HAL
open science

Exemples de fibrés uniformes non homogènes sur P_n

Jean-Marc Drézet

To cite this version:

Jean-Marc Drézet. Exemples de fibrés uniformes non homogènes sur P_n. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 1980, 291 (2), pp.125-128. hal-00788255

HAL Id: hal-00788255

https://hal.science/hal-00788255

Submitted on 14 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EXEMPLES DE FIBRÉS UNIFORMES NON HOMOGÈNES SUR $\mathbb{P}_n$

JEAN–MARC DRÉZET

On donne ici des exemples de fibrés vectoriels uniformes non homogènes sur $\mathbb{P}_n$ de rang r, pour tout $r \geq 2n$.

Soit K un corps commutatif algébriquement clos. Tous les fibrés vectoriels considérés seront algébriques sur une variété algébrique sur K. Soient n un entier positif et V un K-espace vectoriel de dimension $n+1$. On note $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ le sous-fibré universel de rang 1 de $\mathbb{P}(V) \times V$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)^{\otimes -k}$ pour tout entier k. Rappelons que tout fibré en droites sur $\mathbb{P}(V)$ est isomorphe à un de ces fibrés.

Si $n = 1$, autrement dit si $\mathbb{P}(V)$ est une droite projective ℓ, on sait que tout fibré vectoriel E sur ℓ est isomorphe à une somme directe de fibrés en droites

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_\ell(a_i) \ ,$$

les a_i étant des entiers tels que $a_1 \geq \cdots \geq a_r$. De plus, la suite (a_i) est uniquement determinée. C'est le théorème de Grothendieck ([4] et [5]).

Si $n > 1$, soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$. À toute droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$ on peut associer une suite $(a_1^\ell, \ldots, a_r^\ell)$ décroissante d'entiers telle que

$$E_{|\ell} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_\ell(a_i^\ell) \ .$$

Le fibré E est dit *uniforme* si cette suite est indépendante de la droite ℓ, et on l'appelle dans ce cas le *type de décomposition de* E.

Un fibré vectoriel F sur $\mathbb{P}(V)$ est dit *homogène* si pour tout automorphisme σ de $\mathbb{P}(V)$, les fibrés vectoriels F et $\sigma^*(F)$ sont isomorphes. Il est clair qu'un fibré vectoriel homogène est uniforme. On peut alors se poser le problème suivant : quel est le plus grand entier $k(n)$ tel que tout fibré vectoriel uniforme de rang $r \leq k(n)$ sur $\mathbb{P}(V)$ soit aussi homogène ?

A. Van de Ven ([8]) et G. Elencwajg ([1] et [3]) ont prouvé que $k(2) = 3$. E. Sato ([6]), G. Elencwajg, A. Hirschowitz et M. Schneider ([2]) ont montré que $n \leq k(n) \leq 3n-2$. Plus récemment, P. Ellia a obtenu dans [7] que $k(n) \leq 2n$. Je me propose ici de montrer que $k(n) \leq 2n-1$. Plus précisement on a la :

Proposition : *Pour tout entier $r \geq 2n$, il existe un fibré vectoriel uniforme non homogène de rang r sur $\mathbb{P}(V)$, qui n'est pas somme directe de sous-fibrés vectoriels de rangs inférieurs à r.*

Pour tout K-espace vectoriel de dimension finie M, on note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes M$ le fibré trivial sur $\mathbb{P}(V)$ de fibre M.

Soient p un entier tel que $p \geq 2$, et H un sous-espace vectoriel de S^pV. Au-dessus d'un point x de $\mathbb{P}(V)$, la fibre de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)$ est la droite x^p at de S^pV. Ceci permet de définir un morphisme de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V)$:

$$f_H : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H)$$

par $(f_H)_x(y) = y + H$, x étant un point de $\mathbb{P}(V)$ et y un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)_x$. Il est immédiat que le morphisme f est injectif si et seulement si 0 est le seul élément de H de la forme u^p, u étant un élément de V. Si tel est le cas, on note $E(H)$ le fibré conoyau de f_H.

