pour new) à partir de la divergence du flux et des autres apports.

L'équation discrète sur une face de la topologie duale, orthogonale au vecteur unitaire  $\mathbf{t}$  porté par le segment de la topologie primale, s'écrit:

$$k \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = -k \nabla T - \Phi$$

Cette équation au comportement hyperbolique permet de lever le paradoxe dû à la loi de Fourier qui prévoit que le flux à l'instant initial d'un milieu soumis à une température fixée, différente de celle du milieu, est infini. Pour un écart de température unitaire le flux normal à la paroi s'écrit:

$$\Phi \cdot \mathbf{n} = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{\sqrt{k \rho c_p}}{\sqrt{\pi t}}$$

où  $c_p$  est la chaleur spécifique à pression constante.

Avec l'intégration du terme d'évolution le flux croît très rapidement à partir de l'instant initial, oscille puis ses variations s'estompent pour devenir égal à l'expression donnée ci-dessus.

Pour des grandes constantes de temps, le flux de chaleur peut directement être estimé à l'équilibre et le flux de chaleur est en accord avec la loi de Fourier:

$$\Phi = -k \nabla T$$

Cette loi de Fourier est habituellement perçue comme une loi phénoménologique exprimant la linéarité du flux en fonction d'une force, ici le gradient de température. Dans le modèle présenté c'est le flux qui est variable d'une équation de conservation et la température (ou tout autre potentiel équivalent) qui est l'accumulateur du flux. La loi de Fourier se présente alors comme équation de conservation valable par passage à la limite.

### Analogie avec l'équation de Darcy généralisée

La loi de Darcy régissant l'écoulement d'un fluide de viscosité  $\mu$  dans un milieu poreux dont la perméabilité intrinsèque est égale à  $K$  se présente de manière identique à la conservation du flux donnée ci-dessus.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = -\nabla T - \frac{1}{k} \Phi \\ \rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p - \frac{\mu}{K} V \end{array} \right.$$

Cette relation peut être présentée comme une loi expérimentale mais aussi comme une dégénérescence de l'équation de Navier-Stokes. Le terme visqueux est remplacé alors par une résistance à l'avancement  $\mu/K$  appelée aussi mobilité. Sa forme généralisée obtenue en ajoutant une dérivée partielle ou ici une dérivée particulaire la transforme en une équation de conservation de la quantité de mouvement.

Un avantage important de cette formulation en flux est sa capacité à intégrer des propriétés tensorielles et des sauts de quantité vectorielles. Par exemple le flux de diffusion peut être décrit à partir d'une conductivité thermique tensorielle sous la forme  $\mathbf{k} \cdot \nabla T$ , une simple multiplication scalaire qui devient une multiplication de scalaires car  $\mathbf{k}$  et  $\nabla T$  sont portés par le même segment. Alors que  $\mathbf{k}$  est à l'extérieur des opérateurs la forme classique de l'équation de l'énergie l'intègre dans l'opérateur  $\nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T)$ . La même remarque s'applique à l'équation de Darcy.

## Equation aux discontinuités du flux de chaleur

L'existence d'une surface de discontinuité modifie les bilans de quantités de mouvement et d'énergie par l'introduction de sauts de quantités physiques. Introduisons ici deux notions supplémentaires liées au flux de chaleur à travers une surface.

La première correspondant à la notion de barrière thermique appelée "Résistance Thermique" dont la définition est simple:  $\Phi = \Delta T/R$ . Cette résistance  $R$  sera affectée à un segment traversé par cette barrière et uniquement dans ce cas. Tout le flux traverse la résistance mais le potentiel thermique subit une variation brusque au droit de l'interface.

La seconde notion est relative au changement de phase à la traversée d'un front  $\Sigma$  interceptant un segment du tétraèdre. Dans ce cas c'est le flux lui-même qui subit une variation due à l'absorption ou au dégagement de chaleur tandis que la température est la même de chaque côté de l'interface. Le modèle pourrait tenir compte aussi d'une éventuelle réduction du potentiel thermique.

L'introduction de sauts, ici de la température, est particulièrement adaptée à cette équation vectorielle. Pour la résistance thermique  $R$  et le front de changement de phase, le flux traverse l'interface, on est donc en présence d'une onde de choc. Pour la résistance thermique le flux n'est pas absorbé ou produit, il passe entièrement à travers la surface de discontinuité; pour le changement de phase le flux est modifié.

$$k \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = - \left( k + \frac{1}{R} \right) \nabla T - \Phi + \frac{k L}{c_p} \nabla \xi$$

Le terme relatif au changement de phase sera discuté plus loin;  $L$  est la chaleur latente du fluide et  $c_p$  est la chaleur spécifique (massique) à pression constante. La fonction indicatrice de phase permet de repérer la présence d'une interface sur le segment.

Pour le reste de l'exposé les termes relatifs aux discontinuités de résistance thermique ou de changement de phase ne seront pas forcément gardés dans tous les systèmes d'équations pour des raisons de clarté.

### 2.3 Insuffisances du modèle physique

Le système d'équations vectorielles sur la quantité de mouvement et sur le flux représentent chacune un équilibre. Ce n'est que pour des champs de pression d'équilibre  $p^o$ , de rotationnel d'équilibre  $\omega^o$  et de température  $T^o$  que les dérivées particulières  $d\mathbf{V}/dt$  et  $d\Phi/dt$  sont nulles. Rappelons que cela ne veut pas dire que la vitesse ou le flux est nul.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p^o - \omega^o - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f} + \gamma \kappa \nabla \xi \\ k \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = - \left( k + \frac{1}{R} \right) \nabla T^o - \Phi + \frac{k L}{c_p} \nabla \xi \end{array} \right.$$

La solution de ce système fournit  $\mathbf{V}$  et  $\Phi$  et ainsi  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  et  $\nabla \cdot \Phi$  qui apparaissent comme des éléments essentiels pour l'obtention des potentiels  $p$  et  $T$ .

Ce système d'équations est encore loin d'être représentatif car il n'intègre pas les contraintes nécessaires au rétablissement des équilibres mécanique et thermique. Le prochain chapitre introduit le relèvement des potentiels à partir de  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  et  $\nabla \cdot \Phi$ . Le système obtenu, comprenant d'une part des bilans de quantités vectorielles et d'autre part le calcul des potentiels, sera autonome; seules les propriétés de transport et les coefficients thermodynamiques dépendant des potentiels seront supposés connus.

## Un exemple simple sur la statique

Pour montrer l'insuffisance de l'équation du mouvement à décrire le comportement d'un système élémentaire, prenons le cas de la statique de fluides compressibles.

Considérons une cavité fermée de volume constant contenant une masse d'air supposé être un gaz parfait  $m$  à température constante  $T_0$  à la pression constante de  $p^o$ ; la masse volumique est ainsi égale  $\rho_0 = p_0/r T_0$ .

À l'instant initial  $t = 0$  la cavité est soumise à une gravité constante égale à  $\mathbf{g}$ . Sous l'effet de la gravité la masse volumique devient une fonction de  $z$  tout en gardant une valeur moyenne de  $\rho_0$  et la pression suit une évolution spatiale équivalente égale à  $p = \rho r T_0$ .

Le système d'équations correspondant s'écrit:

$$\begin{cases} -\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0 \\ p = \rho r T_0 \\ \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases}$$

La solution théorique de ce problème s'obtient facilement:

$$\begin{cases} \rho(z) = -\frac{\rho_0 H g}{r T_0} \left( e^{-\frac{gH}{r T_0}} - 1 \right)^{-1} e^{-\frac{gH}{r T_0} z} \\ p(z) = \rho(z) r T_0 + Cte \\ \mathbf{V} = 0 \end{cases}$$

Avec l'équation de Navier-Stokes sous sa forme classique la pression n'étant pas connue lors de la mise en gravité, la vitesse calculée à cet instant est ainsi égale à:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_z = -\delta t g$$

*Le fluide s'accumule au fond de la cavité. Afin de tenir compte de la compressibilité partielle du fluide il faut résoudre alternativement l'équation de la conservation de la masse et l'équation d'état. Le résultat stationnaire est bien sûr le même mais le comportement instationnaire n'est pas conforme à la réalité.*

Reprenons maintenant le modèle présenté en intégrant une contrainte qui sera explicitée au chapitre suivant; elle s'écrit  $\nabla(\psi \nabla \cdot \mathbf{V})$  et permet d'obtenir une vitesse nulle  $\mathbf{V} = 0$  tout en gardant un équilibre statique compressible. Ce n'est que parceque  $\mathbf{V} = 0$  que  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ . Le paramètre  $\psi$  est pour l'instant qu'un simple paramètre de lagrange.

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla(p - \psi \nabla \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{g} \\ p^n = p^o - \psi \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho^n = \rho^o - \rho^o \delta t \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases}$$

Compte tenu du problème posé les termes visqueux n'ont pas d'importance car le fluide n'est pas cisailé. Seule la solution stationnaire  $\mathbf{V} = 0$  sera recherchée mais la formulation proposée impose de traiter le problème en instationnaire, la solution stationnaire sera recherchée comme un problème d'évolution en temps.

La contrainte introduite empêche le fluide de tomber au fond et maintient celui-ci dans un état proche de l'équilibre au cours de l'évolution du système. Une particule fluide soumise à la gravité comprime le fluide qui est en dessous qui réagit, son coefficient de compressibilité devenant plus petit ( $\psi$  plus grand). L'ensemble du fluide oscille pour établir l'équilibre statique recherché. La solution instationnaire est conforme à la physique du phénomène et à la solution théorique. La masse totale  $m$  dans la cavité est conservée exactement.

Dans le cas d'un comportement incompressible d'un fluide quelconque, le modèle présenté permet d'obtenir instantanément la solution de l'hydrostatique à  $\rho$  constant. Il suffit de considérer que le paramètre  $\psi \rightarrow \infty$ , la contrainte conduit directement à  $\mathbf{V} = 0$  et à  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  ainsi qu'à la solution  $p = -\rho g z$  à une constante près.

Il est à noter que, pour un milieu compressible, le choix de  $\psi$  est important, il n'existe comme on le verra qu'une valeur qui permette de reproduire la réalité. Ce paramètre n'est pas le second coefficient de compressibilité et sa valeur n'est pas compatible avec celle tirée de la loi de Stokes mais peut être évaluée exactement par une approche thermodynamique d'un fluide isotrope divariant. Le paramètre  $\psi$  doit être absolument positif  $\Psi > 0$  afin qu'une compression d'un fluide réduise son volume, soit une divergence négative, et conduise donc à une pression plus importante. La loi de Stokes conduit à fixer la viscosité de volume à zéro et ainsi à donner une valeur négative  $\lambda = -2/3 \mu$  à la viscosité de compression.

Dans la mesure où cette viscosité de compression n'apparaît pas dans la formulation discrète de l'équation du mouvement, la question de sa valeur n'a plus d'intérêt.

## 3 Non Equilibre Thermodynamique

### 3.1 Hypothèses

L'hypothèse d'Equilibre Thermodynamique Local est abandonnée. Il n'y a pas de raison physique pour affirmer que le mouvement d'un fluide conduise en chacun des point de l'écoulement, et que quelles que soient les contraintes qui lui sont appliqué, à la satisfaction d'une équation d'état.