Lemme 1 : *Le fibré vectoriel $E(H)$ est uniforme de type $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ si et seulement si on a, pour tout plan D de V,*

$$S^pD \cap H \;=\; \{0\}.$$

Démonstration. Soit r le rang de $E(H)$. Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$; on a alors une suite exacte de fibrés vectoriels sur ℓ :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-p) \longrightarrow \mathcal{O}_\ell \otimes (S^pV/H) \longrightarrow E(H)_{|\ell} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_\ell(a_i^\ell) \longrightarrow 0.$$

On a alors $h^0(\mathcal{O}_\ell(a_i^\ell)) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$, donc $a_i^\ell \geq 0$. On a donc $(a_i^\ell) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ si et seulement si $a_i^\ell \leq 1$ pour $1 \leq i \leq r$, ce qui équivaut à

$$h^0(E(H)(-2)_{|\ell}) \;=\; 0\ .$$

Par dualité de Serre, le terme de gauche est égal à $h^1(E(H)^*_{|\ell})$. Supposons que $\ell = \mathbb{P}(D)$, D étant un plan de V. On a une suite exacte de fibrés vectoriels sur ℓ

$$0 \longrightarrow E(H)^*_{|\ell} \longrightarrow \mathcal{O}_\ell \otimes (S^pV/H)^* \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(p) \longrightarrow 0.$$

Comme $h^1(\mathcal{O}_\ell) = 0$, on a $h^1(E(H)^*_{|\ell}) = 0$ si et seulement si l'application

$$H^0({}^t f_{H|\ell}) : (S^pV/H)^* \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_\ell(p)) = S^pD^*$$

est surjective. Or, c'est la transposée de l'application canonique $S^pD \to S^pV/H$. On en déduit immédiatement le lemme 1. □

Soient G la grassmannienne des plans de V, et Z la réunion des sous-ensembles S^pD de S^pV, D parcourant G. D'après ce qui précède, si H est un sous-espace vectoriel de S^pV, le morphisme de fibrés f_H est injectif et le fibré vectoriel $E(H)$ est uniforme de type $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ si et seulement si on a $Z \cap H = \{0\}$.

Lemme 2 : *L'ensemble Z est une sous-variété fermée homogène de S^pV, de dimension $2n + p - 1$.*

Démonstration. Il est évident que Z est homogène. Soit F sous-fibré universel de $G \times V$ (pour tout élément D de G, on a $F_D = D$). Soit $\mathbb{P}(S^pF)$ le fibré en espaces projectifs associé au fibré vectoriel S^pF. Soit g la restriction à $\mathbb{P}(S^pF)$ de la projection $\mathbb{P}(G \times S^pV) \to \mathbb{P}(S^pV)$. L'application g est régulière et $\mathbb{P}(Z)$ est son image, donc Z est bien une sous-variété fermée de S^pV. Pour calculer sa dimension, remarquons que la fibre de g au dessus d'un point générique

de $\mathbb{P}(Z)$ est réduite à un point, donc $\mathbb{P}(Z)$ et $\mathbb{P}(S^pF)$ ont la même dimension, ce qui prouve le lemme 2. $\square$

On en déduit qu'on peut trouver un sous-espace vectoriel H_p de S^pV de codimension $2n+p-1$, tel que $H_p \cap Z = \{0\}$. Le fibré vectoriel $E(H_p)$ est uniforme de type $(1,\dots,1,0,\dots,0)$ et de rang $2n+p-2$. Montrons que $E(H_p)$ n'est pas homogène.

Soit α un automorphisme de $\mathbb{P}(V)$, représenté par un élément A de $\mathrm{GL}(V)$. Le fibré vectoriel $\alpha^*(E(H_p))$ est isomorphe au conoyau du morphisme injectif de fibrés vectoriels

$$A^*(f_{H_p}) : \alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H_p) \ .$$

On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)) \arrow[r, "A^*(f_{H_p})"] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H_p) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \arrow[r, "f_{(S^pA)^{-1}(H_p)}"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/(S^pA)^{-1}(H_p)) \ ,
\end{tikzcd}$$

les isomorphismes ϕ et ψ étant induits par l'application $(S^pA)^{-1}$. On en déduit immédiatement que $\alpha^*(E(H_p))$ est isomorphe à $E((S^pA)^{-1}(H_p))$.

Lemme 3 : *Si H et H' sont deux sous-espaces vectoriels de S^pV tels que les morphismes de fibrés vectoriels f_H et $f_{H'}$ soient injectifs, les fibrés vectoriels $E(H)$ et $E(H')$ sont isomorphes si et seulement si $H = H'$.*

Démonstration. Puisque S^pV/H s'identifie à $H^0(E(H))$ et qu'on a la même chose pour H', un isomorphisme $g : E(H) \to E(H')$ se prolonge en un isomorphisme de suites exactes de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H) \arrow[r] \arrow[d, "I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}} \otimes H^0(g)"] & E(H) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H') \arrow[r] & E(H') \arrow[r] & 0 \ .
\end{tikzcd}$$

Le lemme 3 en découle aisément. $\square$

L'existence de fibrés $E(H_p)$ non homogènes découle du

Lemme 4 : *Pour tout entier k tel que $1 \leq k < \dim(S^pV)$, il existe un sous-espace vectoriel de S^pV de dimension k qui n'est pas stable par tous les automorphismes S^pA, $A \in \mathrm{GL}(V)$. Les sous-espaces de dimension k ayant cette propriété constituent un ouvert de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, S^pV)$ des sous-espaces vectoriels de dimension k de S^pV.*

Si K est de caractéristique nulle, soit H un sous-espace vectoriel de S^pV, distinct de $\{0\}$ et de S^pV. Alors il existe un automorphisme A de V tel que H ne soit pas stable par S^pA.

Démonstration. Supposons que tous les sous-espaces vectoriels de dimension k de S^pV soient invariants par tous les automorphismes S^pA. Il en serait de même de toutes les intersections de ces sous-espaces, donc aussi de toutes les droites de S^pV, ce qui est absurde. Pour tout $A \in \mathrm{GL}(V)$, les sous-espaces vectoriels de dimension k de S^pV invariants par S^pA constituent une sous-variété fermée de $\mathrm{Gr}(k, S^pV)$. Donc l'ensemble des sous-espaces invariants par tous les S^pA aussi, puisque c'est l'intersection des précédents. Ceci démontre la première assertion.

Démontrons maintenant la seconde assertion, on suppose donc que K est de caractéristique nulle. Supposons que $H \neq \{0\}$ soit invariant par tous les automorphismes S^pA, $A \in \mathrm{GL}(V)$. Soit $e_0, \ldots, e_n$ une base de V. Soit I_p l'ensemble des multi-indices $\eta = (i_0, \ldots, i_n)$, où les i_j sont des entiers tels que $i_j \geq 0$ et $i_0 + \cdots + i_n = p$. Pour tout $\eta = (i_0, \ldots, i_n) \in I_p$, soient $e(\eta) = e_o^{i_0} \cdots e_n^{i_n} \in S^pV$, et si $y = (y_0, \ldots, y_n) \in K^n$, $a(y, \eta) = y_0^{i_0} \cdots y_n^{i_n} \in K$. Les $e(\eta)$ constituent une base de S^pV. Soit $u = \sum_{\eta \in I} x_\eta e(\eta)$ un élément non nul de H, l'ensemble de multi-indices I étant choisi de manière que pour tout $\eta \in I$, on ait $x_\eta \neq 0$. Soit W le sous-espace vectoriel de S^pV engendré par les $e(\eta)$ tels que $\eta \in I$. Montrons que $W \subset H$. Soit $y = (y_0, \ldots, y_n) \in (K^*)^n$. En considérant l'automorphisme A de V défini par $A(e_i) = y_i e_i$ pour $0 \leq i \leq n$, on voit que $u_y = \sum_{\eta \in I} a(y, \eta) x_\eta e(\eta) \in H$. En considérant la base $(x_\eta e(\eta))_{\eta \in I}$ de W on est ramené à prouver le résultat suivant : il n'existe aucun hyperplan de K^I contenant tous les $(a(y, \eta))_{\eta \in I}$. On peut trouver des entiers positifs $r_0, \ldots, r_n$, $m_\eta, \eta \in I$ tels que les m_η soient distincts deux deux, et que pour tout $\lambda \in K^*$, si $y_\lambda = (\lambda^{r_j})_{0 \leq j \leq n}$, on ait $a(y_\lambda, \eta) = \lambda^{m_\eta}$. On est donc ramené à prouver qu'aucun hyperplan de K^I ne contient tous les (λ^{m_η}), ce qui est évident. Donc $W \subset H$, et en particulier H contient un élément de la forme $e(\eta_0)$, pour un $\eta_0 = (i_0, \ldots, i_n) \in I$. Il en découle que pour des $u_0, \ldots, u_n$ génériques dans V, on a $v = u_0^{i_0} \cdots u_n^{i_n} \in H$. On peut écrire $u_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $\alpha_{ij} \in K$, et pour des coefficients génériques α_{ij}, tous les coefficients des $e(\eta), \eta \in I_p$ de v sont non nuls. Il en découle d'après ce qui précède que pour tout $\eta \in I_p$ on a $e(\eta) \in H$, et donc $H = S^pV$, ce qui démontre la seconde assertion. □