Pour un fluide divariant l'équation d'état s'écrit  $f(p, \rho, T) = 0$  ce qui lie fortement les trois potentiels, pression, masse volumique et température. Il existe des situations où une telle loi est loin d'être vérifiée comme le passage à travers une onde de choc; d'autres phénomènes à très petites constantes de temps pourraient aussi être évoqués.

L'argument souvent avancé pour introduire une telle loi est de maintenir l'égalité entre nombre d'équations et nombre d'inconnues. Dans la mesure où nous considérons que la pression thermodynamique est un accumulateur de tous les déséquilibres mécaniques et thermiques représentés dans l'équation du mouvement, la pression n'est pas une nouvelle inconnue et l'équation du mouvement est autonome.

La pression thermodynamique  $p$  est remontée avec l'aide des variables vectorielles, vitesse  $\mathbf{V}$  et flux de chaleur  $\Phi$  tout comme la masse volumique  $\rho$  et la température  $T$ . Ces quantités sont des accumulateurs des équations du mouvement, de la masse et du flux de chaleur.

Le rôle des variables vectorielles  $\mathbf{V}$  et  $\Phi$  dans la remontée des potentiels est assuré à travers la divergence de ces flux  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  et  $\nabla \cdot \Phi$ .

Les lois de conservation développées dans les précédents chapitres exprimaient l'équilibre mécanique obtenu pour un certain état défini par une pression  $p^o$ , une masse volumique  $\rho^o$  et une température  $T^o$  avec l'exposant  $o$  pour "old". La modification de cet équilibre par un terme source supplémentaire dans les équations, une condition à la limite différente, une évolution instationnaire, ... amène le système vers un autre état d'équilibre  $p^n, \rho^n, T^n$  avec  $n$  pour "new". Les sous-chapitres suivants sont consacrés à l'écriture des variations des potentiels au cours de l'évolution du système.

Dans la présentation des bases du modèle de type géométrie différentielle, l'élément de volume  $\Omega$  pouvait être défini dans une topologie primale ou duale ainsi que les faces du polyèdre  $\Sigma$  qui limite ce volume. La masse  $m$  ou l'énergie  $E$  sont bien sûr évalués sur ce volume  $\Omega$  mais la masse volumique, la température (ou l'énergie interne spécifique), la pression sont attachés aux sommets du tétraèdre (ou du volume dual). Ce sont donc bien des fonctions de point.

L'opérateur permettant de passer d'une quantité vectorielle (complexe d'ordre un) à une quantité scalaire (ou complexe d'ordre zéro) est la divergence.  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  et  $\nabla \cdot \Phi$  sont ainsi évaluées et affectées aux points où sont définies masse volumique, température et pression.

Tout en restant hors de l'hypothèse d'équilibre local il est alors possible de déterminer les évolutions de potentiels  $p, \rho, T$  à l'aide des lois locales telles qu'elles sont obtenues en mécanique des milieux continus. Mais il est cependant possible d'écrire les évolutions des potentiels à partir de simples considérations physiques. Par exemple lorsque l'on soumet une masse de gaz homogène à un flux  $\Phi$  pendant un temps  $dt$  on sait exactement la pression obtenue à la fin de l'opération. La connaissance de la chaleur volumique du fluide et des coefficients de compressibilité et de dilatation suffit pour calculer la différence de pression entre les états initial et final. Il suffit de se rappeler de la signification physique de la divergence d'un flux.

Cette approche physique pourrait être appliquée aussi au relèvement de la température en lagrangien. Une fois répertorié tous les effets contribuant à faire varier la température d'un milieu

homogène il est facile de calculer de calculer la dérivée particulière  $dT/dt$ . L'invocation du premier principe de la Thermodynamique et de la loi de Cauchy conduirait bien sûr à l'établissement de l'équation de l'Energie.

### 3.2 Coefficients thermodynamiques

La détermination des variations des potentiels au cours de l'évolution du système nécessite la connaissance des propriétés thermodynamiques des fluides. Ces coefficients thermodynamiques ne sont pas assimilables aux propriétés de transport; ceux-ci nécessitent une loi constitutive pour pouvoir être définis; on écrit d'abord une loi phénoménologique, le plus souvent linéaire, et on déduit le coefficient de proportionnalité entre flux et forces.

Les coefficients thermodynamiques sont quant à eux parfaitement définis par des mesures directes de la masse, du volume, de la quantité de chaleur, etc. Nous définirons classiquement ici les quantités suivantes:

- le coefficient de dilatation isochore  $\alpha$
- le coefficient de dilatation isobare  $\beta$
- le coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$
- les chaleurs massiques à pression et à volumes constants  $c_p$  et  $c_v$
- la chaleur latente de changement de phase à température constante  $L$ .

Les définitions de ces quantités sont les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad \chi_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \\ c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad c_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_\rho \quad L = \frac{T}{\Delta \rho} \frac{dp}{dT} \end{array} \right.$$

Comme on sait que

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_\rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = -1$$

la relation entre ces coefficients s'écrit:

$$\frac{\beta}{\alpha p \chi_T} = 1$$

Nous excluons l'utilisation de quelconque loi d'état; elles ont pour unique but de synthétiser les variations des propriétés en fonction des potentiels thermodynamiques. Au même titre que la rhéologie des fluides la loi d'état ne constitue pas une équation supplémentaire qui permette d'égaliser nombre d'inconnues au nombre d'équations.

Les propriétés de transport comme par exemple la viscosité  $\mu$ , la conductivité thermique  $k$ , le coefficient de diffusion massique  $D$  ainsi que les coefficients thermodynamiques définis ci-dessus doivent simplement être connus, qu'ils soient constants ou dépendant des potentiels, température, pression, masse volumique. Ces effets sont tous intégrés dans une quantité locale fondamentale en mécanique, la divergence de la vitesse  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  tout comme la divergence du flux.

### 3.3 Evolution des potentiels

Considérons un domaine  $\Omega$  limité par une surface  $\Gamma$  contenant un fluide newtonien isotrope divariant entre deux états, initial et final d'une transformation de durée  $dt$ . Ces deux états sont des états d'équilibre thermodynamique caractérisés par deux contraintes résiduelles d'équilibre  $\mathbf{T}^o$  et  $\mathbf{T}^o + d\mathbf{T}^o$ . La contrainte résiduelle est généralement prise égale à zéro mais elle constitue les bases de l'accumulation des efforts dans les matériaux et considérée comme un lagrangien. Pour un fluide homogène et isotrope l'état de contrainte résiduelle est associée à la pression d'équilibre thermodynamique  $p^o$  notée simplement  $p$  par la suite :

$$\mathbf{T}^o = -p^o \mathbf{t}$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent.

Le fluide est uniquement caractérisé par ses propriétés,  $c_v$  chaleur massique,  $\rho$ , masse volumique,  $\chi_T$ , coefficient de compressibilité isotherme,  $\alpha$ , coefficient d'augmentation de pression à volume constant et  $\beta$ , coefficient d'expansion thermique. L'état thermodynamique du système dépend de deux variables par exemple  $T$  et  $p$  la température absolue et la pression thermodynamique. Ces deux variables sont strictement positives.

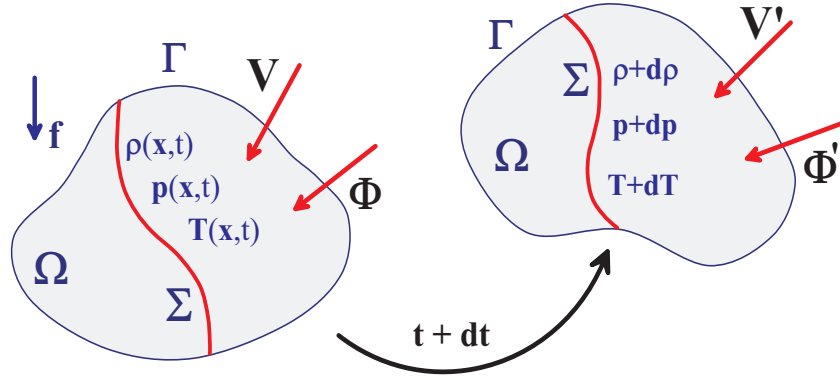


Figure 13: Evolution lagrangienne des variables pour un temps  $dt$

Physiquement l'état du système va varier en fonction des flux de quantité de mouvement et de chaleur. La pression et la température évolueront donc en fonction de  $\mathbf{V}$  et de  $\Phi$ . Par exemple un flux de chaleur fourni au système fera augmenter la pression dans la cavité ou une compression mécanique du système conduira à une élévation de la température. Plus exactement ce sont les différences de vitesses ou de flux qui engendrent les variations ou plutôt la divergence de la vitesse et la divergence du flux.

$$\begin{cases} dT = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p d\rho + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho dp \\ dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho dT \\ d\rho = -dt \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases}$$

Le système d'équations fera ainsi apparaître ces seuls coefficients; les variables d'état ( $p, \rho, T$ ) ne seront pas évaluées par d'autres équations ou lois d'état, elles seront remontées à partir des variables vectorielles vitesse et flux.



### 3.3.1 Masse volumique

La conservation de la masse exprime que chaque constituant contenu dans  $\Omega$  est conservé lorsque l'on suit le volume de contrôle dans son mouvement; l'imperméabilité de  $\Sigma$ , en l'absence de source ou de puits de matière, conduit à écrire :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_i dv = 0$$

où  $\rho_i$  est la masse volumique locale partielle de chaque constituant au sein du mélange.

Dans le cas où des réactions chimiques conduisent à des transformations entre espèces sur la base d'une cinétique chimique connue, il est possible d'introduire le taux de production massique de chaque espèce  $\omega_i$  :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_i dv = \omega_i$$

En exprimant la dérivée particulaire:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_i dv = \iiint_{\Omega} \left( \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \nabla \cdot \mathbf{V}_i \right) dv$$

où  $\mathbf{V}_i$  est la vitesse du constituant.

La forme locale de l'équation de conservation est obtenue en adoptant l'hypothèse de l'équilibre local:

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \nabla \cdot \mathbf{V}_i = 0$$

ou bien, en exprimant la dérivée particulaire de la masse volumique partielle :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}_i) = 0$$

La conservation de la masse pour un fluide pur ou un mélange considéré comme homogène d'un fluide fictif unique peut être obtenue par la sommation sur l'ensemble des constituants :

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}_i) \right) = 0$$

Comme la masse volumique du mélange s'écrit comme la somme des masses volumiques partielles de chaque constituant :

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i \tag{1}$$

et en définissant la vitesse barycentrique par l'expression de la quantité de mouvement du mélange :

$$\rho \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbf{V}_i$$

on trouve:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$$

Cette relation exprime que l'évolution locale de la masse volumique lorsque l'on suit un point matériel au cours de son mouvement n'est due qu'à des compressions ou détentes locale de toutes origines (mécanique, thermique, massique, ...).

Bien que le modèle se limite maintenant au cas d'un fluide pur ou d'un mélange homogène ou pseudo-fluide, l'extension à un mélange multiconstituant est possible. Dans ce cas il est nécessaire de connaître les vitesses de chaque constituant  $\mathbf{V}_i$  avec autant d'équations du mouvement que de constituant. Le relèvement s'effectue alors sur chaque masse volumique partielle  $\rho_i$  et la conservation de la masse totale du mélange serait ainsi assurée exactement.

### 3.3.2 Température

Le premier principe de la Thermodynamique permet d'écrire classiquement le bilan intégral de l'énergie, interne et cinétique, sous la forme:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) dv = \iiint_{\Omega} q dv - \iint_{\Sigma} \Phi ds + \iiint_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dv + \iint_{\Sigma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} ds$$

où  $q$  est une production volumique,  $\Phi$ , le flux de chaleur,  $f$  une force par unité de volume et  $\mathbf{T}$  la contrainte définie plus haut:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{t} - \mu \nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}$$

Nous introduirons ici  $\Omega$  est le tenseur antisymétrique  $\Omega = \nabla \mathbf{V} - \nabla^t \mathbf{V}$ . La contrainte  $\mathbf{T}$  peut ainsi s'écrire à partir du tenseur de rotation:

$$\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} = -\Omega \cdot \mathbf{n}$$

Cette expression se généralise d'ailleurs à tout vecteur:

$$\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\Omega \cdot \mathbf{V}$$

Les deux intégrales de surface se transforment en intégrales de volume:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Sigma} -p \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = - \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (p \mathbf{V}) dv \\ \iint_{\Sigma} -\Omega \cdot \mathbf{n} ds = - \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\Omega \cdot \mathbf{V}) dv \end{array} \right.$$

En exprimant la dérivée particulaire de l'intégrale de volume du premier membre et en utilisant la conservation de la masse on arrive à:

$$\iiint_{\Omega} \left( \rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) - q + \nabla \cdot \Phi - \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mu \Omega \cdot \mathbf{V}) \right) dv = 0$$

Pour une fonction de point l'équation locale obtenue en considérant cette expression exacte pour tout volume  $\Omega$  et l'équation discrète sur un volume polyédrique est la même:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) = q - \nabla \cdot \Phi + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) - \nabla \cdot (\mu \Omega \cdot \mathbf{V})$$

le dernier terme peut être transformé en tenant compte de

$$\nabla \cdot (\Omega \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \Omega^t + \Omega : \nabla \mathbf{V}$$

Comme  $\mathbf{\Omega}^t = -\mathbf{\Omega}$  on a

$$\nabla \cdot (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V}) = -\mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega} : \nabla \mathbf{V}$$

Le gradient de  $\mathbf{V}$  peut toujours être écrit comme la somme d'un tenseur symétrique  $\mathbf{D}$  et d'un tenseur antisymétrique et comme le produit doublement contracté d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique est nul  $\mathbf{\Omega} : \nabla \mathbf{D} = 0$  on a:

$$\mathbf{\Omega} : \nabla \mathbf{V} = \mathbf{\Omega} : \mathbf{D} + \mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}$$

L'équation de l'énergie devient:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) = q - \nabla \cdot \mathbf{\Phi} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot (\mu \mathbf{\Omega}) + \mu \mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}$$

Reprenons maintenant la forme discrète de l'équation du mouvement

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f}$$

ou encore

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \mathbf{\Omega}) + \mathbf{f}$$

et multiplions celle-ci par  $\mathbf{V}$

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{V}^2}{dt} = -\mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot (\mu \mathbf{\Omega}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}$$

Il vient par soustraction entre l'équation de l'énergie et celle du mouvement multipliée scalairement par  $\mathbf{V}$ :

$$\rho \frac{de}{dt} = q - \nabla \cdot \mathbf{\Phi} - p \nabla \cdot \mathbf{V} + \mu \mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}$$

ou encore en posant  $\|\nabla \times \mathbf{V}\|^2 = (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot (\nabla \times \mathbf{V})$

$$\rho \frac{de}{dt} = q - \nabla \cdot \mathbf{\Phi} - p \nabla \cdot \mathbf{V} + \mu \|\nabla \times \mathbf{V}\|^2$$

La puissance  $-P_i$  des efforts internes qui contribue à diminuer réduire l'énergie interne est traditionnellement décomposée en une partie réversible représentée par le terme  $-p \nabla \cdot \mathbf{V}$  et une partie non réversible nommée fonction de dissipation  $\phi$ .

La fonction de dissipation correspondant à la partie non réversible de l'énergie dissipée par frottements mécanique qui s'écrit de manière générale

$$\phi = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{V} \, dv$$

devient ici pour un système de coordonnées cartésiennes orthonormé:

$$\phi = \mu \mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega} = \mu \|\nabla \times \mathbf{V}\|^2 = \mu \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)^2$$

Comme on le voit la fonction de dissipation est positive  $\phi \geq 0$ . Le principe de positivité de Clausius-Duhem est vérifié, la seule condition est la suivante:

$$\mu \geq 0$$

A ce stade où la contrainte normale définie par  $-p^o \mathbf{t}$  ne correspond qu'à la partie réversible, la fonction de dissipation n'intègre pas encore des effets de compressibilité. Nous verrons qu'un terme similaire à celui obtenu en mécanique des milieux continus:

$$\lambda (\nabla \cdot \mathbf{V})^2$$

réapparaîtra sous une autre forme. Ce terme correspond à la production d'entropie due aux effets irréversibles de compression et, comme on le verra, dépendra de la constante de temps du retour à l'équilibre du système.

L'équation de l'énergie interne devient ainsi:

$$\rho \frac{de}{dt} = q - \nabla \cdot \Phi - p \nabla \cdot \mathbf{V} + \phi$$

avec  $\phi = \mu \boldsymbol{\Omega} : \boldsymbol{\Omega}$ .

Introduisons l'enthalpie par unité de masse de fluide  $h = e + p/\rho$ :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

d'où en reportant dans l'équation de l'énergie :

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\nabla \cdot \varphi + q + \rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{p}{\rho^2} (\rho \nabla \cdot \mathbf{V}) \right) + \phi$$

et

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\nabla \cdot \varphi + \frac{dp}{dt} + q - \frac{p}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \phi$$

Compte tenu de l'équation de continuité, on obtient :

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\nabla \cdot \varphi + \frac{dp}{dt} + q + \phi$$

L'enthalpie étant fonction de  $p$  et de  $T$ , on a :

$$\frac{dh}{dt} = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt}$$

La thermodynamique fournit les relations :

$$\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = c_p; \quad \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) \quad \text{avec } \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

$\beta$  est le coefficient d'expansion thermique, ou de dilatation cubique à pression constante.

D'où la forme de l'équation de l'énergie en enthalpie:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \varphi + \beta T \frac{dp}{dt} + q + \phi$$

Une autre forme de l'équation de l'énergie peut être obtenue en remarquant que :

$$\frac{dp}{dt} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \frac{d\rho}{dt} + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \frac{dT}{dt}$$

expression qui fait intervenir la chaleur spécifique à volume constant :

$$\beta T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = -\frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = \rho (c_p - c_v)$$

D'où la forme la plus appropriée pour exprimer le relèvement du potentiel à partir des flux  $\mathbf{V}$  et  $\Phi$ :

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -\frac{\beta T}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \Phi + q + \phi$$

La dérivée particulaire de la température fait apparaître le rôle symétrique joué par  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  et par  $\nabla \cdot \Phi$  pondérés par des coefficients thermodynamiques parfaitement identifiés et mesurables.

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\beta T}{\rho c_v \chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\rho c_v} \nabla \cdot \Phi + \frac{1}{\rho c_v} q + \frac{1}{\rho c_v} \phi$$

### Remarque sur la dissipation visqueuse

La présentation de l'équation de l'énergie sous sa forme volumique n'est pas entièrement satisfaisante pour le terme de dissipation de l'énergie mécanique. En effet la contrainte visqueuse  $\mathbf{T}_v$  n'est définie que sur la surface  $\mathcal{A}$  (figure 14).

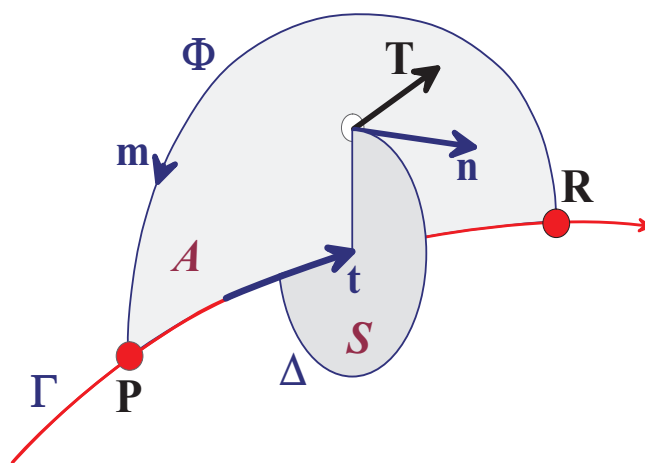


Figure 14: Dissipation visqueuse

La fonction de dissipation peut être définie ici par l'intégrale surfacique:

$$\phi = \frac{1}{[S]} \iint_S \mathbf{V} \cdot (\mu \nabla \times \mathbf{V}) ds$$

Comme  $\mu \nabla \times \mathbf{V} = \mu \nabla_p \times \mathbf{V}$ , sur la topologie primale est constante sur la surface  $\mathcal{A}$  on peut calculer l'intégrale sur le contour  $\Delta$ :

$$\int_{\Delta} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dl = \iint_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} ds$$

pour obtenir l'expression de la fonction de dissipation

$$\phi = \frac{1}{[S]} \iint_S (\mu \nabla_p \times \mathbf{V}) \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} ds$$

Soit l'expression de la fonction de dissipation discrète:

$$\boxed{\phi = \mu \nabla_p \times \mathbf{V} \cdot \nabla_d \times \mathbf{V}}$$

où  $\nabla_d \times \mathbf{V}$  est le rotationnel de  $\mathbf{V}$  sur la topologie duale.

### Remarque sur le second principe de la thermodynamique

*En Mécanique des Milieux Continus l'application du second principe de la thermodynamique conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem. Les coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$  sont ainsi soumis à des contraintes imposées par la positivité de la fonction de dissipation.*

*L'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit:*

$$\frac{1}{T} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \frac{1}{T^2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \nabla T \geq 0$$

où  $\boldsymbol{\Phi}$  est le flux de chaleur.

*Si l'on admet que le vecteur flux de chaleur ne dépend pas de  $\mathbf{D}$  et que le tenseur  $\boldsymbol{\tau}$  ne dépend pas de  $\nabla T$  on doit alors assurer la positivité des deux dissipations mécanique et thermique.*

*En écrivant donc le principe de positivité de la puissance des efforts internes mécaniques on a:*

$$\frac{1}{T} \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \geq 0$$

*Comme la température thermodynamique est positive on peut calculer la puissance des effets de viscosité interne:*

$$\phi^C = \left( \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \geq 0$$

*qui est le taux de dissipation de l'énergie cinétique au sein d'un système relative au tenseur de Cauchy.*

*Dans un repère cartésien orthonormé la fonction de dissipation  $\phi$  s'écrit:*

$$\phi^C = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu D_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \phi^C = & \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right)^2 \end{aligned}$$

*Cette expression est la somme de carrés. Si  $\mu$  et  $\lambda$  sont tous deux positifs alors cette contrainte est satisfaite. Examinons, dans quelles conditions pour ces deux paramètres, ce principe est satisfait.*

*La seconde loi de la thermodynamique exprimée plus haut devient en dimension un:*

$$\begin{cases} 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \geq 0 \\ 2\mu + \lambda \geq 0 \end{cases}$$

soit  $\lambda \geq -2 \mu$ .

*Si l'hypothèse de Stokes est adoptée l'inégalité sur l'entropie est satisfaite. On montre que pour un système en dimension trois, l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite si  $\lambda \geq -2/3 \mu$  pour le tenseur symétrique de Cauchy.*

*Si l'on reprend l'inégalité correspondant au système à une dimension on constate que la dissipation visqueuse n'est pas nulle. L'inégalité fait apparaître la viscosité de compression ce qui paraît naturel mais aussi la viscosité de cisaillement alors que le fluide ne peut être cisailé puisque seule la composante de vitesse longitudinale existe. Cette incohérence est due aux termes diagonaux du tenseur des contraintes de Cauchy qui incluent une viscosité de cisaillement.*

### 3.3.3 Pression

On recherche maintenant une équation d'évolution lagrangienne de la pression thermodynamique à partir de celles de la masse et de la température. On part de la définition de la dérivée particulaire de la masse volumique:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{V}$$

pour obtenir celle de la pression:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\beta}{\chi_T} \frac{dT}{dt}$$

Afin d'étendre le système d'équations aux phénomènes de changement de phase il est nécessaire d'intégrer à l'expression de l'évolution de la pression un terme qui correspond à l'expansion du liquide se transformant en vapeur. A température constante (dans une cocotte-minute par exemple) l'eau se transforme en vapeur et fait augmenter la pression. Les relations thermodynamiques du changement de phase vont permettre le terme associé à ce changement de pression.

L'expression différentielle de la formule de Clapeyron s'écrit :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \Delta v}$$

où  $L$  est la chaleur latente massique de changement d'état à pression constante et  $\Delta v$  est la variation de volume massique au cours du changement de phase ( $v = 1/\rho$ ).

Pour l'évaporation le volume du liquide reste sensiblement constant et  $\Delta v = v_g - v_l \approx v_g$  le volume de la vapeur.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T v_g}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{L}{T v_g}$$

soit

$$\frac{dp}{dt} = \frac{L}{T v_g} \frac{dT}{dt}$$

On pourrait donc écrire

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} + \left( \frac{\beta}{\chi_T} + \frac{\rho_g L}{T} \right) \frac{dT}{dt}$$

mais comme

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c_v} \nabla \cdot \Phi - \frac{\beta T}{\rho c_v \chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{q}{\rho c_v} + \frac{\phi}{\rho c_v}$$

on trouve l'expression finale de l'évolution lagrangienne de la pression thermodynamique.

$$\frac{dp}{dt} = - \left( \frac{1}{\chi_T} + \frac{\beta^2 T}{\rho c_v \chi_T^2} + \frac{\rho_g L \beta}{\rho c_v \chi_T} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} - \left( \frac{\beta}{\rho c_v \chi_T} + \frac{\rho_g L}{T \rho c_v} \right) \nabla \cdot \Phi + \frac{q \rho_g L}{\rho c_v T} + \frac{\beta q}{\rho c_v \chi_T} + \frac{\phi \rho_g L}{\rho c_v T} + \frac{\beta \phi}{\rho c_v \chi_T}$$

où  $\mathbf{V}$  et  $\Phi$  sont obtenus par les équations de conservation vectorielles.

### 3.4 Système d'équations

#### 3.4.1 Expressions des potentiels

Comme tenu des expressions établies précédemment les dérivées lagrangiennes des potentiels  $\rho, T, p$  définis sur les sommets du polyèdre de référence s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = - \left( \frac{1}{\chi_T} + \frac{\beta^2 T}{\rho c_v \chi_T^2} + \frac{\rho_g L \beta}{\rho c_v \chi_T} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} - \left( \frac{\beta}{\rho c_v \chi_T} + \frac{\rho_g L}{T \rho c_v} \right) \nabla \cdot \Phi + \frac{\beta q}{\rho c_v \chi_T} + \frac{\beta \phi}{\rho c_v \chi_T} \\ \frac{dT}{dt} = - \left( \frac{\beta T}{\rho c_v \chi_T} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} - \left( \frac{1}{\rho c_v} \right) \nabla \cdot \Phi + \frac{q}{\rho c_v} + \frac{\phi}{\rho c_v} \\ \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \end{array} \right.$$

Les deux premières relations font apparaitre les variables de flux et la conservation de la masse reste inchangée.

Les groupements de coefficients thermodynamique peuvent se mettre sous la forme compacte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{VV} = \left( \frac{1}{\chi_T} + \frac{\beta^2 T}{\rho c_v \chi_T^2} + \frac{\rho_g L \beta}{\rho c_v \chi_T} \right) \\ \psi_{V\Phi} = \left( \frac{\beta}{\rho c_v \chi_T} + \frac{\rho_g L}{T \rho c_v} \right) \\ \psi_{\Phi V} = \frac{\beta T}{\rho c_v \chi_T} \\ \psi_{\Phi\Phi} = \frac{1}{\rho c_v} \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} = -\psi_{\Phi V} \nabla \cdot \mathbf{V} - \psi_{\Phi\Phi} \nabla \cdot \Phi + \psi_{\Phi\Phi} q + \psi_{\Phi\Phi} \phi \\ \frac{dp}{dt} = -\psi_{VV} \nabla \cdot \mathbf{V} - \psi_{V\Phi} \nabla \cdot \Phi + \psi_{V\Phi} q + \psi_{V\Phi} \phi \\ \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \end{array} \right.$$



On retrouve l'intégralité des phénomènes physiques associée à chacun des termes de ces relations. Par exemple l'augmentation de la pression due à une production de chaleur au sein du domaine produit un déséquilibre thermodynamique qui conduit à une vitesse, à une augmentation de la température et à une masse volumique en accord thermodynamique.

D'autres phénomènes physiques peuvent être intégrés dans les évolutions de ces potentiels, le rayonnement thermique, la diffusion de la masse entre constituants, etc. Dans ce dernier cas la chaque masse volumique partielle serait remontée par la divergence des flux de masse à travers la vitesse de chaque constituant  $\mathbf{V}_i$ .

### 3.4.2 Système d'équations et potentiels

La conservation des flux de quantité de mouvement et de chaleur associés aux remontées des potentiels obtenus sur la masse volumique, la pression et la température peut enfin être présentée dans un même système. Les termes en relation avec les discontinuités du flux, résistance thermique et changement de phase ainsi que les effets capillaires ne seront pas intégrés ici.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \{p_o - dt \psi_{VV} \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \psi_{V\Phi} \nabla \cdot \Phi - dt \psi_{Vq} q - dt \psi_{V\phi} \phi\} - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f} \\ \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = -k \nabla \{T_o - dt \psi_{\Phi V} \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \psi_{\Phi\Phi} \nabla \cdot \Phi - dt \psi_{\Phi q} q - dt \psi_{\Phi\phi} \phi\} - \Phi \\ p = p^o - dt \left( \frac{1}{\chi T} + \frac{\beta^2 T}{\rho c_v \chi T^2} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \left( \frac{\beta}{\rho c_v \chi T} \right) \nabla \cdot \Phi + dt \frac{\beta q}{\rho c_v \chi T} + dt \frac{\beta \phi}{\rho c_v \chi T} \\ T = T^o - dt \left( \frac{\beta T}{\rho c_v \chi T} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \left( \frac{1}{\rho c_v} \right) \nabla \cdot \Phi + dt \frac{q}{\rho c_v} + dt \frac{\phi}{\rho c_v} \\ \rho = \rho^o e^{-dt \nabla \cdot \mathbf{V}} \end{array} \right.$$

Les trois dernières relations ne sont pas des équations, elles permettent de relever les valeurs des potentiels au niveaux exacts où ils sont portés par les flux  $\mathbf{V}$  et  $\Phi$  et par les sources internes, production et dissipation. Les nouvelles valeurs de ces potentiels  $p$ ,  $T$  et  $\rho$  correspondent à l'accumulation des contraintes de l'évolution en cours mais aussi de celles de l'histoire du système.

La dernière relation sur la masse volumique n'est exacte que lorsque  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  est constante lorsque l'on suit l'élément de volume au cours de son mouvement.

Toutes les composantes des variables vectorielles  $\mathbf{V}$  et  $\Phi$  sont étroitement couplées à travers les termes en  $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{V})$  par exemple ce qui rend les équations un peu difficile à résoudre. Les deux équations vectorielles peuvent être, et c'est préférable, résolues simultanément. L'intégration des différentes contraintes dans ces équations vectorielles est cependant fondamentale pour permettre le relèvement des potentiels.

### 3.4.3 Relèvement eulérien

Il est possible de la calculer les composantes de la vitesse  $\mathbf{V}$  en coordonnées eulériennes à partir de celles obtenues en coordonnées lagrangiennes à partir de l'expression non conservative du terme d'inertie.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$$

Il est préférable de garder une forme discrète du terme d'inertie où la masse volumique associée à ce terme est définie comme une intégrale curviligne de la masse volumique locale le long du contour joignant deux sommets du polyèdre.

L'équation du mouvement peut être écrite en variables d'Euler en repartant de l'expression de la dérivée particulaire discrète:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$$

Le terme correspondant à l'énergie cinétique en  $\nabla (\rho \mathbf{V}^2/2)$  est un pur gradient et donc non nécessaire à la résolution de l'équation du mouvement.

La pression de Bernoulli d'équilibre est égale à:

$$p_B^o = p^o + \left( \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right)$$

le calcul de la pression thermodynamique  $p^o$  nécessitera alors son évaluation sur les sommets du polyèdre.

L'équation du mouvement peut ainsi être aussi bien intégrée en variables de Lagrange qu'en variables d'Euler:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} \right) = -\nabla \{ p_B^o - dt \psi_{VV} \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \psi_{V\Phi} \nabla \cdot \Phi - dt \psi_{Vq} q - dt \psi_{V\phi} \phi \} - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f}$$

L'advection des quantités scalaires s'effectue à partir des expressions des dérivées particulières:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \mathbf{V} \cdot \nabla T \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt} - \mathbf{V} \cdot \nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} - \mathbf{V} \cdot \nabla \rho \end{array} \right.$$

La théorie permet ainsi d'obtenir la solution dans une formulation Lagrange-Euler où les effets thermodynamiques sont résolus dans la phase lagrangienne et l'advection dans la phase eulérienne.

## 4 Propriétés du modèle physique

### 4.1 Système d'équations représentatif

En l'absence de perturbations du système physique le système d'équations est le suivant:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p^o - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f} \\ k \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = -k \nabla T^o - \Phi \end{cases}$$

La première relation remplace la loi de Cauchy. Ce qu'expriment ces égalités est l'équilibre mécanique: toutes les contraintes qui ont conduit le système physique à un état décrit par ces équations ont été accumulées dans la pression d'équilibre  $p^o$  et dans la température d'équilibre  $T^o$ .

En déséquilibre mécanique et à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement  $\rho \mathbf{V}$  et du flux  $\Phi$  ainsi que des expressions des potentiels  $p, \rho, T$ , on arrive à un système complet, autonome, sans loi d'état, où toutes les propriétés thermodynamiques  $\chi_T, \beta, c_v$ , et de transport  $\mu$  et  $k$  sont connues.

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \{p^o - dt \psi_{VV} \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \psi_{V\Phi} \nabla \cdot \Phi - dt \psi_{Vq} q - dt \psi_{V\phi} \phi\} - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f} + \sigma \kappa \nabla \xi \\ k \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = -k \nabla \{T^o - dt \psi_{\Phi V} \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \psi_{\Phi\Phi} \nabla \cdot \Phi - dt \psi_{\Phi q} q - dt \psi_{\Phi\phi} \phi\} - \Phi + \frac{k L}{c_p} \nabla \xi \\ p = p^o - dt \left( \frac{1}{\chi_T} + \frac{\beta^2 T}{\rho c_v \chi_T^2} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \left( \frac{\beta}{\rho c_v \chi_T} \right) \nabla \cdot \Phi + dt \frac{\beta q}{\rho c_v \chi_T} + dt \frac{\beta \phi}{\rho c_v \chi_T} \\ T = T^o - dt \left( \frac{\beta T}{\rho c_v \chi_T} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} - dt \left( \frac{1}{\rho c_v} \right) \nabla \cdot \Phi + dt \frac{q}{\rho c_v} + dt \frac{\phi}{\rho c_v} \\ \rho = \rho^o e^{-dt \nabla \cdot \mathbf{V}} \end{cases}$$

Il est à noter que le nombre d'équations est bien égal au nombre d'inconnues.

La loi d'état n'est pas utile, elle ne contient aucune information supplémentaire qui n'est présente parmi les coefficients thermodynamiques. Elle a par contre l'inconvénient majeur de lier inutilement les potentiels  $p, \rho, T$  qui n'ont aucune raison de varier suivant cette contrainte. Dans le cas où elle est utilisée elle conduit à la perte d'une des propriétés de conservativité de la masse ou de l'énergie, généralement celle de la masse.

L'abandon de l'hypothèse de Milieu Continu et de celle de l'Equilibre Thermodynamique Local conduit à un système d'équations dont la forme, similaire à celles des équations locales de Navier Stokes ne doit pas faire oublier qu'il s'agit d'équations portant sur des quantités discrètes. Il est bien sûr possible de faire évoluer le volume discret vers zéro de manière homothétique tout en restant à une échelle supérieure à celle du libre parcours moyen des molécules. Il n'en reste pas moins vrai que les équations de la MMC et de la MMD sont formellement différentes.

### 4.1.1 Conséquences

#### Reconstruction d'un tenseur des contraintes

*En Mécanique des Milieux Continus le principal intérêt de la formulation de la contrainte par l'introduction d'un tenseur du second ordre est de pouvoir aisément transformer l'intégrale de surface sur  $\Sigma$  en une intégrale de volume sur  $\Omega$  à l'aide de la formule d'Ostrogradski ou théorème de la divergence. La justification de ce choix capital est associée à la notion même de milieu continu, où toutes les quantités doivent être définies en un point de l'espace.*

Adoptons une démarche inverse et reconstruisons un tenseur des contraintes  $\sigma$  pour un fluide newtonien à partir des éléments établis précédemment. L'écriture vectorielle de la contrainte en une composante normale et une composante tangentielle est préférable, au moins pour un fluide, car elle conceptualise des notions qui ont une réalité physique plus abordable comme le rotationnel ou le gradient. La forme divergentielle des équations de conservation n'est d'ailleurs pas à généraliser car elle correspond à une réduction de l'ordre de la forme  $k$ -linéaire en algèbre extérieure et physiquement à une perte d'information. Reprenons toutefois cette notion de tenseur laissée de côté jusqu'à présent et ré-introduisons-la sous la forme:

$$\sigma = -p^o \mathbf{I} + \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} + 2 \mu \Omega$$

où  $dt$  est une constante de temps et  $\chi_T$  est le coefficient de compressibilité du fluide.

Ce tenseur des contraintes n'est ni symétrique ni antisymétrique, il comprend toutes ses composantes et comme nous l'avons vu les seules contraintes associées aux coefficients  $\chi_T$  et  $\mu$  sont les suivantes:

$$\frac{dt}{\chi_T} \geq 0 \quad \mu \geq 0$$

Les trois termes de l'expression du tenseur correspondent à des aspects physiques très différents. Le terme en pression  $p^o$  est l'accumulateur des contraintes dues aux différents déséquilibres qui ont précédés l'instant observé. Ces déséquilibres thermodynamiques peuvent être générés par bien des effets, flux thermiques, transferts massiques, effets capillaires, etc. Même si ce tenseur des contraintes n'intègre pas ceux-ci ils sont quand même accumulés dans la pression d'équilibre  $p^o$ .

Le second terme est lié au déséquilibre mécanique dus aux effets de compression; s'ils sont différenciés des autres déséquilibres c'est en référence au tenseur de Cauchy et parce que la vitesse y apparait explicitement. Le coefficient de compressibilité est une propriété dont l'interprétation est incontestable et qui peut être mesurée précisément que le milieu soit solide, liquide ou gazeux. Le fait que le temps apparaisse explicitement dans ce terme montre bien que le déséquilibre lié aux effets de compression n'agit que pendant une constante de temps finie et courte. Aux temps longs le transfert se fait vers la pression pour tendre vers l'équilibre mécanique. Par exemple une masse d'air dans une cavité fermée soumise de manière instantanée à un champ de gravité va osciller verticalement quelques instants avant l'installation d'un gradient de pression hydrostatique qui équilibre son poids, la vitesse devient rapidement nulle.

*Le tenseur de Cauchy fait bien apparaitre un terme de type  $\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}$  mais la notion de temps y est absente. De plus  $\lambda$  n'est pas mesurable facilement et les valeurs obtenues pour un même fluide sont très différentes. On comprend bien pourquoi maintenant, les valeurs dépendent du principe de la mesure, généralement déduite de l'absorption du son.*

Le troisième terme de cette expression exprime les échanges de quantité de mouvement au sein du fluide par viscosité. Cette viscosité de cisaillement est parfaitement mesurable car elle est indépendante du temps. Ce terme intègre bien sûr non seulement la rotation du fluide mais aussi

sa déformation. Ce terme visqueux est radicalement différent de celui du tenseur de Cauchy: là où on trouvait le tenseur des taux de déformations  $\mathbf{D}$  on a maintenant le tenseur des taux de rotation  $\mathbf{\Omega}$ .

La fonction de dissipation peut être elle-même revue en y intégrant le terme de compressibilité:

$$\phi = \frac{dt}{\chi_T} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \mu \mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}$$

La conséquence de la présence du premier terme est importante pour des phénomènes rapides comme les ondes de choc par exemple. En effet la divergence de la vitesse au sein de l'onde de choc est extrêmement importante et, compte tenu de la très faible constante de temps de la traversée du fluide, la production d'entropie y est aussi importante. Ce terme est quasiment négligeable dans tout le reste de l'écoulement. Le déficit de variation de l'énergie interne pour la modélisation des ondes de choc pourrait être expliqué par la notion introduite ici.

### Écoulement incompressible

Un écoulement incompressible est défini par  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  mais le terme correspondant dans le modèle proposé ne doit pas être purement et simplement supprimé. Le produit  $dt/\chi_T \nabla \cdot \mathbf{V}$  est d'ordre de grandeur des autres termes de l'équation du mouvement. Si l'on souhaite avoir  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  alors il faut adopter une valeur de  $\chi_T$  très faible. Dans ce cas le champ de vitesse est directement à une divergence proche de zéro mais le produit  $dt/\chi_T \nabla \cdot \mathbf{V}$  permet de remonter la pression de l'équilibre exactement [11].

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left( p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{f} \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases}$$

On perçoit le rôle de la constante de temps sur les effets compressibles: même pour des liquides peu compressibles, les effets de compressibilité deviennent importants à très petite constante de temps. La propagation d'ondes sonores dans l'eau est complètement reproduite par ce système d'équations.

### Comportement solide

Un comportement rigidifiant est traditionnellement traduit par un tenseur des taux de déformation nul,  $\mathbf{D} = 0$  soit:

$$2 \mu \mathbf{D} = 2 \mu \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}) = 0$$

Pour décrire une interaction entre un milieu fluide ou solide élastique et un milieu rigide la satisfaction de cette contrainte est loin d'être aisée. Dans une approche de milieu continu la localisation des gradients des vitesses exige une reconstruction délicate pour prolonger la définition au point considéré  $P$ . De plus un point de l'interface appartient à quel milieu? Fluide, solide ou un mélange des deux? Ces questions sont récurrentes lorsque l'on s'intéresse à des couplages multiphysiques.

L'approche discrète permet de lever toute ambiguïté, la condition à l'interface entre le solide ① et le fluide ② sur la figure 15 s'écrit simplement:

$$\mu_1 \nabla \times \mathbf{V}_1 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2$$

Si l'on veut dire que le milieu ① est solide alors la condition s'écrit sur la viscosité du solide  $\mu_s = \mu_1$ :

$$\mu_1 \rightarrow \infty$$

Cette valeur  $\mu_1$  dans le solide est parfaitement définie dans la mesure où elle s'applique sur toute la facette.

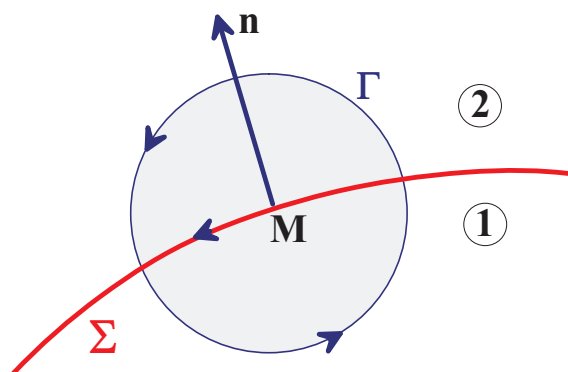


Figure 15: Condition à l'interface entre un solide ① et un fluide ②.

Pratiquement il s'agit d'une méthode de pénalisation [5] développée et utilisée depuis 1984 pour traiter de problèmes couplés fluide-poreux ou fluide solide [20]. Une première formulation visant à pénaliser plusieurs parties du tenseur des contraintes affectées à des viscosités différentes a été présentée dans [10].

Il s'agit ici d'une extension de la formulation à la pénalisation directe de la viscosité en imposant la viscosité de cisaillement à une valeur définie. Comme  $\mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2$  est d'ordre de grandeur fini alors  $\mathbf{V}_1 \rightarrow 0$ . Cette formulation de la pénalisation est très robuste.

Dans le même esprit il est possible d'imposer une rotation d'une partie de l'espace en définissant le vecteur rotation  $\mathbf{\Omega}_0$  orthogonal au plan et une viscosité associée sur chacune des facettes du polyèdre concerné. La condition devient:

$$\mu_1 \mathbf{\Omega}_0 = \mu_2 \nabla \times \mathbf{V}_2$$

Le fluide libre sera ainsi entraîné par viscosité.

De même il est possible de définir une zone de l'espace comme un fluide parfait, il suffit de réduire à zéro la viscosité de la facette pour le que le fluide du voisinage soit soumise à une condition de contrainte nulle  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Enfin la notion de couplage fluide-milieu poreux peut être retrouvée en introduisant un terme de Darcy dans l'équation du mouvement:

$$-\frac{\mu}{\mathbf{K}} \mathbf{V}$$

où  $\mathbf{K}$  est le tenseur de perméabilité dont les composantes sont associées aux segments du polyèdre et la viscosité  $\mu$  aux facettes.

### Écoulement de fluide parfait

Un fluide parfait ne transfère pas de quantité de mouvement par diffusion mécanique ( $\mu = 0$ ) et ne transfère pas de chaleur ( $k = 0$ ). En l'absence d'autres forces extérieures l'équation d'Euler

des fluides parfait deviendrait:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left( p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \end{array} \right.$$

Le fluide n'en reste pas moins compressible ce qui justifierait s'il en était besoin la présence de  $dt/\chi T$ . Là encore le vocable de viscosité de compression issu du tenseur de Cauchy associé au terme  $\nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V})$  est inadapté.

On remarque qu'en régime stationnaire que le système devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left( p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{\tau}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \\ p = p^o - \frac{\tau}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \end{array} \right.$$

où  $\tau$  est devient un paramètre de pénalisation permettant l'accès à la solution stationnaire. Comme le second membre de l'équation du mouvement est un gradient le premier membre ne peut résulter que de l'association d'un autre gradient et d'un potentiel vecteur  $\Psi$ . Si nous appelons  $\Phi$  le potentiel scalaire comprenant tous les termes de type gradient nous avons l'égalité:

$$\nabla \Phi = \nabla \times \Psi$$

Cette égalité entre le gradient d'un potentiel scalaire et d'un rotationnel d'un potentiel vecteur conduit, en prenant la divergence et le rotationnel des deux membres de la relation précédente, aux deux égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \nabla \times \nabla \times \Psi = 0 \end{array} \right.$$

En posant  $\Psi = \nabla \times \mathbf{U}$  comme un champ solénoïdal, la seconde expression s'écrit aussi

$$\nabla (\nabla \cdot \Psi) - \nabla^2 \Psi = 0$$

On trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \nabla^2 \Psi = 0 \end{array} \right.$$

Les deux potentiels vérifient les relations de Cauchy et conduisent à l'existence d'une fonction holomorphe. En l'absence de singularité dans le domaine, le théorème de Liouville montre que cette fonction est une constante.

Enfin lorsque l'écoulement est irrotationnel et incompressible on retrouve la seconde loi de Bernouilli:

$$p + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} = Cte$$

## Turbulence

Les conséquences des formes des deux viscosités pour la turbulence peuvent être importantes pour deux raisons. La viscosité de compression  $dt/\chi_T$  induit tout d'abord un équilibrage entre la pression et les perturbations dues à la turbulence. Les fluctuations locales des petits tourbillons et les transformations très rapides de l'énergie cinétique en pression nécessiterait de prendre tenir compte des effets compressibles au sein des écoulements turbulents. La notion de pression turbulente basée sur la trace du tenseur des contraintes et la viscosité de cisaillement reste une démarche stationnaire et donc peu représentative de la réalité.

Pour une modélisation statistique les contraintes de Reynolds sont modélisées par une relation linéaire entre le tenseur des contraintes sur les fluctuations de vitesse et le tenseur des taux de déformation des vitesses moyennées.

$$-\rho \left( \overline{v' \otimes v'} - \frac{2}{3} k \mathbf{I} \right) = \mu_t \left( \overline{\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V}} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \overline{\mathbf{V}} \mathbf{I} \right)$$

Notons que le terme isotrope d'énergie cinétique turbulente introduit dans cette relation de Boussinesq attribue en fait à l'énergie cinétique turbulente le rôle d'une pression turbulente due aux mouvements d'agitation.

Pour le modèle proposé le terme visqueux  $\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V})$  de l'équation du mouvement pourrait être modifiée pour y associer une viscosité turbulente  $\mu_t$  sous la forme  $\nabla \times ((\mu + \mu_t) \nabla \times \mathbf{V})$ .

De même pour une modélisation de la turbulence par une approche des grandes échelles (LES), la quasi-totalité des modèles existants font appel au concept de viscosité turbulente, les modèles se différenciant en fait essentiellement par la manière de formuler cette viscosité:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{ij} \delta_{ij} = -\nu_{sm} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

Dans le modèle développé ici, la viscosité de sous-maille pourrait être définie à partir d'un taux de dissipation basé sur le tenseur de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$ ; on sait d'ailleurs quel est le rôle primordial joué par l'interaction des tourbillons en rotation pour les écoulements turbulents.

## 4.2 Couplage fluide-ondes

La représentation d'ondes linéaires et non linéaires est implicitement et directement intégrée dans la formulation proposée. Une onde correspond simplement à un déplacement ou à une vitesse imposée à un fluide ou un solide et, à petite constante de temps, l'onde se propage dans le milieu. En solide les ondes longitudinales et transversales se propagent à des vitesses différentes tandis que pour les milieux à comportement fluide les seules les ondes longitudinales de compression ou de détente se propagent avec une vitesse du son égale avec la célérité:

$$c = \sqrt{\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s}$$

Pour une évolution isentropique le coefficient  $\psi_{VV}$  du système d'équations sans flux thermique s'écrit de manière générale:

$$\psi_{VV} = \left( \frac{1}{\chi_T} + \frac{\beta^2 T}{\rho c_v \chi_T^2} \right)$$

Le premier terme correspond à l'augmentation de pression due aux effets mécaniques, détente ou compression, le second terme est la surpression due à l'augmentation de la température dans l'évolution réversible isentropique.



Comme les constantes de temps relatives aux ondes sont petites, d'ordre de  $L/c$  où  $L$  est une distance caractéristique, les phénomènes sont adiabatiques voire isentropique sans la présence d'irrégularités majeures comme par exemple des discontinuités de type ondes de chocs.

Si l'on écrit, pour un gaz parfait, la contribution mécanique du retour à l'équilibre:

$$\frac{\gamma dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V}$$

on perçoit le rôle joué par chacun des termes de cette expression qui est, pour le terme complet, d'ordre de grandeur de la perturbation initiée par les autres termes de l'équation du mouvement, c'est à dire d'ordre un. La notion d'incompressibilité elle-même est attachée à la constante de temps  $dt$ : tout milieu est compressible à très petite constante de temps.

On peut noter qu'il n'est pas nécessaire de passer dans une formulation eulérienne pour rendre compte de la propagation d'ondes dans in milieu.

L'ensemble des phénomènes, écoulement et ondes, sont représentées par un système d'équations simplifié qui s'écrit:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left( p^o - \frac{\gamma dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{\gamma dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o e^{-dt \nabla \cdot \mathbf{V}} \end{cases}$$

Il est bien sûr possible de remonter à la température, à l'enthalpie, ou à l'énergie interne à partir des variables indépendantes de ce système mais ce n'est pas une nécessité sauf celle de tenir compte des variations des propriétés thermodynamiques en fonction de la température.

De nombreuses applications de ce système même d'équations ont permis de rendre de phénomènes de propagation pour les temps courts, qui, une fois dissipés, sont remplacés par des écoulements à vitesses imposées.

#### 4.2.1 Onde de choc droite

Traditionnellement ce cas test correspondant à l'un des problèmes de Riemann est résolu numériquement à partir d'un système d'équations écrites en variables conservatives par un schéma approprié (Lax-Wendroff, Osher, Van Leer, Roe, Mc Cormack, Garlerkin discontinu, etc.). Le modèle discret non conservatif est testé ici sur un cas de discontinuité de type choc.



Figure 16: Champ de pression dans le tube à choc pour des conditions amont et aval :  $p_L$  et  $p_R$ ; on schématise la formation d'une onde de raréfaction à gauche et d'une onde de choc à droite.

Le cas un problème 1D choisi correspond à un canal fermé aux deux extrémités est séparé en deux par un opercule. La pression en aval est maintenue à la pression  $p_R$  tandis que la pression en amont est augmentée jusqu'à la rupture du diaphragme. La pression est alors égale à  $p_L$ .

La figure 16 montre le schéma du tube à choc, les conditions initiales sont les suivantes:  $p_L = 1, \rho_L = 1, p_R = 0.1, \rho_R = 0.125, u_L = u_R = 0$ .

La figure 17 montre le résultat obtenu avec le modèle. Les variations de la vitesse numériques et théoriques sont données pour un temps de  $t = 0.2$ .

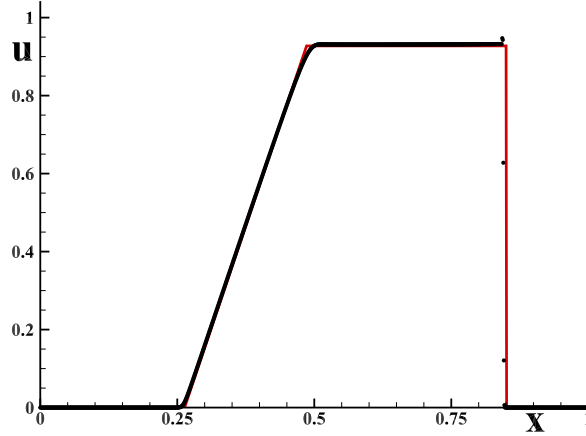


Figure 17: Evolutions de la vitesse suivant l'axe du tube. Conditions amont-aval :  $p_L = 1$ ,  $\rho_L = 1$ ,  $p_R = 0.1$ ,  $\rho_R = 0.125$ ,  $u_L = u_R = 0$ ; pas de temps  $\delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ , solution à  $t = 0.2$ ; en trait rouge plein : solution théorique et points en noir : résultat du modèle.

Le modèle présenté permet de dissocier les influences des différents effets thermodynamiques sur l'évolution de la pression de la phase de transport eulérienne. Notamment l'évolution de la divergence de la vitesse entre les temps  $t$  et  $t + dt$  permet de remonter la pression implicitement lors de la résolution de l'équation de Navier-Stokes. De même la masse volumique et la température sont évaluées pendant la phase lagrangienne.

### 4.3 Elasticité linéaire

L'essentiel de la présentation du modèle est consacrée au fluide newtonien mais les démonstrations sur les notions de milieu discret qui précèdent sont applicables à la mécanique des milieux déformables. Les cas particuliers des milieux non déformables ou incompressibles étant traités ici comme le passage à la limite de propriétés de certaines propriétés physiques.

Reprenons l'expression du tenseur des contraintes sous sa forme générale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^o + \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + O(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^o$  est le tenseur des contraintes à l'état neutre,  $\mathbf{C}$  est le tenseur élastique d'ordre 4 et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur des déformations.

La loi linéarisée est appelée loi de Hooke. Pour un milieu isotrope la loi de Hooke dans l'hypothèse des petites déformations se réduit à une expression où apparaît uniquement deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$ , les coefficients de Lamé.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^o + \lambda \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{I} + 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur déplacement et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des déformations.

On introduit quelquefois le module élastique

$$k = \lambda + \frac{2}{3} \mu$$

ou elastic bulk modulus.

Calculons la divergence du tenseur des contraintes:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\lambda \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{I} + 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{U}) + 2 \mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + 2 \nabla \mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \nabla \cdot \mathbf{U} \nabla \lambda + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla^t \mathbf{U}) + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla^t \mathbf{U}) \\
&= (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{U} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla^t \mathbf{U}) \\
&= (\lambda + 2 \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{U} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla^t \mathbf{U})
\end{aligned}$$

L'équation de l'élasticité linéaire pour un milieu solide isotrope appelée équation de Navier-Cauchy s'écrit:

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = (\lambda + 2 \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{U} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla^t \mathbf{U}) + \mathbf{f}$$

Ce n'est que pour des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  constants on retrouverait une forme simplifiée

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = (\lambda + 2 \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} + \mathbf{f}$$

Cette formulation est encore discutable car le coefficient de cisaillement  $\mu$  n'a aucune raison physique d'affecter les effets de compressibilité.

Le modèle discret donnerait quant à lui:

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = \nabla \left( \frac{1}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{U} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{U}) + \mathbf{f}$$

où  $1/\chi$  remplace  $(\lambda + 2 \mu)$  où  $\chi$  est le module de compression. Cette forme se différencie de celle trouvée classiquement en élasticité linéaire mais ce n'est pas la physique qui est différente ce sont les définitions des coefficients.

Même en gardant la même définition du tenseur des contraintes on constate que les deux expressions sont différentes. L'hypothèse de milieu continu conduit à la définition de quantités physiques locales intégrées au sein d'opérateurs différentiels. L'approche discrète permet quant à elle de sauvegarder la partition entre gradient et rotationnel.

### 4.3.1 Cas d'un glacier de montagne

#### Cas d'une plaque élastique soumise à son propre poids

Considérons dans un premier temps une plaque d'épaisseur  $H$  d'un matériau solide isotrope et homogène posé sur un plan incliné d'un angle  $\delta$  par rapport à l'horizontale. Le schéma 18 montre le système d'axe  $(x, z)$  choisi pour le calcul des contraintes et déplacements de la plaque supposée infinie dans les directions  $x$  et  $y$ . Compte tenu des hypothèses et approximations en élastostatique le vecteur déplacement s'écrit:  $\mathbf{U} = u(z) \mathbf{e}_x + w(z) \mathbf{e}_z$ .

Les conditions aux limites satisfont aux contraintes:

$$\begin{cases} u = w = 0 & \text{en } z = 0 \\ \tau_{xz} = 0, \tau_{zz} = 0 & \text{en } z = H \end{cases}$$

Les déformations  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yz} = 0$ , les deux autres,  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zz}$  sont:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{du}{dz}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz}$$

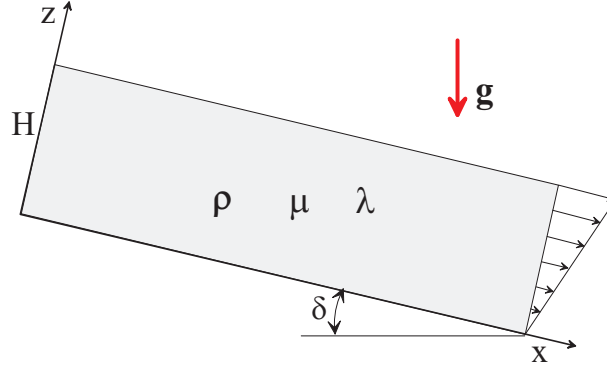


Figure 18: Schéma de principe d'une plaque soumise à son poids.

Les composantes des contraintes s'écrivent:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = 2 \mu \varepsilon_{xz} = \mu \frac{du}{dz} \\ \tau_{zz} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{U} + 2 \mu \varepsilon_{zz} = (\lambda + 2 \mu) \frac{dw}{dz} \end{cases}$$

en tenant compte du calcul de  $\nabla \cdot \mathbf{U}$ . Les conditions aux limites se réduisent à  $du/dz = 0$  et  $dw = 0$  en  $z = H$ .

Compte tenu des hypothèses les équations de Navier-Cauchy deviennent:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\rho g \sin \delta}{\mu} = 0 \\ \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{\rho g \cos \delta}{(\lambda + 2 \mu)} = 0 \end{cases}$$

En tenant compte des conditions aux limites pour calculer les constantes d'intégration on trouve la solution en déplacements:

$$\begin{cases} u(z) = \frac{\rho g H \sin \delta}{\mu} \left( z - \frac{z^2}{H^2} \right) \\ w(z) = \frac{\rho g H \cos \delta}{(\lambda + 2 \mu)} \left( z - \frac{z^2}{H^2} \right) \end{cases}$$

On vérifiera que la composante sur  $y$  de l'équation de Navier-Cauchy est identiquement satisfaite. Les contraintes déduites sont:

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \tau_{yy} = \lambda \frac{dw}{dz} = -\frac{\lambda}{(\lambda + 2 \mu)} \rho g H \cos \delta \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \\ \tau_{zz} = \tau_{yy} = (\lambda + 2 \mu) \frac{dw}{dz} = -\rho g H \cos \delta \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \\ \tau_{xz} = \mu \frac{du}{dz} = \rho g H \sin \delta \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Le déplacement de la plaque correspond à un cisaillement suivant la direction  $x$  et une compression suivant  $z$ .

Malgré la compression de la plaque sous l'action de son propre poids, la masse volumique a été considérée comme constante ce qui a permis d'obtenir une solution simple au problème posé. L'équation de Navier-Cauchy à coefficients constant serait donc inadaptée à traiter le problème en tenant compte des variations de masse volumique.

### Cas d'un fluide newtonien

Reprenons le cas précédent pour un fluide newtonien placé dans les mêmes conditions pour un écoulement incompressible de type Stokes. Le fluide, un liquide, s'écoule avec une vitesse  $\mathbf{V} = u(z) \mathbf{e}_x$  le long de la paroi inclinée par gravité avec une surface libre. Si on considère que le gaz au dessus du liquide n'exerce aucune contrainte sur celui-ci les conditions aux limites sur la composante  $u$  sont les mêmes que pour un solide. La masse volumique est égale à  $\rho$  considérée comme une constante et une viscosité de cisaillement  $\mu$  constante aussi.

L'équation de Navier-Stokes et les conditions aux limites se réduisent à

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\rho g \sin \delta}{\mu} = 0 \\ u = 0 \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{du}{dz} = 0 \quad \text{en } z = H \end{cases}$$

La solution de ce problème conduit à la solution

$$u(z) = \frac{\rho g H \sin \delta}{\mu} \left( z - \frac{z^2}{H^2} \right)$$

Pour un liquide compressible le mouvement du liquide serait décrit par la solution "solide" mais où  $u(z)$  serait la vitesse du liquide newtonien et la composante  $w(z)$  serait le déplacement de celui-ci. Comme dans un verre l'eau se comprime vers le fond sous l'effet de la gravité puis la vitesse devient nulle comme dans un solide une fois l'équilibre mécanique atteint.

Le rôle joué par les effets de compression et des effets de cisaillement est fondamentalement différent en fluide ou en solide. La compression d'un fluide ou d'un solide est intimement liée à la notion de temps ou plutôt de constante de temps; aux temps longs tout milieu se comporte comme étant incompressible. Au contraire le cisaillement est indépendant du temps. Pour ces deux effets l'équilibre ne peut être atteint que s'il existe un accumulateur représenté par un tenseur des contraintes résiduelles ou tenseur d'équilibre.

### Cas du glacier

La glace d'eau se comporte comme un fluide newtonien à grandes constantes de temps; le glacier s'écoule et la vitesse d'écoulement  $\mathbf{V} = u(z) \mathbf{e}_x$  serait celle d'un fluide classique explicitée plus haut.

La rupture d'un élément du glacier ou un glissement instantané conduirait à faire réagir la glace comme un solide et à propager des ondes longitudinales et transversales dans tout le glacier.

Ces comportements différents à petites ou à grandes constantes de temps ne sont pas inclus dans les équations de Navier-Cauchy ou de Navier-Stokes. La notion de temps est absente des coefficients élastiques et des coefficients de viscosité. Physiquement pourtant un objet impactant une surface d'eau à petite ou à grandes vitesse ne subirait pas les mêmes effets. A grande vitesse, donc à faible constante de temps, l'eau se comporte plutôt comme un solide.

Le problème posé d'un milieu soumis à son propre poids, fluide ou solide, compressible ou incompressible, peut être traité directement avec un système simplifié extrait du modèle global; il s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left( p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o e^{-dt \nabla \cdot \mathbf{V}} \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{V}$  est la vitesse ou la dérivée particulière du déplacement  $\mathbf{V} = d\mathbf{U}/dt$ . La masse volumique et la pression sont calculés et permettent de déterminer le coefficient de compressibilité  $\chi_T$  variable en effet; un fluide ou un solide est d'autant moins compressible qu'il est comprimé. Si le déplacement est incompressible ce n'est pas  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  qui est nul, c'est le coefficient de compressibilité qui tend vers l'infini, le produit de  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  par  $1/\chi_T$  étant d'ordre de grandeur des autres termes de l'équation.

Dans le cas où les coefficients  $\chi_T$  et  $\mu$  sont constants, la masse volumique est une constante et on peut retrouver la solution de la plaque solide soumise à propre poids.

Seule la solution du problème physique, la même dans tous les cas, possède une réalité mais si l'on souhaite comparer les modèles, la seule différence viendrait de la définition du coefficient  $\lambda$  qui devrait satisfaire la relation:

$$\lambda + 2\mu = \frac{dt}{\chi_T}$$

Si  $\mu$  et  $\chi_T$  ont des définitions incontestables et sont parfaitement mesurables on constate que  $\lambda$  n'est pas intrinsèque au milieu.

Comme  $dt/\chi_T$  est supérieur ou égal à zéro on tire de cette relation que

$$\lambda + 2\mu \geq 0$$

Le principe de Clausius-Duhem issu du second principe de la thermodynamique serait violé si  $\lambda$  avait la même définition qu'en mécanique des milieux continus. Mais le modèle discret présenté n'en fait pas référence, seuls  $\mu$  et  $\chi_T$  sont nécessaires.

### 4.3.2 Nécessité d'un vecteur d'accumulation

L'équation de Navier-Cauchy ne permet pas de rendre compte telle quelle d'un état neutre différent de zéro. Le tenseur des contraintes

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^o + \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

fait apparaître une contrainte de l'état neutre ou résiduel  $\boldsymbol{\sigma}^o$  qui représente la restitution de l'énergie emmagasinée dans le solide par compression ou cisaillement par des déplacements longitudinaux ou transversaux.

Nous remplacerons ce tenseur que nous appellerons d'équilibre (à l'instant 0 du système en coordonnées lagrangiennes) par une contrainte  $\mathbf{T}^o$  soit:

$$\mathbf{T}^o = -p^o \mathbf{t} - \boldsymbol{\omega}^o$$

$p^o$  est l'accumulateur des contraintes de compression et s'assimile à la pression d'équilibre en fluide tandis que le vecteur  $\boldsymbol{\omega}^o$  représente les contraintes mécaniques emmagasinées dans un solide

élastique qui réagit après l'application de contraintes sur le matériau. Par exemple la relaxation d'une contrainte de cisaillement dans un solide élastique génère des ondes longitudinales au sein de celui-ci. En fluide l'accumulation est seulement représentée par la pression d'équilibre  $p^o$ .

#### 4.4 Couplage fluide-structure

Si l'on reste dans l'hypothèse des petites déformations de milieux isotropes, l'analogie entre vitesses et déplacements, déformations et taux de déformation, est évidente. Il est alors possible de traiter les différents milieux, fluides ou solides avec un même système d'équations dont la solution serait la vitesse  $\mathbf{V}$ .

Les deux d'équations vectorielles à résoudre et la remontée des potentiels s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left( p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left( p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times (\boldsymbol{\omega}^o + \mu_e \nabla \times \mathbf{U}) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o + \mu_e \nabla \times \mathbf{U} \\ \rho = \rho^o e^{-dt \nabla \cdot \mathbf{V}} \end{array} \right.$$

Le déplacement pourra être obtenu à partir de la vitesse  $\mathbf{U} = dt \mathbf{V}$ .

Le module de cisaillement  $\mu_e$  pour le solide est à calculer avec les propriétés habituellement utilisées en mécanique du solide, module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ .

Ce couplage permet la résolution simultanée des champs de vitesse et de déplacements dans un domaine des solides de propriétés différentes, des fluides de propriétés thermodynamiques variées, des transferts thermiques entre les différents milieux etc. La cohérence des équations et des conditions aux limites permet ce couplage monolithique.

## 4.5 Extension à la simulation numérique

La formulation issue de la Mécanique des Milieux Discrets est directement applicable à la résolution numérique de problèmes fluide ou solide sans aucune discrétisation supplémentaire. Il suffit de définir un maillage sur la base des topologies admissibles, des polygones quelconques en 2D ou des polyèdres à nombres de facettes quelconques et de créer des opérateurs différentiels, gradient, rotationnel, divergence sur cette base.

La méthodologie numérique associée correspond à l'extension de la méthode Marker And Cell aux maillages non structurés. Dans cette méthode les vecteurs ne sont pas connus par leurs trois composantes habituelles mais par l'existence des seules composantes dans un maillage dit décalé.

L'écoulement des fluides, liquide et gaz, ou le déplacement de solides peut être représenté par la résolution des équations du mouvement par une méthode DOC (Discrete Operator Calculus) proche des méthodes issues du calcul extérieur (Discrete Exterior Calculus); voir par exemple A.N. Hirani[19] ou M. Desbrun[27] et K. Polthier[24] pour la formulation et des applications à la visualisation graphique.

Bien d'autres aspects de ces techniques ont été utilisés dans le domaine de la résolution des équations de Maxwell par A. Bossavit[8] et des généralisations à d'autres physiques ont été explorées par E. Tonti[28] ou C. Mattiussi[23]. Le lecteur trouvera sous l'acronyme DEC de nombreuses publications mettant en oeuvre cette approche.

Cette méthode, ni volume finis, ni éléments finis, possède les propriétés remarquables écrites ci-dessous; celles-ci sont satisfaites exactement y compris pour des maillages très distordus.

$$\begin{cases} \nabla_h \times \nabla_h f = 0_h \\ \nabla_h \cdot \nabla_h \times \mathbf{V} = 0_h \end{cases}$$

La figure 19 montre les erreurs obtenues, à la précision machine, sur la satisfaction de ces identités pour deux fonctions continues quelconques.

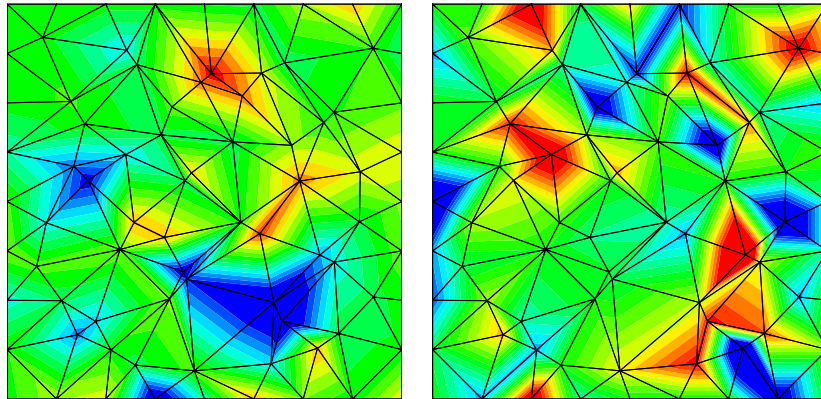


Figure 19:  $\nabla_h \times \nabla_h \Phi = \pm 1.710^{-15}$  and  $\nabla_h \cdot \nabla_h \times \Psi = \pm 1.410^{-14}$  pour un maillage de Delaunay aléatoire et  $\Phi$  et  $\Psi \cdot \mathbf{e}_z$ , deux fonctions non linéaires.

La formulation issue de la Mécanique des Milieux Discrets a été mise en oeuvre directement dans le code de calcul, Aquilon®. De nombreux cas tests ont été réalisés, ils ont été intégrés dans un document de validation du modèle disponible sur demande auprès de l'auteur: [calt@ipb.fr](mailto:calt@ipb.fr).



## 5 Conclusions

Cet exposé sur la Mécanique des Milieux Discrets est une tentative pour améliorer la cohérence entre différents concepts de la Mécanique et de la Thermodynamique. La remise en cause de certains résultats anciens n'est pas une fin en soi, elle correspond à la nécessité de revisiter des concepts sous des angles d'approches différents. L'évolution de certaines disciplines comme la géométrie différentielle et celle des méthodologies numériques associées permettent de penser que les formulations mathématiques des équations de la Mécanique peuvent être adaptées à ce contexte. De ce point de vue le modèle présenté est en conformité avec des méthodologies numériques récentes comme le calcul discret extérieur ou les méthodes basées sur la similitude de propriétés des opérateurs différentiels continus et discrets.

L'apport de cette théorie peut se résumer en quelques points:

- l'abandon de la notion de milieu continu pour celle de milieu discret,
- l'abandon de l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local et de la loi d'état,
- l'abandon des formulations des équations en termes de vecteur vitesse, déplacement ou de tenseur locaux au profit de leurs seules projections sur les segments du volume,
- la partition entre grandeurs vectorielles (composantes), vitesse, déplacement ou flux et potentiels scalaires,
- l'utilisation de deux paramètres physiques positifs, la viscosité de cisaillement et le coefficient de compressibilité tous deux parfaitement mesurables,
- la définition d'un facteur de compression dépendant du temps,
- la décomposition formelle de Hodge-Helmholtz de la quantité de mouvement en un gradient d'un potentiel scalaire et un rotationnel d'un potentiel vecteur,
- l'intégration simple de discontinuités dans les équations de conservation vectorielles,
- la représentation de physiques très différentes par un même modèle,
- les propriétés algébriques exceptionnelles des opérateurs  $\nabla(\nabla \cdot)$  et  $\nabla \times (\nabla \times \cdot)$ ,

Ces différences formelles importantes n'engendrent que des modifications mineures entre les résultats obtenus avec l'équation de Navier-Stokes et ceux issus de ce modèle. Dans les quelques exemples théoriques élémentaires présentés les résultats sont identiques. La théorie décrite ici conduit à une modélisation des différents termes beaucoup plus intuitive; par exemple, en incompressible, calculer la divergence d'un tenseur en MMC ou le rotationnel d'un rotationnel en MMD ne représente pas la même cohérence physique.

La séparation formelle de  $\rho\gamma$  de l'équation du mouvement en un gradient et un rotationnel est l'un des résultats importants de cet exposé. En l'absence d'une décomposition préalable des différents termes vectoriels c'est l'équation du mouvement elle-même, lors de sa résolution, qui se charge de séparer les deux parties de ce vecteur. Comme le mouvement n'est associé qu'à la contribution des termes en rotationnels il est alors préférable de cumuler les termes en gradients au sein du potentiel d'équilibre.

Enfin les liens entre équations de conservation et potentiels thermodynamiques ont été redéfinis. Le système d'équations devient de ce fait plus complexe mais intègre les différentes contraintes qui permettent de relever les potentiels en satisfaisant exactement les propriétés de conservation habituelles.

## References

- [1] E. Ahusborde, M. Azaiez and J.-P. Caltagirone, A primal formulation for the Helmholtz decomposition, *J. Comput. Phys.* **225**(1), 13-19, 2007.
- [2] Ph. Angot, J.P. Caltagirone and P. Fabrie, A fast vector penalty-projection method for incompressible multiphase flows –Navier-Stokes and Darcy problems, *Numerische Mathematik*, 2012 (submitted).
- [3] Ph. Angot, J.P. Caltagirone and P. Fabrie, A fast vector penalty-projection method for incompressible non-homogeneous or multiphase Navier-Stokes problems, *Applied Mathematics Letters* **25**(11), 1681–1688, 2012.
- [4] Ph. Angot, J.P. Caltagirone and P. Fabrie, Fast discrete Helmholtz-Hodge decompositions in bounded domains, *Applied Mathematics Letters*, **26**(4), 445–451, 2013.
- [5] E. Arquis, J.P. Caltagirone, Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle C.R. Acad. Sciences, **299**, II, 1, 1-4, 1984.
- [6] G.K. Batchelor, An Introduction to Fluid Mechanics, *Cambridge Univ. Press* , 1967.
- [7] H. Bathia, G. Norgard, V. Pascucci, P.T. Bremer, The Helmholtz-Hodge Decomposition - A Survey, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, ISSN: 1077-2626, DOI Bookmark: <http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/TVCG.2012.316>, 2012.
- [8] A. Bossavit, Computational Electromagnetism, Academic Press (San Diego), 1998.
- [9] J.P. Caltagirone, J. Breil, A vector projection method for solving the Navier-Stokes equations, C.R. Acad. Sciences, **327**(11), IIB, 1179-1184, 1999.
- [10] J.P. Caltagirone, S. Vincent, Sur une méthode de pénalisation tensorielle pour la résolution des équations de Navier-Stokes, *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences, série IIB*, **329**, 607-613, 2001.
- [11] J.P. Caltagirone, S. Vincent, C. Caruyer, A multiphase compressible model for the simulation of multiphase flows, *Computers and Fluids*, **50**, 1, pp 24-34, 2011.
- [12] J.P. Caltagirone, *Physique des Ecoulements Continus*, à paraitre, 2013.
- [13] A.J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *J. Comput. Phys.* **2**, 12-26, 1967.
- [14] A.J. Chorin and J.E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, third edition, Springer Verlag New-York, 1997.
- [15] J. Coirier et C. Nadot-Martin, *Mécanique des Milieux Continus*, 3 ème édition, Dunod, Paris, 2007.
- [16] F.M. Denaro, On the application of the Helmholtz-Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions, *Int. J. Numer. Methods*, **43**, 43-69, 2003.
- [17] P. Germain et P. Muller, Introduction à la Mécanique des Milieux Continus, *Masson éditions* 2ième édition, 1995.

- [18] J.L. Guermond, P.D. Minev and J. Shen, An overview of projection methods for incompressible flows, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **195**, 6011-6045, 2006.
- [19] A.N. Hirani. Discrete Exterior Calculus. PhD thesis, California Institute of Technology, May 2003.
- [20] K. Khadra, Ph. Angot, S. Parneix and J.-P. Caltagirone, Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations, *Int. J. Numer. Meth. in Fluids*, **34(8)**, 651-684, 2000.
- [21] H. Lamb, *Hydrodynamics, 6th edition, Dover, New York*, 1993.
- [22] L.D. Landau & E.M. Lifchitz, *Fluid Mechanics, Pergamon Press, London*, 1959.
- [23] C. Mattiussi, An Analysis of Finite Volume, Finite Element, and Finite Difference Methods Using Some Concepts from Algebraic Topology, *J. Comp. Physics*, **133**, 289-309, 1997.
- [24] K. Polthier, E. Preuß, Variational approach to vector field decomposition, *Scientific Visualization. In: Proceedings of Eurographics Workshop on Scientific Visualization. Springer Verlag*, 2000.
- [25] G.I. Taylor, *Scientific Papers, Cambridge University Press, Cambridge*, 1958.
- [26] R. Temam, Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. France* **98**, 115-152, 1968.
- [27] Y. Tong, S. Lombeyda, A. N. Hirani, and M. Desbrun. Discrete multiscale vector field decomposition. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, July 2003.
- [28] E. Tonti, The reason for analogies between physical theories, *Appl. Math. Modelling*, Vol 1, June 37, 1976.
- [29] C. Truesdell, *Introduction à la Mécanique Rationnelle des Milieux Continus, Masson, Paris*, 1974.
- [30] C. Truesdell and W. Noll: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, 602 pages. Springer-Verlag, 1965. Second Edition, 1992. Translation into Chinese, 2000. Third Edition, 2004.*