Il reste à prouver que $E(H_p)$ n'est pas somme directe de sous-fibrés de rangs inférieurs à celui de $E(H_p)$. Supposons le contraire. Alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes (S^pV/H_p) \longrightarrow E(H_p) \longrightarrow 0$$

se décompose aussi en somme directe de deux suites exactes non nulles de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V)$, puisque S^pV/H_p s'identifie à $H^0(E(H_p))$. Ceci entraine, puisque le fibré vectoriel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-p)$ est de rang 1, que $E(H_p)$ posséde un facteur direct isomorphe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$, ce qui est absurde, car d'aprés la suite exacte précédente, on a $h^0(E(H_p)^*) = 0$.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Remarque : On peut montrer facilement que si $n = 2$, les fibrés $E(H_p)$ de rang 4 construits précédemment sont isomorphes à ceux qui ont été construits par G. Elencwajg dans [3].

Références

[1] Elencwajg, G. *Les fibrés uniformes de rang 3 sur* $\mathbb{P}_2$ *sont homogènes.* Math. Ann., 231 (1978), 217-227.

[2] Elencwajg, G., Hirschowitz, A., Schneider, M. *Les fibrés uniformes de rang au plus* n *sur* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ *sont ceux qu'on croit.* Vector bundles and differential equations (Proc. Conf., Nice, 1979), Progr. Math., 7, Birkhäuser, Boston, Mass., (1980), 37-63.

[3] Elencwajg, G. *Des fibrés uniformes non homogènes.* Math. Ann., 239 (1979), 185-192.

[4] Grothendieck, A. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphre de Riemann.* Amer. J. Math. 79 (1957), 121-138.

[5] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H. *Vector bundles on complex projective spaces.* Corrected reprint of the 1988 edition. With an appendix by S. I. Gelfand. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[6] Sato, E. *Uniform vector bundles on a projective space.* J. Math. Soc. Japan 28, 1 (1976), 123-132.

[7] Ellia, P. *Des fibrés uniformes non homogènes et indécomposables de rang* $(2n+1)$ *sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$*,* $n \geq 3$. J. Reine Angew. Math. 321 (1981), 113-119.

[8] Van de Ven, A. *On uniform vector bundles.* Math. Ann., 195 (1972), 245-248.

Notes : Ce texte reproduit l'article

Exemples de fibrés uniformes non homogènes sur $\mathbb{P}_n$*.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 291 (1980), no. 2, 125-128.

avec quelques améliorations dans la rédaction et la bibliographie. Le corps de base n'est plus supposé de caractéristique nulle et la démonstration du lemme 4 a été modifiée en conséquence.

Soit $k(n)$ le plus grand entier tel que tout fibré vectoriel uniforme de rang $r \leq k(n)$ sur $\mathbb{P}_n$ soit homogène. Le présent article montre que $k(n) \leq 2n-1$. On peut énoncer la

Conjecture : On a $k(n) = 2n-1$.

Elle est vraie pour $n=2$ d'après [8] et [1]. Elle a été démontrée aussi pour $n=3$ dans les articles

Ellia, P. *Sur les fibrés uniformes de rang* $(n+1)$ *sur* $\mathbb{P}^n$*.* Mém. Soc. Math. France (N.S.) 7 (1982).

Ballico, E., Ellia, P. *Fibrés uniformes de rang 5 sur* $\mathbb{P}^3$*.* Bull. Soc. Math. France 111, 1 (1983), 59-87.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr