HAL open science

Cellules de Calogero-Moser

Cédric Bonnafé, Raphaël Rouquier

To cite this version:

Cédric Bonnafé, Raphaël Rouquier. Cellules de Calogero-Moser. 2013. hal-00787349

HAL Id: hal-00787349

https://hal.science/hal-00787349v1

Preprint submitted on 12 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cédric Bonnafé
Raphaël Rouquier

CELLULES DE CALOGERO-MOSER

Cédric Bonnafé

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier (CNRS: UMR 5149), Université Montpellier 2, Case Courrier 051, Place Eugène Bataillon, 34095 MONTPELLIER Cedex, FRANCE.

E-mail : cedric.bonnafe@univ-montp2.fr

Raphaël Rouquier

UCLA Mathematics Department Los Angeles, CA 90095-1555, USA.

E-mail : rouquier@math.ucla.edu

The first author is partly supported by the ANR (Project No ANR-12-JS01-0003-01 ACORT).

February 12, 2013

CELLULES DE CALOGERO-MOSER

CÉDRIC BONNAFÉ, RAPHAËL ROUQUIER

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 11

English Introduction 15

Résumé 17

Partie I. Groupes de réflexions, algèbres de Hecke 25

1. Groupes de réflexions 27
1.1. Déterminant, racines, coracines 27
1.2. Invariants 28
1.3. Hyperplans, sous-groupes paraboliques 29
1.4. Caractères irréductibles 30
1.5. Séries de Hilbert 30

2. Algèbres de Hecke 35
2.1. Définitions 35
2.2. Représentations 39
2.3. Cas des réflexions d'ordre 2 43
2.4. Commentaire sur le choix de l'anneau 44
2.5. Autres choix d'anneaux de base 44

3. Spécificités des groupes de Coxeter 47
3.1. Groupes 47
3.2. Algèbres de Hecke 49
3.3. Cellules de Kazhdan-Lusztig 49

Partie II. Algèbre de Cherednik 55

4. Algèbre de Cherednik générique 57
4.1. Définition 57

4.2. Graduations . . . 60
4.3. Filtration . . . 61
4.4. Élément d'Euler . . . 61
4.5. Algèbre sphérique . . . 62
4.6. Quelques automorphismes de $\widetilde{\mathbf{H}}$ . . . 63
4.7. Spécificité des groupes de Coxeter . . . 65

5. Algèbre de Cherednik en $t = 0$ . . . 67
5.1. Généralités . . . 67
5.2. Centre . . . 69
5.3. Équivalence de Morita . . . 73
5.4. Compléments . . . 75
5.5. Comment calculer Z ? . . . 76
5.6. Spécificité des groupes de Coxeter . . . 79

Partie III. L'extension Z/P . . . 81

6. Théorie de Galois . . . 83
6.1. Action de G sur l'ensemble W . . . 83
6.2. Déploiement de $\mathbf{KH}$ . . . 87
6.3. Graduations sur R . . . 89
6.4. Action sur R des automorphismes naturels de $\mathbf{H}$ . . . 91
6.5. Une situation particulière : réflexions d'ordre 2 . . . 93
6.6. Spécificité des groupes de Coxeter . . . 94
6.7. Problèmes, questions . . . 94

7. Géométrie . . . 97
7.1. Géométrie de l'extension Z/P . . . 97
7.2. Géométrie de l'extension R/P . . . 98
7.3. Problèmes, questions . . . 100

8. Cellules de Calogero-Moser . . . 101
8.1. Définition, premières propriétés . . . 101
8.2. Cellules et blocs . . . 102
8.3. Lieu de ramification . . . 103
8.4. Cellules et lissité . . . 104
8.5. Cellules et géométrie . . . 106

Partie IV. Cellules et modules de Verma . . . 107

9. Bébés modules de Verma . . . 111
9.1. Algèbre de Cherednik restreinte . . . 111

9.2. Bébés modules de Verma, modules simples . . . 113
9.3. Caractères centraux . . . 115
9.4. Familles de Calogero-Moser . . . 116
9.5. Caractères linéaires et familles de Calogero-Moser . . . 117
9.6. Dimension graduée, **b**-invariant . . . 119
9.7. Géométrie . . . 122
9.8. Problèmes, questions . . . 125

10. Conjecture de Martino . . . 127
10.1. Énoncé et cas connus . . . 127
10.2. Arguments théoriques . . . 128

11. Cellules de Calogero-Moser bilatères . . . 131
11.1. Choix . . . 131
11.2. Cellules bilatères . . . 132
11.3. Problèmes, questions . . . 136

12. Cellules de Calogero-Moser à gauche et à droite . . . 139
12.1. Choix . . . 139
12.2. Cellules à gauche . . . 143
12.3. Caractères cellulaires . . . 146
12.4. Problèmes, questions . . . 150

13. Matrices de décomposition . . . 153
13.1. Cadre général . . . 153
13.2. Cellules et matrices de décomposition . . . 154
13.3. Cellules à gauche, à droite, bilatères et matrices de décomposition . . . 155
13.4. Classes des bébés modules de Verma . . . 157
13.5. Problèmes, questions . . . 158

14. Cellules de Bialinicky-Birula de $\mathscr{Z}_c$ . . . 159
14.1. Généralités sur les actions de $\mathbb{C}^\times$ . . . 159
14.2. Points fixes et familles . . . 160
14.3. Ensembles attractifs et caractères cellulaires . . . 161
14.4. Le cas lisse . . . 162

Partie V. Groupes de Coxeter : Calogero-Moser vs Kazhdan-Lusztig . . . 165

15. Conjectures . . . 167
15.1. Cellules et caractères . . . 167
15.2. Caractères . . . 168

16. Arguments . . . 169

16.1. Le cas $c = 0$ 169
16.2. Caractères constructibles, familles de Lusztig 170
16.3. Conjectures sur les caractères 171
16.4. Cellules 172

Partie VI. Exemples 177

17. Un exemple assez nul : le cas $c = 0$ 179
17.1. Cellules bilatères, familles 179
17.2. Cellules à gauche, caractères cellulaires 180

18. Groupes de rang 1 183
18.1. L'algèbre $\mathbf{H}$ 183
18.2. L'algèbre $\boldsymbol{Z}$ 184
18.3. L'anneau $\boldsymbol{R}$, le groupe $\boldsymbol{G}$ 185
18.4. Cellules, familles, caractères cellulaires 190
18.5. Compléments 191

19. Le type B_2 197
19.1. L'algèbre $\mathbf{H}$ 197
19.2. Caractères irréductibles 198
19.3. Calcul de $(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}^*)/\boldsymbol{W}$ 199
19.4. L'algèbre $\boldsymbol{Z}$ 203
19.5. Familles de Calogero-Moser 204
19.6. Le groupe $\boldsymbol{G}$ 205
19.7. Cellules de Calogero-Moser, **CM**-caractères cellulaires 207

Appendices 219

A. Rappels de théorie de Galois 221
A.1. Autour du lemme de Dedekind 222
A.2. Groupe de décomposition, groupe d'inertie 223
A.3. Sur la $P/\mathfrak{p}$-algèbre $Q/\mathfrak{p}Q$ 224
A.4. Rappels sur la clôture intégrale 228
A.5. Rappels sur les calculs de groupes de Galois 228
A.6. Quelques calculs de discriminant 229

B. Graduation et extensions entières 231
B.1. Idempotents, radical 231
B.2. Extension de la graduation 232
B.3. Graduation et groupes de réflexions 236

C. Blocs, matrices de décomposition 239

C.1. Blocs de $k\mathscr{H}$ 239
C.2. Blocs de $R_{\mathfrak{r}}\mathscr{H}$ 241
C.3. Matrices de décomposition 244
C.4. Idempotents et caractères centraux 246

Index 249

Bibliographie 253

INTRODUCTION

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un revêtement de la variété de Calogero-Moser associée par Etingof et Ginzburg à un groupe de réflexion complexe. La ramification de ce revêtement donne lieu à des partitions du groupe de réflexion dont nous conjecturons qu'elles coïncident avec les cellules de Kazhdan-Lusztig, dans le cas d'un groupe de Coxeter.

Étant donné un groupe fini de (pseudo-)réflexion W non trivial agissant sur un espace vectoriel complexe de dimension finie V, la variété quotient $(V \times V^*)/\Delta W$ par l'action diagonale de W est une variété singulière. C'est un revêtement ramifié de la variété lisse $V/W \times V^*/W$, qui est en fait un espace affine. Etingof et Ginzburg ont construit une déformation $\Upsilon : \mathscr{Z} \longrightarrow \mathscr{P}$ de ce revêtement. La variété $\mathscr{Z}$ est l'espace de Calogero-Moser, construit comme spectre du centre de la $\mathbb{C}[\mathscr{P}]$-algèbre de Cherednik rationelle $\mathbf{H}$ en $t = 0$ associée à W. La variété $\mathscr{P}$ est produit de $V/W \times V^*/W$ par un espace vectoriel $\mathscr{C}$ de paramètres de base l'ensemble des classes de conjugaison de réflexions de W. La spécialisation en $0 \in \mathscr{C}$ de $\mathbf{H}$ est l'algèbre $\mathbb{C}[V \oplus V^*] \rtimes W$.

Le revêtement Υ, de degré $|W|$, n'est pas galoisien (sauf si $W = (\mathbb{Z}/2)^n$). L'objet de notre travail est l'étude d'une clôture galoisienne $\mathscr{R}$ de ce revêtement et de la ramification au-dessus des sous-variétés fermées 0×0, $0\times V^*/W$ et $V/W\times 0$ de $V/W\times V^*/W$.

Soit G le groupe de Galois de $\mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{P}$. En $0 \in \mathscr{C}$, le revêtement $(V \times V^*)/\Delta W \to V/W \times V^*/W$ admet $(V \times V^*)/\Delta Z(W)$ comme clôture galoisienne. Nous montrons comment en déduire un plongement de G comme groupe de permutations de W.

Ceci se reformule en termes de représentations de $\mathbf{H}$: la $\mathbb{C}(\mathscr{P})$-algèbre semi-simple $\mathbb{C}(\mathscr{P})\otimes_{\mathbb{C}[\mathscr{P}]}\mathbf{H}$ n'est pas déployée et $\mathbb{C}(\mathscr{R})$ est un corps de déploiement. Les $\mathbb{C}(\mathscr{R})\otimes_{\mathbb{C}[\mathscr{P}]}$ $\mathbf{H}$-modules simples sont en bijection avec W. Notre travail consiste alors en l'étude de la répartition en blocs de ces modules, selon le choix d'un idéal premier de $\mathbb{C}[\mathscr{R}]$.

Soit X une sous-variété fermée irréductible de $\mathscr{R}$. Nous définissons les X-cellules de W comme les orbites du groupe d'inertie de X. Etant donné un choix de paramètre $c \in \mathscr{C}$, nous étudions les c-cellules bilatères, définies pour un X composante irréductible de l'image inverse de $\bar{X} = c \times 0 \times 0$. Nous étudions aussi les c-cellules à gauche (cas $\bar{X} = c \times V/W \times 0$) et à droite (cas $\bar{X} = c \times 0 \times V^*/W$).

Lorsque W est un groupe de Coxeter, nous conjecturons que ces c-cellules coïncident avec les cellules de Kazhdan-Lusztig, définies par Kazhdan-Lusztig [**KaLu**] et Lusztig [**Lus1**], [**Lus3**]. Ceci dépend d'un choix approprié de X dans une G-orbite.

Nous analysons le cas où W est cyclique ($\dim V = 1$) : c'est le seul cas où nous disposons d'une description complète de tous les objets étudiés dans ce mémoire. Nous étudions aussi en détail le cas où W est un groupe de Weyl de type B_2 : le groupe de Galois est un groupe de Weyl de type D_4 et nous démontrons que les cellules de Calogero-Moser coïncident avec les cellules de Kazhdan-Lusztig. Notre approche repose sur une étude détaillée de la variété $\mathscr{Z}$ et de la ramification, sans toutefois construire la variété $\mathscr{R}$.

Etingof et Ginzburg ont introduit un élément de $\mathbb{C}[\mathscr{Z}]$ qui déforme l'élément d'Euler. Nous démontrons que G est le groupe de Galois de son polynôme minimal. Cet élément joue un rôle important pour l'étude de la ramification, mais ne suffit pas à séparer les cellules.

Nous montrons que l'ensemble des c-cellules bilatères est en bijection avec l'ensemble des blocs de l'algèbre de Cherednik réduite $\bar{\mathbf{H}}_c$, spécialisation de $\mathbf{H}$ en $(c,0,0) \in \mathscr{C} \times V/W \times V^*/W = \mathscr{P}$. Cet ensemble est en bijection avec $\Upsilon^{-1}(c,0,0)$. A tout $\mathbb{C}W$-module simple E est associé une représentation indécomposable de type Verma (aussi appelée "Baby Verma") $\bar{\mathscr{M}}_c(E)$ de $\bar{\mathbf{H}}$, d'unique quotient simple $\bar{\mathscr{L}}_c(E)$ [**Gor1**]. La partition en blocs de ces modules donne une partition de $\mathrm{Irr}(W)$ en *familles de Calogero-Moser*, qui sont conjecturalement reliées aux familles de l'algèbre de Hecke de W (voir [**Gor2, GoMa, Bel5, Mar1, Mar2**]). Nous démontrons que, dans une famille de Calogero-Moser donnée, la matrice des multiplicités $[\bar{\mathscr{M}}_c(E) : \bar{\mathscr{L}}_c(F)]$ est de rang 1, une propriété conjecturée par Ulrich Thiel.

Nous introduisons une notion de module simple cellulaire, associé à une cellule à gauche. Nous conjecturons que la multiplicité d'un tel module simple dans un module de Verma à gauche associé à une représentation irréductible E de W est la même que la multiplicité de E dans la représentation cellulaire de Kazhdan-Lusztig, lorsque W est un groupe de Coxeter. Nous étudions le cas d'une cellule bilatère associée à un point lisse de $\Upsilon^{-1}(c,0,0)$: dans ce cas, Gordon a démontré que le bloc correspondant contient un unique bébé module de Verma (voir la section 9.2 pour la définition). Nous démontrons que la multiplicité d'un module simple cellulaire dans le module de Verma à gauche correspondant est égale à 1 (pour une cellule à gauche contenue dans la cellule bilatère donnée) : ceci constitue notre meilleur argument en faveur de nos conjectures.

COMMENTAIRE - Cette introduction a été écrite dans un langage *géométrique*, car il s'adapte mieux à un présentation rapide. Le mémoire est quant à lui écrit plutôt

dans un langage *algébrique*, même si les références à la géométrie sous-jacente sont nombreuses.

REMERCIEMENTS - Nous tenons à remercier chaleureusement G. Bellamy, I. Gordon, M. Martino et U. Thiel pour les nombreuses discussions que nous avons eues depuis trois ans et pour leurs éclaicissements sur les points les plus délicats de la théorie des représentations des algèbres de Cherednik.

Nous remercions G. Malle pour nous avoir fait profiter de ses compétences en théorie de Galois, et pour une lecture attentive d'une version préliminaire de ce mémoire : ses nombreuses suggestions ont permis d'améliorer grandement le manuscrit.

Nous remercions aussi M. Chlouveraki pour des précisions nécessaires sur les familles de Hecke.

ENGLISH INTRODUCTION

This memoir is devoted to the study of a covering of the Calogero-Moser space associated with a complex reflection group by Etingof and Ginzburg. The ramification of this covering gives rise to partitions of the set of elements of the reflection group. We conjecture that these partitions coincide with the Kazhdan-Lusztig cells, in the case of a Coxeter group.

Given a non-trivial finite group acting on a finite-dimensional complex vector space V and generated by (pseudo-)reflections, the quotient variety $(V \times V^*)/\Delta W$ by the diagonal action of W is singular. It is a ramified covering of the smooth variety $V/W \times V^*/W$, which is actually an affine space. Etingof and Ginzburg have constructed a deformation $\Upsilon : \mathscr{Z} \to \mathscr{P}$ of this covering. The variety $\mathscr{Z}$ is the Calogero-Moser space, defined as the spectrum of the center of the rational Cherednik $\mathbb{C}[\mathscr{P}]$-algebra $\mathbf{H}$ associated with W at $t = 0$. The variety $\mathscr{P}$ is the product of $V/W \times V^*/W$ by a vector space $\mathscr{C}$ of parameters with basis the set of conjugacy classes of reflections of W. The specialization at $0 \in \mathscr{C}$ of $\mathbf{H}$ is the algebra $\mathbb{C}[V \oplus V^*] \rtimes W$.

The covering Υ, of degree $|W|$, is not Galois (unless $W = (\mathbb{Z}/2)^n$). Our work is a study of a Galois closure $\mathscr{R}$ of this covering and of the ramification above the closed subvarieties 0×0, $0 \times V^*/W$ and $V/W \times 0$ of $V/W \times V^*/W$.

Let G be the Galois group of $\mathscr{R} \to \mathscr{P}$. At $0 \in \mathscr{C}$, a Galois closure of the covering $(V \times V^*)/\Delta W \to V/W \times V^*/W$ is given by $(V \times V^*)/\Delta Z(W)$. We show that this provides an embedding of G as a group of permutations of W.

This can be reformulated in terms of representations of $\mathbf{H}$: the semi-simple $\mathbb{C}(\mathscr{P})$-algebra $\mathbb{C}(\mathscr{P}) \otimes_{\mathbb{C}[\mathscr{P}]} \mathbf{H}$ is not split and $\mathbb{C}(\mathscr{R})$ is a splitting field. The simple $\mathbb{C}(\mathscr{R}) \otimes_{\mathbb{C}[\mathscr{P}]} \mathbf{H}$-modules are in bijection with W. Our work is devoted to the study of the partition into blocks of these modules, given a prime ideal of $\mathbb{C}[\mathscr{R}]$.

Let X be an irreducible closed subvariety of $\mathscr{R}$. We define the X-cells of W as the orbits of the inertia group of X. Given a parameter $c \in \mathscr{C}$, we study the two-sided c-cells, defined for X an irreducible component of the inverse image of $\bar{X} = c \times 0 \times 0$. We also study the left c-cells (where $\bar{X} = c \times V/W \times 0$) and the right c-cells (where $\bar{X} = c \times 0 \times V/W$).

When W is a Coxeter group, we conjecture that the c-cells coincide with the Kazhdan-Lusztig cells, defined by Kazhdan-Lusztig [KaLu] and Lusztig [Lus1], [Lus3]. This depends on the choice of an appropriate X in a G-orbit.

We analyze in detail the case W cyclic ($\dim V = 1$): this is the only case where we have a complete description of the objects studied in this memoir. We also provide a detailed study of the case of a Weyl group W of type B_2: the Galois group is a Weyl group of type D_4 and we show that the Calogero-Moser cells coincide with the Kazhdan-Lusztig cells. Our approach is based on a detailed study of $\mathscr{X}$ and of the ramification of the covering, without constructing explicitely the variety $\mathscr{R}$.

Etingof and Ginzburg have introduced a deformation of the Euler vector field. We show that G is the Galois group of its minimal polynomial. This element plays an important role in the study of ramification, but is not enough to separate cells.

We construct a bijection between the set of two-sided c-cells and the set of blocks of the restricted rational Cherednik algebra $\bar{\mathbf{H}}_c$ (the specialization of $\mathbf{H}$ at $(c,0,0) \in \mathscr{C} \times V/W \times V^*/W = \mathscr{P}$). This latter set is in bijection with $\Upsilon^{-1}(c,0,0)$. Given a simple $\mathbb{C}W$-module E, there is an indecomposable representation of Verma type (a "Baby-Verma" module) $\bar{\mathscr{M}}_c^{\mathrm{left}}(E)$ of $\bar{\mathbf{H}}$ with a unique simple quotient $\bar{\mathscr{L}}_c^{\mathrm{left}}(E)$ [Gor1]. The partition into blocks of those modules gives a partition of $\mathrm{Irr}(W)$ into *Calogero-Moser families*, which are conjecturally related to the families of the Hecke algebra of W (cf [Gor2, GoMa, Bel5, Mar1, Mar2]). We show that, in a given Calogero-Moser family, the matrix of multiplicities $[\bar{\mathscr{M}}_c^{\mathrm{left}}(E) : \bar{\mathscr{L}}_c^{\mathrm{left}}(F)]$ has rank 1, a property conjectured by Ulrich Thiel.

We introduce a notion of simple cell module associated with a left cell. We conjecture that the multiplicity of such a simple module in a left Verma module is the same as the multiplicity of E in the cell representation of Kazhdan-Lusztig, when W is a Coxeter group. We study two-sided cells associated with a smooth point of $\Upsilon^{-1}(c,0,0)$: in that case, Gordon has shown that the corresponding block contains a unique Verma module. We show that the multiplicity of any simple cell module in that Verma module is 1 (for a left cell contained in the given two-sided cell). This is the main general result we have obtained.

RÉSUMÉ

Partie I. Groupes de réflexions, algèbres de Hecke. Dans cette partie, nous rappelons les définitions et notions classiques associées aux groupes de réflexions complexes : algèbre d'invariants, algèbre des coinvariants, degrés fantômes, algèbres de Hecke, familles de Hecke... Nous fixons entre autres un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique zéro, un $\mathbf{k}$-espace vectoriel V de dimension n et un sous-groupe fini W de $\mathrm{GL}_{\mathbf{k}}(V)$ engendré par l'ensemble $\mathrm{Réf}(W)$ de ses réflexions. Le chapitre 3 s'intéresse plus particulièrement aux groupes de Coxeter, et propose un résumé de la théorie des cellules de Kazhdan-Lusztig : nous rappelons la notion de famille $\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathrm{KL}}(W)$ de caractères irréductibles associés à une cellule bilatère Γ, ainsi que la notion de caractère cellulaire $[C]^{\mathrm{KL}}$ associé à une cellule à gauche C.

Partie II. Algèbres de Cherednik. Nous rappelons dans cette partie les propriétés essentielles des algèbres de Cherednik : décomposition PBW, algèbre sphérique, élément d'Euler. Si le chapitre 4 se place dans le cadre général, avec un paramètre t générique, nous nous plaçons dès le chapitre 5 dans le cas où $t=0$, cas que nous ne quittons plus jusqu'à la fin de ce mémoire. Le parti pris dans ce chapitre, essentiel pour les méthodes que nous développons, est de travailler *génériquement*. Si on note $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions $c : \mathrm{Réf}(W) \longrightarrow \mathbf{k}$ invariantes par conjugaison, alors $\mathbf{H}$ désignera l'*algèbre de Cherednik en $t=0$ générique* : comme $\mathbf{k}$-espace vectoriel, $\mathbf{H}$ est isomorphe à $\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*]$, avec les régles de commutations usuelles faisant intervenir les paramètres génériques de l'algèbre $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ des fonctions polynômiales sur $\mathscr{C}$. Si $c \in \mathscr{C}$, alors la spécialisation en c de $\mathbf{H}$ sera notée $\mathbf{H}_c$.

Le centre Z de cette algèbre $\mathbf{H}$ jouit de nombreuses propriétés (on note ici $e = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w$) :

(Z1) Z contient la sous-algèbre $P = \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^W$.
(Z2) $Z = \mathrm{End}_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}e) \simeq e\mathbf{H}e$ et $\mathbf{H} = \mathrm{End}_Z(\mathbf{H}e)$.
(Z3) Z est un P-module libre de rang $|W|$ et est intègre et intégralement clos.

Si on note Z_c la spécialisation en c de Z, alors Z_c est égal au centre de $\mathbf{H}_c$ et vérifie aussi les analogues de (Z1), (Z2) et (Z3).

Une autre particularité de cette algèbre $\mathbf{H}$ est l'existence de nombreux automorphismes naturels : si on note $\mathscr{N}$ le normalisateur de W dans $\mathrm{GL}_{\mathbf{k}}(V)$, alors le groupe $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ agit sur $\mathbf{H}$. L'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times$ équivaut à la donnée de la bigraduation sur $\mathbf{H}$ pour laquelle les éléments de V ont pour degré $(0,1)$, les éléments de V^* ont pour degré $(1,0)$, les éléments de W ont pour degré $(0,0)$ et les éléments de $\mathscr{C}$ ont pour degré $(1,1)$.

Nous abordons aussi les spécificités des groupes de Coxeter, pour lesquels l'isomorphisme de $\mathbf{k}W$-modules $V \simeq V^*$ induit un nouvel automorphisme de $\mathbf{H}$.

Partie III. L'extension Z/P. Cette partie est le cœur de notre mémoire : nous y construisons les cellules de Calogero-Moser à travers l'étude de la ramification de l'extension d'anneaux Z/P. Pour nos besoins, nous introduisons une copie Q de la P-algèbre Z munie d'un isomorphisme de P-algèbres $\mathrm{cop} : Z \xrightarrow{\sim} Q$. Notons $\mathbf{K}$ (respectivement $\mathbf{L}$) le corps des fractions de P (respectivement Q) et fixons une clôture galoisienne $\mathbf{M}$ de l'extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$: nous noterons $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{M}/\mathbf{K})$, $H = \mathrm{Gal}(\mathbf{M}/\mathbf{L})$ et R la clôture intégrale de P dans $\mathbf{M}$. Il découle de (Z2) que

$$(\clubsuit) \qquad |G/H| = |W|.$$

Par spécialisation en $c = 0$, nous construisons un morphisme de groupes $\iota : W \times W \to G$, dont le noyau est $\Delta(\mathrm{Z}(W))$ (où $\Delta : W \hookrightarrow W \times W$, $w \mapsto (w,w)$ est l'injection diagonale) et vérifiant

$$(\diamondsuit) \qquad \iota(W \times W) \cap H = \iota(\Delta(W)) \quad \text{et} \quad \iota(W \times W) \cdot H = H \cdot \iota(W \times W) = G.$$

Cette construction est faite dans la sous-section 6.1.B : c'est la clé de notre définition des cellules de Calogero-Moser. Si on identifie W et le sous-groupe $\iota(W \times 1)$ de G, alors les propriétés $(\diamondsuit)$ impliquent :

$(\heartsuit)$ *G/H est en bijection avec W. Ainsi, G s'identifie avec un sous-groupe de $\mathfrak{S}_W$ et, vu comme sous-groupe de G, $W = \iota(W \times 1)$ s'identifie avec le groupe des permutations de W induites par les translations à gauche.*

Tout ceci est fait dans le chapitre 6. Nous y montrons aussi que l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ sur $\mathbf{H}$ induit une action sur R qui normalise G.

Un autre aspect essentiel de ce chapitre 6 est de commencer l'étude des représentations de l'algèbre $\mathbf{H}$, ou plutôt de l'algèbre $\mathbf{MH} = \mathbf{M} \otimes_P \mathbf{H}$. Il y est démontré que :

$(\spadesuit)$ $\mathbf{MH}$ *est semi-simple, déployée, et ses modules simples sont en bijection avec G/H c'est-à-dire, in fine, avec W. Cette bijection sera notée $W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}(\mathbf{MH})$, $w \longmapsto \mathscr{L}_w$.*

Le chapitre 7 livre une rapide version géométrique des précédentes constructions : en effet, toutes les algèbres impliquées (P, Q, R) sont de type fini et peuvent

donc être vues comme des algèbres de fonctions polynomiales sur des **k**-variétés. Rappelons que $\mathrm{Spec}(Z_c)$ est appelé l'*espace de Calogero-Moser* associé à (W, c).

Nous définissons dans le chapitre 8 la notion de *cellule de Calogero-Moser*. Si $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de R, on note $D_{\mathfrak{r}}$ (respectivement $I_{\mathfrak{r}}$) le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\mathfrak{r}$ dans G et $k_R(\mathfrak{r})$ le corps résiduel de R en $\mathfrak{r}$, c'est-à-dire le corps des fractions de $R/\mathfrak{r}$. Autrement dit,

$$D_{\mathfrak{r}} = \{g \in G \mid g(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}\} \quad \text{et} \quad I_{\mathfrak{r}} = \{g \in G \mid \forall\ r \in R,\ g(r) \equiv r \mod \mathfrak{r}\}.$$

Alors $I_{\mathfrak{r}}$ est un sous-groupe distingué de $D_{\mathfrak{r}}$ et $D_{\mathfrak{r}}/I_{\mathfrak{r}}$ s'identifie au groupe de Galois de l'extension (galoisienne) $k_R(\mathfrak{r})/k_P(\mathfrak{r} \cap P)$.

Définition 1. *On appellera* ***$\mathfrak{r}$-cellule de Calogero-Moser*** *toute $I_{\mathfrak{r}}$-orbite dans W.*

Une grande partie de ce chapitre 8 est consacrée à relier cette notion avec la théorie des représentations de **H**. Le résultat essentiel est le suivant :

Théorème 1. *Les idempotents primitifs centraux de $R_{\mathfrak{r}}\mathbf{H}$ (qui sont en bijection, via la réduction modulo $\mathfrak{r}$, avec les idempotents primitifs centraux de $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$) sont en bijection avec les $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser : un idempotent primitif central b de $R_{\mathfrak{r}}\mathbf{H}$ est associé à une $\mathfrak{r}$-cellule de Calogero-Moser C si et seulement si $b\mathscr{L}_w = \mathscr{L}_w$ pour un (ou, de manière équivalente, pour tout) $w \in C$.*

Partie IV. Cellules et modules de Verma. Dans la définition précédente, une grande latitude est laissée quant au choix de l'idéal premier $\mathfrak{r}$ de R. Nous nous focalisons dans cette partie sur certains idéaux premiers, susceptibles de donner lieu à des généralisations des cellules de Kazhdan-Lusztig, et pour lesquels la théorie des représentations de $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ est plus avancée : en particulier, pour tous nos choix, il existera une notion de *module de Verma* associé à un caractère irréductible de W.

Voyons P comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur la **k**-variété $\mathscr{C} \times V/W \times V^*/W$. Fixons maintenant $c \in \mathscr{C}$ et notons $\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}}$ (respectivement $\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}}$, respectivement $\bar{\mathfrak{p}}_c$) l'idéal premier de P correspondant à la sous-variété fermée irréductible $\{c\} \times V/W \times \{0\}$ (respectivement $\{c\} \times \{0\} \times V^*/W$, respectivement $\{(c, 0, 0)\}$). On fixe un idéal premier $\bar{\mathfrak{r}}_c$ de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_c$ ainsi que deux idéaux premiers $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}$ et $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{right}}$ au-dessus de $\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}}$ et $\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}}$ respectivement, et contenus dans $\bar{\mathfrak{r}}_c$.

Définition 2. *On appelle* ***c-cellule de Calogero-Moser bilatère*** *(respectivement* ***à gauche****, respectivement* ***à droite****) toute $\bar{\mathfrak{r}}_c$-cellule (respectivement $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}$-cellule, respectivement $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{right}}$-cellule) de Calogero-Moser.*

Bien sûr, cette définition comporte une part d'ambigüité, car le choix de l'idéal premier de R au-dessus d'un idéal premier de P n'est absolument pas unique.

Dans le chapitre 9, nous rappelons la contruction de Gordon des modules simples de l'algèbre $k_P(\bar{\mathfrak{p}}_c)\mathbf{H}$ (souvent appelée *algèbre de Cherednik restreinte*) : cette algèbre est déployée et ses modules simples sont naturellement paramétrés par les caractères irréductibles de W. Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, nous noterons $\bar{\mathscr{L}}_c(\chi)$ le module simple de $k_P(\bar{\mathfrak{p}}_c)\mathbf{H}$ ou $k_R(\bar{\mathfrak{r}}_c)\mathbf{H}$ correspondant. Nous poursuivons l'étude de ces modules simples en intégrant notamment l'action du groupe $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$.

Définition 3. *On appelle* ***c-famille de Calogero-Moser*** *toute partie de* $\mathrm{Irr}(W) \simeq \mathrm{Irr}(k_R(\bar{\mathfrak{r}}_c)\mathbf{H})$ *correspondant à un bloc de* $k_R(\bar{\mathfrak{r}}_c)\mathbf{H}$.

Dans le chapitre 10, nous rappelons la conjecture de Martino prédisant que les c-familles de Calogero-Moser sont des unions de familles de Hecke.

Le chapitre 11 étudie les c-cellules de Calogero-Moser bilatères. En vertu du théorème 1 et de la définition 3, on peut associer à toute c-cellule de Calogero-Moser bilatère une c-famille de Calogero-Moser $\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{CM}}(W)$. Entre autres propriétés établies dans ce chapitre, nous montrons que

$$(\mathrm{a}_{\mathrm{CM}}) \qquad |\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{CM}}(W)} \chi(1)^2.$$

Le chapitre 12 étudie les cellules de Calogero-Moser à gauche (ou à droite : par symétrie, seul le cas "à gauche" est traité). Par des résultats généraux établis dans la partie III, un bloc de l'algèbre $k_R(\mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}})\mathbf{H}$ (qui correspond donc à une c-cellule de Calogero-Moser à gauche C en vertu du théorème 1) ne possède qu'un seul module simple (que nous noterons $\mathscr{L}_c^{\mathrm{left}}(C)$), de dimension $|W|$. Il est aussi possible d'associer à un caractère irréductible χ de W un *module de Verma à gauche* $\mathscr{M}_c^{\mathrm{left}}(\chi)$, de dimension $|W|\chi(1)$. On note $\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}}$ la multiplicité de $\mathscr{L}_c^{\mathrm{left}}(C)$ dans une série de Jordan-Hölder de $\mathscr{M}_c^{\mathrm{left}}(\chi)$.

Définition 4. *Si C est une c-cellule de Calogero-Moser à gauche, on notera* $[C]_c^{\mathrm{CM}}$ *le caractère de W défini par*

$$[C]_c^{\mathrm{CM}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}} \cdot \chi.$$

Nous démontrons dans ce chapitre les propriétés suivantes. Si C est une c-cellule de Calogero-Moser à gauche, alors

$$(\mathrm{b}_{\mathrm{CM}}) \qquad |C| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}} \cdot \chi(1).$$

Si χ est un caractère irréductible de W, alors

$$(\mathrm{c}_{\mathrm{CM}}) \qquad \chi(1) = \sum_C \mathrm{mult}^{\mathrm{CM}}_{C,\chi},$$

où C parcourt l'ensemble des c-cellules de Calogero-Moser à gauche.

Le chapitre 14 est consacré à la preuve du résultat le plus important que nous ayons démontré sur les cellules de Calogero-Moser : il s'applique aux cellules bilatères associées à un point lisse de l'espace de Calogero-Moser $\mathrm{Spec}(Z_c)$. Introduisons pour cela quelques notations : l'injection $Z \xrightarrow{\sim} Q \hookrightarrow R$ induit un morphisme de variétés $\rho : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(Z)$. L'idéal premier $\mathfrak{r}_c$ étant maximal, il correspond à un point de cette variété et, si $w \in W$, nous noterons $\rho(w(\mathfrak{r}_c))$ son image dans $\mathrm{Spec}(Z_c)$.

Théorème 2. *Soit Γ une c-cellule de Calogero-Moser et supposons que le point $\rho(w^{-1}(\mathfrak{r}_c))$ est un point lisse de $\mathrm{Spec}(Z_c)$ pour un $w \in \Gamma$ (ou, de manière équivalente, pour tout $w \in \Gamma$). Il découle alors d'un résultat de Gordon que $\mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_\Gamma(W)$ est un singleton (notons χ son unique élément). Si C une c-cellule de Calogero-Moser à gauche contenue dans Γ, alors*

$$[C]^{\mathrm{CM}}_c = \chi.$$

Partie V. Groupes de Coxeter : Calogero-Moser vs Kazhdan-Lusztig. Dans le chapitre 15, nous proposons les conjectures suivantes :

Conjecture 1. *Si (W,S) est un système de Coxeter et si $c(s) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ pour tout $s \in S$, alors :*

(a) *Les c-cellules de Kazhdan-Lusztig (à gauche, à droite, bilatères) et les c-cellules de Calogero-Moser (à gauche, à droite, bilatères) coïncident.*
(b) *Supposant* (a) *vrai, si Γ est une c-cellule bilatère, alors $\mathrm{Irr}^{\mathrm{KL}}_\Gamma(W) = \mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_\Gamma(W)$.*
(c) *Supposant* (a) *vrai, si C est une c-cellule à gauche, alors $[C]^{\mathrm{KL}}_c = [C]^{\mathrm{CM}}_c$.*

Si on reste au niveau des caractères, les énoncés (b) et (c) de la conjecture 1 impliquent la conjecture suivante :

Conjecture 2. *Si (W,S) est un système de Coxeter, alors :*

(a) *Les c-familles de Kazhdan-Lusztig et les c-familles de Calogero-Moser coïncident (Gordon-Martino).*
(b) *L'ensemble des KL-caractères c-cellulaires et l'ensemble des CM-caractères c-cellulaires coïncident.*

Le chapitre 16 est une succession de résultats corroborant ces conjectures. Si les propriétés numériques (a_{CM}), (b_{CM}) et (c_{CM}) sont aussi satisfaites par les cellules de Kazhdan-Lusztig, les familles de Kazhdan-Lusztig et les KL-caractères c-cellulaires, notre résultat le plus probant est le suivant, qui découle du théorème 2 et du fait que $\mathrm{Spec}(Z_c)$ est lisse si (W,S) est de type A et $c \neq 0$:

Corollaire 3. *Supposons que (W,S) soit de type A et que $c \neq 0$. Alors :*

(a) *Les c-familles de Calogero-Moser coïncident avec les c-familles de Kazhdan-Lusztig (Gordon) : ce sont des singletons.*

(b) *Les CM-caractères c-cellulaires coïncident avec les KL-caractères c-cellulaires : ce sont les caractères irréductibles de W.*

(c) *Il existe une bijection $\varphi : W \to W$ qui envoie les c-cellules de Calogero-Moser (à gauche ou bilatères) sur les c-cellules de Kazhdan-Lusztig.*

Partie VI. Exemples. Le chapitre 18 traite du premier exemple de groupe de réflexions complexe qui ne soit pas un groupe de Coxeter, à savoir le cas où $\dim_{\mathbf{k}} V = 1$. Alors W est cyclique (notons $d = |W|$). Fixons alors un générateur s de W et notons $\varepsilon : W \to \mathbf{k}^\times$ la restriction du déterminant (ainsi, $\mathrm{Irr}(W) = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{d-1}\}$). Nous montrons dans ce chapitre 18 que

$$(*) \qquad G = \mathfrak{S}_W \simeq \mathfrak{S}_d$$

et que, si on note k_i le scalaire via lequel l'élément d'Euler agit sur $\bar{\mathscr{L}}_c(\varepsilon^i)$, alors :

Proposition 4. *Soient i et j dans $\mathbb{Z}$. Alors :*

(a) *ε^i et ε^j sont dans la même c-famille de Calogero-Moser si et seulement si $k_i = k_j$.*

(b) *s^i et s^j sont dans la même c-cellule de Calogero-Moser (à gauche, à droite ou bilatère) si et seulement si $k_i = k_j$.*

(c) *Si Γ est une c-cellule de Calogero-Moser bilatère (c'est aussi une c-cellule de Calogero-Moser à gauche en vertu de* (b)*), alors*

$$\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{CM}}(W) = \{\varepsilon^{-i} \mid s^i \in \Gamma\} \quad \textit{et} \quad [\Gamma]_c^{\mathrm{CM}} = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant d-1 \\ s^i \in \Gamma}} \varepsilon^{-i}.$$

Le chapitre 19 traite du plus petit groupe de Coxeter irréductible dans lequel il y a deux classes de conjugaison de réflexions, à savoir le cas du type B_2. C'est l'occasion d'y vérifier les conjectures 1 et 2. Supposons donc que (W,S) soit un système de Coxeter de type B_2. On note $w_0 = -\mathrm{Id}_V \in W$. Notons $\mathfrak{A}_W$ le groupe des permutations paires de W. Alors, après un calcul explicite d'une présentation du centre Z de $\mathbf{H}$, nous montrons dans ce chapitre que

$$(**) \qquad G = \mathfrak{A}_W \cap \{\sigma \in \mathfrak{S}_W \mid \forall\ w \in W,\ \sigma(w_0 w) = w_0 \sigma(w)\}.$$

Notons que $\{\sigma \in \mathfrak{S}_W \mid \forall\ w \in W,\ \sigma(w_0 w) = w_0 \sigma(w)\}$ est un groupe de Weyl de type B_4 et que

G est un groupe de Weyl de type D_4.

Une fois ce résultat établi, et en utilisant les résultats numériques (a_{CM}), (b_{CM}) et (c_{CM}), la vérification des conjectures 1 et 2 est facile pour ce qui concerne les cellules bilatères et les familles, alors que, pour les cellules à gauche et les caractères cellulaires, cette vérification est plus délicate.

Appendices. Nous concluons ce mémoire par une série d'appendices constitués de rappels de résultat classiques : théorie de Galois, graduations et blocs d'algèbres de dimension finie...

PARTIE I

GROUPES DE RÉFLEXIONS, ALGÈBRES DE HECKE

Consacrée essentiellement à des rappels, cette partie a pour but d'introduire diverses notions attachées à la donnée d'un groupe de réflexions : arrangement d'hyperplans, théorie des invariants, algèbres de Hecke, familles de Hecke, théorie de Kazhdan-Lusztig.

CHAPITRE 1

GROUPES DE RÉFLEXIONS

Dans tout ce mémoire, nous fixons un corps commutatif $\mathbf{k}$ *de caractéristique* 0*, un* $\mathbf{k}$*-espace vectoriel* V *de dimension finie* n *ainsi qu'un sous-groupe* ***fini*** W *de* $\mathrm{GL}_{\mathbf{k}}(V)$*. Tout au long de ce mémoire, la notation* $\otimes$ *remplacera* $\otimes_{\mathbf{k}}$*. L'algèbre de groupe de* W *sur* $\mathbf{k}$ *sera notée* $\mathbf{k}W$*. Posons*

$$\mathrm{Réf}(W) = \{s \in W \mid \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Im}(s - \mathrm{Id}_V) = 1\},$$

de sorte que $\mathrm{Réf}(W)$ *est l'ensemble des* ***réflexions*** *de* W*.* ***Nous supposerons que*** W ***est engendré par*** $\mathrm{Réf}(W)$***.***

1.1. Déterminant, racines, coracines

Nous noterons

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & W & \longrightarrow & \mathbf{k}^\times \\ & w & \longmapsto & \det_V(w). \end{array}$$

La dualité parfaite entre V et son dual V^* sera notée

$$\langle , \rangle : V \times V^* \longrightarrow \mathbf{k}.$$

Si $s \in \mathrm{Réf}(W)$, nous noterons α_s et $\alpha_s^\vee$ des éléments non nuls de V^* et V respectivement tels que

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}\,\alpha_s \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(s - \mathrm{Id}_V) = \mathbf{k}\alpha_s^\vee$$

ou, de manière équivalente,

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{V^*}) = \mathrm{Ker}\,\alpha_s^\vee \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(s - \mathrm{Id}_{V^*}) = \mathbf{k}\alpha_s.$$

Notons que, puisque $\mathbf{k}$ est de caractéristique nulle, tous les éléments de $\mathrm{Réf}(W)$ sont diagonalisables et donc

$$\langle \alpha_s^\vee, \alpha_s \rangle \neq 0. \tag{1.1.1}$$

Ainsi, si $x \in V^*$ et $y \in V$, alors

$$s(y) = y - (1-\varepsilon(s))\frac{\langle y, \alpha_s\rangle}{\langle \alpha_s^\vee, \alpha_s\rangle}\alpha_s^\vee \tag{1.1.2}$$

et

$$s(x) = x - (1-\varepsilon(s)^{-1})\frac{\langle \alpha_s^\vee, x\rangle}{\langle \alpha_s^\vee, \alpha_s\rangle}\alpha_s. \tag{1.1.3}$$

1.2. Invariants

Nous noterons $\mathbf{k}[V]$ (respectivement $\mathbf{k}[V^*]$) l'algèbre symétrique de V^* (respectivement V), que nous identifierons avec l'algèbre des fonctions polynomiales sur V (respectivement V^*). Nous noterons

$$\mathbf{k}[V]_+ = \{f \in \mathbf{k}[V] \mid f(0) = 0\} \quad \text{et} \quad \mathbf{k}[V^*]_+ = \{f \in \mathbf{k}[V^*] \mid f(0) = 0\}.$$

Le groupe W agit naturellement sur les algèbres $\mathbf{k}[V]$ et $\mathbf{k}[V^*]$: les algèbres d'invariants seront notées respectivement $\mathbf{k}[V]^W$ et $\mathbf{k}[V^*]^W$. Nous appellerons *algèbres des coinvariants*, et nous noterons $\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}$ et $\mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)}$ les $\mathbf{k}$-algèbres de dimension finie

$$\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)} = \mathbf{k}[V]/<\mathbf{k}[V]_+^W> \quad \text{et} \quad \mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)} = \mathbf{k}[V^*]/<\mathbf{k}[V^*]_+^W>.$$

En vertu du théorème de Shephard-Todd-Chevalley, le fait que W soit engendré par ses réflexions a de nombreuses conséquences sur la structure de $\mathbf{k}[V]^W$. Nous en donnons ici une version agrémentée de résultats quantitatifs (nous l'énonçons à travers ses conséquences sur l'action de W sur la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[V]$, mais les mêmes énoncés restent valables en remplaçant $\mathbf{k}[V]$ par $\mathbf{k}[V^*]$) :

***Théorème 1.2.1* (Shephard-Todd, Chevalley).** — *Rappelons que $n = \dim_{\mathbf{k}} V$. Alors :*

(a) *Il existe des polynômes homogènes $f_1, \dots, f_n$ dans $\mathbf{k}[V]^W$, algébriquement indépendants, et tels que $\mathbf{k}[V]^W = \mathbf{k}[f_1, \dots, f_n]$. Si on note d_i le degré de f_i, alors*

$$|W| = d_1 \cdots d_n \quad \textit{et} \quad |\text{Réf}(W)| = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1).$$

(b) *Le $k[V]^W[W]$-module $\mathbf{k}[V]$ est libre de rang 1. En particulier, il existe une $\mathbf{k}[V]^W$-base $(b_1, b_2, \dots, b_{|W|})$ du $\mathbf{k}[V]^W$-module $\mathbf{k}[V]$ formée d'éléments homogènes.*

(c) *Le $\mathbf{k}W$-module $\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}$ est libre de rang 1 ; en particulier, $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)} = |W|$.*

(d) *Si $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n$, alors la suite $(d_1, \dots, d_n)$ ne dépend pas du choix des f_i : elle est uniquement déterminée par W. Nous l'appellerons **suite des degrés** de W.*

Démonstration. — Voir par exemple [**Bro**, théorème 4.1]. □

Remarque 1.2.2. — Grâce à la formule de Molien (voir [**Bro**, Lemme 3.28]), la suite des degrés pour l'action de W sur V (telle qu'elle est définie dans le théorème 1.2.1) coïncide avec la suite des degrés de W pour son action sur V^*. ■

1.3. Hyperplans, sous-groupes paraboliques

Notation. *Nous noterons $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ l'ensemble des entiers naturels non nuls e tels que $\mathbf{k}$ contienne une racine primitive e-ième de l'unité. Nous fixons une famille $(\zeta_e)_{e\in\mathscr{E}(\mathbf{k})}$ où, pour tout $e \in \mathscr{E}(\mathbf{k})$, ζ_e est une racine primitive e-ième de l'unité. Nous choisissons cette famille de façon "cohérente", c'est-à-dire que, si $e \in \mathscr{E}(\mathbf{k})$ et si $d|e$, alors $\zeta_d = \zeta_e^{e/d}$.*

Nous noterons $\mathscr{A}$ l'ensemble des hyperplans de réflexion de W :

$$\mathscr{A} = \{\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V) \mid s \in \mathrm{Réf}(W)\}.$$

Si X est une partie de V, nous noterons W_X le fixateur de X, c'est-à-dire

$$W_X = \{w \in W \mid \forall\, x \in X,\ w(x) = x\}.$$

Théorème de Steinberg. — *Si $X \subset V$, alors W_X est engendré par des réflexions.*

Démonstration. — Voir par exemple [**Bro**, théorème 4.7]. □

Si $H \in \mathscr{A}$, nous noterons e_H l'ordre du sous-groupe cyclique W_H de W. Nous noterons s_H le générateur de W_H de déterminant ζ_{e_H} (c'est une réflexion d'hyperplan H). On a alors

$$\mathrm{Réf}(W) = \{s_H^j \mid H \in \mathscr{A} \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant e_H - 1\}.$$

Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 1.3.1. — *s_H^j et $s_{H'}^{j'}$ sont conjugués dans W si et seulement si H et H' sont dans la même W-orbite et $j = j'$.*

Si Ω est une W-orbite d'hyperplans de $\mathscr{A}$, nous noterons e_Ω la valeur commune de tous les e_H, où $H \in \Omega$. Ainsi, le lemme 1.3.1 nous fournit une bijection entre l'ensemble $\mathbf{\Omega}_W$ des couples (Ω, j) où $\Omega \in \mathscr{A}/W$ et $1 \leqslant j \leqslant e_\Omega - 1$ et l'ensemble $\mathrm{Réf}(W)/W$.

1.4. Caractères irréductibles

Une conséquence du fait que W est engendré par $\mathrm{Réf}(W)$, dont la preuve repose sur la classification des groupes de réflexions (voir [**Ben**] et [**Bes**]), est la suivante (notons que la semi-simplicité est évidente, puisque $\mathbf{k}$ est de caractéristique zéro) :

***Théorème 1.4.1* (Benard, Bessis).** — *Soit $\mathbf{k}'$ un sous-corps de $\mathbf{k}$ contenant les traces des éléments de W. Alors l'algèbre $\mathbf{k}'W$ est semi-simple déployée. En particulier, $\mathbf{k}W$ est semi-simple déployée.*

Nous noterons $\mathrm{Irr}(W)$ l'ensemble des caractères irréductibles de W (sur le corps $\mathbf{k}$) que nous identifierons avec l'ensemble $\mathrm{Irr}(\mathbf{k}W)$ des classes d'isomorphie de $\mathbf{k}W$-modules simples. Nous identifierons le groupe de Grothendieck $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)$ avec le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\mathrm{Irr}(W)$ que nous noterons $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(W)$. Si M est un $\mathbf{k}W$-module de dimension finie, nous noterons $[M]_{\mathbf{k}W}$ son image dans $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)$. Nous noterons $\langle,\rangle_W$ le produit scalaire sur $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)$ qui fait de $\mathrm{Irr}(W)$ une base orthonormale. Le groupe $\mathrm{Hom}(W,\mathbf{k}^\times)$ des caractères linéaires de W à valeurs dans $\mathbf{k}^\times$ sera noté $W^\wedge$ (ainsi, $W^\wedge \subset \mathrm{Irr}(W)$, avec égalité si et seulement si W est abélien).

1.5. Séries de Hilbert

Soient $\mathbf{t}$ et $\mathbf{u}$ deux indéterminées et soit $\mathbf{k}[[\mathbf{t},\mathbf{u}]]$ la $\mathbf{k}$-algèbre des séries formelles en deux variables $\mathbf{t}$ et $\mathbf{u}$. Si M est une $\mathbf{k}$-espace vectoriel $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-gradué (de décomposition associée $M=\bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} M_{i,j}$) dont les composantes homogènes sont de dimension finie, on notera $\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(M)$ sa *série de Hilbert bi-graduée* définie par

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(M)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \dim_{\mathbf{k}}(M_{i,j})\,\mathbf{t}^i\,\mathbf{u}^j.$$

Bien sûr, si N est un autre $\mathbf{k}$-espace vectoriel $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-gradué dont les composantes homogènes sont de dimension finie, alors

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(M\oplus N)=\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(M)+\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(N) \tag{1.5.1}$$

et

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(M\otimes N)=\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(M)\cdot\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(N). \tag{1.5.2}$$

1.5.A. Invariants. — L'algèbre $\mathbf{k}[V \times V^*] = \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}[V^*]$ admet une bi-graduation standard, en attribuant aux éléments de $V^* \subset \mathbf{k}[V]$ le bi-degré $(0,1)$ et à ceux de $V \subset \mathbf{k}[V^*]$ le bi-degré $(1,0)$. On a

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{k}[V \times V^*]) = \frac{1}{(1-\mathbf{t})^n(1-\mathbf{u})^n}, \tag{1.5.3}$$

grâce notamment à 1.5.2.

En reprenant les notations du théorème 1.2.1(a), on obtient, toujours grâce à 1.5.2,

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{k}[V \times V^*]^{W \times W}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-\mathbf{t}^{d_i})(1-\mathbf{u}^{d_i})}. \tag{1.5.4}$$

D'autre part, la série de Hilbert bi-graduée de l'algèbre des invariants diagonaux $\mathbf{k}[V \times V^*]^W$ est donnée par une formule *à la Molien*

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{k}[V \times V^*]^W) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{1}{\det(1-w\mathbf{t})\ \det(1-w^{-1}\mathbf{u})}, \tag{1.5.5}$$

dont la preuve copie presque mot pour mot la preuve de la formule de Molien pour la série de Hilbert graduée.

1.5.B. Degrés fantômes. — Si $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué et si $d \in \mathbb{Z}$, on notera $M\langle d \rangle$ le $\mathbf{k}$-espace vectoriel gradué obtenu en décalant la graduation de d, c'est-à-dire $M\langle d \rangle_i = M_{i+d}$. Si M_i est nul pour $i \ll 0$, on définit aussi la *série de Hilbert* de M par

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{gr}}(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbf{k}}(M_i)\ \mathbf{t}^i \in \mathbf{k}((\mathbf{t})).$$

Il est immédiat que $\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{gr}}(M\langle d \rangle) = \mathbf{t}^{-d}\ \dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{gr}}(M)$.

Notons $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)[\mathbf{t},\mathbf{t}^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)$. C'est un $\mathbb{Z}[\mathbf{t},\mathbf{t}^{-1}]$-module libre de base $\mathrm{Irr}(W)$.

Si $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ est un $\mathbf{k}W$-module $\mathbb{Z}$-gradué de dimension finie, on notera $[M]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{gr}}$ l'élément de $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)[\mathbf{t},\mathbf{t}^{-1}]$ défini par

$$[M]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{gr}} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [M_i]_{\mathbf{k}W}\ \mathbf{t}^i.$$

Il est clair que $[M]_{\mathbf{k}W}$ est l'évaluation en 1 de $[M]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{gr}}$ et que $[M\langle n \rangle]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{gr}} = \mathbf{t}^{-n}\ [M]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{gr}}$. Si M est un $\mathbf{k}W$-module bi-gradué, on définit de façon similaire $[M]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{bigr}}$: c'est un élément de $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)[\mathbf{t},\mathbf{u},\mathbf{t}^{-1},\mathbf{u}^{-1}]$.

Soit $(f_\chi(\mathbf{t}))_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)}$ l'unique famille d'éléments de $\mathbb{N}[\mathbf{t}]$ telle que

$$[k[V^*]^{\mathrm{co}(W)}]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{bigr}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} f_\chi(\mathbf{t})\ \chi. \tag{1.5.6}$$

Définition 1.5.7. — *Le polynôme $f_\chi(\mathbf{t})$ est appelé le* ***degré fantôme*** *de χ. Sa* $\mathbf{t}$*-valuation sera notée $\mathbf{b}_\chi$ et sera appelée le* $\mathbf{b}$***-invariant*** *de χ.*

Le degré fantôme de χ vérifie

$$f_\chi(1) = \chi(1). \tag{1.5.8}$$

Remarquons aussi que

$$[\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}]^{\mathrm{bigr}}_{\mathbf{k}W} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} f_\chi(\mathbf{u})\, \chi^*, \tag{1.5.9}$$

(ici, χ^* désigne le caractère dual de χ, c'est-à-dire $\chi^*(w) = \chi(w^{-1})$). Notons aussi que, si $\mathbf{1}_W$ désigne le caractère trivial de W, alors

$$[\mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)}]^{\mathrm{bigr}}_{\mathbf{k}W} \equiv \mathbf{1}_W \mod \mathbf{t}\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)[\mathbf{t}]$$

et

$$[\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}]^{\mathrm{bigr}}_{\mathbf{k}W} \equiv \mathbf{1}_W \mod \mathbf{u}\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)[\mathbf{u}].$$

On en déduit :

Lemme 1.5.10. — $[\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}]^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{k}W}$ *et* $[\mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)}]^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{k}W}$ *ne sont pas des diviseurs de* 0 *dans* $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)[\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{t}^{-1}, \mathbf{u}^{-1}]$.

Remarque 1.5.11. — A contrario,

$$[\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}]_{\mathbf{k}W} = [\mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)}]_{\mathbf{k}W} = [\mathbf{k}W]_{\mathbf{k}W} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\chi$$

est un diviseur de 0 dans $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)$ (dès que $W \neq 1$). ■

Nous pouvons alors donner une autre formule pour $\dim^{\mathrm{bigr}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[V \times V^*]^W)$:

Proposition 1.5.12. — $\dim^{\mathrm{bigr}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[V \times V^*]^W) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{t}^{d_i})(1 - \mathbf{u}^{d_i})} \displaystyle\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} f_\chi(\mathbf{t})\, f_\chi(\mathbf{u})$.

Démonstration. — Soit $\mathscr{H}$ un supplémentaire W-stable et gradué de $< \mathbf{k}[V]^W >$ dans $\mathbf{k}[V]$. Alors, puisque $\mathbf{k}[V]$ est un $\mathbf{k}[V]^W$-module libre, on a des isomorphismes de $\mathbf{k}[W]$-modules gradués

$$\mathbf{k}[V] \simeq \mathbf{k}[V]^W \otimes \mathscr{H} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)} \simeq \mathscr{H}.$$

De même, si $\mathscr{H}^*$ est un supplémentaire W-stable et gradué de $< \mathbf{k}[V^*]^W >$ dans $\mathbf{k}[V^*]$, alors on a des isomorphismes de $\mathbf{k}[W]$-modules gradués

$$\mathbf{k}[V^*] \simeq \mathbf{k}[V^*]^W \otimes \mathscr{H}^* \qquad \text{et} \qquad \mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)} \simeq \mathscr{H}^*.$$

En d'autres termes, en tant que $\mathbf{k}[W]$-modules bi-gradués, on a

$$\mathbf{k}[V] \simeq \mathbf{k}[V]^W \otimes \mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{k}[V^*] \simeq \mathbf{k}[V^*]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)}.$$

On en déduit un isomorphisme de $\mathbf{k}$-espaces vectoriels bi-gradués

$$(\mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}[V^*])^W \simeq (\mathbf{k}[V]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^W) \otimes (\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)} \otimes \mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)})^W.$$

Mais, d'après 1.5.6 et 1.5.9,

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)} \otimes \mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)})^W = \sum_{\chi,\psi \in \mathrm{Irr}(W)} f_\chi(\mathbf{t}) f_\psi(\mathbf{u}) \langle \chi\psi^*, \mathbf{1}_W \rangle_W.$$

La formule annoncée s'obtient maintenant en remarquant que $\langle \chi\psi^*, \mathbf{1}_W \rangle = \langle \chi, \psi \rangle_W$. $\square$

En conclusion, nous pouvons regrouper dans une même formule la formule de Molien 1.5.5 et la proposition 1.5.12:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{k}[V \times V^*]^W) &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{1}{\det(1 - w\mathbf{t})\ \det(1 - w^{-1}\mathbf{u})} \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{t}^{d_i})(1 - \mathbf{u}^{d_i})} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} f_\chi(\mathbf{t})\, f_\chi(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

CHAPITRE 2

ALGÈBRES DE HECKE

Notation. *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce mémoire, nous fixons un corps de nombres F, contenu dans $\mathbf{k}$, galoisien sur $\mathbb{Q}$, contenant toutes les traces des éléments de W et nous noterons $\mathcal{O}$ la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans F. Nous fixons aussi un plongement $F \hookrightarrow \mathbb{C}$. Par le théorème de Benard-Bessis, la F-algèbre FW est semi-simple déployée : il existe donc un sous-F-espace vectoriel W-stable V_F de V tel que $V = \mathbf{k} \otimes_F V_F$. On notera $a \mapsto \bar{a}$ la conjugaison complexe (elle stabilise F car F est Galoisien sur $\mathbb{Q}$). Pour finir, on notera $\boldsymbol{\mu}_W$ le groupe des racines de l'unité du corps engendré par les traces des éléments de W.*

L'existence d'un tel corps F est facile : il suffit de prendre le corps engendré par les traces des éléments de W (c'est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ car elle est contenue dans un corps cyclotomique). Notons aussi que F contient toutes les racines de l'unité de la forme ζ_{e_H}, où $H \in \mathscr{A}$.

2.1. Définitions

2.1.A. Groupe de tresses. — Posons $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_F V_F$ et, si $H \in \mathscr{A}$, notons $H_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_F (H \cap V_F)$. On définit alors

$$V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}} = V_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{H \in \mathscr{A}} H_{\mathbb{C}}$$

et on fixe un point $v_{\mathbb{C}} \in V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}}$. Si $v \in V_{\mathbb{C}}$, on note $\bar{v}$ son image dans la variété $V_{\mathbb{C}}/W$. Le *groupe de tresses* associé à W, noté B_W, est alors défini par

$$B_W = \pi_1(V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}}/W, \bar{v}_{\mathbb{C}}).$$

Le *groupe de tresses pures* associé à W, noté P_W, est lui défini par

$$P_W = \pi_1(V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}}, v_{\mathbb{C}}).$$

Le revêtement $V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}} \to V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}}/W$ étant non ramifié (en vertu du théorème de Steinberg), on obtient une suite exacte

$$1 \longrightarrow P_W \longrightarrow B_W \xrightarrow{p_W} W \longrightarrow 1. \tag{2.1.1}$$

Si $H \in \mathscr{A}$, nous noterons $\boldsymbol{\sigma}_H$ un *générateur de la monodromie* autour de l'hyperplan H, tel que défini dans [**BrMaRo**, §2.A], et tel que $p_W(\boldsymbol{\sigma}_H) = s_H$. Rappelons [**BrMaRo**, théorème 2.17] que

$$B_W \textit{ est engendré par } (\boldsymbol{\sigma}_H)_{H \in \mathscr{A}}. \tag{2.1.2}$$

Nous noterons π le lacet dans $V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}}$ défini par

$$\begin{array}{rccc} \pi : & [0,1] & \longrightarrow & V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}} \\ & t & \longmapsto & e^{2i\pi t} v_{\mathbb{C}}. \end{array}$$

Alors [**BrMaRo**, Lemme 2.22],

$$\pi \in P_W \cap Z(B_W). \tag{2.1.3}$$

2.1.B. Algèbre de Hecke générique. — Rappelons que $\boldsymbol{\Omega}_W$ est l'ensemble des couples (Ω, j) tels que $\Omega \in \mathscr{A}/W$ et $1 \leqslant j \leqslant e_\Omega - 1$ (voir §1.3).

> **Notation.** *Nous noterons $\boldsymbol{\Omega}_W^\circ$ l'ensemble des couples (Ω, j) tels que $\Omega \in \mathscr{A}/W$ et $0 \leqslant j \leqslant e_\Omega - 1$. Fixons une famille d'indéterminées $\mathbf{q}_{\text{gén}} = (\mathbf{q}_{\Omega,j})_{(\Omega,j) \in \boldsymbol{\Omega}_W^\circ}$ algébriquement indépendantes sur $\mathscr{O}$. On notera $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$ l'anneau commutatif intègre et intégralement clos $\mathscr{O}[(\mathbf{q}_{\Omega,j}^{\pm 1})_{(\Omega,j) \in \boldsymbol{\Omega}_W^\circ}]$: son corps des fractions sera noté $F(\mathbf{q}_{\text{gén}})$. Si $\Omega \in \mathscr{A}/W$, $H \in \Omega$ et $0 \leqslant j \leqslant e_H - 1 = e_\Omega - 1$, on posera $\mathbf{q}_{H,j} = \mathbf{q}_{\Omega,j}$.*

L'*algèbre de Hecke générique* associée à W, notée $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$, est le quotient de l'algèbre de groupe $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]B_W$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$\prod_{j=0}^{e_H - 1} (\boldsymbol{\sigma}_H - \zeta_{e_H}^j \mathbf{q}_{H,j}^{|\mu_W|}), \tag{2.1.4}$$

où H parcourt $\mathscr{A}$. Par conséquent, en notant $\mathbf{T}_H$ l'image de $\boldsymbol{\sigma}_H$ dans $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$, alors, d'après 2.1.2,

$$\mathscr{H}_W^{\text{gén}} \textit{ est engendrée par } (\mathbf{T}_H)_{H \in \mathscr{A}}, \tag{2.1.5}$$

et, si $H \in \mathscr{A}$, alors

$$\prod_{j=0}^{e_H - 1} (\mathbf{T}_H - \zeta_{e_H}^j \mathbf{q}_{H,j}^{|\mu_W|}) = 0. \tag{2.1.6}$$

Notons que

(2.1.7) $\mathbf{T}_H$ *est inversible dans* $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$.

Le lemme suivant découle immédiatement de [**BrMaRo**, proposition 2.18] :

Lemme 2.1.8. — *À travers la spécialisation* $\mathbf{q}_{\Omega,j} \mapsto 1$, *on a un isomorphisme de* $\mathscr{O}$*-algèbres* $\mathscr{O} \otimes_{\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]} \mathscr{H}_W^{\text{gén}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}W$.

Notons par $a \mapsto \bar{a}$ l'unique automorphisme de la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$ étendant la conjugaison complexe sur $\mathscr{O}$ et tel que $\overline{\mathbf{q}}_{\Omega,j} = \mathbf{q}_{\Omega,j}^{-1}$. Lorsque nous parlerons d'algèbres de Hecke, nous travaillerons le plus souvent sous l'hypothèse suivante [**BrMaMi1**, §2.A] :

Hypothèse (Lib-Sym).

(a) $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$ *est un* $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$*-module libre de rang* $|W|$.

(b) *Il existe une unique forme symétrisante* $\tau_{\mathscr{H}} : \mathscr{H}_W^{\text{gén}} \to A$ *telle que :*

(1) *Après la spécialisation du lemme 2.1.8 (i.e.* $\mathbf{q}_{\Omega,j} \mapsto 1$*),* $\tau_{\mathscr{H}}$ *se spécialise en la forme symétrisante canonique de* $\mathscr{O}W$ *(i.e.* $w \mapsto \delta_{w,1}$*, où* $\delta_?$ *est le symbole de Kronecker).*

(2) *Si* $b \in B_W$*, alors*

$$\tau_{\mathscr{H}}(\pi)\overline{\tau_{\mathscr{H}}(b^{-1})} = \tau_{\mathscr{H}}(b\pi).$$

Ici, $\tau_{\mathscr{H}}(b)$ *désigne l'image par* $\tau_{\mathscr{H}}$ *de l'image de* b *dans* $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$.

COMMENTAIRE - Il est conjecturé [**BrMaMi1**, §2.A] que l'hypothèse (Lib-Sym) est toujours vérifiée. Elle est connue dans de nombreux cas, incluant les sous-familles infinies suivantes :

- W groupe de Coxeter.
- W de type $G(de, e, r)$ dans la classification de Shephard-Todd.

D'autre part, notons que, si l'hypothèse (Lib-Sym) est vérifiée, alors $\tau_{\mathscr{H}}(\pi) \neq 0$ car, en vertu du point (1) de l'assertion (b) et de 2.1.3, $\tau_{\mathscr{H}}(\pi)$ se spécialise en 1 via $\mathbf{q}_{H,j} \mapsto 1$. ■

2.1.C. Algèbre de Hecke cyclotomique. — Nous n'utiliserons pas ici les définitions usuelles d'algèbre de Hecke cyclotomique [**BrMaMi1**, §6.A], [**Chl4**, Définition 4.3.1], car nous aurons besoin de travailler sur un anneau assez gros permettant de faire varier les paramètres autant que possible.

Notation. *Suivant* [**Bon1**], [**Bon2**] *et* [**Bon3**], *nous utiliserons une notation exponentielle pour l'algèbre de groupe* $\mathscr{O}[\mathbb{R}]$, *que nous noterons* $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$: $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}] = \bigoplus_{r\in\mathbb{R}} \mathscr{O}\,\mathbf{q}^r$, *avec* $\mathbf{q}^r\mathbf{q}^{r'} = \mathbf{q}^{r+r'}$. *Puisque* $\mathscr{O}$ *est intègre et* $\mathbb{R}$ *est sans torsion,* $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$ *est intègre et nous noterons* $F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})$ *son corps des fractions. Si* $a = \sum_{r\in\mathbb{R}} a_r\mathbf{q}^r$, *nous noterons* $\deg(a)$ *(respectivement* $\mathrm{val}(a)$*) son degré (respectivement sa valuation), c'est-à-dire l'élément de* $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ *(respectivement* $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$*) défini par*

$$\deg(a) = \max\{r\in\mathbb{R} \mid a_r \neq 0\}$$
$$\textit{(respectivement}\quad \mathrm{val}(a) = \min\{r\in\mathbb{R} \mid a_r\neq 0\}\textit{).}$$

On prend $\deg(a) = -\infty$ (respectivement $\mathrm{val}(a) = +\infty$) si et seulement si $a = 0$. Les propriétés usuelles des degrés et valuations (vis-à-vis de la somme et du produit) sont bien sûr vérifiées. Commençons par une remarque facile :

Lemme 2.1.9. — *L'anneau* $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$ *est intégralement clos.*

Démonstration. — Cela résulte du fait que $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}] = \bigcup_{\Lambda\subset\mathbb{R}} \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\Lambda}]$, où Λ parcourt les sous-groupes de type fini de $\mathbb{R}$, et que, si Λ est de rang e, alors $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\Lambda}] \simeq \mathscr{O}[\mathbf{t}_1^{\pm1},\dots,\mathbf{t}_e^{\pm1}]$ est intégralement clos. □

Fixons une famille $k = (k_{\Omega,j})_{(\Omega,j)\in\mathbf{\Omega}_W^\circ}$ de nombres réels (comme d'habitude, si $H\in\Omega$ et $0\leqslant i\leqslant e_H - 1$, alors on posera $k_{H,j} = k_{\Omega,j}$). On appellera *algèbre de Hecke cyclotomique* (*de paramètre* k), et on notera $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$ la $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$-algèbre $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}] \overset{k}{\otimes}_{\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm1}]} \mathscr{H}_W^{\text{gén}}$, où $\overset{k}{\otimes}_{\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm1}]}$ désigne le produit tensoriel effectué en voyant $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$ comme une $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm1}]$-algèbre à travers le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \Theta_k^{\mathrm{cyc}}: & \mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm1}] & \longrightarrow & \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}] \\ & \mathbf{q}_{\Omega,j} & \longmapsto & \mathbf{q}^{k_{\Omega,j}}. \end{array}$$

Si le contexte est suffisamment clair, nous noterons $\otimes_{\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm1}]}$ le produit tensoriel $\overset{k}{\otimes}_{\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm1}]}$. Notons T_H (ou $T_H^{(k)}$ s'il peut y avoir une ambiguïté) l'image de $\mathbf{T}_H$ dans $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$; alors

(2.1.10) $\qquad \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$ *est engendrée par* $(T_H)_{H\in\mathscr{A}}$

et, si $H \in \mathscr{A}$, alors

$$\prod_{j=0}^{e_H-1}(T_H - \zeta_{e_H}^j \mathbf{q}^{|\mu_W| k_{H,j}}) = 0. \tag{2.1.11}$$

Remarque 2.1.12. — Il découle du lemme 2.1.8 qu'après la spécialisation $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}] \to \mathscr{O}$, $\mathbf{q}^r \mapsto 1$ (c'est le morphisme d'augmentation pour le groupe $\mathbb{R}$), on obtient $\mathscr{O} \otimes_{\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]} \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k) \simeq \mathscr{O} W$.

De même, $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(0) \simeq \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}] W$. ■

Notation. *On notera $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des familles $k = (k_{\Omega,j})_{(\Omega,j)\in\mathbf{\Omega}_W^\circ}$ de nombres réels telles que $\sum_{j=0}^{e_\Omega-1} k_{\Omega,j} = 0$ pour tout $\Omega \in \mathscr{A}/W$.*

Remarque 2.1.13. — Soit $(\lambda_\Omega)_{\Omega\in\mathscr{A}/W}$ une famille de nombres réels et, si $H \in \Omega$, posons $\lambda_H = \lambda_\Omega$. Soit $k'_{\Omega,j} = k_{\Omega,j} + \lambda_\Omega$ et notons $k' = (k'_{\Omega,j})_{(\Omega,j)\in\mathbf{\Omega}_W^\circ}$. Alors l'application $T_H^{(k)} \mapsto \mathbf{q}^{-\lambda_H} T_H^{(k')}$ s'étend en un isomorphisme de $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$-algèbres $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k) \simeq \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k')$.

Ainsi, si on prend $\lambda_\Omega = -(k_{\Omega,0} + k_{\Omega,1} + \cdots + k_{\Omega,e_\Omega-1})/e_\Omega$, alors $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k) \simeq \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k')$, avec $k' \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$. ■

2.2. Représentations

Hypothèse. *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposerons que l'hypothèse (Lib-Sym) est satisfaite.*

2.2.A. Cas générique. — Le résultat suivant est dû à Malle [**Mal**, théorème 5.2] (la difficulté réside dans le déploiement) :

***Théorème 2.2.1* (Malle)**. — *La $F(\mathbf{q}_{\text{gén}})$-algèbre $F(\mathbf{q}_{\text{gén}})\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$ est semi-simple et déployée.*

Puisque l'algèbre FW est elle aussi semi-simple et déployée (théorème de Benard-Bessis 1.4.1), il découle du théorème de déformation de Tits [**GePf**, théorème 7.4.6] que l'on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(W) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(F(\mathbf{q}_{\text{gén}})\mathscr{H}_W^{\text{gén}}) \\ \chi & \longmapsto & \chi^{\text{gén}} \end{array}$$

définie par la propriété suivante : χ est la spécialisation de $\chi^{\text{gén}}$ par $\mathbf{q}_{\Omega,j} \mapsto 1$. D'après [**GePf**, théorème 7.2.6], il existe une unique famille $(\mathbf{s}_\chi^{\text{gén}})_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)}$ d'éléments de $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$ telle que

$$\tau_{\mathscr{H}} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} \frac{1}{\mathbf{s}_\chi^{\text{gén}}}\, \chi^{\text{gén}}.$$

L'élément $\mathbf{s}_\chi^{\text{gén}}$ est appelé l'*élément de Schur générique associé à* χ. Les éléments de Schur ont été calculés, au cas par cas, par de nombreux auteurs (Alvis, Benson, Geck, Iancu, Lusztig, Malle, Mathas, Surowski,...) et cette description a été achevée par M. Chlouveraki qui en a déduit une propriété uniforme des éléments de Schur (voir [**Chl1**, théorème 3.2.5] ou [**Chl4**, théorème 4.2.5]). Ce résultat a été démontré indépendamment par le second auteur par un argument général utilisant les algèbres de Cherednik [**Rou**].

Théorème 2.2.2. — *Soit* $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$. *Alors il existe un entier naturel non nul* m, *un élément* $\xi_\chi^{\text{gén}} \in \mathscr{O}\setminus\{0\}$, *des monômes* $M_{\chi,0}$, $M_{\chi,1},\dots,M_{\chi,m}$ *dans* $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$ *et des polynômes* F*-cyclotomiques* $\Psi_{\chi,1},\dots,\Psi_{\chi,m}$ *tels que*

$$\mathbf{s}_\chi^{\text{gén}} = \xi_\chi^{\text{gén}} M_{\chi,0}\Psi_{\chi,1}(M_{\chi,1})\cdots\Psi_{\chi,m}(M_{\chi,m}).$$

De plus, $\Psi_{\chi,i}(\mathbf{t}) \neq \mathbf{t}-1$.

Remarque 2.2.3. — Un polynôme *F-cyclotomique* est un polynôme minimal, sur F, d'une racine de l'unité. Par exemple, sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{t}^2-\sqrt{2}\mathbf{t}+1$ est un polynôme F-cyclotomique (c'est le polynôme minimal d'une des racines primitives huitièmes de l'unité).

La dernière assertion découle du théorème de déformation de Tits [**GePf**, théorème 7.4.6] : en effet, d'après le lemme 2.1.8, la spécialisation $\mathbf{q}_{\Omega,j} \mapsto 1$ nous donne l'algèbre de groupe $\mathbf{k}W$ qui est semi-simple déployée. ■

Notons $\boldsymbol{\omega}_\chi^{\text{gén}} : \mathrm{Z}(F(\mathbf{q}_{\text{gén}})\mathscr{H}_W^{\text{gén}}) \longrightarrow F(\mathbf{q}_{\text{gén}})$ le caractère central associé au caractère χ : si $z \in \mathrm{Z}(F(\mathbf{q}_{\text{gén}})\mathscr{H}_W^{\text{gén}})$, alors $\boldsymbol{\omega}_\chi^{\text{gén}}(z)$ est l'élément de $F(\mathbf{q}_{\text{gén}})$ par lequel z agit sur un module simple de caractère $\chi^{\text{gén}}$. C'est un morphisme de $F(\mathbf{q}_{\text{gén}})$-algèbres. Puisque $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$ est intégralement clos, $\boldsymbol{\omega}_\chi^{\text{gén}}$ se restreint en un morphisme de $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$-algèbres $\boldsymbol{\omega}_\chi^{\text{gén}} : \mathrm{Z}(\mathscr{H}_W^{\text{gén}}) \longrightarrow \mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$.

Puisque $\pi \in \mathrm{Z}(B_W)$, son image dans $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$ appartient au centre de cette algèbre. On peut donc évaluer $\boldsymbol{\omega}_\chi^{\text{gén}}$ en π. Avant de donner la formule qui décrit cette évaluation, nous aurons besoin de la notation suivante : si $(\Omega, j) \in \boldsymbol{\Omega}_W^\circ$ et $H \in \Omega$, posons

$$m_{\Omega,j}^\chi = \langle \mathrm{Res}_{W_H}^W \chi, \det{}^j \rangle_{W_H}.$$

Alors, on a [**BrMi**, 4.17]

$$\frac{m^{\chi}_{\Omega,j}|\Omega|e_{\Omega}}{\chi(1)} \in \mathbb{N} \tag{2.2.4}$$

et [**BrMi**, proposition 4.16]

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{gén}}_{\chi}(\pi) = \prod_{(\Omega,j)\in\boldsymbol{\Omega}^{\circ}_{W}} \mathbf{q}_{\Omega,j}^{|\boldsymbol{\mu}_W|\cdot\frac{m^{\chi}_{\Omega,j}|\Omega|e_{\Omega}}{\chi(1)}}. \tag{2.2.5}$$

2.2.B. Cas cyclotomique. — Le corollaire suivant découle facilement de la forme des éléments de Schur donnée par le théorème 2.2.2 :

Corollaire 2.2.6. — *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, alors $\Theta^{\text{cyc}}_{k}(\mathbf{s}^{\text{gén}}_{\chi}) \neq 0$.*

Le résultat suivant découle du théorème de Malle 2.2.1 et du corollaire 2.2.6 (voir [**Chl4**, théorème 2.4.12 et proposition 1.4.1] et [**Chl4**, proposition 3.2.1]).

Corollaire 2.2.7. — *La $F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})$-algèbre $F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})\mathscr{H}^{\text{cyc}}_{W}(k)$ est semi-simple déployée.*

Par le théorème de déformation de Tits [**GePf**, théorème 7.4.6], on obtient encore une suite de bijections

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Irr}(W) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})\mathscr{H}^{\text{cyc}}_{W}(k)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(F(\mathbf{q}_{\text{gén}})\mathscr{H}^{\text{gén}}_{W}) \\ \chi & \longmapsto & \chi^{\text{cyc}}_{k} & \longmapsto & \chi^{\text{gén}} \end{array}$$

telles que $\chi^{\text{cyc}}_{k} = \Theta^{\text{cyc}}_{k} \circ \chi^{\text{gén}}$. On notera τ^{cyc}_{k} la spécialisation de la forme symétrisante $\boldsymbol{\tau}_{\mathscr{H}}$ en une forme symétrisante sur $\mathscr{H}^{\text{cyc}}_{W}(k)$ et, si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, on notera $s^{\text{cyc}}_{\chi}(k)$ l'élément de Schur associé à χ^{cyc}_{k} : on a alors

$$s^{\text{cyc}}_{\chi}(k) = \Theta^{\text{cyc}}_{k}(\mathbf{s}^{\text{gén}}_{\chi}) \tag{2.2.8}$$

et

$$\tau^{\text{cyc}}_{k} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} \frac{1}{s^{\text{cyc}}_{\chi}(k)}\, \chi^{\text{cyc}}_{k}. \tag{2.2.9}$$

Compte tenu du théorème 2.2.2, il découle de (2.2.8) que :

Corollaire 2.2.10. — *Soit $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$. Alors il existe un entier naturel non nul m, un élément $\xi^{\text{cyc}}_{\chi,k} \in \mathscr{O} \setminus \{0\}$, un nombre réel r_0, des nombres réels* ***non nuls*** *$r_1, \ldots, r_m$, et des polynômes F-cyclotomiques $\Psi_{\chi,1}, \ldots, \Psi_{\chi,m}$ tels que*

$$s^{\text{cyc}}_{\chi,k} = \xi^{\text{cyc}}_{\chi,k}\mathbf{q}^{r_0}\Psi_{\chi,1}(\mathbf{q}^{r_1})\cdots\Psi_{\chi,m}(\mathbf{q}^{r_m}).$$

Remarque 2.2.11. — L'entier m du corollaire 2.2.10 et l'entier m du théorème 2.2.2 ne sont pas forcément les mêmes, de même que les polynômes F-cyclotomiques $\Psi_{\chi,j}$: en effet, il se peut que certains des monômes $M_{\chi,j}$ du théorème 2.2.2 se spécialisent en $1=\mathbf{q}^0$ via le morphisme Θ_k^{cyc}. Dans ce cas, $\Psi_{\chi,j}(1)$ devient un élément de $\mathscr{O}$ et est intégré dans la constante $\xi_{\chi,k}^{\mathrm{cyc}}$: cela montre aussi que $\xi_\chi^{\mathrm{gén}}$ et $\xi_{\chi,k}^{\mathrm{cyc}}$ peuvent être différents. On peut simplement dire que $\xi_\chi^{\mathrm{gén}}$ divise $\xi_{\chi,k}^{\mathrm{cyc}}$ dans $\mathscr{O}$. ■

Pour finir, notons $\omega_{\chi,k}^{\mathrm{cyc}} : \mathrm{Z}(\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)) \longrightarrow \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$ le caractère central associé à χ_k^{cyc}. Posons

$$c_\chi(k)=\sum_{(\Omega,j)\in\mathbf{\Omega}_W^\circ} k_{\Omega,j}\cdot\frac{m_{\Omega,j}^\chi|\Omega|e_\Omega}{\chi(1)}.$$

Alors il découle de (2.2.5) que

$$\omega_{\chi,k}^{\mathrm{cyc}}(\pi)=\mathbf{q}^{|\boldsymbol{\mu}_W|c_\chi(k)}. \tag{2.2.12}$$

2.2.C. Familles de Hecke. — On appelle *anneau anti-cyclotomique*, et on note $\mathscr{O}^{\mathrm{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$, l'anneau

$$\mathscr{O}^{\mathrm{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]=\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}][\left((1-\mathbf{q}^r)^{-1}\right)_{r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}].$$

Si b est un idempotent central (pas nécessairement primitif) de $\mathscr{O}^{\mathrm{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$, nous noterons $\mathrm{Irr}_{\mathscr{H}}(W,b)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de W tels que $\chi_k^{\mathrm{cyc}}\in\mathrm{Irr}(F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)b)$.

Définition 2.2.13. — *On appellera* k***-famille de Hecke*** *toute partie de* $\mathrm{Irr}(W)$ *de la forme* $\mathrm{Irr}_{\mathscr{H}}(W,b)$*, où* b *est un idempotent primitif central de* $\mathscr{O}^{\mathrm{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$.

Les k-familles de Hecke forment donc une partition de $\mathrm{Irr}(W)$.

***Lemme 2.2.14* (Broué-Kim)**. — *Si* χ *et* χ' *sont dans la même* k*-famille de Hecke, alors* $c_\chi(k)=c_{\chi'}(k)$.

Démonstration. — On pourrait appliquer l'argument contenu dans [**BrKi**, proposition 2.9(2)]. Cependant, notre cadre est légèrement différent et nous proposons une preuve différente, reposant sur la forme particulière de $\omega_{\chi,k}^{\mathrm{cyc}}(\pi)$ (voir 2.2.12).

Notons $\mathscr{E}=\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$, avec $r_i\neq r_j$ si $i\neq j$, l'image de l'application $\mathrm{Irr}(W)\to\mathbb{R}$, $\chi\mapsto|\boldsymbol{\mu}_W|c_\chi(k)$. Si $1\leqslant j\leqslant m$, nous noterons

$$\mathscr{F}_j=\{\chi\in\mathrm{Irr}(W)\;\big|\;|\boldsymbol{\mu}_W|c_\chi(k)=r_j\}.$$

Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, nous noterons $e_{\chi,k}$ l'idempotent primitif central de $F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$ associé. On pose

$$b_j = \sum_{\chi \in \mathscr{F}_j} e_{\chi,k}.$$

Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que $b_j \in \mathscr{O}^{\mathrm{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$. Si on note $\tilde{\pi}$ l'image de π dans $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$, alors

$$\tilde{\pi} = \mathbf{q}^{r_1} b_1 + \mathbf{q}^{r_2} b_2 + \cdots + \mathbf{q}^{r_m} b_m.$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} b_1 & + & b_2 & + & \cdots & + & b_m & = & 1 \\ \mathbf{q}^{r_1} b_1 & + & \mathbf{q}^{r_2} b_2 & + & \cdots & + & \mathbf{q}^{r_m} b_m & = & \tilde{\pi} \\ & & \cdots & & & & & & \\ \mathbf{q}^{(m-1)r_1} b_1 & + & \mathbf{q}^{(m-1)r_2} b_2 & + & \cdots & + & \mathbf{q}^{(m-1)r_m} b_m & = & \tilde{\pi}^{m-1}. \end{array} \right.$$

Or, le déterminant de ce système est un déterminant de Vandermonde égal à

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\mathbf{q}^{r_i} - \mathbf{q}^{r_j}),$$

qui est inversible dans l'anneau de Hecke $\mathscr{O}^{\mathrm{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$ par construction. De plus, 1, $\tilde{\pi}, \ldots, \tilde{\pi}^{m-1} \in \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$, d'où le résultat. □

2.3. Cas des réflexions d'ordre 2

> **Hypothèse.** *Dans cette section, et dans cette section seulement, nous supposerons que toutes les réflexions de W sont d'ordre 2.*

Notons $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}] \to \mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$, $f \mapsto f^\dagger$ l'unique automorphisme involutif de $\mathscr{O}$-algèbre échangeant $\mathbf{q}_{\Omega,0}$ et $\mathbf{q}_{\Omega,1}$ pour tout $\Omega \in \mathscr{A}/W$. Notons encore $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]B_W \to \mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]B_W$, $a \mapsto a^\dagger$ l'unique automorphisme semi-linéaire (pour l'involution $f \mapsto f^\dagger$ de $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$) tel que $\beta^\dagger = \varepsilon(p_W(\beta))\beta$ pour tout $\beta \in B_W$. Les relations (2.1.4) sont stables par cet automorphisme. Il induit donc un automorphisme semi-linéaire $\mathscr{H}_W^{\text{gén}} \to \mathscr{H}_W^{\text{gén}}$, $h \mapsto h^\dagger$ de l'algèbre de Hecke générique.

Cet automorphisme, après la spécialisation $\mathbf{q}_{\Omega,j} \mapsto 1$, devient l'unique automorphisme $\mathscr{O}$-linéaire de $\mathscr{O}W$ qui envoie $w \in W$ sur $\varepsilon(w)w$. En d'autres termes, c'est l'automorphisme induit par le caractère linéaire ε.

De même, puisque $k_{\Omega,0} + k_{\Omega,1} = 0$, si on note encore $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}] \to \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$, $f \mapsto f^\dagger$ l'unique automorphisme de $\mathscr{O}$-algèbre tel que $(\mathbf{q}^r)^\dagger = \mathbf{q}^{-r}$, alors la spécialisation $\mathbf{q}_{\Omega,j} \mapsto \mathbf{q}^{k_{\Omega,j}}$ induit un automorphisme $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$-semi-linéaire de l'algèbre $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}$ toujours noté $h \mapsto h^\dagger$. Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, notons $(\chi^{\text{gén}})^\dagger$ (respectivement $(\chi_k^{\mathrm{cyc}})^\dagger$) la composition de $\chi^{\text{gén}}$ (respectivement χ_k^{cyc}) avec l'automorphisme $\dagger$: c'est un nouveau caractère irréductible de

$F(\mathbf{q}_{\text{gén}})\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$ (respectivement $F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})\mathscr{H}_W^{\text{cyc}}(k)$). Puisqu'il est déterminé par sa spécialisation via $\mathbf{q}_{\Omega,j} \mapsto 1$ (respectivement $\mathbf{q}^r \mapsto 1$), on a

$$(\chi^{\text{gén}})^\dagger = (\chi\varepsilon)^{\text{gén}} \qquad \text{et} \qquad (\chi_k^{\text{cyc}})^\dagger = (\chi\varepsilon)_k^{\text{cyc}}. \tag{2.3.1}$$

L'automorphisme $f \mapsto f^\dagger$ de $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$ s'étendant à l'anneau $\mathscr{O}^{\text{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$, le lemme suivant découle immédiatement de ces observations :

***Lemme* 2.3.2**. — *Supposons que toutes les réflexions de W sont d'ordre 2. Si $\mathscr{F}$ est une k-famille de Hecke, alors $\mathscr{F}\varepsilon$ est une k-famille de Hecke.*

2.4. Commentaire sur le choix de l'anneau

Il peut paraître étrange de travailler avec un anneau de coefficients aussi énorme (très loin d'être noethérien notamment). Tout d'abord, comme cela a été remarqué dans la preuve du lemme 2.1.9, cet anneau est une réunion croissante d'anneaux noethériens raisonnables, ce qui permet souvent de raisonner comme s'il était noethérien.

D'autre part, ce choix nous permet de travailler avec un anneau fixe, quel que soit notre choix de paramètre k : comme nous aurons besoin de faire varier k dans un espace de paramètres *réels*, ce choix s'est imposé. Comme cela a été vu dans le corollaire 2.2.7, le fait qu'il soit possible d'extraire des racines quelconques de toutes les "puissances" de $\mathbf{q}$ entraîne le déploiement de toutes les algèbres de Hecke cyclotomiques sur ce même anneau fixe.

Pour finir, cet anneau est de la forme $\mathscr{O}[\Gamma]$, où Γ est un groupe abélien totalement ordonné, ce qui permet, grâce aux notions de degrés et de valuation, de définir les invariants $\mathbf{a}$ et $\mathbf{A}$ associés aux caractères irréductibles de W. Comme nous le verrons aussi dans le chapitre 3, c'est le cadre général de la théorie de Kazhdan-Lusztig, dont nous souhaitons proposer une possible généralisation aux groupes de réflexions complexes.

2.5. Autres choix d'anneaux de base

Soit B une $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]$-algèbre commutative intègre, de corps des fractions F_B. On pose $\mathscr{H}_B = B \otimes_{\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]} \mathscr{H}_W^{\text{gén}}$.

Soit L_B le sous-groupe de $B^\times$ engendré par les $1_B q_{\Omega,j}$. C'est un quotient de $\mathbb{Z}^{\Omega_W^\circ}$. On suppose que L_B n'a pas de torsion, que $\mathscr{O}[L_B]$ s'injecte dans B, et que $F_{\mathscr{O}[L_B]} \cap B = \mathscr{O}[L_B]$.

Comme dans le corollaire 2.2.7, la F_B-algèbre $F_B\mathscr{H}_B$ est semi-simple déployée et on obtient une bijection $\mathrm{Irr}(W)\mathrm{iso}_0\,\mathrm{Irr}(F_B\mathscr{H}_B)$.

Exemple 2.5.1. — Soit A un groupe abélien sans torsion. On note, comme dans le lemme 2.1.9, que $\mathscr{O}[A]$ est intégralement clos. Considérons une application $q : \mathbf{\Omega}_W^\circ \to A$. Elle s'étend en un morphisme de groupes $\mathbb{Z}^{\mathbf{\Omega}_W^\circ} \to A$ et en un morphisme entre algèbres de groupes $\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}] \to \mathscr{O}[A]$. L'algèbre $B = \mathscr{O}[A]$ satisfait les hypothèses précédentes. ■

Soit $B^{\mathrm{cyc}} = B[(1-v)^{-1}_{v\in L_B-\{0\}}]$ (nous notons additivement les groupes abéliens dans cette section). On définit comme dans §2.2.C la notion de *B-famille de Hecke*.

Proposition 2.5.2. — *Les B-familles de Hecke coïncident avec les $\mathscr{O}[L_B]$-familles de Hecke.*

Démonstration. — Soit $A = L_B$. On a $B^{\mathrm{cyc}} \cap F_{\mathscr{O}[A]} = \mathscr{O}[A]^{\mathrm{cyc}}$. On en déduit que, si b est un idempotent primitif central de $F_{\mathscr{O}[A]}\mathscr{H}_{\mathscr{O}[A]}$ tel que $b \in B^{\mathrm{cyc}}\mathscr{H}_B$, alors $b \in \mathscr{O}[A]^{\mathrm{cyc}}\mathscr{H}_{\mathscr{O}[A]}$. □

La proposition précédente ramène l'étude des familles de Hecke au cas où $B = \mathscr{O}[A]$ et A est un groupe abélien sans torsion quotient de $\mathbb{Z}^{\mathbf{\Omega}_W^\circ}$.

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des monômes $M_{\chi,i}$ donnés par le théorème 2.2.2, pour $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$ et $i \neq 0$. C'est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^{\mathbf{\Omega}_W^\circ}$.

Considérons maintenant un groupe abélien sans torsion A et une application $q : \mathbf{\Omega}_W^\circ \to A$ comme dans l'exemple 2.5.1.

Soit A' un groupe abélien sans torsion et $f : A \to A'$ un morphisme surjectif de groupes.

Proposition 2.5.3. — *Si $q(\mathscr{M}) \cap \ker f = \{0\}$, alors les $\mathscr{O}[A]$-familles de Hecke coïncident avec les $\mathscr{O}[A']$-familles de Hecke.*

Démonstration. — Le morphisme f induit un morphisme surjectif entre algèbres de groupes $\mathscr{O}[A] \to \mathscr{O}[A']$ qui s'étend en un morphisme d'algèbres surjectif entre localisations $f : \mathscr{O}[A][(1-v)^{-1}_{v\in A-\ker f}] \to \mathscr{O}[A']^{\mathrm{cyc}}$. Le théorème 2.2.2 fournit des polynômes F-cyclotomiques $\Psi_{\chi,i}$. Soit

$$h \in F[A][\{\Psi_{\chi,i}(q(M_{\chi,i}))^{-1}\}_{M_{\chi,i}\notin\ker q}].$$

Si $h \in \mathscr{O}[A]^{\mathrm{cyc}}$, alors $h \in f^{-1}(\mathscr{O}[A']^{\mathrm{cyc}})$.

Il résulte du théorème 2.2.2 que les idempotents de $Z(F(A)\mathscr{H}_{\mathscr{O}[A]})$ sont dans l'algèbre $F[A][\{\Psi_{\chi,i}(q(M_{\chi,i}))^{-1}\}_{M_{\chi,i}\notin\ker q}]\mathscr{H}_{\mathscr{O}[A]}$. Par conséquent, tout idempotent de $Z(\mathscr{O}[A]^{\mathrm{cyc}}\mathscr{H}_{\mathscr{O}[A]})$ est contenu dans $\mathscr{O}[A][(1-v)^{-1}_{v\in A-\ker f}]\mathscr{H}_{\mathscr{O}[A]}$. La proposition C.1.2

montre que les idempotents centraux de $\mathscr{O}[A][(1-v)^{-1}_{v\in A-\ker f}]\mathscr{H}_{\mathscr{O}[A]}$ sont en bijection avec ceux de $\mathscr{O}[A']^{\mathrm{cyc}}\mathscr{H}_{\mathscr{O}[A']}$ et la proposition en découle. $\square$

Étant donnés A et q comme ci-dessus, il existe un morphisme de groupes $f : A \to \mathbb{Z}$ tel que $\ker f \cap q(\mathscr{M}) = \{0\}$. La proposition 2.5.3 ramène donc l'étude des $\mathscr{O}[A]$-familles de Hecke (et donc celle des B-familles de Hecke d'après ce qui précède) au cas de $\mathscr{O}[t^{\pm 1}]$-familles de Hecke, pour un choix d'entiers $m_{\Omega,j} \in \mathbb{Z}$ définissant un morphisme de groupes $\mathbb{Z}^{\mathbf{\Omega}^{\circ}_{W}} \to t^{\mathbb{Z}},\ q_{\Omega,j} \mapsto t^{m_{\Omega,j}}$.

CHAPITRE 3

SPÉCIFICITÉS DES GROUPES DE COXETER

3.1. Groupes

3.1.A. Groupe de réflexions. — Rappelons les équivalences classiques suivantes :

Proposition 3.1.1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe une partie S de* $\mathrm{Réf}(W)$ *telle que* (W,S) *soit un système de Coxeter.*
(2) $V \simeq V^*$ *comme* $\mathbf{k}W$*-modules.*
(3) *Il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et W-invariante* $V \times V \to \mathbf{k}$.
(4) *Il existe un sous-corps* $\mathbf{k}_{\mathbb{R}}$ *de* $\mathbf{k}$ *et un sous-*$\mathbf{k}_{\mathbb{R}}$*-espace vectoriel W-stable* $V_{\mathbf{k}_{\mathbb{R}}}$ *de V tels que* $V = \mathbf{k} \otimes_{\mathbf{k}_{\mathbb{R}}} V_{\mathbf{k}_{\mathbb{R}}}$ *et* $\mathbf{k}_{\mathbb{R}}$ *est isomorphe à un sous-corps de* $\mathbb{R}$.

Lorsque l'une des (ou toutes les) assertions de la proposition 3.1.1 sont vérifiées, nous dirons que *W est un groupe de Coxeter*. Lorsque ce sera le cas, le texte sera accompagné d'un liseret gris sur la gauche, comme ci-dessous.

> **Hypothèse, choix.** *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposerons que W est un groupe de Coxeter. Nous fixons alors un sous-corps $F_{\mathbb{R}}$ de $F \cap \mathbb{R}$ contenant les traces des éléments de W, un sous-$F_{\mathbb{R}}$-espace vectoriel W-stable $V_{F_{\mathbb{R}}}$ de V tel que $V = \mathbf{k} \otimes_{F_{\mathbb{R}}} V_{F_{\mathbb{R}}}$, un élément $v_{\mathbb{R}}$ de $V_{F_{\mathbb{R}}}$ tel que $s(v_{\mathbb{R}}) \neq v_{\mathbb{R}}$ pour tout $s \in \mathrm{Réf}(W)$ (et nous supposerons que $v_{\mathbb{C}} = v_{\mathbb{R}}$) et nous choisirons α_s de sorte que $\langle v_{\mathbb{R}}, \alpha_s \rangle > 0$ pour tout $s \in \mathrm{Réf}(W)$. Nous noterons alors S l'ensemble des $s \in \mathrm{Réf}(W)$ tels que $\mathrm{Ker}_{V_{\mathbb{R}}}(\alpha_s)$ soit le seul hyperplan séparant $v_{\mathbb{R}}$ de $s(v_{\mathbb{R}})$. Ainsi (W,S) est un système de Coxeter. Ces notations seront en vigueur dans tout le reste de ce mémoire, dès que W est un groupe de Coxeter.*

Il découle du théorème 1.4.1 que :

Lemme 3.1.2. — *La $F_{\mathbb{R}}$-algèbre $F_{\mathbb{R}}W$ est déployée. En particulier, les caractères de W sont à valeurs réelles, c'est-à-dire que $\chi = \chi^*$ pour tout caractère χ de W.*

Rappelons aussi que, par la force des choses,

Lemme 3.1.3. — *Si $s \in \mathrm{Réf}(W)$, alors s est d'ordre 2 et $\varepsilon(s) = -1$.*

En particulier, tous les résultats de §2.3 s'appliquent.

Corollaire 3.1.4. — *L'application $\mathrm{Réf}(W) \to \mathscr{A}$, $s \mapsto \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ est bijective et W-équivariante. En particulier, $|\mathscr{A}| = |\mathrm{Réf}(W)| = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ et $|\mathscr{A}/W| = |\mathrm{Réf}(W)/\sim|$.*

> **Notations.** *Notons $\ell : W \to \mathbb{N}$ la fonction longueur par rapport à S. Si $w = s_1 s_2 \cdots s_l$ avec $s_i \in S$ et $l = \ell(w)$, on dit alors que $w = s_1 s_2 \cdots s_l$ est une* ***décomposition réduite*** *de w. Nous noterons w_0 l'élément le plus long de W : on a $\ell(w_0) = |\mathrm{Réf}(W)| = |\mathscr{A}|$.*

Remarque 3.1.5. — Si $-\mathrm{Id}_V \in W$, alors $w_0 = -\mathrm{Id}_V$. Réciproquement, si w_0 est central et $V^W = 0$, alors $w_0 = -\mathrm{Id}_V$. ■

3.1.B. Groupe de tresses. — Pour s, $t \in S$, notons m_{st} l'ordre de st dans W. Pour $s \in S$ et $H = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$, notons $\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\sigma}_H$ le lacet image dans $V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}}/W$ du chemin

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}} \\ t & \longmapsto & e^{i\pi t}\left(\dfrac{v_{\mathbb{R}} - s(v_{\mathbb{R}})}{2} + \dfrac{v_{\mathbb{R}} + s(v_{\mathbb{R}})}{2}\right) \end{array}$$

de $v_{\mathbb{R}}$ vers $s(v_{\mathbb{R}})$. Avec ces notations, B_W admet la présentation suivante [**Bri**] :

$$B_W \quad : \quad \begin{cases} \text{Générateurs :} & (\boldsymbol{\sigma}_s)_{s \in S}, \\ \text{Relations :} & \forall\, s, t \in S,\ \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_s \boldsymbol{\sigma}_t \boldsymbol{\sigma}_s \cdots}_{m_{st}\text{ fois}} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_t \boldsymbol{\sigma}_s \boldsymbol{\sigma}_t \cdots}_{m_{st}\text{ fois}}. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Si $w = s_1 s_2 \cdots s_l$ est une décomposition réduite de w, on pose $\boldsymbol{\sigma}_w = \boldsymbol{\sigma}_{s_1} \boldsymbol{\sigma}_{s_2} \cdots \boldsymbol{\sigma}_{s_l}$: il est classique que $\boldsymbol{\sigma}_w$ ne dépend pas du choix de la décomposition réduite. D'autre part,

$$\pi = \boldsymbol{\sigma}_{w_0}^2. \tag{3.1.7}$$

3.2. Algèbres de Hecke

3.2.A. Cas générique. — Pour $s \in S$, posons $\mathbf{q}_{s,j} = \mathbf{q}_{\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_V),j}$. Il découle de 3.1.6 que l'algèbre de Hecke générique $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$ admet la présentation suivante, où $\mathbf{T}_s$ désigne l'image de $\boldsymbol{\sigma}_s$ dans $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$:

$$\mathscr{H}_W^{\text{gén}} \quad : \quad \begin{cases} \text{Générateurs :} & (\mathbf{T}_s)_{s\in S}, \\ \text{Relations :} & \forall\ s \in S,\ (\mathbf{T}_s - \mathbf{q}_{s,0}^2)(\mathbf{T}_s + \mathbf{q}_{s,1}^2) = 0, \\ & \forall\ s,t \in S,\ \underbrace{\mathbf{T}_s\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s\cdots}_{m_{st}\text{ fois}} = \underbrace{\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s\mathbf{T}_t\cdots}_{m_{st}\text{ fois}}. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Si $w = s_1 s_2 \cdots s_l$ est une *décomposition réduite* de w, posons $\mathbf{T}_w = \mathbf{T}_{s_1}\mathbf{T}_{s_2}\cdots\mathbf{T}_{s_l}$: c'est l'image de $\boldsymbol{\sigma}_w$ dans $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$ et donc $\mathbf{T}_w$ ne dépend pas du choix de la décomposition réduite. De plus,

$$\mathscr{H}_W^{\text{gén}} = \bigoplus_{w\in W} \mathscr{O}[\mathbf{q}_{\text{gén}}^{\pm 1}]\,\mathbf{T}_w. \tag{3.2.2}$$

Notons que $\mathbf{T}_w\mathbf{T}_{w'} = \mathbf{T}_{ww'}$ si $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$. Remarquons aussi que la base $(\mathbf{T}_w)_{w\in W}$ de $\mathscr{H}_W^{\text{gén}}$ dépend fortement du choix de S, c'est-à-dire de $v_{\mathbb{R}}$.

3.2.B. Cas cyclotomique. — Fixons dans cette section $k = (k_{\Omega,j})_{\Omega\in\mathscr{A}/W, j\in\{0,1\}} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$: la remarque 2.1.13 montre que supposer $k_{\Omega,0} + k_{\Omega,1} = 0$ ne restreint pas la classe d'algèbres à laquelle on s'intéresse. Pour $H \in \mathscr{A}$, on posera $c_{s_H} = k_{H,0} - k_{H,1} = 2k_{H,0} = -2k_{H,1}$: cette notation sera justifiée dans le chapitre 4. Ainsi, l'algèbre de Hecke cyclotomique $\mathscr{H}_W^{\text{cyc}}(k)$ est la $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$-algèbre admettant la présentation suivante :

$$\mathscr{H}_W^{\text{cyc}}(k) \quad : \quad \begin{cases} \text{Générateurs :} & (T_s)_{s\in S}, \\ \text{Relations :} & \forall\ s \in S,\ (T_s - \mathbf{q}^{c_s})(T_s + \mathbf{q}^{-c_s}) = 0, \\ & \forall\ s,t \in S,\ \underbrace{T_sT_tT_s\cdots}_{m_{st}\text{ fois}} = \underbrace{T_tT_sT_t\cdots}_{m_{st}\text{ fois}}. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

3.3. Cellules de Kazhdan-Lusztig

> **Hypothèse.** *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, nous fixons une famille* $k = (k_{\Omega,j})_{\Omega\in\mathscr{A}/W, j\in\{0,1\}} \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$. *Nous noterons* $c : \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{R}$, $s \mapsto c_s$.

La donnée de la fonction $c : \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{R}$ constante sur les classes de conjugaison est équivalente à la donnée de k.

3.3.A. Base de Kazhdan-Lusztig. — L'involution $a \mapsto \bar{a}$ de $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$ s'étend en une involution $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$-semilinéaire de l'algèbre $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$ en posant

$$\overline{T}_w = T_{w^{-1}}^{-1}.$$

Si $\mathbb{X}$ est une partie de $\mathbb{R}$, nous noterons $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{X}}] = \bigoplus_{r\in\mathbb{X}} \mathscr{O}\ \mathbf{q}^r$. Nous poserons

$$\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{>0} = \bigoplus_{w\in W} \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}_{>0}}]\ T_w.$$

Le théorème suivant est démontré dans [**KaLu**].

***Théorème 3.3.1* (Kazhdan-Lusztig).** — *Pour $w \in W$, il existe un unique élément $C_w \in \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$ tel que*

$$\begin{cases} \overline{C}_w = C_w, \\ C_w \equiv T_w \mod \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{>0}. \end{cases}$$

La famille $(C_w)_{w\in W}$ est une $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$-base de $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$.

Notons que C_w dépend de k (i.e., de c). Par exemple, si $s \in S$, alors

$$C_s = \begin{cases} T_s - q^{c_s} & \text{si } c_s > 0, \\ T_s & \text{si } c_s = 0, \\ T_s + q^{-c_s} & \text{si } c_s < 0. \end{cases}$$

De même, tout comme T_w, C_w dépend du choix de S. La base $(C_w)_{w\in W}$ sera appelée la base de Kazhdan-Lusztig de $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$: si nécessaire, C_w sera noté $C_w^{(k)}$.

3.3.B. Cellules de Kazhdan-Lusztig. — Pour x, $y \in W$, nous écrirons $x \xleftarrow{L,c} y$ s'il existe $h \in \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$ tel que C_x apparaît avec un coefficient non nul dans la décomposition de de hC_y dans la base de Kazhdan-Lusztig. Nous noterons $\leqslant_L^c$ la clôture transitive de cette relation ; c'est un pré-ordre et nous noterons $\sim_L^{\mathrm{KL},c}$ la relation d'équivalence associée.

On définit de même $\xleftarrow{R,c}$ en multipliant à droite par h ainsi que $\leqslant_R^c$ et $\sim_R^{\mathrm{KL},c}$. Nous noterons $\leqslant_{LR}^c$ la relation réflexive et symétrique engendrée par $\leqslant_L^c$ et $\leqslant_R^c$, et $\sim_{LR}^{\mathrm{KL},c}$ désignera la relation d'équivalence associée.

Définition 3.3.2. — *On appellera c-**cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche** (respectivement **à droite**, respectivement **bilatère**) de W une classe d'équivalence pour la relation $\sim_L^{\mathrm{KL},c}$ (respectivement $\sim_R^{\mathrm{KL},c}$, respectivement $\sim_{LR}^{\mathrm{KL},c}$). Si $? \in \{L, R, LR\}$, on notera ${}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_?^c(W)$ l'ensemble correspondant de c-cellules de Kazhdan-Lusztig de W.*

Si $? \in \{L, R, LR\}$ et si Γ est une classe d'équivalence pour la relation $\sim_?$ (c'est-à-dire une c-cellule de Kazhdan-Lusztig du bon type), posons

$$\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{\leqslant_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma} = \bigoplus_{w \leqslant_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma} \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]\, C_w \qquad \text{et} \qquad \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{<_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma} = \bigoplus_{w <_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma} \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]\, C_w,$$

ainsi que

$$\mathscr{M}_\Gamma^? = \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{\leqslant_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma} / \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{<_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma}.$$

Par construction, $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{\leqslant_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma}$ et $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{<_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma}$ sont des idéaux (à gauche si $? = L$, à droite si $? = R$ ou bilatères si $? = LR$) et $\mathscr{M}_\Gamma^?$ est un $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$-module à gauche si $? = L$, à droite si $? = R$ ou un $(\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k), \mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k))$-bimodule si $? = LR$. Notons que

(3.3.3) *$\mathscr{M}_\Gamma^?$ est un $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$-module libre de base l'image de $(C_w)_{w\in\Gamma}$.*

Définition 3.3.4. — *Si C est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche de W, on notera $[C]_c^{\mathrm{KL}}$ la classe de $\mathbf{k} \otimes_{\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]} \mathscr{M}_C^L$ dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W) = \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(W)$ (ici, le produit tensoriel $\mathbf{k} \otimes_{\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]} -$ est vu à travers la spécialisation $\mathbf{q}^r \mapsto 1$). On appellera* KL-***caractère c-cellulaire*** *de W tout caractère de la forme $[C]_c^{\mathrm{KL}}$, où C est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche.*

Si Γ est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère de W, on notera $\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{KL}}(W)$ l'ensemble des caractères irréductibles de W apparaissant dans $\mathbf{k} \otimes_{\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]} \mathscr{M}_\Gamma^{LR}$, vu comme $\mathbf{k}W$-module à gauche. On appellera ***c-famille de Kazhdan-Lusztig*** *toute partie de $\mathrm{Irr}(W)$ de la forme $\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{KL}}(W)$ où Γ est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère. Nous dirons que $\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{KL}}(W)$ est la c-famille de Kazhdan-Lusztig* ***asociée*** *à Γ, ou que Γ est la c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère* ***recouvrant*** *$\mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{KL}}(W)$.*

Puisque $\mathbf{k}W$ est semi-simple et que $\mathbf{k} \otimes_{\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]} \mathscr{M}_\Gamma^{LR}$ est un quotient d'idéaux bilatères de $\mathbf{k}W$, les k-familles de Kazhdan-Lusztig forment une partition de $\mathrm{Irr}(W)$

(3.3.5) $$\mathrm{Irr}(W) = \coprod_{\Gamma \in {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_{LR}^c(W)} \mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{KL}}(W)$$

et, puisque $\mathbf{k}W$ est déployée,

(3.3.6) $$|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_\Gamma^{\mathrm{KL}}(W)} \chi(1)^2.$$

D'autre part, si C est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig *à gauche* de W, posons

$$[C]_c^{\mathrm{KL}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{KL}}\, \chi,$$

où $\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{KL}} \in \mathbb{N}$. Alors :

Lemme 3.3.7. — *Avec les notations précédentes, on a :*

(a) *Si* $C \in {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W)$, *alors* $\displaystyle\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{KL}}\ \chi(1) = |C|$.

(b) *Si* $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, *alors* $\displaystyle\sum_{C \in {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W)} \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{KL}} = \chi(1)$.

Démonstration. — L'égalité (a) exprime simplement que la dimension de $[C]_c^{\mathrm{KL}}$ est égale à $|C|$ d'après 3.3.3. L'égalité (b) traduit le fait que, puisque W est la réunion disjointe des c-cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche, on a $[\mathbf{k}W]_{\mathbf{k}W} = \sum_{C \in {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W)} [C]_c^{\mathrm{KL}}$. □

3.3.C. Autres propriétés des cellules. — L'algèbre $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$ est muni d'un anti-automorphisme $\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$-linéaire qui envoie T_w sur $T_{w^{-1}}$: il sera noté $h \mapsto h^*$. Il est immédiat que

$$C_w^* = C_{w^{-1}}, \tag{3.3.8}$$

ce qui implique que, si x et y sont deux éléments de W, alors

$$x \leqslant_L^c y \text{ si et seulement si } x^{-1} \leqslant_R^c y^{-1} \tag{3.3.9}$$

et donc

$$x \sim_L^{\mathrm{KL},c} y \text{ si et seulement si } x^{-1} \sim_R^{\mathrm{KL},c} y^{-1}. \tag{3.3.10}$$

En d'autres termes, l'application ${}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W) \to {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_R^c(W)$, $\Gamma \mapsto \Gamma^{-1}$, est bien définie et bijective.

Moins évidente est la propriété suivante [**Lus3**, corollaire 11.7]

$$x \leqslant_?^c y \text{ si et seulement si } w_0 y \leqslant_?^c w_0 x \text{ si et seulement si } y w_0 \leqslant_?^c x w_0. \tag{3.3.11}$$

Il en découle que

$$x \sim_?^c y \text{ si et seulement si } w_0 x \sim_?^c w_0 y \text{ si et seulement si } x w_0 \sim_?^c y w_0. \tag{3.3.12}$$

Par ailleurs, si $C \in {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W)$, alors [**Lus3**, proposition 21.5]

$$[w_0 C]_c^{\mathrm{KL}} = [C w_0]_c^{\mathrm{KL}} = [C]_c^{\mathrm{KL}} \cdot \varepsilon. \tag{3.3.13}$$

De même, si $\Gamma \in {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_{LR}^c(W)$, alors [**Lus3**, proposition 21.5]

$$\mathrm{Irr}_{w_0\Gamma}^{\mathrm{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma w_0}^{\mathrm{KL}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathrm{KL}}(W) \cdot \varepsilon. \tag{3.3.14}$$

Cela montre en particulier que

$$w_0 \Gamma w_0 = \Gamma. \tag{3.3.15}$$

La tensorisation par ε induit donc une permutation des c-familles de Kazhdan-Lusztig et des c-caractères cellulaires.

Si $\gamma : W \to \mathbf{k}^\times$ est un caractère linéaire (notons que γ est à valeurs dans $\{1, -1\}$), on note $\gamma \cdot c : \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \gamma(s) c_s$. Le lemme suivant est démontré dans [**Bon2**, corollaire 2.5 et 2.6] :

Lemme 3.3.16. — *Soit $\gamma \in W^\wedge$ et soit $? \in \{L, R, LR\}$. Alors :*

(a) *Les relations $\leqslant_?^c$ et $\leqslant_?^{\gamma\cdot c}$ coïncident.*
(b) *Les relations $\sim_?^{\mathrm{KL},c}$ et $\sim_?^{\mathrm{KL},\gamma\cdot c}$ coïncident.*
(c) *Si $C \in {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^c(W) = {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L^{\gamma\cdot c}(W)$, alors $[C]_c^{\mathrm{KL}} = \gamma \cdot [C]_{\gamma\cdot c}^{\mathrm{KL}}$.*

Le résultat suivant est facile [**Lus3**, lemme 8.6] :

Lemme 3.3.17. — *Supposons $c_s \neq 0$ pour tout $s \in \mathrm{Réf}(W)$. Alors :*

(a) *$\{1\}$ et $\{w_0\}$ sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig (à gauche, à droite et bilatères).*
(b) *Notons $\gamma : W \to \mathbf{k}^\times$ l'unique caractère linéaire tel que $\gamma(s) = 1$ si $c_s > 0$ et $\gamma(s) = -1$ si $c_s < 0$. Alors $[1]_{\mathbf{k}W} = \gamma$ et $[w_0]_{\mathbf{k}W} = \gamma\varepsilon$.*

Remarque 3.3.18. — En fait, [**Lus3**, lemme 8.6] est démontré lorsque $c_s > 0$ pour tout s. Pour passer à l'énoncé général du lemme 3.3.17, il suffit alors d'appliquer le lemme 3.3.16. ■

Le dernier lemme exprime une forme de compatibilité entre les notions de cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche (ou à droite) et les sous-groupes paraboliques standard : il faut noter qu'il n'y a pas de résultat analogue pour les cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères. Nous aurons besoin de la notation suivante : pour $I \subset S$, notons W_I le sous-groupe de W engendré par I (c'est un *sous-groupe parabolique standard* de W) et notons W^I l'ensemble des éléments $x \in W$ qui sont de longueur minimale dans xW_I (rappelons que l'application $W^I \to W/W_I$, $x \mapsto xW_I$ est bijective). Notons c_I la restriction de c à $\mathrm{Réf}(W_I) = \mathrm{Réf}(W) \cap W_I$.

Lemme 3.3.19. — *Soit $I \subset S$. Alors :*

(a) *Si Γ est une c_I-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche de W_I, alors $W^I \cdot \Gamma$ est une union de c-cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche de W.*
(b) *Si $w, w' \in W_I$ et $x \in W^I$ sont tels que $w \leqslant_L^{c_I} w'$ (respectivement $w \sim_L^{\mathrm{KL},c_I} w'$), alors $wx^{-1} \leqslant_L^{c_I} w'x^{-1}$ (respectivement $wx^{-1} \sim_L^{\mathrm{KL},c_I} w'x^{-1}$).*

Démonstration. — (a) est dû à Geck [**Ge1**, théorème 1] tandis que (b) est dû à Lusztig [**Lus3**, proposition 9.11]. □

Pour finir, rappelons que Lusztig a proposé de nombreuses conjectures concernant les cellules et sa fonction **a** [**Lus3**, §14.2, conjectures P1-P15]. Nous ne les rappellerons pas toutes ici mais mentionnons simplement les deux suivantes :

Conjectures 3.3.20 (Lusztig). (a) *Toute c-cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche contient une involution. Ainsi, si $w \in W$, alors $w \sim_{LR}^{\mathrm{KL},c} w^{-1}$.*

(b) *Si $x \sim_{LR}^{\mathrm{KL},c} y$ et $x \leqslant_L^c y$, alors $x \sim_L^{\mathrm{KL},c} y$.*

(c) *$\sim_{LR}^{\mathrm{KL},c}$ est la relation d'équivalence engendrée par $\sim_L^{\mathrm{KL},c}$ et $\sim_R^{\mathrm{KL},c}$.*

***Exemple 3.3.21* (Paramètres nuls)**. — Si $c = 0$ (i.e. si $c_s = 0$ pour tout s), alors $C_w = T_w$, $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(0) = \mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}][W]$ et il n'y a qu'une seule 0-cellule de Kazhdan-Lusztig (à gauche, à droite, ou bilatère), c'est W. On a alors $\mathrm{Irr}_W^{\mathrm{KL},0}(W) = \mathrm{Irr}(W)$ et $[W]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{KL},0} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\chi$. ■

PARTIE II

ALGÈBRE DE CHEREDNIK

CHAPITRE 4

ALGÈBRE DE CHEREDNIK GÉNÉRIQUE

Notons $\mathscr{C}$ le $\mathbf{k}$-espace vectoriel des fonctions $c : \text{Réf}(W) \to \mathbf{k}$, $s \mapsto c_s$ qui sont constantes sur les classes de conjugaison. Nous l'appellerons *espace des paramètres* et nous l'identifions avec l'espace des fonctions $\text{Réf}(W)/W \to \mathbf{k}$.

Si $s \in \text{Réf}(W)$ (ou $s \in \text{Réf}(W)/W$), nous noterons C_s la forme linéaire sur $\mathscr{C}$ correspondant à l'évaluation en s. L'algèbre $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ des fonctions polynomiales sur $\mathscr{C}$ est alors l'algèbre de polynômes en les indéterminées $(C_s)_{s\in\text{Réf}(W)/W}$:

$$\mathbf{k}[\mathscr{C}] = \mathbf{k}[(C_s)_{s\in\text{Réf}(W)/W}].$$

Notons $\widetilde{\mathscr{C}}$ le $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathbf{k}\times\mathscr{C}$ et notons $T : \widetilde{\mathscr{C}} \to \mathbf{k}$, $(t,c) \mapsto t$. Ainsi, $T \in \widetilde{\mathscr{C}}^*$ et

$$\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] = \mathbf{k}[T, (C_s)_{s\in\text{Réf}(W)/W}].$$

4.1. Définition

Nous appellerons *algèbre de Cherednik générique rationnelle* (ou plus simplement *algèbre de Cherednik générique*) la $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$-algèbre $\widetilde{\mathbf{H}}$ quotient de $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes (\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W)$ par l'idéal engendré par les relations suivantes (ici, $\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*)$ désigne l'algèbre tensorielle de $V \oplus V^*$) :

$$\text{(4.1.1)} \qquad \begin{cases} [x,x'] = [y,y'] = 0, \\ [y,x] = T\langle y,x\rangle + \displaystyle\sum_{s\in\text{Réf}(W)} (\varepsilon(s)-1)\, C_s\, \frac{\langle y,\alpha_s\rangle\cdot\langle \alpha_s^\vee, x\rangle}{\langle \alpha_s^\vee,\alpha_s\rangle}\, s, \end{cases}$$

pour tous x, $x' \in V^*$ et y, $y' \in V$.

Remarque 4.1.2. — Grâce à (1.1.2), la deuxième relation peut aussi s'écrire

$$\text{(4.1.3)} \qquad [y,x] = T\langle y,x\rangle + \sum_{s\in\text{Réf}(W)} C_s\langle s(y)-y,x\rangle\, s,$$

ce qui évite d'utiliser les α_s et les $\alpha_s^\vee$. ■

4.1.A. Décomposition PBW. — Compte tenu des relations 4.1.1, les faits suivants sont immédiats :

- Il existe un unique morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{k}[V] \to \widetilde{\mathbf{H}}$ qui envoie $y \in V^*$ sur la classe de $y \in \mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W$ dans $\widetilde{\mathbf{H}}$.
- Il existe un unique morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{k}[V^*] \to \widetilde{\mathbf{H}}$ qui envoie $x \in V$ sur la classe de $x \in \mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W$ dans $\widetilde{\mathbf{H}}$.
- Il existe un unique morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{k}W \to \widetilde{\mathbf{H}}$ qui envoie $w \in W$ sur la classe de $w \in \mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W$ dans $\widetilde{\mathbf{H}}$.
- L'application $\mathbf{k}$-linéaire $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*] \longrightarrow \widetilde{\mathbf{H}}$ induite par les trois morphismes précédents et par la multiplication est surjective. Elle est de plus $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$-linéaire.

Cette dernière propriété est en fait grandement améliorée par le résultat fondamental suivant :

***Théorème 4.1.4* (Etingof-Ginzburg).** — *La multiplication* $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*] \longrightarrow \widetilde{\mathbf{H}}$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$*-modules.*

Démonstration. — Dans [**EtGi**, théorème 1.3], ce théorème n'est pas énoncé dans cette version "générique". Néanmoins, il s'en déduit aisément de la façon suivante. Soit $(\beta_i)_{i \in I}$ une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*]$ et soit f un élément du noyau de l'application linéaire de l'énoncé. Il existe alors une unique famille à support fini $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$ tels que $f = \sum_{i \in I} f_i \otimes \beta_i$. Mais, d'après [**EtGi**, théorème 1.3], la spécialisation en tout $(t, c) \in \widetilde{\mathscr{C}}$ du théorème est vraie. Par conséquent, $f_i(t, c) = 0$ pour tout $i \in I$ et tout $(t, c) \in \widetilde{\mathscr{C}}$, ce qui montre que $f_i = 0$ (car $\mathbf{k}$ est infini) et donc que $f = 0$. □

4.1.B. Hyperplans, changement de variables, conventions. — Rappelons que $(C_s)_{s \in \text{Réf}(W)/W}$ est une $\mathbf{k}$-base de $\mathscr{C}^*$. Nous allons construire ici une nouvelle base de $\mathscr{C}^*$. Pour cela, posons $C_1 = 0 \in \mathscr{C}^*$

Nous notons $(K_{\Omega,j})_{(\Omega,j) \in \mathbf{\Omega}_W^\circ}$ l'unique famille d'éléments de $\mathscr{C}^*$ telle que, pour tout $H \in \mathscr{A}$ et pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, e_H - 1\}$, on ait

$$C_{s_H^i} = \sum_{j=0}^{e_H - 1} \zeta_{e_H}^{i(j-1)} K_{H,j}.$$

Ici, $K_{H,j}$ désigne la variable $K_{\Omega,j}$, où Ω est la W-orbite de H. L'existence et l'unicité de la famille $(K_{\Omega,j})_{(\Omega,j) \in \mathbf{\Omega}_W}$ découle de l'invertibilité du déterminant de Vandermonde, et on obtient également, en se restreignant aux éléments de $\mathbf{\Omega}_W \subset \mathbf{\Omega}_W^\circ$,

(4.1.5) $\qquad (K_{\Omega,j})_{(\Omega,j) \in \mathbf{\Omega}_W}$ *est une* $\mathbf{k}$*-base de* $\mathscr{C}^*$.

Notons que $K_{\Omega,0}$ est déterminé par l'équation $K_{\Omega,0}+K_{\Omega,1}+\cdots+K_{\Omega,e_\Omega-1}=C_1=0$. Pour finir, notons l'égalité suivante :

$$\sum_{s\in\text{Réf}(W)} \varepsilon(s)\, C_s = \sum_{H\in\mathscr{A}} e_H K_{H,0} = -\sum_{H\in\mathscr{A}}\sum_{i=1}^{e_H-1} e_H K_{H,i}. \tag{4.1.6}$$

Si $H\in\mathscr{A}$, on note $\alpha_H\in V^*$ une forme linéaire telle que $H=\ker(\alpha_H)$ et $\alpha_H^\vee\in V$ un vecteur tel que $V=H\oplus\mathbf{k}\alpha_H^\vee$ et tel que la droite $\mathbf{k}\alpha_H^\vee$ soit stable par W_H. Avec les conventions ci-dessus, la deuxième relation de (4.1.1) s'écrit

$$[y,x]=T\langle y,x\rangle+\sum_{H\in\mathscr{A}}\sum_{i=0}^{e_H-1} e_H(K_{H,i}-K_{H,i+1})\frac{\langle y,\alpha_H\rangle\cdot\langle\alpha_H^\vee,x\rangle}{\langle\alpha_H^\vee,\alpha_H\rangle}\varepsilon_{H,i} \tag{4.1.7}$$

pour $x\in V^*$ et $y\in V$, où $\varepsilon_{H,i}=e_H^{-1}\sum_{w\in W_H}\varepsilon(w)^i\, w$.

COMMENTAIRE - La convention utilisée ici dans la définition de l'algèbre de Cherednik n'est pas celle de [**GGOR**, §3.1] : en effet, nous avons rajouté un coefficient $\varepsilon(s)-1$ devant le terme C_s. En revanche, c'est la même que celle de [**EtGi**, §1.15], avec $c_s=c_{\alpha_s}$ (lorsque W est un groupe de Coxeter). D'autre part, les $k_{H,i}$ de [**GGOR**] sont reliés aux $K_{H,i}$ ci-dessus par $k_{H,i}=K_{H,0}-K_{H,i}$. ■

4.1.C. Spécialisation. — Si $(t,c)\in\widetilde{\mathscr{C}}$, nous noterons $\widetilde{\mathfrak{C}}_{t,c}$ l'idéal maximal de $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$ défini par $\widetilde{\mathfrak{C}}_{t,c}=\{f\in\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]\mid f(t,c)=0\}$: c'est l'idéal engendré par $T-t$ et $(C_s-c_s)_{s\in\text{Réf}(W)/W}$. Posons alors

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}=\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]/\widetilde{\mathfrak{C}}_{t,c}\otimes_{\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]}\widetilde{\mathbf{H}}=\widetilde{\mathbf{H}}/\widetilde{\mathfrak{C}}_{t,c}\widetilde{\mathbf{H}}.$$

La $\mathbf{k}$-algèbre $\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}$ est le quotient de $\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V\oplus V^*)\rtimes W$ par l'idéal engendré par les relations suivantes :

$$\begin{cases}[x,x']=[y,y']=0,\\[2mm] [y,x]=t\langle y,x\rangle+\displaystyle\sum_{s\in\text{Réf}(W)}(\varepsilon(s)-1)\,c_s\,\frac{\langle y,\alpha_s\rangle\cdot\langle\alpha_s^\vee,x\rangle}{\langle\alpha_s^\vee,\alpha_s\rangle}\,s,\end{cases} \tag{4.1.8}$$

pour $x,\,x'\in V^*$ et $y,\,y'\in V$.

Exemple 4.1.9. — Il est immédiat que $\widetilde{\mathbf{H}}_{0,0}=\mathbf{k}[V\oplus V^*]\rtimes W$. ■

4.2. Graduations

L'algèbre $\widetilde{\mathbf{H}}$ possède une $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-graduation naturelle, grâce à laquelle on peut associer, à chaque morphisme de monoïdes $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$), une $\mathbb{Z}$-graduation (ou une $\mathbb{N}$-graduation).

On bi-gradue (sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) l'algèbre tensorielle étendue $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]\otimes\big(\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V\oplus V^*)\rtimes W\big)$ en décrétant que les éléments de V ont pour bi-degré $(1,0)$, les éléments de V^* ont pour bi-degré $(0,1)$, les éléments de $\widetilde{\mathscr{C}}^*$ ont pour degré $(1,1)$ et ceux de W ont pour degré $(0,0)$, alors les relations 4.1.1 deviennent homogènes. Ainsi, $\widetilde{\mathbf{H}}$ hérite d'une $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-graduation dont nous noterons $\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j]$ la composante homogène de bi-degré (i,j). Alors

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j]\quad\text{et}\quad\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[0,0]=\mathbf{k}W.$$

D'autre part, chaque composante homogène est de dimension finie sur $\mathbf{k}$.

Si $\varphi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ est un morphisme de monoïdes, alors $\widetilde{\mathbf{H}}$ hérite d'une $\mathbb{Z}$-graduation dont nous noterons $\widetilde{\mathbf{H}}^{\varphi}[i]$ la composante homogène de degré i :

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{\varphi}[i]=\bigoplus_{\varphi(a,b)=i}\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[a,b].$$

Dans cette graduation, les éléments de V ont pour degré $\varphi(1,0)$, les éléments de V^* ont pour degré $\varphi(0,1)$, les éléments de $\widetilde{\mathscr{C}}^*$ ont pour degré $\varphi(1,1)$ et ceux de W ont pour degré 0.

***Exemple 4.2.1* ($\mathbb{Z}$-graduation).** — Le morphisme de monoïdes $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $(i,j)\mapsto j-i$ induit une $\mathbb{Z}$-graduation sur $\widetilde{\mathbf{H}}$ pour laquelle les éléments de V ont pour degré -1, les éléments de V^* ont pour degré 1 et les éléments de $\widetilde{\mathscr{C}}^*$ et W ont pour degré 0. Nous noterons $\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]$ la composante homogène de degré i. Alors

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i].$$

Par spécialisation en tout $(t,c)\in\widetilde{\mathscr{C}}$, l'algèbre $\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}$ hérite d'une $\mathbb{Z}$-graduation dont la composante homogène de degré i sera notée $\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}_{t,c}[i]$. ■

***Exemple 4.2.2* ($\mathbb{N}$-graduation).** — Le morphisme de monoïdes $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $(i,j)\mapsto i+j$ induit une $\mathbb{N}$-graduation sur $\widetilde{\mathbf{H}}$ pour laquelle les éléments de V ou de V^* ont pour degré 1, les éléments de $\widetilde{\mathscr{C}}^*$ ont pour degré 2 et les éléments de W ont pour degré 0. Nous noterons $\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}[i]$ la composante homogène de degré i. Alors

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}[i]\quad\text{et}\quad\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}[0]=\mathbf{k}W.$$

Notons que $\dim_{\mathbf{k}} \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}[i] < \infty$ pour tout i. Cette graduation ne s'hérite pas par spécialisation en tout $(t,c) \in \widetilde{\mathscr{C}}$: elle s'hérite seulement par la spécialisation en $(0,0)$: on retrouve la $\mathbb{N}$-graduation usuelle sur $\widetilde{\mathbf{H}}_{0,0} = \mathbf{k}[V \times V^*] \rtimes W$ (voir l'exemple 4.1.9). ■

4.3. Filtration

Munissons l'algèbre tensorielle étendue $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes \big(\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W\big)$ de la graduation pour laquelle les éléments de V et V^* ont pour degré 1, tandis que les éléments de $\widetilde{\mathscr{C}}^*$ et W ont pour degré 0. Si $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{F}_n\widetilde{\mathbf{H}}$ l'image dans $\widetilde{\mathbf{H}}$ de l'espace formé des éléments de degré $\leqslant n$. Alors

$$\mathscr{F}_0\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes \mathbf{k}W \subset \mathscr{F}_1\widetilde{\mathbf{H}} \subset \mathscr{F}_2\widetilde{\mathbf{H}} \subset \cdots \subset \widetilde{\mathbf{H}} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{m \geqslant 0} \mathscr{F}_m\widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{\mathbf{H}}.$$

On a

$$\mathscr{F}_l\widetilde{\mathbf{H}} \cdot \mathscr{F}_m\widetilde{\mathbf{H}} \subset \mathscr{F}_{l+m}\widetilde{\mathbf{H}},$$

ce qui définit sur $\widetilde{\mathbf{H}}$ une filtration $\mathscr{F}$. Nous noterons $\mathrm{gr}_{\mathscr{F}}(\widetilde{\mathbf{H}})$ l'algèbre graduée associée : le théorème 4.1.4 fournit un isomorphisme de $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$-algèbres

$$\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes (\mathbf{k}[V \times V^*] \rtimes W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\mathscr{F}}(\widetilde{\mathbf{H}}). \tag{4.3.1}$$

Par spécialisation en $(t,c) \in \widetilde{\mathscr{C}}$, la filtration $\mathscr{F}$ de $\widetilde{\mathbf{H}}$ induit une filtration (que nous noterons encore $\mathscr{F}$) de $\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}$, et

$$\mathrm{gr}_{\mathscr{F}}(\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}) \simeq \mathbf{k}[V \times V^*] \rtimes W. \tag{4.3.2}$$

4.4. Élément d'Euler

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une $\mathbf{k}$-base de V^* et soit $(y_1, \ldots, y_n)$ sa base duale. Posons

$$\widetilde{\mathbf{eu}} = -nT + \sum_{i=1}^{n} y_i x_i + \sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} C_s s = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} \varepsilon(s) C_s s \in \widetilde{\mathbf{H}}.$$

Alors $\widetilde{\mathbf{eu}}$ est appelé l'*élément d'Euler générique* de $\widetilde{\mathbf{H}}$. Il est facile de vérifier que $\widetilde{\mathbf{eu}}$ ne dépend pas du choix de la base $(x_1, \ldots, x_n)$ de V^*. Notons que

$$\widetilde{\mathbf{eu}} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}[1,1] \tag{4.4.1}$$

et rappelons le lemme classique suivant [**GGOR**, §3.1(4)] :

Lemme 4.4.2. — *Si $x \in V^*$, $y \in V$ et $w \in W$, alors*

$$[\widetilde{\mathbf{eu}}, x] = Tx, \qquad [\widetilde{\mathbf{eu}}, y] = -Ty \qquad \textit{et} \qquad [\widetilde{\mathbf{eu}}, w] = 0.$$

Dans [**GGOR**], l'élément d'Euler joue un rôle primordial dans l'étude de la catégorie $\mathscr{O}$ associée à $\widetilde{\mathbf{H}}_{1,c}$. Nous verrons dans ce mémoire le rôle que joue cet élément dans la théorie des cellules de Calogero-Moser.

Proposition 4.4.3. — *Si $h \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]$, alors $[\widetilde{\mathbf{eu}}, h] = iTh$.*

4.5. Algèbre sphérique

Notation. *Tout au long de ce mémoire, nous noterons e l'idempotent primitif central de $\mathbf{k}W$ défini par*

$$e = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w.$$

*La $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$-algèbre $e\widetilde{\mathbf{H}}e$ sera appelée l'**algèbre sphérique générique**.*

Par spécialisation en (t, c), et puisque $e\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}e$ est un facteur direct du $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$-module $\widetilde{\mathbf{H}}$, on obtient que

$$e\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}e = (\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]/\widetilde{\mathfrak{C}}_{t,c}) \otimes_{\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]} e\widetilde{\mathbf{H}}e. \tag{4.5.1}$$

Puisque e est de degré 0, la filtration $\mathscr{F}$ induit une filtration (que nous noterons encore $\mathscr{F}$) de l'algèbre sphérique générique

$$e(\mathscr{F}_0\widetilde{\mathbf{H}})e = \mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \subset e(\mathscr{F}_1\widetilde{\mathbf{H}})e \subset e(\mathscr{F}_1\widetilde{\mathbf{H}})e \subset \cdots \quad \text{et} \quad \bigcup_{m \geqslant 0} e(\mathscr{F}_m\widetilde{\mathbf{H}})e = e\widetilde{\mathbf{H}}e.$$

On vérifie aisément que

$$e(\mathscr{F}_m\widetilde{\mathbf{H}})e = \mathscr{F}_m\widetilde{\mathbf{H}} \cap e\widetilde{\mathbf{H}}e$$

et que

$$\mathrm{gr}_{\mathscr{F}}(e\widetilde{\mathbf{H}}e) = e\,\mathrm{gr}_{\mathscr{F}}(\widetilde{\mathbf{H}})e \simeq \mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes \mathbf{k}[V \times V^*]^W. \tag{4.5.2}$$

Il en découle le théorème suivant, dont la preuve après spécialisation se trouve dans [**EtGi**, théorème 1.5] mais dont tous les arguments s'adaptent ici mot pour mot au cas générique :

***Théorème 4.5.3* (Etingof-Ginzburg)**. — *Soit $\widetilde{\mathfrak{C}}$ un idéal premier de $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$ et notons $\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}} = \widetilde{\mathbf{H}}/\widetilde{\mathfrak{C}}\widetilde{\mathbf{H}}$. Alors :*

(a) *L'algèbre $e\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini et sans diviseur de 0.*
(b) *$\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e$ est un $e\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e$-module à droite de type fini.*
(c) *L'action naturelle à gauche de $\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}$ sur le module projectif $\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e$ induit un isomorphisme $\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{e\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e}(\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e)$.*

(d) *Si* $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]/\widetilde{\mathfrak{C}}$ *est Gorenstein (respectivement Cohen-Macaulay), alors il en est de même de l'algèbre* $e\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e$ *ainsi que du* $e\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e$*-module à droite* $\widetilde{\mathbf{H}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}e$.

4.6. Quelques automorphismes de $\widetilde{\mathbf{H}}$

Notons $\mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\widetilde{\mathbf{H}})$ le groupe des automorphismes de la $\mathbf{k}$-algèbre $\widetilde{\mathbf{H}}$.

4.6.A. Bi-graduation. — De manière équivalente, la bi-graduation sur $\widetilde{\mathbf{H}}$ peut se voir comme une action du groupe $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times$ sur $\widetilde{\mathbf{H}}$. En effet, si $(\xi,\xi') \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times$, on définit l'automorphisme $\mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}$ de $\widetilde{\mathbf{H}}$ par la formule suivante :

$$\forall\,(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \forall\ h\in\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j],\ \mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}(h)=\xi^i\xi'^j h.$$

Alors

$$\mathrm{gr}:\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\widetilde{\mathbf{H}}) \tag{4.6.1}$$

est un morphisme de groupes. Concrètement,

$$\begin{cases} \forall\ y\in V,\ \mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}(y)=\xi y,\\ \forall\ x\in V^*,\ \mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}(x)=\xi' x,\\ \forall\ C\in\widetilde{\mathscr{C}}^*,\ \mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}(C)=\xi\xi' C,\\ \forall\ w\in W,\ \mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}(w)=w. \end{cases}$$

Par spécialisation, pour tout $\xi\in\mathbf{k}^\times$ et pour tout $(t,c)\in\widetilde{\mathscr{C}}$, l'action de (ξ,ξ) fournit un isomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{H}}_{\xi t,\xi c}. \tag{4.6.2}$$

4.6.B. Caractères linéaires. — Soit $\gamma : W \longrightarrow \mathbf{k}^\times$ un caractère linéaire. Alors γ induit un automorphisme de $\mathscr{C}$ par multiplication : si $c\in\mathscr{C}$, on définit $\gamma\cdot c$ comme la fonction $\mathrm{Réf}(W)\to\mathbf{k}$, $s\mapsto\gamma(s)c_s$. Cela induit un automorphisme $\gamma_{\mathscr{C}} : \mathbf{k}[\mathscr{C}]\to\mathbf{k}[\mathscr{C}]$, $f\mapsto(c\mapsto f(\gamma^{-1}\cdot c))$, qui envoie en particulier C_s sur $\gamma(s)^{-1}C_s$. On l'étend en un automorphisme $\gamma_{\widetilde{\mathscr{C}}}$ de $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$ en posant $\gamma_{\widetilde{\mathscr{C}}}(T)=T$.

D'autre part, γ induit aussi un automorphisme de l'algèbre de groupe $\mathbf{k}W$, envoyant $w\in W$ sur $\gamma(w)w$. Ainsi, γ induit un automorphisme de la $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$-algèbre $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]\otimes\big(\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V\oplus V^*)\rtimes W\big)$ agissant trivialement sur V et V^* : nous le noterons γ_{T}. Bien sûr,

$$(\gamma\gamma')_{\mathrm{T}}=\gamma_{\mathrm{T}}\gamma'_{\mathrm{T}}.$$

Les relations 4.1.1 étant clairement stables par l'action de γ_{T}, ce dernier induit par passage au quotient un automorphisme γ_* de la $\mathbf{k}$-algèbre $\widetilde{\mathbf{H}}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} W^\wedge & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\widetilde{\mathbf{H}}) \\ \gamma & \longmapsto & \gamma_* \end{array} \tag{4.6.3}$$

est un morphisme injectif de groupes. Par spécialisation en $(t,c) \in \widetilde{\mathscr{C}}$ et si $\gamma \in W^\wedge$, alors γ_* induit un isomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{H}}_{t,\gamma\cdot c}. \tag{4.6.4}$$

4.6.C. Normalisateur. — Notons $\mathscr{N}$ le normalisateur, dans $\mathrm{GL}_{\mathbf{k}}(V)$, de W. Alors :

- $\mathscr{N}$ agit naturellement sur V et V^* ;
- $\mathscr{N}$ agit sur W par conjugaison ;
- l'action de $\mathscr{N}$ sur W stabilise $\mathrm{Réf}(W)$ et donc $\mathscr{N}$ agit sur $\mathscr{C}$: si $g \in \mathscr{N}$ et $c \in \mathscr{C}$, alors ${}^g c : \mathrm{Réf}(W) \to \mathbf{k}$, $s \mapsto c_{g^{-1}sg}$.
- l'action de $\mathscr{N}$ sur $\mathscr{C}$ induit une action de $\mathscr{N}$ sur $\mathscr{C}^*$ (et donc sur $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$) telle que, si $g \in \mathscr{N}$ et $s \in \mathrm{Réf}(W)$, alors ${}^g C_s = C_{gsg^{-1}}$.
- $\mathscr{N}$ agit trivialement sur T.

En conséquence, $\mathscr{N}$ agit sur la $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$-algèbre $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes \big(\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W\big)$ et il est facile de vérifier, grâce aux relations 4.1.1, que cette action induit une action sur $\widetilde{\mathbf{H}}$: si $g \in \mathscr{N}$ et $h \in \widetilde{\mathbf{H}}$, nous noterons ${}^g h$ l'image de h par l'action de g. Par spécialisation en $(t,c) \in \widetilde{\mathscr{C}}$, un élément $g \in \mathscr{N}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{H}}_{t,{}^g c}. \tag{4.6.5}$$

Exemple 4.6.6. — Si $\xi \in \mathbf{k}^\times$, alors on peut voir ξ comme un automorphisme de V (par homothétie) normalisant (et même centralisant) W. On retrouve alors l'automorphisme de $\widetilde{\mathbf{H}}$ induisant la $\mathbb{Z}$-graduation (au signe près) : si $h \in \widetilde{\mathbf{H}}$, alors ${}^\xi h = \mathrm{bigr}_{\xi,\xi^{-1}}(h)$. ■

4.6.D. Compilation. — Les automorphismes induits par $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times$ et ceux induits par $W^\wedge$ commutent. D'autre part, le groupe $\mathscr{N}$ agit sur le groupe $W^\wedge$ et sur la $\mathbf{k}$-algèbre $\widetilde{\mathbf{H}}$. On vérifie facilement que cela induit une action de $W^\wedge \rtimes \mathscr{N}$ sur $\widetilde{\mathbf{H}}$. De plus, cette action respecte la bi-graduation, c'est-à-dire commute avec l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times$. Si $\gamma \in W^\wedge$ et $g \in \mathscr{N}$, nous noterons $\gamma \rtimes g$ l'élément de $W^\wedge \rtimes \mathscr{N}$ correspondant. On a donc un morphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(\widetilde{\mathbf{H}}) \\ (\xi, \xi', \gamma \rtimes g) & \longmapsto & (h \mapsto \mathrm{bigr}_{\xi,\xi'} \circ \gamma_*({}^g h)). \end{array}$$

Si $\tau=(\xi,\xi',\gamma\rtimes g)\in\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times\times(W^\wedge\rtimes\mathcal{N})$ et si $h\in\widetilde{\mathbf{H}}$, nous poserons

$$^\tau h=\gamma_*(\mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}({}^g h)).$$

Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 4.6.7. — *Soit $\tau=(\xi,\xi',\gamma\rtimes g)\in\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times\times(W^\wedge\rtimes\mathcal{N})$. Alors :*

(a) *τ stabilise les sous-algèbres $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$, $\mathbf{k}[V]$, $\mathbf{k}[V^*]$ et $\mathbf{k}W$.*
(b) *τ respecte la bi-graduation.*
(c) $^\tau\widetilde{\mathbf{eu}}=\xi\xi'\widetilde{\mathbf{eu}}$.
(d) *$^\tau e=e$ si et seulement si $\gamma=1$.*

4.7. Spécificité des groupes de Coxeter

Hypothèse. *Dans cette section, et seulement dans cette section, nous supposons que W est un groupe de Coxeter, et nous reprenons les notations du chapitre 3.*

D'après la proposition 3.1.1, il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée W-invariante $\boldsymbol{\beta}:V\times V\to\mathbf{k}$. Nous noterons $\sigma:V\xrightarrow{\sim}V^*$ l'isomorphisme induit par $\boldsymbol{\beta}$: si $y,y'\in V$, alors

$$\langle y,\sigma(y')\rangle=\boldsymbol{\beta}(y,y').$$

La W-invariance de $\boldsymbol{\beta}$ implique que σ est un isomorphisme de $\mathbf{k}W$-modules et la symétrie de $\boldsymbol{\beta}$ implique que

$$\langle y,x\rangle=\langle\sigma^{-1}(x),\sigma(y)\rangle \tag{4.7.1}$$

pour tous $x\in V^*$ et $y\in V$. Par suite, notons $\sigma_{\mathrm{T}}:\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V\oplus V^*)\to\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V\oplus V^*)$ l'isomorphisme d'algèbres induit par l'automorphisme de l'espace vectoriel $V\oplus V^*$ défini par $(y,x)\mapsto(-\sigma^{-1}(x),\sigma(y))$. Il est W-invariant donc il s'étend en un automorphisme de $\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V\oplus V^*)\rtimes W$, en agissant trivialement sur W. Ce dernier s'étend ensuite par extension des scalaires en un automorphisme, toujours noté σ_{T}, de $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]\otimes(\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V\oplus V^*)\rtimes W)$. Il est facile de vérifier que σ_{T} induit un automorphisme $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ de $\widetilde{\mathbf{H}}$. On a donc montré la proposition suivante :

Proposition 4.7.2. — *Il existe un unique automorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ de $\widetilde{\mathbf{H}}$ tel que*

$$\begin{cases}\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}(y)=\sigma(y) & \text{si } y\in V,\\ \sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}(x)=-\sigma^{-1}(x) & \text{si } x\in V^*,\\ \sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}(w)=w & \text{si } w\in W,\\ \sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}(C)=C & \text{si } C\in\widetilde{\mathscr{C}}^*.\end{cases}$$

Proposition 4.7.3. — *On a les propriétés suivantes :*

(a) $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ *stabilise les sous-algèbres* $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}]$ *et* $\mathbf{k}W$ *et échange les sous-algèbres* $\mathbf{k}[V]$ *et* $\mathbf{k}[V^*]$.

(b) *Si* $h \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j]$, *alors* $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}(h) \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[j,i]$.

(c) *Si* $h \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}[i]$ *(respectivement* $h \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]$*), alors* $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}(h) \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}[i]$ *(respectivement* $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}(h) \in \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[-i]$*).*

(d) $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ *commute à l'action de* $W^\wedge$ *sur* $\widetilde{\mathbf{H}}$.

(e) *Si* $(t,c) \in \widetilde{\mathscr{C}}$, *alors* $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ *induit un automorphisme de* $\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}$, *toujours noté* $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ *(ou* $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}}$*) si nécessaire).*

(f) $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}(\widetilde{\mathbf{eu}}) = nT - \widetilde{\mathbf{eu}}$.

***Remarque 4.7.4* (Actions de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{k})$ et $\mathbf{SL}_2(\mathbf{k})$)**. — Soit $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{k})$. Alors l'application $\mathbf{k}$-linéaire

$$\begin{array}{ccc} V \oplus V^* & \longrightarrow & V \oplus V^* \\ y \oplus x & \longmapsto & ay + b\sigma^{-1}(x) \oplus c\sigma(y) + dx \end{array}$$

est un automorphisme du $\mathbf{k}W$-module $V \oplus V^*$. Elle s'étend donc en un automorphisme de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W$ et en un automorphisme ρ_{T} de $\mathbf{k}[\widetilde{\mathscr{C}}] \otimes (\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W)$ par $\rho_{\mathrm{T}}(C) = \det(\rho)C$ si $C \in \widetilde{\mathscr{C}}^*$.

Il est alors facile de vérifier que ρ_{T} induit un automorphisme $\rho_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ de $\widetilde{\mathbf{H}}$. De plus, $(\rho\rho')_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \rho_{\widetilde{\mathbf{H}}} \circ \rho'_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ pour tous $\rho, \rho' \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{k})$, ce qui définit une action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{k})$ sur $\widetilde{\mathbf{H}}$. Cette action respecte la $\mathbb{N}$-graduation $\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}$.

Pour finir, notons que, pour $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\rho_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ et, si $\rho = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi' \end{pmatrix}$, alors $\rho_{\widetilde{\mathbf{H}}} = \mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}$. On a ainsi étendu l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ en une action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{k}) \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$. ■

CHAPITRE 5

ALGÈBRE DE CHEREDNIK EN $t = 0$

Notation. *Nous posons* $\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}/T\widetilde{\mathbf{H}}$. *La* $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbf{H}$ *est appelée l'**algèbre de Cherednik générique en** $t = 0$.*

5.1. Généralités

Nous rassemblons ici toutes les propriétés qui se déduisent immédiatement de ce que nous avons établi dans le chapitre précédent 4. Nous en profitons pour fixer quelques notations.

Tout d'abord, les relations 4.1.1 s'écrivent maintenant ainsi. L'algèbre $\mathbf{H}$ est la $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbre quotient de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]\otimes\big(\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V\oplus V^*)\rtimes W\big)$ par l'idéal engendré par les relations suivantes :

$$\text{(5.1.1)}\qquad \begin{cases} [x,x'] = [y,y'] = 0, \\[2ex] [y,x] = \displaystyle\sum_{s\in\mathrm{Réf}(W)} (\varepsilon(s)-1)\, C_s\, \frac{\langle y,\alpha_s\rangle\cdot\langle \alpha_s^\vee, x\rangle}{\langle \alpha_s^\vee,\alpha_s\rangle}\, s, \end{cases}$$

pour x, $x' \in V^*$ et y, $y' \in V$.

La décomposition PBW (théorème 4.1.4) se réécrit ainsi :

***Théorème 5.1.2* (Etingof-Ginzburg).** — *L'application* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$*-linéaire* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]\otimes\mathbf{k}[V]\otimes\mathbf{k}W\otimes\mathbf{k}[V^*] \longrightarrow \mathbf{H}$ *induite par la multiplication est un isomorphisme de* $\mathbf{k}$*-espaces vectoriels.*

Si $c \in \mathscr{C}$, nous noterons $\mathfrak{C}_c$ l'idéal maximal de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ défini par $\mathfrak{C}_c = \{f \in \mathbf{k}[\mathscr{C}] \mid f(c) = 0\}$: c'est l'idéal engendré par $(C_s - c_s)_{s\in\mathrm{Réf}(W)/W}$. Posons alors

$$\mathbf{H}_c = (\mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}_c)\otimes_{\mathbf{k}[\mathscr{C}]}\mathbf{H} = \mathbf{H}/\mathfrak{C}_c\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}_{0,c}.$$

La $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{H}_c$ est le quotient de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathrm{T}_{\mathbf{k}}(V \oplus V^*) \rtimes W$ par l'idéal engendré par les relations suivantes :

$$(5.1.3) \qquad \begin{cases} [x, x'] = [y, y'] = 0, \\ [y, x] = \displaystyle\sum_{s \in \mathrm{Réf}(W)} (\varepsilon(s) - 1)\, c_s \, \frac{\langle y, \alpha_s \rangle \cdot \langle \alpha_s^\vee, x \rangle}{\langle \alpha_s^\vee, \alpha_s \rangle} \, s, \end{cases}$$

pour x, $x' \in V^*$ et y, $y' \in V$.

Puisque T est bi-homogène, la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{H}$ hérite de toutes les graduations, filtrations de l'algèbre $\widetilde{\mathbf{H}}$: nous utiliserons les notations évidentes $\mathbf{H}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i, j]$, $\mathbf{H}^{\mathbb{N}}[i]$ et $\mathbf{H}^{\mathbb{Z}}[i]$ sans les définir. Nous noterons $\mathbf{eu}$ l'image de $\widetilde{\mathbf{eu}}$ dans $\mathbf{H}$. Alors $\mathbf{eu}$ est appelé l'*élément d'Euler générique* de $\mathbf{H}$. Notons que

$$(5.1.4) \qquad \mathbf{eu} \in \mathbf{H}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[1, 1]$$

L'idéal engendré par T est aussi stable par l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathcal{N})$, donc $\mathbf{H}$ hérite d'une action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathcal{N})$ qui sera toujours notée ${}^\tau h$, si $h \in \mathbf{H}$ et $\tau \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathcal{N})$. Le lemme suivant se déduit immédiatement du lemme 4.6.7 :

Lemme 5.1.5. — *Soit $\tau = (\xi, \xi', \gamma \rtimes g) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathcal{N})$. Alors :*

(a) *τ stabilise les sous-algèbres $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$, $\mathbf{k}[V]$, $\mathbf{k}[V^*]$ et $\mathbf{k}W$.*
(b) *τ respecte la bi-graduation.*
(c) ${}^\tau\mathbf{eu} = \xi\xi' \, \mathbf{eu}$.

Terminons par l'algèbre sphérique. Le théorème 4.5.3 implique :

***Théorème 5.1.6* (Etingof-Ginzburg)**. — *Soit $\mathfrak{C}$ un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ et notons $\mathbf{H}_{\mathfrak{C}} = \mathbf{H}/\mathfrak{C}\mathbf{H}$. Alors :*

(a) *L'algèbre $e\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}e$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini, Gorenstein et sans diviseur de 0.*
(b) *Si $\mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}$ est Gorenstein (respectivement Cohen-Macaulay), alors le $e\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}e$-module à droite de type fini $\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}e$ l'est aussi.*
(c) *L'action naturelle à gauche de $\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}$ sur le module projectif $\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}e$ induit un isomorphisme $\mathbf{H}_{\mathfrak{C}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{e\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}e}(\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}e)$.*

5.2. Centre

Notation. *Tout au long de ce mémoire, nous noterons $Z = \mathrm{Z}(\mathbf{H})$ le centre de $\mathbf{H}$. Si $c \in \mathscr{C}$, nous noterons $Z_c = Z/\mathfrak{C}_c Z$. Nous noterons P la $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbre obtenue par produit tensoriel d'algèbres $P = \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^W$.*

5.2.A. Une sous-algèbre de Z. — Le premier résultat, fondamental, concernant le centre $\mathrm{Z}(\mathbf{H})$ de $\mathbf{H}$, est le suivant [**EtGi**, Proposition 4.15] (voir aussi [**Gor1**, Proposition 3.6] pour une preuve plus directe) :

$$P \subset Z. \tag{5.2.1}$$

Le lemme suivant est immédiat. Bien sûr, le centre Z est stable par l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ et hérite en particulier des graduations de $\mathbf{H}$. Il est facile de vérifier qu'il en est de même de P :

Lemme 5.2.2. — *P est une sous-algèbre du centre stable par l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$. En particulier, elle est $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-graduée.*

Corollaire 5.2.3. — *La décomposition PBW est un isomorphisme de P-modules. En particulier, on a des isomorphismes de P-modules :*

(a) $\mathbf{H} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*]$.
(b) $\mathbf{H}e \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}[V^*]$.
(c) $e\mathbf{H}e \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V \times V^*]^W$.

En particulier, $\mathbf{H}$ (respectivement $\mathbf{H}e$, respectivement $e\mathbf{H}e$) est un P-module libre de rang $|W|^3$ (respectivement $|W|^2$, respectivement $|W|$).

Le thème principal de ce mémoire est l'étude de l'algèbre $\mathbf{H}$, vue comme P-algèbre : ainsi, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de P, nous nous intéresserons aux représentations de la $\mathbf{k}_P(\mathfrak{p})$-algèbre de dimension finie $|W|^3$ égale à $\mathbf{k}_P(\mathfrak{p}) \otimes_P \mathbf{H}$ (déploiement, modules simples, blocs, éventuellement modules standard, matrice de décomposition...).

Remarque 5.2.4. — Soit $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant |W|}$ une $\mathbf{k}[V]^W$-base de $\mathbf{k}[V]$ et soit $(b_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant |W|}$ une $\mathbf{k}[V^*]^W$-base de $\mathbf{k}[V^*]$. Le corollaire 5.2.3 montre que $(b_i w b_j^*)_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant |W| \\ w \in W}}$ est une P-base de $\mathbf{H}$ et que $(b_i b_j^* e)_{1 \leqslant i,j \leqslant |W|}$ est une P-base de $\mathbf{H}e$. ■

Posons

$$P_\bullet = \mathbf{k}[V]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^W.$$

Si $c \in \mathscr{C}$, alors

$$P_\bullet \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}_c \otimes_{\mathbf{k}[\mathscr{C}]} P = P/\mathfrak{C}_c P.$$

On déduit du corollaire 5.2.3 le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.5. — *On a des isomorphismes de $P_\bullet$-modules :*

(a) $\mathbf{H}_c \simeq \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*]$.

(b) $\mathbf{H}_c e \simeq \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}[V^*]$.

(c) $e\mathbf{H}_c e \simeq \mathbf{k}[V \times V^*]^W$.

En particulier, $\mathbf{H}_c$ (respectivement $\mathbf{H}_c e$, respectivement $e\mathbf{H}_c e$) est un $P_\bullet$-module libre de rang $|W|^3$ (respectivement $|W|^2$, respectivement $|W|$).

5.2.B. Isomorphisme de Satake. — Il découle du lemme 4.4.2 que

$$\mathbf{eu} \in Z. \tag{5.2.6}$$

Si $c \in \mathscr{C}$, nous noterons $\mathbf{eu}_c$ l'image de $\mathbf{eu}$ dans $\mathbf{H}_c$.

Exemple 5.2.7. — Puisque $\mathbf{H}_0 = \mathbf{k}[V \oplus V^*] \rtimes W$, on a $\mathrm{Z}(\mathbf{H}_0) = \mathbf{k}[V \times V^*]^W$ et $P_\bullet = \mathbf{k}[V/W \times V^*/W] \subset Z_0$. De plus, il découle du théorème 1.2.1 que Z_0 est un $P_\bullet$-module libre de rang $|W|$. D'autre part, $\mathbf{eu}_0 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (en reprenant les notations de la section 4.4). On peut alors vérifier facilement (voir par exemple [**BoKe**, proposition 1.1]) que le polynôme minimal de $\mathbf{eu}_0$ sur $P_\bullet$ est de degré $|W|$ et donc que le corps des fractions $\mathbf{k}(V \times V^*)^W$ est engendré, sur $\mathbf{k}(V/W \times V^*/W)$, par $\mathbf{eu}_0$. ■

Le théorème de structure suivant est au cœur de tous les résultats concernant la théorie des représentations de $\mathbf{H}$. Nous proposons ici une preuve différente de celles contenues dans la littérature, reposant uniquement sur l'exemple 5.2.7 ci-dessus et le fait que $P[\mathbf{eu}] \subset Z$.

***Théorème 5.2.8* (Etingof-Ginzburg)**. — *Le morphisme d'algèbres $Z \longrightarrow e\mathbf{H}e$, $z \mapsto ze$ est un isomorphisme d'algèbres $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$-graduées. En particulier, $e\mathbf{H}e$ est commutative.*

Démonstration. — Commençons par un lemme préparatoire classique :

> ***Lemme 5.2.9***. — *Soient A et B deux anneaux et soit M un (A, B)-bimodule tel que $\mathrm{End}_A(M) = B^{\mathrm{opp}}$ et $A = \mathrm{End}_B(M)$. Alors on a un isomorphisme $\mathrm{Z}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Z}(B)$.*

Démonstration. — La multiplication à gauche sur M induit un morphisme d'anneaux $\alpha : \mathrm{Z}(A) \to \mathrm{Z}(B)$ tel que $zm = m\alpha(z)$ pour tous $z \in \mathrm{Z}(A)$ et $m \in M$. De même, la multiplication à droite fournit un morphisme d'anneaux $\beta : \mathrm{Z}(B) \to \mathrm{Z}(A)$ tel que $mz = \beta(z)m$ pour tout $z \in \mathrm{Z}(B)$ et $m \in M$. Ainsi, si $z \in \mathrm{Z}(A)$ et $m \in M$, alors $zm = \beta(\alpha(z))m$, et donc $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}(A)}$ car l'action de A sur M est fidèle par hypothèse. De même $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}(B)}$. □

Tout d'abord, puisque $\mathrm{End}_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}e) = (e\mathbf{H}e)^{\mathrm{opp}}$ et $\mathrm{End}_{(e\mathbf{H}e)^{\mathrm{opp}}}(\mathbf{H}e) = \mathbf{H}$, l'application $\pi_e : \mathrm{Z}(\mathbf{H}) \to \mathrm{Z}(e\mathbf{H}e)$, $z \mapsto ze$ est un isomorphisme d'algèbres d'après le lemme 5.2.9. Il suffit donc de montrer que $e\mathbf{H}e$ est commutative.

Notons aussi que π_e est un morphisme de P-algèbres. Puisque $e\mathbf{H}e$ est un P-module libre de rang $|W|$ (voir le corollaire 5.2.3(c)), le polynôme minimal de $\mathbf{eu}$ sur P, qui est le même que le polynôme minimal de $\pi_e(\mathbf{eu})$ sur $\pi_e(P) \simeq P$, est de degré inférieur ou égal à $|W|$. Mais la spécialisation $\mathbf{eu}_0$ de $\mathbf{eu}$ en $0 \in \mathscr{C}^*$ a un polynôme minimal sur P_0 de degré $|W|$ (voir l'exemple 5.2.7) On en déduit donc que

(5.2.10) *Le polynôme minimal de* $\mathbf{eu}$ *sur* P *est de degré* $|W|$.

On a alors

$$\pi_e(P[\mathbf{eu}]) \subset \pi_e(Z) = \mathrm{Z}(e\mathbf{H}e) \subset e\mathbf{H}e.$$

Il découle de 5.2.10 que $\pi_e(P[\mathbf{eu}])$ est un sous-P-module de rang $|W|$ du P-module $e\mathbf{H}e$, qui est lui aussi de rang $|W|$. Si on note $\mathbf{K}$ le corps des fractions de P (rappelons que P est intègre), alors $\mathbf{K} \otimes_P \pi_e(P[\mathbf{eu}]) = \mathbf{K} \otimes_P (e\mathbf{H}e)$. Ainsi, $\mathbf{K} \otimes_P e\mathbf{H}e$ est commutative, ce qui montre que $e\mathbf{H}e$ l'est aussi. □

Corollaire 5.2.11. — *On a :*

(a) $\mathrm{End}_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}e) = Z$ *et* $\mathrm{End}_Z(\mathbf{H}e) = \mathbf{H}$.
(b) $\mathbf{H} = Z \oplus e\mathbf{H}(1-e) \oplus (1-e)\mathbf{H}e \oplus (1-e)\mathbf{H}(1-e)$. *En particulier, Z est un facteur direct du Z-module* $\mathbf{H}$.
(c) *Z est un P-module libre de rang $|W|$.*
(d) *Z est intègre, intégralement clos et Cohen-Macaulay.*
(e) $\mathbf{H}e$ *est un Z-module de Cohen-Macaulay.*

Démonstration. — Notons que $\mathbf{H} = e\mathbf{H}e \oplus e\mathbf{H}(1-e) \oplus (1-e)\mathbf{H}e \oplus (1-e)\mathbf{H}(1-e)$ et que l'isomorphisme de Satake nous dit que l'application $Z \to e\mathbf{H}e$, $z \mapsto eze = ze$, est un isomorphisme, doù (a). À part le fait que Z est intégralement clos, tout le reste découle des propriétés correspondantes de $e\mathbf{H}e$. Le fait que $Z \simeq e\mathbf{H}e$ est intégralement clos découle de ce que $\mathrm{gr}_{\mathscr{F}}(e\mathbf{H}e) \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V \times V^*]^W$ l'est (voir [**EtGi**, Lemme 3.5]). □

Puisque Z est un facteur direct de $\mathbf{H}$, Z_c est un facteur direct de $\mathbf{H}_c$. De plus, $Z_c \subset \mathrm{Z}(\mathbf{H}_c)$. Mieux, le corollaire 5.2.11 reste valide après spécialisation :

Corollaire 5.2.12. — *$Z_c = \mathrm{Z}(\mathbf{H}_c)$ et l'application $Z_c \to e\mathbf{H}_c e$, $z \mapsto ze$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après le théorème 5.1.6 et le lemme 5.2.9, on a $\mathrm{Z}(\mathbf{H}_c) \simeq \mathrm{Z}(e\mathbf{H}_c e)$. Mais d'après l'isomorphisme de Satake, $e\mathbf{H}_c e$ est commutative. Donc l'application $\mathrm{Z}(\mathbf{H}_c) \to e\mathbf{H}_c e$, $z \mapsto ze$ est un isomorphisme. On en déduit que

$$\mathbf{H}_c = \mathrm{Z}(\mathbf{H}_c) \oplus e\mathbf{H}_c(1-e) \oplus (1-e)\mathbf{H}_c e \oplus (1-e)\mathbf{H}_c(1-e).$$

De plus, d'après le corollaire 5.2.11(b),

$$\mathbf{H}_c = Z_c \oplus e\mathbf{H}_c(1-e) \oplus (1-e)\mathbf{H}_c e \oplus (1-e)\mathbf{H}_c(1-e).$$

Puisque $Z_c \subset \mathrm{Z}(\mathbf{H}_c)$, l'égalité $Z_c = \mathrm{Z}(\mathbf{H}_c)$ devient évidente. □

Corollaire 5.2.13. — *On a :*

(a) $\mathrm{End}_{\mathbf{H}_c}(\mathbf{H}_c e) = Z_c$ *et* $\mathrm{End}_{Z_c}(\mathbf{H}_c e) = \mathbf{H}_c$.
(b) $\mathbf{H}_c = Z_c \oplus e\mathbf{H}_c(1-e) \oplus (1-e)\mathbf{H}_c e \oplus (1-e)\mathbf{H}_c(1-e)$. *En particulier, Z_c est un facteur direct du Z_c-module $\mathbf{H}_c$.*
(c) *Z_c est un $P_\bullet$-module libre de rang $|W|$.*
(d) *Z_c est intègre, intégralement clos et Cohen-Macaulay.*
(e) *$\mathbf{H}_c e$ est un Z_c-module de Cohen-Macaulay.*

Corollaire 5.2.14. — *Si $c \in \mathscr{C}$, alors le polynôme minimal de $\mathbf{eu}_c$ sur $P_\bullet$ est de degré $|W|$: c'est la spécialisation en c du polynôme minimal de $\mathbf{eu}$ sur P.*

Démonstration. — Notons $F_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$ le polynôme minimal de $\mathbf{eu}$ sur P, et notons $F_{\mathbf{eu},c}(\mathbf{t}) \in P_\bullet[\mathbf{t}]$ sa spécialisation en c. Alors $P_\bullet[\mathbf{eu}_c] \subset Z_c$ est intègre et $P_\bullet[\mathbf{eu}_c] \simeq P[\mathbf{t}]/F_{\mathbf{eu},c}(\mathbf{t})$. Donc $F_{\mathbf{eu},c}(\mathbf{t})$ est irréductible et est bien le poynôme minimal de $\mathbf{eu}_c$ sur $P_\bullet$. □

5.3. Équivalence de Morita

D'après le corollaire 5.2.11, on a $\mathbf{H} = \mathrm{End}_Z(\mathbf{H}e)$ et $Z = \mathrm{End}_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}e)$. De plus, $\mathbf{H}e$ est un $\mathbf{H}$-module projectif. Pour que $\mathbf{H}e$ induise une équivalence de Morita entre Z et $\mathbf{H}$, il faut et il suffit que $\mathbf{H}e$ soit un Z-module projectif : or, ce n'est pas le cas en général, mais $\mathbf{H}e$ est un Z-module de Cohen-Macaulay. Puisqu'un module de Cohen-Macaulay sur un anneau régulier est projectif [**Ser**, chapitre 4, corollaire 2], on obtient le résultat suivant (si U est une partie multiplicative de Z, nous notons $Z[U^{-1}]$ le localisé de Z en U et nous posons $\mathbf{H}[U^{-1}] = Z[U^{-1}] \otimes_Z \mathbf{H}$) :

Proposition 5.3.1. — *Si U est une partie multiplicative de Z telle que $Z[U^{-1}]$ soit un anneau régulier, alors les algèbres $\mathbf{H}[U^{-1}]$ et $Z[U^{-1}]$ sont Morita équivalentes (l'équivalence de Morita est induite par le bimodule $\mathbf{H}[U^{-1}]e$).*

5.3.A. Localisation en $V^{\text{rég}}$. — Rappelons que

$$V^{\text{rég}} = V \setminus \bigcup_{H \in \mathscr{A}} H = \{v \in V \mid \mathrm{Stab}_G(v) = 1\}.$$

On note $P^{\text{rég}} = \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V^{\text{rég}}]^W \times \mathbf{k}[V^*]^W$, $Z^{\text{rég}} = P^{\text{rég}} \otimes_P Z$ et $\mathbf{H}^{\text{rég}} = P^{\text{rég}} \otimes_P \mathbf{H} = Z^{\text{rég}} \otimes_Z \mathbf{H}$. Si $s \in \text{Réf}(W)$, notons $\alpha_s^W = \prod_{w \in W} w(\alpha_s) \in P$, de sorte que $P^{\text{rég}}$ (resp. $Z^{\text{rég}}$) est le localisé de P (resp. Z) en la partie multiplicative engendrée par $(\alpha_s^W)_{s \in \text{Réf}(W)}$. Il s'en suit que

(5.3.2) $\qquad$ *α_s est inversible dans $\mathbf{H}^{\text{rég}}$.*

En effet, $\prod_{w \in W} w(\alpha_s) \in (P^{\text{rég}})^\times$.

***Proposition 5.3.3* (Etingof-Ginzburg)**. — *Il existe un unique isomorphisme de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbres*

$$\Theta : \mathbf{H}^{\text{rég}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes (\mathbf{k}[V^{\text{rég}} \times V^*] \rtimes W)$$

tel que

$$\begin{cases} \Theta(w) = w & \text{si } w \in W, \\ \Theta(y) = y - \displaystyle\sum_{s \in \text{Réf}(W)} \varepsilon(s) C_s \frac{\langle y, \alpha_s \rangle}{\alpha_s} s & \text{si } y \in V, \\ \Theta(x) = x & \text{si } x \in V^*. \end{cases}$$

Démonstration. — Voir [**EtGi**, proposition 4.11]. □

Remarque 5.3.4. — En termes des variables $K_{H,i}$, on a

$$\Theta(y) = y - \sum_{H \in \mathscr{A}} \sum_{i=0}^{e_H - 1} \frac{\langle y, \alpha_H \rangle}{\alpha_H} e_H K_{H,i} \varepsilon_{H,i}$$

pour $y \in V$. ■

Corollaire 5.3.5. — *Θ se restreint en un isomorphisme de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbres $Z^{\text{rég}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V^{\text{rég}} \times V^*]^W$. En particulier, $Z^{\text{rég}}$ est régulier.*

Démonstration. — La première assertion découle simplement de la comparaison des centres de $\mathbf{H}^{\text{rég}}$ et $\mathbf{k}[V^{\text{rég}} \times V^*] \rtimes W$. La deuxième résulte du fait que W agit librement sur $V^{\text{rég}} \times V^*$. □

Si $c \in \mathscr{C}$, notons $Z_c^{\text{rég}}$ la localisation de Z_c en $P_\bullet^{\text{rég}} = \mathbf{k}[V^{\text{rég}}]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^W$. Le corollaire 5.3.5 montre que

(5.3.6) $\qquad Z_c^{\text{rég}} \simeq \mathbf{k}[V^{\text{rég}} \times V^*]^W$ *est un anneau régulier.*

5.3.B. Corps des fractions. — Notons $\mathbf{K}$ le corps des fractions de P et posons $\mathbf{K}Z = \mathbf{K} \otimes_P Z$: alors, puisque Z est intègre et entier sur P,

(5.3.7) $\qquad \mathbf{K}Z$ *est le corps des fractions de* Z.

En particulier, $\mathbf{K}Z$ est un anneau régulier.

Théorème 5.3.8. — *Les $\mathbf{K}$-algèbres $\mathbf{KH}$ et $\mathbf{K}Z$ sont Morita équivalentes, l'équivalence de Morita étant induite par $\mathbf{KH}e$. Plus précisément,*

$$\mathbf{KH} \simeq \mathrm{Mat}_{|W|}(\mathbf{K}Z).$$

Démonstration. — Compte tenu de la proposition 5.3.1, il ne reste qu'à montrer la dernière assertion: il suffit donc de montrer que $\mathbf{KH}e$ est un $\mathbf{K}Z$-espace vectoriel de dimension $|W|$. Or, $\mathbf{H}e$ est un P-module libre de rang $|W|^2$ tandis que Z est un P-module libre de rang $|W|$, d'où le résultat. □

5.4. Compléments

5.4.A. Structure de Poisson. — La décomposition PBW fournit un isomorphisme de $\mathbf{k}$-*espaces vectoriels* $\mathbf{k}[T]\otimes\mathbf{H} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{H}}$. Si $h\in\mathbf{H}$, notons $\tilde{h}$ l'image de $1\otimes h\in\mathbf{k}[T]\otimes\mathbf{H}$ dans $\widetilde{\mathbf{H}}$ via cet isomorphisme. Si z, $z'\in Z$, alors $[z,z']=0$, ce qui signifie que $[\tilde{z},\tilde{z}']\in T\widetilde{\mathbf{H}}$. On note $\{z,z'\}$ l'image de $[\tilde{z},\tilde{z}']/T\in\widetilde{\mathbf{H}}$ dans $\mathbf{H}=\widetilde{\mathbf{H}}/T\widetilde{\mathbf{H}}$. Il est facile de vérifier que $\{z,z'\}\in Z$ et que

$$\{-,-\}:Z\times Z\longrightarrow Z \tag{5.4.1}$$

est un *crochet de Poisson* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-linéaire. Si $c\in\mathscr{C}$, alors il induit un crochet de Poisson

$$\{-,-\}:Z_c\times Z_c\longrightarrow Z_c. \tag{5.4.2}$$

5.4.B. Forme symétrisante. — Fixons une $\mathbf{k}[V]^W$-base $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant|W|}$ de $\mathbf{k}[V]$ formée d'éléments homogènes ainsi qu'une $\mathbf{k}[V^*]^W$-base $(b_i^*)_{1\leqslant i\leqslant|W|}$ de $\mathbf{k}[V^*]$ elle aussi formée d'éléments homogènes. Il est bien connu [**Bro**, proposition 4.16] que, parmi la base homogène $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant|W|}$, un seul élément est de degré $|\mathrm{Réf}(W)|$, tous les autres étant de degré strictement inférieur. Nous supposerons que $\deg b_1=\deg b_1^*=|\mathrm{Réf}(W)|$. Notons

$$\tau_{\mathbf{H}}:\mathbf{H}\longrightarrow P$$

l'unique application P-linéaire telle que

$$\tau_{\mathbf{H}}(b_i w b_j^*)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j=1 \text{ et } w=1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors [**BrGoSt**, théorème 4.4]

(5.4.3) *$\tau_{\mathbf{H}}$ est une forme symétrisante sur la P-algèbre $\mathbf{H}$.*

Soit $(h_i)_{1\leqslant i\leqslant|W|^3}$ une P-base de $\mathbf{H}$ et soit $(h_i^\vee)_{1\leqslant i\leqslant|W|^3}$ la P-base duale (pour la forme symétrisante $\tau_{\mathbf{H}}$). Posons

$$\mathrm{cas}_{\mathbf{H}}=\sum_{i=1}^{|W|^3}h_i h_i^\vee.$$

L'élément $\mathrm{cas}_{\mathbf{H}}$ de $\mathbf{H}$ est appelé l'*élément de Casimir central* de $\mathbf{H}$ (ou $(\mathbf{H},\tau_{\mathbf{H}})$) : il est indépendant du choix de la P-base $(h_i)_{1\leqslant i\leqslant|W|^3}$ (il ne dépend que du couple $(\mathbf{H},\tau)$) et il vérifie

$$\mathrm{cas}_{\mathbf{H}}\in Z$$

(voir par exemple [**Chl2**, définition 2.2.4 et lemme 2.2.6]).

5.5. Comment calculer Z ?

Nous allons ici donner quelques ingrédients permettant d'aider au calcul du centre Z de l'algèbre $\mathbf{H}$: nous ne donnerons pas d'algorithme, mais juste quelques principes permettant de résoudre les petits cas. Nous les mettrons en œuvre dans les chapitres 18 (le rang 1) et 19 (le type B_2). Un des ingrédients essentiels est la bi-graduation de Z.

5.5.A. Séries de Hilbert. — Nous allons ici calculer les séries de Hilbert bi-graduées de $\mathbf{H}$, P, Z et $e\mathbf{H}e$. Tout d'abord, remarquons que

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{k}[\mathscr{C}]) = \frac{1}{(1-\mathbf{tu})^{|\mathrm{Réf}(W)/W|}},$$

ce qui permet de déduire facilement le résultat pour $\mathbf{H}$, en utilisant (1.5.2) et la décomposition PBW :

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{H}) = \frac{|W|}{(1-\mathbf{t})^n\,(1-\mathbf{u})^n\,(1-\mathbf{tu})^{|\mathrm{Réf}(W)/W|}}. \tag{5.5.1}$$

D'autre part, en reprenant les notations du théorème 1.2.1, on obtient, grâce à (1.5.4),

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(P) = \frac{1}{(1-\mathbf{tu})^{|\mathrm{Réf}(W)/W|}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\mathbf{t}^{d_i})(1-\mathbf{u}^{d_i})}. \tag{5.5.2}$$

Pour finir, notons que la décomposition PBW est un isomorphisme W-équivariant de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-modules bi-gradués, d'où l'on déduit que $\mathbf{H}e \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V] \otimes \mathbf{k}[V^*]$ comme $\mathbf{k}W$-modules bi-gradués et donc que

(5.5.3) *les* $\mathbf{k}$*-espaces vectoriels bi-gradués* Z *et* $\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V \times V^*]^W$ *sont isomorphes.*

Ainsi, $\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(Z) = \dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{k}[\mathscr{C}]) \cdot \dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(\mathbf{k}[V \times V^*]^W)$ ce qui, en vertu de (1.5.5) et de la proposition 1.5.12, nous donne

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(Z) = \frac{1}{|W|\,(1-\mathbf{tu})^{|\mathrm{Réf}(W)/W|}} \sum_{w \in W} \frac{1}{\det(1-w\mathbf{t})\,\det(1-w^{-1}\mathbf{u})} \tag{5.5.4}$$

et

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(Z) = \frac{\displaystyle\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} f_\chi(\mathbf{t})\, f_\chi(\mathbf{u})}{(1-\mathbf{tu})^{|\mathrm{Réf}(W)/W|}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\mathbf{t}^{d_i})(1-\mathbf{u}^{d_i})}. \tag{5.5.5}$$

5.5.B. Comparaison de Z et Z_0. — Si $z \in Z$, nous noterons z_0 son image dans Z_0. Rappelons que $Z_0 = Z/\mathfrak{C}_0 Z$, où $\mathfrak{C}_0$ est l'unique idéal homogène maximal de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ ($\mathfrak{C}_0$ est même bi-homogène, par rapport à la $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-graduation). Le lemme de Nakayama gradué permet immédiatement d'obtenir le résultat suivant :

Lemme 5.5.6. — *Soient $z^{(1)},\dots, z^{(r)}$ des éléments $\mathbb{N}$-homogènes (par exemple, des éléments $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-homogènes) de Z. Alors $Z = \mathbf{k}[\mathscr{C}][z^{(1)},\dots,z^{(r)}]$ si et seulement si $Z_0 = \mathbf{k}[z_0^{(1)},\dots,z_0^{(r)}]$.*

Si le lemme 5.5.6 peut aider à trouver des générateurs de Z, le problème du calcul de Z n'est pas encore totalement résolu à ce stade, car il faut déterminer les relations entre ces générateurs. Fixons donc des éléments $z^{(1)},\dots, z^{(r)}$ de Z qui soient $\mathbb{N}$-homogènes (notons $e_1,\dots, e_r$ leurs degrés) et tels que $Z = \mathbf{k}[\mathscr{C}][z^{(1)},\dots,z^{(r)}]$. Graduons l'algèbre $\mathbf{k}[\mathscr{C}][\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r]$ en attribuant à $\mathbf{x}_i$ le degré e_i. Alors le morphisme naturel de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbres

$$\varphi : \mathbf{k}[\mathscr{C}][\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r] \longrightarrow Z$$

qui envoie $\mathbf{x}_i$ sur $z^{(i)}$ est surjectif et gradué. On notera

$$\varphi_0 : \mathbf{k}[\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r] \longrightarrow Z_0$$

le morphisme surjectif gradué de $\mathbf{k}$-algèbres déduit de φ par réduction modulo $\mathfrak{C}_0$ (c'est-à-dire par spécialisation en $c = 0$). Supposons trouvés des éléments homogènes $f^{(1)},\dots, f^{(m)}$ dans $\operatorname{Ker}\varphi$ et notons I (respectivement I_0) l'idéal de $\mathbf{k}[\mathscr{C}][\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r]$ (respectivement $\mathbf{k}[\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r]$) engendré par $f^{(1)},\dots, f^{(m)}$ (respectivement $f_0^{(1)},\dots, f_0^{(m)}$). Ici, si $f \in \mathbf{k}[\mathscr{C}][\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r]$, alors f_0 désigne son image dans $\mathbf{k}[\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r]$ par spécialisation en $c = 0$.

Proposition 5.5.7. — *Supposons que $\mathbf{k}[\mathscr{C}][\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r]/I$ soit un $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-module libre. Alors :*

(a) $I_0 = I/\mathfrak{C}_0 I$

(b) $I = \operatorname{Ker}\varphi$ *si et seulement si* $I_0 = \operatorname{Ker}\varphi_0$.

Démonstration. — Notons A la $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbre $\mathbf{k}[\mathscr{C}][\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r]$ et posons $A_0 = A/\mathfrak{C}_0 A = \mathbf{k}[\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_r]$.

(a) La suite exacte de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-modules

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbf{k}[\mathscr{C}]}(\mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}_0, A/I) \longrightarrow I/\mathfrak{C}_0 I \longrightarrow A_0 \longrightarrow (A/I)/\mathfrak{C}_0(A/I) \longrightarrow 0.$$

Mais, par hypothèse, A/I est libre donc $\operatorname{Tor}_1^{\mathbf{k}[\mathscr{C}]}(\mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}_0, A/I) = 0$ ce qui montre que $I/\mathfrak{C}_0 I$ s'identifie à l'image de I dans A_0, c'est-à-dire I_0. D'où (a).

(b) Puisque $A/\operatorname{Ker}\varphi \simeq Z$ est un $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-module libre, l'argument précédent montre que $(\operatorname{Ker}\varphi)/\mathfrak{C}_0(\operatorname{Ker}\varphi)$ s'identifie à son image dans A_0, c'est-à-dire à $\operatorname{Ker}\varphi_0$. Le résultat découle alors encore du lemme de Nakayama gradué. □

Exemple 5.5.8. — Supposons ici que $n = \dim_{\mathbf{k}}(V) = 1$ et posons $d = |W|$. Soit $y \in V \setminus \{0\}$ et soit $x \in V^*$ tel que $\langle y, x\rangle = 1$. Alors $P_\bullet = \mathbf{k}[x^d, y^d]$, $\mathbf{eu}_0 = xy$ et il est facile de vérifier que $Z_0 = \mathbf{k}[x^d, y^d, xy]$, c'est-à-dire $Z_0 = P_\bullet[\mathbf{eu}_0]$. Il découle donc du lemme 5.5.6 que $Z = P[\mathbf{eu}]$.

Cela peut se montrer d'une autre manière. En effet, $\operatorname{Irr}(W) = \{\varepsilon^i \mid 0 \leqslant i \leqslant d-1\}$ et $f_{\varepsilon^i}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^i$ pour $0 \leqslant i \leqslant d-1$. Par conséquent, la formule 5.5.5 montre que

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(Z) = \frac{1 + (\mathbf{tu}) + \cdots + (\mathbf{tu})^{d-1}}{(1-\mathbf{tu})^{d-1}\,(1-\mathbf{t}^d)\,(1-\mathbf{u}^d)}$$

tandis que, puisque $P[\mathbf{eu}] = P \oplus P\mathbf{eu} \oplus \cdots \oplus P\mathbf{eu}^{d-1}$ (d'après (5.2.10)), on a

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(P[\mathbf{eu}]) = \frac{1 + (\mathbf{tu}) + \cdots + (\mathbf{tu})^{d-1}}{(1-\mathbf{tu})^{d-1}\,(1-\mathbf{t}^d)\,(1-\mathbf{u}^d)}.$$

Ainsi, $\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(P[\mathbf{eu}]) = \dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(Z)$, ce qui force l'égalité $Z = P[\mathbf{eu}]$. ■

En fait, il n'arrive pratiquement jamais que $Z = P[\mathbf{eu}]$, comme le montre la proposition suivante (dont nous ne nous servirons pas, mais dont nous intégrons la preuve pour montrer l'efficacité des calculs de séries de Hilbert) :

Proposition 5.5.9. — *On a $Z = P[\mathbf{eu}]$ si et seulement si W est engendré par une seule réflexion.*

Démonstration. — Si W est engendré par une seule réflexion, alors un argument immédiat permet de se ramener au cas où $\dim_{\mathbf{k}} V = 1$. Dans ce cas, l'exemple 5.5.8 montre que $Z = P[\mathbf{eu}]$.

Réciproquement, si $Z = P[\mathbf{eu}]$, alors

$$Z = \bigoplus_{i=0}^{|W|-1} P\mathbf{eu}^i$$

puisque le polynôme minimal de $\mathbf{eu}$ sur P est de degré $|W|$ (d'après (5.2.10)). On en déduit, à l'aide de (5.5.2) que

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(Z) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{|W|-1} (\mathbf{tu})^j}{(1-\mathbf{tu})^{|\mathrm{Réf}(W)/W|} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (1-\mathbf{t}^{d_i})(1-\mathbf{u}^{d_i})}.$$

Il découle donc de (5.5.4) que

$$\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W}\frac{(1-\mathbf{t})^n}{\det(1-w\mathbf{t})\ \det(1-w^{-1}\mathbf{u})}=\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{|W|-1}(\mathbf{tu})^j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+\mathbf{t}+\cdots+\mathbf{t}^{d_i-1})(1-\mathbf{u}^{d_i})}.$$

En spécialisant $\mathbf{t}\mapsto 1$ dans cette égalité, le terme de gauche ne contribue que lorsque $w=1$ et on obtient (car $|W|=d_1\cdots d_n$ d'après le théorème 1.2.1(a))

$$\frac{1}{(1-\mathbf{u})^n}=\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{|W|-1}\mathbf{u}^j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\mathbf{u}^{d_i})},$$

ou encore

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\mathbf{u}+\cdots+\mathbf{u}^{d_i-1})=\sum_{j=0}^{|W|-1}\mathbf{u}^j.$$

Par comparaison des degrés, on obtient

$$|W|-1=\sum_{i=1}^{n}(d_i-1).$$

Mais, toujours d'après le théorème 1.2.1(a), on a $|\text{Réf}(W)|=\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$, ce qui montre que

$$\text{Réf}(W)=W\setminus\{1\}.$$

Par suite, si w, $w'\in W$, alors $ww'w^{-1}w'^{-1}$ est de déterminant 1, donc ne peut être une réflexion. Donc $ww'=w'w$, c'est-à-dire que W est abélien, donc diagonalisable. La proposition en découle. □

5.6. Spécificité des groupes de Coxeter

Hypothèse. *Dans cette section, et seulement dans cette section, nous supposons que W est un groupe de Coxeter, et nous reprenons les notations du chapitre 3.*

En lien avec les problèmes évoqués dans ce chapitre, une des particularités de cette situation est que l'algèbre $\mathbf{H}$ admet un autre automorphisme $\sigma_{\mathbf{H}}$, induit par l'isomorphisme de W-modules $\sigma : V \xrightarrow{\sim} V^*$. C'est la réduction modulo T de

l'automorphisme $\sigma_{\widetilde{\mathbf{H}}}$ de $\widetilde{\mathbf{H}}$ défini dans la section 4.7. Les propositions 4.7.2 et 4.7.3 deviennent alors :

Proposition 5.6.1. — *Il existe un unique automorphisme* $\sigma_{\mathbf{H}}$ *de* $\mathbf{H}$ *tel que*

$$\begin{cases} \sigma_{\mathbf{H}}(y) = \sigma(y) & \text{si } y \in V, \\ \sigma_{\mathbf{H}}(x) = -\sigma^{-1}(x) & \text{si } x \in V^*, \\ \sigma_{\mathbf{H}}(w) = w & \text{si } w \in W, \\ \sigma_{\mathbf{H}}(C) = C & \text{si } C \in \mathscr{C}^*. \end{cases}$$

Proposition 5.6.2. — *De plus,*

(a) $\sigma_{\mathbf{H}}$ *stabilise les sous-algèbres* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ *et* $\mathbf{k}W$ *et échange les sous-algèbres* $\mathbf{k}[V]$ *et* $\mathbf{k}[V^*]$.

(b) *Si* $h \in \mathbf{H}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j]$, *alors* $\sigma_{\mathbf{H}}(h) \in \mathbf{H}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[j,i]$.

(c) *Si* $h \in \mathbf{H}^{\mathbb{N}}[i]$ *(respectivement* $h \in \mathbf{H}^{\mathbb{Z}}[i]$*), alors* $\sigma_{\mathbf{H}}(h) \in \mathbf{H}^{\mathbb{N}}[i]$ *(respectivement* $h \in \mathbf{H}^{\mathbb{Z}}[-i]$*).*

(d) $\sigma_{\mathbf{H}}$ *commute à l'action de* $W^\wedge$ *sur* $\mathbf{H}$.

(e) *Si* $c \in \mathscr{C}$, *alors* $\sigma_{\mathbf{H}}$ *induit un automorphisme de* $\mathbf{H}_c$, *toujours noté* $\sigma_{\mathbf{H}}$ *(ou* $\sigma_{\mathbf{H}_c}$*) si nécessaire).*

(f) $\sigma_{\mathbf{H}}(\mathbf{eu}) = -\mathbf{eu}$.

De même, il existe une action de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{k})$ sur $\mathbf{H}$, qui s'obtient par réduction modulo T de l'action sur $\widetilde{\mathbf{H}}$ définie dans la remarque 4.7.4.

PARTIE III

L'EXTENSION Z/P

Notation importante. *Tout au long de ce mémoire, nous fixons une copie Q de la P-algèbre Z, ainsi qu'un isomorphisme de P-algèbres* $\mathrm{cop} : Z \xrightarrow{\sim} Q$. *Cela signifie que P sera vu comme sous-$\mathbf{k}$-algèbre de Z et Q simultanément, mais que Q et Z seront considérées comme différentes.*

Nous notons alors $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}(P)$ *et* $\mathbf{L} = \mathrm{Frac}(Q)$ *et nous fixons une* ***clôture galoisienne*** $\mathbf{M}$ *de l'extension* $\mathbf{L}/\mathbf{K}$. *Posons* $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{M}/\mathbf{K})$ *et* $H = \mathrm{Gal}(\mathbf{M}/\mathbf{L})$. *Nous notons R la clôture intégrale de P dans* $\mathbf{M}$. *On a ainsi $P \subset Q \subset R$ et, d'après le corollaire 5.2.11, $Q = R^H$ et $P = R^G$. On peut alors utiliser les résultats de l'appendice A.*

Rappelons que $\mathbf{K}Z = \mathbf{K} \otimes_P Z$ *est le corps des fractions de l'algèbre Z (voir (5.3.7)). Nous noterons encore* $\mathrm{cop} : \mathrm{Frac}(Z) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}$ *l'extension de* cop *aux corps des fractions.*

Notons $Z^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $Z^{\mathbb{N}}$ *et* $Z^{\mathbb{Z}}$ *respectivement la* $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$*-graduation, la* $\mathbb{N}$*-graduation, la* $\mathbb{Z}$*-graduation induite par celle correspondante de* $\widetilde{\mathbf{H}}$ *(voir §4.2, et les exemples 4.2.2 et 4.2.1). Par transport à travers* cop, *on obtient des graduations* $Q^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $Q^{\mathbb{N}}$ *et* $Q^{\mathbb{Z}}$ *sur Q.*

L'objet essentiel de ce mémoire est l'étude de cette extension galoisienne, notamment des groupes d'inertie des idéaux premiers de R en lien avec l'étude des représentations de $\mathbf{H}$. Nous commençons cette étude dans ce chapitre.

CHAPITRE 6

THÉORIE DE GALOIS

6.1. Action de G sur l'ensemble W

Puisque Q est un P-module libre de rang $|W|$, l'extension de corps $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ est de degré $|W|$:

$$[\mathbf{L}:\mathbf{K}] = |W|. \tag{6.1.1}$$

Rappelons que le fait que $\mathbf{M}$ soit la clôture galoisienne de $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ implique que

$$\bigcap_{g\in G} {}^{g}H = 1. \tag{6.1.2}$$

Il résulte de (6.1.1) que

$$|G/H| = |W|. \tag{6.1.3}$$

Cette égalité établit un premier lien entre le couple (G,H) et le groupe W. Nous allons ici construire une bijection de nature galoisienne (dépendant de choix) entre G/H et W.

6.1.A. Spécialisation. — Fixons $c \in \mathscr{C}$. Rappelons que $\mathfrak{C}_c$ est l'idéal maximal de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ formé des fonctions qui s'annulent en c. On pose

$$\mathfrak{p}_c = \mathfrak{C}_c P \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{q}_c = \mathfrak{C}_c Q = \mathfrak{p}_c Q.$$

Puisque $P_\bullet = P/\mathfrak{p}_c \simeq \mathbf{k}[V]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^W$ est intègre et $Q_c = Q/\mathfrak{q}_c$ l'est aussi (voir le corollaire 5.2.13(d)), on en déduit que $\mathfrak{p}_c$ et $\mathfrak{q}_c$ sont des idéaux premiers de P et Q respectivement. Fixons un idéal premier $\mathfrak{r}_c$ de R au-dessus de $\mathfrak{p}_c$ et notons $R_c = R/\mathfrak{r}_c$. Notons alors D_c (respectivement I_c) le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) $G^D_{\mathfrak{r}_c}$ (respectivement $G^I_{\mathfrak{r}_c}$). Posons

$$\mathbf{K}_c = \mathrm{Frac}(P_\bullet), \qquad \mathbf{L}_c = \mathrm{Frac}(Q_c) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{M}_c = \mathrm{Frac}(R_c).$$

En d'autres termes, $\mathbf{K}_c = k_P(\mathfrak{p}_c)$, $\mathbf{L}_c = k_Q(\mathfrak{q}_c)$ et $\mathbf{M}_c = k_R(\mathfrak{r}_c)$.

Remarque 6.1.4. — Ici, le choix de l'idéal premier $\mathfrak{r}_c$ n'est pas anodin. Ce genre de problème nous poursuivra tout au long de ce mémoire. ■

Puisque $\mathfrak{q}_c = \mathfrak{p}_c Q$ est premier, on obtient que $\Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}_c)$ est réduit à un élément (ici, $\mathfrak{q}_c$) ce qui permet de déduire de la proposition A.3.5 que

$$G = H \cdot D_c = D_c \cdot H. \tag{6.1.5}$$

On obtient aussi que Q est nette sur P en $\mathfrak{q}_c$ (par définition). Le théorème A.2.5 nous dit alors que $I_c \subset H$. Puisque I_c est distingué dans D_c, on déduit de (6.1.2) et (6.1.5) que $I_c \subset \bigcap_{d \in D_c} {}^d H = \bigcap_{g \in G} {}^g H = 1$ et donc

$$I_c = 1. \tag{6.1.6}$$

Il découle alors de la proposition A.3.10 que

(6.1.7) $\mathbf{M}_c$ *est la clôture galoisienne de l'extension* $\mathbf{L}_c/\mathbf{K}_c$.

Pour finir, d'après (6.1.6) et le théorème A.2.3, on a

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{M}_c/\mathbf{K}_c) = D_c \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Gal}(\mathbf{M}_c/\mathbf{L}_c) = D_c \cap H. \tag{6.1.8}$$

Nous noterons $\mathrm{cop}_c : Z_c \to Q_c$ la spécialisation de cop en c et nous noterons encore $\mathrm{cop}_c : \mathrm{Frac}(Z_c) \to \mathbf{L}_c$ l'extension de cop_c aux corps de fractions.

Remarque 6.1.9. — Nous allons dans la section suivante étudier le cas où $c = 0$, et obtenir alors une description explicite de D_0. En revanche, donner une description explicite de D_c en général se révèle être une tâche insurmontable, comme le montreront les quelques exemples traités dans le chapitre 18 (qui étudie le cas où $\dim_{\mathbf{k}}(V) = 1$) : voir §18.5.C. ■

6.1.B. Spécialisation en 0. — Rappelons que $P_0 = P_\bullet = \mathbf{k}[V]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^W$ et $Q_0 \simeq Z_0 = \mathrm{Z}(\mathbf{H}_0) \simeq \mathbf{k}[V \times V^*]^{\Delta W}$ (voir l'exemple 5.2.7), où $\Delta : W \to W \times W$, $w \mapsto (w, w)$ est le morphisme diagonal. Ainsi,

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}(V \times V^*)^{W \times W} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{L}_0 = \mathbf{k}(V \times V^*)^{\Delta W},$$

D'autre part, l'extension $\mathbf{k}(V \times V^*)/\mathbf{K}_0$ est galoisienne de groupe $W \times W$ tandis que l'extension $\mathbf{k}(V \times V^*)/\mathbf{L}_0$ est galoisienne de groupe ΔW. Puisque $\Delta \mathrm{Z}(W)$ est le plus grand sous-groupe distingué de $W \times W$ contenu dans ΔW, il découle de (6.1.7) que

$$\mathbf{M}_0 \simeq \mathbf{k}(V \times V^*)^{\Delta \mathrm{Z}(W)}.$$

Choix fondamental. *Nous fixons une fois pour toutes un idéal premier* $\mathfrak{r}_0$ *de* R *au-dessus de* $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{C}_0 Q$ *ainsi qu'un isomorphisme de corps*

$$\mathrm{iso}_0 : \mathbf{k}(V \times V^*)^{\Delta Z(W)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}_0$$

dont la restriction à $\mathbf{k}(V \times V^*)^{\Delta W}$ *est l'isomorphisme canonique* $\mathbf{k}(V \times V^*)^{\Delta W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(Z_0) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}_0$. *Ici, l'isomorphisme* $\mathrm{Frac}(Z_0) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}_0$ *est* cop_0.

Convention. *L'action du groupe* $W \times W$ *sur le corps* $\mathbf{k}(V \times V^*)$ *s'effectue ainsi :* $V \times V^*$ *sera vu comme un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{k}(V \times V^*)$ *et engendrant ce corps, et l'action de* (w_1, w_2) *envoie* $(y, x) \in V \times V^*$ *sur* $(w_1(y), w_2(x))$.

Remarque 6.1.10. — L'action de $W \times W$ sur $\mathbf{k}(V \times V^*)$ décrite ci-dessus n'est pas celle obtenue en faisant agir $W \times W$ sur la variété $V \times V^*$ et induisant une action par précomposition sur le corps des fonctions $\mathbf{k}(V \times V^*)$: on passe de l'une à l'autre à travers l'isomorphisme $W \times W \xrightarrow{\sim} W \times W$, $(w_1, w_2) \mapsto (w_2, w_1)$. Cette distinction aura son importance (voir la remarque 19.7.25). ■

Ces choix étant effectués, on obtient un isomorphisme canonique $\mathrm{Gal}(\mathbf{M}_0/\mathbf{K}_0) \xrightarrow{\sim} (W \times W)/\Delta Z(W)$ induisant un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\mathbf{M}_0/\mathbf{L}_0) \xrightarrow{\sim} \Delta W/\Delta Z(W)$. Puisque $D_0 = \mathrm{Gal}(\mathbf{M}_0/\mathbf{K}_0)$ d'après (6.1.8), on obtient un morphisme de groupes

$$\iota : W \times W \longrightarrow G$$

vérifiant les propriétés suivantes :

Proposition 6.1.11. — (a) $\mathrm{Ker}\,\iota = \Delta Z(W)$.
(b) $\mathrm{Im}\,\iota = D_0$.
(c) $\iota^{-1}(H) = \Delta W$.

En vertu de (6.1.5), cette proposition fournit une bijection

$$(W \times W)/\Delta W \xleftrightarrow{\sim} G/H. \tag{6.1.12}$$

On peut bien sûr mettre $(W \times W)/\Delta W$ en bijection avec W par injection à gauche ou à droite. Nous en fixons une :

Identification. *Le morphisme* $W \to W \times W$, $w \mapsto (w, 1)$ *composé avec le morphisme* $\iota : W \times W \to G$ *est injectif, et nous identifierons le groupe* W *avec son image dans* G.

Ainsi, $w \in W \subset G$ est l'unique automorphisme de P-algèbre de R tel que, pour tout $r \in R$,

$$(w(r) \mod \mathfrak{r}_0) = (w,1)(r \mod \mathfrak{r}_0) \quad \text{dans } \mathbf{k}(V \times V^*)^{\Delta Z(W)}. \tag{6.1.13}$$

On a alors, d'après 6.1.12,

$$G = H \cdot W = W \cdot H \qquad \text{et} \qquad H \cap W = 1. \tag{6.1.14}$$

Corollaire 6.1.15. — *Pour tout $c \in \mathscr{C}$, l'application naturelle $D_c \to G/H \xrightarrow{\sim} W$ induit une bijection $D_c/(D_c \cap H) \xrightarrow{\sim} W$.*

Démonstration. — Cela découle de (6.1.5) de (6.1.14). □

6.1.C. Action de G sur W. — Notons maintenant $\mathfrak{S}_W$ le groupe des bijections de l'ensemble W. Nous identifierons le groupe $\mathfrak{S}_{W\setminus\{1\}}$ des bijections de l'ensemble $W \setminus \{1\}$ avec le stabilisateur de 1 dans $\mathfrak{S}_W$. L'identification $G/H \xleftrightarrow{\sim} W$ et l'action de G par translation à gauche sur G/H permet d'identifier G à un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_W$ des bijections de l'ensemble fini W. Ainsi,

$$G \subseteq \mathfrak{S}_W \qquad \text{et} \qquad H = G \cap \mathfrak{S}_{W\setminus\{1\}}. \tag{6.1.16}$$

Si $g \in G$ et $w \in W$, nous noterons $g(w)$ l'unique élément de W tel que $g\iota(w,1)H = \iota(1,g(w))H$. À travers cette identification de G comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_W$, l'application $\iota : W \times W \to G$ se décrit ainsi : si $(w_1,w_2) \in W \times W$ et $w \in W$, alors

$$\iota(w_1,w_2)(w) = w_1 w w_2^{-1}. \tag{6.1.17}$$

C'est l'action naturelle de $W \times W$ sur l'ensemble W par translation à gauche et à droite. Puisque ΔW est le stabilisateur de $1 \in W$ pour cette action, on obtient

$$\iota(\Delta W) = \iota(W \times W) \cap \mathfrak{S}_{W\setminus\{1\}}, \tag{6.1.18}$$

ce qui est bien sûr compatible avec la proposition 6.1.11(c) et (6.1.16).

Pour finir, le choix de l'injection de W dans G à travers $w \mapsto \iota(w,1)$ revient à identifier W comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_W$ à travers l'action sur lui-même par translation à gauche.

6.1.D. Élément d'Euler et groupe de Galois. — Posons $\mathrm{eu} = \mathrm{cop}(\mathbf{eu})$. Puisque le polynôme minimal de eu sur P (donc sur K) est de degré $|W|$ (voir (5.2.10)), on déduit de (6.1.1) que

$$\mathbf{L} = \mathbf{K}[\mathrm{eu}]. \tag{6.1.19}$$

Le calcul du groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{M}/\mathbf{K})$ est donc équivalent au calcul du groupe de Galois du polynôme minimal de **eu** (ou eu). Les méthodes classiques (réduction modulo un idéal premier notamment, voir par exemple la section A.5) nous serons utiles dans de petits exemples.

Revenons au calcul de l'injection $W \hookrightarrow G \subseteq \mathfrak{S}_W$. Si $w \in W$, posons $\mathrm{eu}_w = w(\mathrm{eu}) \in \mathbf{M}$. Rappelons que G est vu comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_W$ (voir (6.1.16)) : si $g \in G$ et $w \in W$, alors $g(w)$ est défini par l'égalité $g(w)H = gwH$. Puisque H agit trivialement sur eu, on en déduit que

$$g(\mathrm{eu}_w) = \mathrm{eu}_{g(w)} \tag{6.1.20}$$

et donc, si $(w_1, w_2) \in W \times W$,

$$\iota(w_1, w_2)(\mathrm{eu}_w) = \mathrm{eu}_{w_1 w w_2^{-1}}. \tag{6.1.21}$$

Cela étend l'égalité

$$w_1(\mathrm{eu}_w) = \mathrm{eu}_{w_1 w} \tag{6.1.22}$$

qui est une conséquence immédiate de la définition de eu_w. En particulier, d'après (6.1.14),

$$\textit{Le polynôme minimal de } \mathrm{eu} \textit{ sur } P \textit{ est } \prod_{w \in W} (\mathbf{t} - \mathrm{eu}_w). \tag{6.1.23}$$

Notons aussi que, d'après (6.1.13) et la convention choisie pour l'action de $W \times W$ sur $\mathbf{k}(V \times V^*)$, on a

$$\mathrm{iso}_0^{-1}(\mathrm{eu}_w \mod \mathfrak{r}_0) = \sum_{i=1}^{n} w(y_i) x_i \in \mathbf{k}[V \times V^*]^{\Delta Z(W)}.$$

6.2. Déploiement de KH

Rappelons que, d'après le théorème 5.3.8, l'équivalence de Morita induite par $\mathbf{KH}e$ montre l'existence d'un isomorphisme

$$\mathbf{KH} \simeq \mathrm{Mat}_{|W|}(\mathbf{K}Z).$$

Rappelons aussi que $\mathbf{K}Z$ est le corps des fractions de Z (voir (5.3.7)) et que $\mathrm{cop} : \mathbf{K}Z \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}$ désigne encore l'extension de $\mathrm{cop} : Z \xrightarrow{\sim} Q$. En particulier, **KH** est semi-simple, mais n'est pas **K**-déployée en général.

Si $g \in G$, le morphisme $\mathbf{K}Z \to \mathbf{M}$, $z \mapsto g(\mathrm{cop}(z))$ obtenu par restriction de g à $\mathbf{L}$ (à travers l'isomorphisme cop) est $\mathbf{K}$-linéaire et il s'étend en un unique morphisme de $\mathbf{M}$-algèbres

$$\begin{array}{rccc} g_Z : & \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}Z & \longrightarrow & \mathbf{M} \\ & m \otimes_{\mathbf{K}} z & \longmapsto & m\, g(\mathrm{cop}(z)). \end{array}$$

Bien sûr, $g_Z = (gh)_Z$ pour tout $h \in H$ et c'est un fait classique (voir la proposition A.3.12) que

$$(g_Z)_{gH \in G/H} : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}Z \longrightarrow \prod_{gH \in G/H} \mathbf{M}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{M}$-algèbres. Compte tenu de (6.1.14), ceci peut se réécrire ainsi : on a un isomorphisme de $\mathbf{M}$-algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}Z & \xrightarrow{\sim} & \prod_{w \in W} \mathbf{M} \\ x & \longmapsto & (w_Z(x))_{w \in W} \end{array} . \tag{6.2.1}$$

Fixons une $\mathbf{K}Z$-base ordonnée $\mathscr{B}$ de $\mathbf{KH}e$: rappelons que $|\mathscr{B}| = |W|$. Ce choix fournit un isomorphisme d'algèbres

$$\rho^{\mathscr{B}} : \mathbf{KH} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{|W|}(\mathbf{K}Z).$$

Maintenant, si $w \in W$, notons $\rho_w^{\mathscr{B}}$ le morphisme de $\mathbf{M}$-algèbres $\mathbf{MH} \longrightarrow \mathrm{Mat}_{|W|}(\mathbf{M})$ défini par

$$\rho_w^{\mathscr{B}}(m \otimes_P h) = m \cdot w(\mathrm{cop}(\rho^{\mathscr{B}}(h)))$$

pour tous $m \in \mathbf{M}$ et $h \in \mathbf{H}$. Alors $\rho_w^{\mathscr{B}}$ est une représentation irréductible de $\mathbf{MH}$: via l'équivalence de Morita de la proposition 5.3.1, elle correspond au $\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}Z$-module simple défini par w. On notera $\mathscr{L}_w$ le $\mathbf{MH}$-module simple dont le $\mathbf{M}$-espace sous-jacent est $\mathbf{M}^{|W|}$ et sur lequel l'action de $\mathbf{MH}$ s'effectue via $\rho_w^{\mathscr{B}}$.

Si on note $\mathrm{Irr}(\mathbf{MH})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathbf{MH}$-modules simples, alors on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}\,\mathbf{MH} \\ w & \longmapsto & \mathscr{L}_w \end{array} \tag{6.2.2}$$

est bijective et un isomorphisme de $\mathbf{M}$-algèbres

$$\prod_{w \in W} \rho_w^{\mathscr{B}} : \mathbf{MH} \xrightarrow{\sim} \prod_{w \in W} \mathrm{Mat}_{|W|}(\mathbf{M}). \tag{6.2.3}$$

Par conséquent,

(6.2.4) *la* $\mathbf{M}$*-algèbre* $\mathbf{MH}$ *est semi-simple déployée.*

De plus, la bijection (6.2.2) nous permet d'identifier son groupe de Grothendieck $\mathscr{K}_0(\mathbf{MH})$ avec le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}W$:

$$\mathscr{K}_0(\mathbf{MH}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}W. \tag{6.2.5}$$

Puisque l'algèbre **MH** est semi-simple déployée, il découle de [**GePf**, théorème 7.2.6] qu'il existe une unique famille d'éléments $(\mathrm{sch}_w)_{w\in W}$ de R telle que

$$\tau_{\mathbf{MH}} = \sum_{w\in W} \frac{\mathrm{car}_w}{\mathrm{sch}_w},$$

où $\mathrm{car}_w : \mathbf{MH} \to \mathbf{M}$ désigne le caractère du **MH**-module simple $\mathscr{L}_w$ et $\tau_{\mathbf{MH}} : \mathbf{MH} \to \mathbf{M}$ désigne l'extension de la forme symétrisante $\tau_{\mathbf{H}} : \mathbf{H} \to P$. L'élément sch_w de R est appelé l'*élément de Schur* associé au module simple $\mathscr{L}_w$. D'après [**GePf**, théorème 7.2.6], sch_w est égal au scalaire par lequel l'élément de Casimir $\mathrm{cas}_{\mathbf{H}} \in Z$ défini dans la section 5.4.B agit sur le module simple $\mathscr{L}_w$. Ainsi,

$$\mathrm{sch}_w = w(\mathrm{cop}(\mathrm{cas}_{\mathbf{H}})). \tag{6.2.6}$$

Remarque 6.2.7. — Dans la théorie générale des algèbres symétriques, l'élément de Schur sch_w est un invariant important, qui peut être très utile pour déterminer les blocs d'une réduction de $R\mathbf{H}$ modulo un idéal premier de R. Ici, la formule (6.2.6) montre que ce calcul est équivalent à la résolution des deux problèmes suivants :

(1) Calculer l'élément de Casimir $\mathrm{cas}_{\mathbf{H}}$.
(2) Comprendre l'action de W (ou de G) sur l'image de $\mathrm{cas}_{\mathbf{H}}$ dans $Q \subset R$.

Si le problème (1) semble attaquable (et sa solution serait intéressante car elle fournirait, après l'élément d'Euler, un nouvel élément du centre Z de $\mathbf{H}$), il est en revanche peu probable que l'on puisse obtenir des informations précises concernant le problème (2), tant les calculs de l'anneau R et du groupe de Galois G semblent hors de portée. Tout au plus peut-on espérer pour le moment comprendre leur réduction modulo $\mathfrak{r}_0$ par exemple, ou d'autres idéaux premiers bien choisis.

6.3. Graduations sur R

La $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-graduation sur $Z \simeq Q$ induit deux $\mathbb{N}$-graduations, associées aux morphismes de monoïdes φ_1 et φ_2 définis par $\varphi_m : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(i_1, i_2) \mapsto i_m$. Nous noterons $Q = \bigoplus_{i\geqslant 0} Q^{\varphi_m}[i]$ la graduation associée à φ_m. Notons $\rho_1 : \mathbf{k}^\times \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(Q)$, $\xi \mapsto \mathrm{bigr}_{\xi,1}$ et $\rho_2 : \mathbf{k}^\times \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(Q)$, $\xi \mapsto \mathrm{bigr}_{1,\xi}$ les morphismes associés respectivement aux graduations Q^{φ_1} et Q^{φ_2}.

D'après la proposition B.2.8, la graduation Q^{φ_m} s'étend en une graduation $R = \bigoplus_{i\geqslant 0} R^{(m)}[i]$ à laquelle correspond un morphisme de groupes $\tilde{\rho}_m : \mathbf{k}^\times \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(R)$ tel que $\tilde{\rho}_m(\xi)(q) = \rho_m(\xi)(q)$ pour tous $\xi \in \mathbf{k}^\times$ et $q \in Q$. Maintenant, si $\xi \in \mathbf{k}^\times$, alors $\rho_1(\xi)$ et $\rho_2(\xi')$ commutent pour tout $\xi' \in \mathbf{k}^\times$, donc $\tilde{\rho}_1(\xi)$ est un automorphisme de R qui stabilise Q et respecte la graduation Q^{φ_2} de Q. D'après le corollaire B.2.2, $\tilde{\rho}_1(\xi)$

stabilise la graduation $R^{(2)}$ de R, ce qui signifie que $\tilde{\rho}_1(\xi)$ et $\tilde{\rho}_2(\xi')$ commutent. En conclusion :

Proposition 6.3.1. — *Il existe une unique* $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$*-graduation sur* R *(nous la noterons* $R=\bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j]$*) étendant celle de* Q*.*

Elle induit un morphisme de groupes $\mathrm{bigr}^R : \mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(R)$, $(\xi,\xi')\mapsto \tilde{\rho}_1(\xi)\tilde{\rho}_2(\xi')=\tilde{\rho}_2(\xi')\tilde{\rho}_1(\xi)$ *tel que, pour tout* $(\xi,\xi')\in\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times$, $\mathrm{bigr}^R_{\xi,\xi'}$ *stabilise* Q *et coïncide avec* $\mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}$ *sur* Q*.*

Le groupe de Galois G *stabilise cette* $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$*-graduation.*

Démonstration. — Seules l'unicité et la stabilité sous l'action de G n'ont pas été montrées. Elles découlent respectivement de la proposition B.2.1 et du corollaire B.2.2. □

Nous noterons $R=\bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j]$ la $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-graduation étendant celle de Q. De même, $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R^{\mathbb{N}}[i]$ (respectivement $R=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R^{\mathbb{Z}}[i]$) désignera la $\mathbb{N}$-graduation (respectivement $\mathbb{Z}$-graduation) étendant celle de Q : en d'autres termes,

$$R^{\mathbb{N}}[i]=\bigoplus_{i_1+i_2=i} R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i_1,i_2] \quad \text{et} \quad R^{\mathbb{Z}}[i]=\bigoplus_{i_1+i_2=i} R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i_1,i_2].$$

Corollaire 6.3.2. — *L'idéal premier* $\mathfrak{r}_0$ *de* R *choisi dans la sous-section 6.1.B est bi-homogène (en particulier, il est homogène).*

Démonstration. — Si $\varphi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ est un morphisme de monoïdes, nous noterons R^φ la $\mathbb{Z}$-graduation associée. Puisque $\mathfrak{r}_0\cap Q=\mathfrak{q}_0$ est bi-homogène, il découle du corollaire B.2.10 que $\mathfrak{r}_0$ est R^φ-homogène pour tout morphisme de monoïde $\varphi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$. Cela force $\mathfrak{r}_0$ à être bi-homogène. □

La sous-algèbre $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[0,0]$ de R étant intègre et entière et de type fini sur $P^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[0,0]=\mathbf{k}$, c'est une extension finie de $\mathbf{k}$.

Corollaire 6.3.3. — *Si* R_+ *désigne l'unique idéal bi-homogène maximal de* R*, alors* G *stabilise* R_+ *(ce qui signifie que le groupe de décomposition de* R_+ *dans* G *est* G *lui-même).*

Démonstration. — Cela découle de la proposition 6.3.1. □

Corollaire 6.3.4. — *On a* $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[0,0]=\mathbf{k}$*, .*

Démonstration. — D'après 6.3.2, on a $\mathfrak{r}_0 \subset R_+$. Par conséquent, $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[0,0]$ est isomorphe à la composante homogène de bi-degré $(0,0)$ de $R/\mathfrak{r}_0$. Mais $k_R(\mathfrak{r}_0) \simeq \mathbf{k}(V\times V^*)^{\Delta Z(W)}$ et $R/\mathfrak{r}_0$ est entier sur $Q_0 = \mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta W}$, donc $R/\mathfrak{r}_0 \subset \mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta Z(W)}$, et cette inclusion respecte la bi-graduation, par unicité de la bi-graduation sur $R/\mathfrak{r}_0$ étendant celle de $Q_0 = \mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta W}$ (voir la proposition B.2.1). D'où le résultat. □

Corollaire 6.3.5. — *Soit D_+ (respectivement I_+) le groupe de décomposition (respectivement inertie) de R_+ dans G. Alors $D_+ = I_+ = G$.*

Démonstration. — Notons $\mathfrak{p}_+ = R_+ \cap P$. Alors $k_R(R_+)/k_P(\mathfrak{p}_+)$ est une extension galoisienne de groupe de Galois D_+/I_+ (voir le théorème A.2.3) et, d'après le corollaire 6.3.4, $k_R(R_+) = \mathbf{k} = k_P(\mathfrak{p}_+)$, donc $D_+/I_+ = 1$. Puisque $D_+ = G$ d'après le corollaire 6.3.3, le corollaire 6.3.5 est démontré. □

6.4. Action sur R des automorphismes naturels de H

La section précédente 6.3 étudiait l'extension à R des automorphismes de Q induits par $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times$. Dans la section 4.6, nous avons aussi introduit une action de $W^\wedge \rtimes \mathcal{N}$ sur $\mathbf{H}$ qui stabilisait Z (forcément), P mais aussi $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{p}_0 Z$: cette action se transporte à $Q \simeq Z$ et stabilise encore $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{p}_0 Q$. Nous allons montrer comment étendre cette action à R, et en tirer les conséquences sur le groupe de Galois G. Pour cela, nous nous placerons dans un cadre relativement général :

Hypothèse. *Dans cette section, et seulement dans cette section, nous fixons un groupe $\mathcal{G}$ agissant à la fois sur Z et sur $\mathbf{k}[V\times V^*]$ et vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) *$\mathcal{G}$ stabilise P et $\mathfrak{p}_0$.*
(2) *L'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathbf{k}[V\times V^*]$ normalise l'action de $W\times W$ et celle de ΔW.*
(3) *L'isomorphisme canonique de $\mathbf{k}$-algèbres $Z_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta W}$ est $\mathcal{G}$-équivariant.*

On transporte, à travers l'isomorphisme cop, l'action de $\mathcal{G}$ sur Z en une action de $\mathcal{G}$ sur Q. Si $\tau \in \mathcal{G}$, on note τ° l'automorphisme de $\mathbf{k}[V\times V^*]$ induit par τ : d'après (2), τ° stabilise $\mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta Z(W)}$, $\mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta W}$ et $\mathbf{k}[V\times V^*]^{W\times W}$.

Proposition 6.4.1. — *Soit $\tau \in \mathcal{G}$. Alors il existe une unique extension $\tilde{\tau}$ de τ à R vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(1) $\tilde{\tau}(\mathfrak{r}_0) = \mathfrak{r}_0$;
(2) *L'automorphisme de* $R/\mathfrak{r}_0$ *induit par* $\tilde{\tau}$ *est égal à* τ°, *via l'identification* $\mathrm{iso}_0 : \mathbf{k}(V \times V^*)^{\Delta Z(W)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}_0$ *de §6.1.B.*

Démonstration. — Commençons par montrer l'existence. Tout d'abord, $\mathbf{M}$ étant une clôture galoisienne de l'extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$, il existe une extension $\tau_{\mathbf{M}}$ de τ à $\mathbf{M}$. Puisque R est la clôture intégrale de Q dans $\mathbf{M}$, $\tau_{\mathbf{M}}$ stabilise R. De plus, puisque $\tau(\mathfrak{q}_0) = \mathfrak{q}_0$, il existe $h \in H$ tel que $\tau_{\mathbf{M}}(\mathfrak{r}_0) = h(\mathfrak{r}_0)$. Posons donc $\tilde{\tau}_{\mathbf{M}} = h^{-1} \circ \tau_{\mathbf{M}}$. Ainsi

$$\tilde{\tau}_{\mathbf{M}}(\mathfrak{r}_0) = \mathfrak{r}_0 \qquad \text{et} \qquad (\tilde{\tau}_{\mathbf{M}})|_{\mathbf{L}} = \tau.$$

Notons $\tilde{\tau}_{\mathbf{M},0}$ l'automorphisme de $R/\mathfrak{r}_0$ induit par $\tilde{\tau}_{\mathbf{M}}$.

Par construction, la restriction de $\tilde{\tau}_{\mathbf{M},0}$ à $Q/\mathfrak{q}_0$ est égale à la restriction de $\mathrm{iso}_0 \circ \tau^\circ \circ \mathrm{iso}_0^{-1}$. Par suite, il existe $d \in D_0 \cap H$ tel que $\tilde{\tau}_{\mathbf{M},0} = d \circ (\mathrm{iso}_0 \circ \tau_0 \circ \mathrm{iso}_0^{-1})$. On pose alors $\tilde{\tau} = d^{-1} \circ \tilde{\tau}_{\mathbf{M}}$: il est clair que $\tilde{\tau}$ vérifie (1) et (2).

Montrons maintenant l'unicité. Si $\tilde{\tau}_1$ est une autre extension de τ à R satisfaisant (1) et (2), posons $\sigma = \tilde{\tau}^{-1}\tilde{\tau}_1(\mathfrak{r}_0)$. Alors $\sigma \in G$ et, d'après (1), σ stabilise $\mathfrak{r}_0$. Donc $\sigma \in D_0$. De plus, d'après (2), σ induit sur $R/\mathfrak{r}_0$ l'automorphisme identité. Donc $\sigma \in I_0 = 1$. Donc $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_1$. □

L'existence et l'unicité dans l'énoncé de la proposition précédente 6.4.1 impliquent le corollaire suivant :

Corollaire 6.4.2. — *L'action de* $\mathscr{G}$ *sur* Q *s'étend (de manière unique) en une action de* $\mathscr{G}$ *sur* R *qui stabilise* $\mathfrak{r}_0$ *et est compatible avec l'isomorphisme* iso_0.

Par la suite, on notera encore τ l'extension $\tilde{\tau}$ définie dans la proposition 6.4.1. Puisque $\mathscr{G}$ stabilise P, Q, $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{p}_0 Q$ et $\mathfrak{r}_0$, on obtient :

Corollaire 6.4.3. — *L'action de* $\mathscr{G}$ *sur* R *normalise* G, H, $D_0 = \iota(W \times W)$ *et* $D_0 \cap H = \iota(\Delta W) = W/Z(W)$.

Du corollaire 6.4.3, on déduit que $\mathscr{G}$ agit sur l'ensemble $G/H \simeq W$ et que

(6.4.4) *l'image de* $\mathscr{G}$ *dans* $\mathfrak{S}_W$ *normalise* G.

Exemple 6.4.5. — Le groupe $\mathscr{G} = \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ agit sur $\mathbf{H}$ et stabilise P et $\mathfrak{p}_0$; par les mêmes formules, il agit sur $\mathbf{k}[V \times V^*]$ en normalisant $W \times W$ et ΔW (en fait, $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times \mathrm{Hom}(W, \mathbf{k}^\times)$ commute avec $W \times W$ et seul $\mathscr{N}$ agit non trivialement sur $W \times W$).

Il découle des résultats précédents que l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ sur Q s'étend de manière unique en une action sur R qui stabilise $\mathfrak{r}_0$ et qui est compatible avec

l'isomorphisme iso_0. Par l'unicité, l'extension de l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times W^\wedge$ à R commute avec l'action de G tandis que celle de $\mathscr{N}$ rend le morphisme $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_W$ équivariant pour l'action de $\mathscr{N}$.

Pour finir, toujours par unicité, l'extension de l'action du sous-groupe $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times$ correspond à l'extension à R de la $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-graduation décrite dans la proposition 6.3.1. ■

6.5. Une situation particulière : réflexions d'ordre 2

Hypothèse et notation. *Dans cette section, et dans cette section seulement, nous supposons que toutes les réflexions de W sont d'ordre 2 et que $-\mathrm{Id}_V \in W$. Nous noterons $w_0 = -\mathrm{Id}_V$ et $\tau_0 = (-1, 1, \varepsilon) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times W^\wedge$.*

Par construction, la restriction de τ_0 à $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ est égale à l'identité. Puisque $-\mathrm{Id}_V \in W$, la restriction de τ_0 à $\mathbf{k}[V]^W$ est égale à l'identité. De plus, la restriction de τ_0 à $\mathbf{k}[V^*]^W$ est aussi égale à l'identité. En conclusion,

$$\forall\ p \in P,\ \tau_0(p) = p. \tag{6.5.1}$$

Rappelons que τ_0 désigne aussi l'automorphisme de R défini par la proposition 6.4.1. Par définition du groupe de Galois, on a $\tau_0 \in G$. Plus précisément :

Proposition 6.5.2. — *Supposons que toutes les réflexions de W sont d'ordre 2 et que $w_0 = -\mathrm{Id}_V \in W$. Alors τ_0 est un élément central de G. Son action sur W est donnée par $\tau_0(w) = w_0 w$ (ce qui signifie que $\tau_0 = w_0 = \iota(w_0, 1)$, via l'injection canonique $W \hookrightarrow G$) et, à travers l'injection $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_W$, on a*

$$G \subset \{\sigma \in \mathfrak{S}_W \mid \forall\ w \in W,\ \sigma(w_0 w) = w_0 \sigma(w)\}.$$

De plus, si $w \in W$, alors

$$\tau_0(\mathrm{eu}_w) = -\mathrm{eu}_w = \mathrm{eu}_{w_0 w}.$$

Démonstration. — D'après le lemme 4.6.7(c), on a $\tau_0(\mathrm{eu}) = -\mathrm{eu}$. De plus, d'après l'exemple 6.4.5, l'action de τ_0 sur R commute à l'action de G. Ainsi, si $w \in W$, $\tau_0(\mathrm{eu}_w) = -\mathrm{eu}_w$.

Mais d'autre part, il existe $w_1 \in W$ tel que $\tau_0(\mathrm{eu}) = \mathrm{eu}_{w_1}$. Comme $-\mathrm{eu}_0 = w_0(\mathrm{eu}_0)$, il résulte de la caractérisation de l'action de W sur $\mathbf{L}$ que $\tau_0(\mathrm{eu}) = \mathrm{eu}_{w_0} = -\mathrm{eu}$. Puisque w_0 est central dans W, on a $w_0(\mathrm{eu}_w) = \mathrm{eu}_{w_0 w} = \mathrm{eu}_{w w_0} = w(\mathrm{eu}_{w_0}) = -\mathrm{eu}_w$. Donc $\tau_0 = w_0$ car $\mathbf{M} = \mathbf{K}[(\mathrm{eu}_w)_{w \in W}]$.

Maintenant, le fait que $G \subset \{\sigma \in \mathfrak{S}_W \mid \forall\ w \in W,\ \sigma(w_0 w) = w_0 \sigma(w)\}$ découle du fait que $\tau_0 = w_0$ commute avec l'action de G. □

Notons que $w_0 w = -w$ et donc l'inclusion de la proposition 6.5.2 peut se réécrire

$$G \subset \{\sigma \in \mathfrak{S}_W \mid \forall\ w \in W,\ \sigma(-w) = -\sigma(w)\}. \tag{6.5.3}$$

Vu ainsi, cela montre que, sous les hypothèses de cette section, G est contenu dans un groupe de Weyl de type $B_{|W|/2}$.

6.6. Spécificité des groupes de Coxeter

Hypothèse. *Dans cette section, et seulement dans cette section, nous supposons que W est un groupe de Coxeter, et nous reprenons les notations du chapitre 3.*

En lien avec les problèmes évoqués dans ce chapitre, une des particularités de cette situation est que l'algèbre $\mathbf{H}$ admet un autre automorphisme $\sigma_{\mathbf{H}}$, induit par l'isomorphisme de W-modules $\sigma : V \xrightarrow{\sim} V^*$. Cet automorphisme stabilise P, et induit un automorphisme de $\mathbf{k}[V \times V^*]$ qui normalise $W \times W$ et ΔW. Plus précisément, notons $\sigma_2 : V \oplus V^* \xrightarrow{\sim} V \oplus V^*$, $(y, x) \longmapsto (-\sigma^{-1}(x), \sigma(y))$ l'automorphisme du $\mathbf{k}W$-module $V \oplus V^*$. Alors

$$\sigma_2(w, w')\sigma_2^{-1} = (w', w) \tag{6.6.1}$$

pour tout $(w, w') \in W \times W$. En vertu de la proposition 6.4.1, $\sigma_{\mathbf{H}}$ s'étend de manière unique en un automorphisme de R, toujours noté $\sigma_{\mathbf{H}}$, qui stabilise $\mathfrak{r}_0$ et qui est compatible avec iso_0. Or, $\sigma_{\mathbf{H}}$ normalise G et son sous-groupe $\iota(W \times W)$ (voir (6.4.4)) et, compte tenu de (6.6.1), son action sur les éléments de $W \subset G$ vérifie

$$^{\sigma_{\mathbf{H}}} w H = w^{-1} H \qquad \text{et} \qquad H^{\sigma_{\mathbf{H}}} w = H w^{-1} \tag{6.6.2}$$

pour tout $w \in W$. Il découle alors de (6.4.4) que :

Corollaire 6.6.3. — *Si $g \in G \subset \mathfrak{S}_W$ et $w \in W$, alors $({}^{\sigma_{\mathbf{H}}} g)(w) = g(w^{-1})^{-1}$.*

6.7. Problèmes, questions

Voici quelques problèmes soulevés par ce chapitre.

Problème 6.7.1. — *Calculer les groupes de Galois $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{M}/\mathbf{K})$ et $H = \mathrm{Gal}(\mathbf{M}/\mathbf{L})$ comme sous-groupes de $\mathfrak{S}_W$.*

Une piste à explorer pour résoudre le problème 6.7.1 est la suivante : soit W' un sous-groupe parabolique de W et notons G' le groupe de Galois associé à W' de la même façon que G est associé à W. Notons aussi H' le sous-groupe de G' correspondant à H.

Problème 6.7.2. — *Relier G et G', H et H'.*

Il est à peu près exclus d'espérer que R soit lisse (c'est faux par exemple dès le rang 1 comme on le montrera dans le chapitre 18). Il semble plus raisonnable de se poser les questions suivantes :

Question 6.7.3. — *Est-ce que R est d'intersection complète, de Gorenstein, de Cohen-Macaulay ? Est-ce R est un P-module plat ? un Q-module plat ?*

Nous n'avons aucune idée de la réponse. En revanche, si on note E^* un suppémentaire $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-gradué et G-stable de $(R_+)^2$ dans R_+ et si on note E son dual (comme dans la section B.3), alors la question suivante devient raisonnable, sachant que $R^G = P$ est lisse (voir la proposition B.3.7) :

Question 6.7.4. — *Est-ce que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\mathbf{k}}(E)$ engendré par des réflexions ?*

Remarque. — Notons I le noyau du morphisme canonique (surjectif) $\mathbf{k}[E]\to R$. Si R est d'intersection complète et G agit trivialement sur $I/\mathbf{k}[E]_+I$, alors G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{\mathbf{k}}(E)$ engendré par des réflexions (voir la proposition B.3.7). ■

Plus délicat est le problème qui suit :

Problème 6.7.5. — *Calculer une présentation de R ou, du moins, donner un algorithme permettant de calculer une telle présentation.*

Nous avons vu dans la preuve du corollaire 6.3.4 que $R/\mathfrak{r}_0\subset\mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta Z(W)}$ tandis que, par construction, $k_R(\mathfrak{r}_0)=\mathbf{k}(V\times V^*)^{\Delta Z(W)}$ et $\mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta Z(W)}$ est intégralement clos et entier sur $R/\mathfrak{r}_0$. Il est naturel de se poser la question suivante :

Question 6.7.6. — *Est-ce que $R/\mathfrak{r}_0=\mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta Z(W)}$? De manière équivalente, est-ce que $R/\mathfrak{r}_0$ est intégralement clos ?*

CHAPITRE 7

GÉOMÉTRIE

7.1. Géométrie de l'extension Z/P

Les algèbres P, Z, $P_\bullet$ et Z_c étant de type fini, on peut leur associer des $\mathbf{k}$-variétés algébriques que nous noterons $\mathscr{P}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{P}_\bullet$ et $\mathscr{Z}_c$. Notons que

$$\mathscr{P} = \mathscr{C} \times V/W \times V^*/W \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_\bullet = V/W \times V^*/W$$

et que
$$\mathscr{Z}_0 = (V \times V^*)/W.$$

Il découle des corollaires 5.2.11(d) et 5.2.13(d) que

(7.1.1) *les variétés $\mathscr{Z}$ et $\mathscr{Z}_c$ sont irréductibles et normales.*

Puisque tous les énoncés algébriques des chapitres précédents ne dépendent pas du corps de base, l'énoncé (7.1.1) peut être entendu au sens "géométrique". Les inclusions $P \subset Z$ et $P_\bullet \subset Z_c$ induisent des morphismes de variétés

$$\Upsilon : \mathscr{Z} \longrightarrow \mathscr{P} = \mathscr{C} \times V/W \times V^*/W$$

et
$$\Upsilon_c : \mathscr{Z}_c \longrightarrow \mathscr{P}_\bullet = V/W \times V^*/W.$$

Les surjections $P \to P/\mathfrak{C}_c P \simeq P_\bullet$ et $Z \to Z_c$ induisent des immersions fermées $j_c : \mathscr{Z}_c \hookrightarrow \mathscr{Z}$ et $i_c : \mathscr{P}_\bullet \hookrightarrow \mathscr{P}$, $p \mapsto (c, p)$. Par ailleurs, l'injection canonique $\mathbf{k}[\mathscr{C}] \hookrightarrow P$ induit la

projection canonique $\pi : \mathscr{P} \to \mathscr{C}$ et, dans le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{X}_c \arrow[r, hook, "j_c"] \arrow[d, "\Upsilon_c"'] & \mathscr{X} \arrow[d, "\Upsilon"] & \\
V/W \times V^*/W \arrow[r, equal] & \mathscr{P}_\bullet \arrow[r, hook, "i_c"] \arrow[d] & \mathscr{P} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"] & \mathscr{C} \times V/W \times V^*/W \\
 & \{c\} \arrow[r, hook] & \mathscr{C} = \mathbf{A}^{\mathrm{Réf}(W)/W} &
\end{tikzcd}
\tag{7.1.2}
$$

tous les carrés sont cartésiens. Notons que, d'après les corollaires 5.2.11 et 5.2.13,

(7.1.3) *les morphismes Υ et Υ_c sont finis et plats.*

De plus,

(7.1.4) *π est lisse,*

car $V/W \times V^*/W$ est lisse.

Exemple 7.1.5. — D'après l'exemple 5.2.7, on a $\mathscr{X}_0 = (V \times V^*)/W$ et $\Upsilon_0 : (V \times V^*)/W = \mathscr{X}_0 \to \mathscr{P}_\bullet = V/W \times V^*/W$ est le morphisme canonique. ■

Notons $\mathscr{X}^{\text{rég}}$ l'ouvert $\mathrm{Spec}(Z^{\text{rég}})$ de $\mathscr{X}$. Le corollaire 5.3.5 montre que

(7.1.6) $\mathscr{X}^{\text{rég}} \simeq (V^{\text{rég}} \times V^*)/W \times \mathscr{C}$ *est lisse.*

7.2. Géométrie de l'extension R/P

Puisque R et $Q \simeq Z$ sont aussi des $\mathbf{k}$-algèbres de type fini, on peut leur associer des $\mathbf{k}$-variétés $\mathscr{R}$ et $\mathscr{Q} \simeq \mathscr{X}$: l'isomorphisme $\mathrm{cop}^* : \mathscr{Q} \xrightarrow{\sim} \mathscr{X}$ est induit par $\mathrm{cop} : Z \xrightarrow{\sim} Q$. Alors l'inclusion $P \hookrightarrow R$ (respectivement $Q \hookrightarrow R$) définit un morphisme de variétés $\rho_G : \mathscr{R} \to \mathscr{P}$ (respectivement $\rho_H : \mathscr{R} \to \mathscr{Q}$) et les égalités $P = R^G$ et $Q = R^H$ montrent que ρ_G et ρ_H induisent des isomorphismes

(7.2.1) $$\mathscr{R}/G \xrightarrow{\sim} \mathscr{P} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{R}/H \xrightarrow{\sim} \mathscr{Q}.$$

Dans cette optique, le choix d'un idéal premier $\mathfrak{r}_c$ au-dessus de $\mathfrak{q}_c$ équivaut au choix d'une composante irréductible $\mathscr{R}_c$ de $\rho_H^{-1}(\mathscr{Q}_c)$ (dont $\mathfrak{r}_c$ est l'idéal de définition). De même, l'argument conduisant à la proposition 6.1.11 implique par exemple que le nombre de composantes irréductibles de $\rho_G^{-1}(\mathscr{Q}_0)$ est égal à $|G| \cdot |\Delta Z(W)|/|W|^2$. Il

montre aussi que $\iota(W \times W)$ est le stabilisateur de $\mathscr{R}_0$ dans G et $\mathscr{R}_0/\iota(W \times W) \simeq \mathscr{P}_0$, que $\iota(\Delta W)$ est le stabilisateur de $\mathscr{R}_0$ dans H et que $\mathscr{R}_0/\iota(\Delta W) \simeq \mathscr{Q}_0$. On a donc un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{R}_c \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathscr{R} \arrow[d, "\rho_H"] \arrow[dd, bend left, "\rho_G"] & \\
 & \mathscr{Q}_c \arrow[r, hook, "j_c"] \arrow[d, "\Upsilon_c"'] & \mathscr{Q} \arrow[d, "\Upsilon"] & \\
V/W \times V^*/W \arrow[r, equal] & \mathscr{P}_\bullet \arrow[r, hook, "i_c"] \arrow[d] & \mathscr{P} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"] & \mathscr{C} \times V/W \times V^*/W \\
 & \{c\} \arrow[r, hook] & \mathscr{C} &
\end{tikzcd}
\tag{7.2.2}
$$

complétant le diagramme 7.1.2 (en identifiant $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{Z}$ via cop^*). Seuls les deux carrés inférieurs du diagramme 7.2.2 sont cartésiens.

7.2.A. Automorphismes. — Le groupe $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ (qui agit sur $\mathbf{H}$ par automorphismes de $\mathbf{k}$-algèbres) stabilise les $\mathbf{k}$-sous-algèbres $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$, P et Q de $\mathbf{H}$. Ainsi, τ induit des automorphismes des $\mathbf{k}$-variétés $\mathscr{C}$, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ et les morphismes Υ et π du diagramme 7.1.2 sont équivariants pour cette action.

De même, cette action s'étend en une action sur $\mathscr{R}$ (voir le corollaire 6.4.2) qui rend ρ_H et ρ_G équivariants.

7.2.B. Composantes irréductibles de $\mathscr{R} \times_{\mathscr{P}} \mathscr{Z}$. — Si $w \in W$, on pose

$$\mathscr{R}_w = \{(r, \mathrm{cop}^*(\rho_H(w(r)))) \mid r \in R\} \subseteq \mathscr{R} \times_{\mathscr{P}} \mathscr{Z}.$$

Lemme 7.2.3. — *Si $w \in W$, alors $\mathscr{R}_w$ est une composante irréductible de $\mathscr{R} \times_{\mathscr{P}} \mathscr{Z}$, isomorphe à $\mathscr{R}$. De plus,*

$$\mathscr{R} \times_{\mathscr{P}} \mathscr{Z} = \bigcup_{w \in W} \mathscr{R}_w$$

et $\mathscr{R}_w = \mathscr{R}_{w'}$ si et seulement si $w = w'$.

Démonstration. — C'est seulement la traduction géométrique du fait que le morphisme

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_P Z & \longrightarrow & \prod_{w \in W} R \\ x & \longmapsto & (w_Z(x))_{w \in W} \end{array}$$

défini par restriction du morphisme 6.2.1 est fini et devient un isomorphisme par extension des scalaires à $\mathbf{K}$. □

7.3. Problèmes, questions

Problème 7.3.1. — *Déterminer le lieu singulier de $\mathscr{Z}$ (et de $\mathscr{Z}_c$), ou au moins sa codimension.*

Question 7.3.2. — *Soit $c \in \mathscr{C}$ et $z \in \mathscr{Z}_c$. Est-ce que z est un point lisse de $\mathscr{Z}$ si et seulement si c'est un point lisse de $\mathscr{Z}_c$? Plus précisément, est-ce que les singularités de $\mathscr{Z}$ et $\mathscr{Z}_c$ en z sont équivalentes ?*

Problème 7.3.3. — *Déterminer le lieu de ramification de Υ et de Υ_c.*

CHAPITRE 8

CELLULES DE CALOGERO-MOSER

Notation. *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, nous fixons un idéal premier $\mathfrak{r}$ de R et posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} \cap Q$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \cap P$. Nous noterons $D_{\mathfrak{r}}$ (respectivement $I_{\mathfrak{r}}$) le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\mathfrak{r}$ dans G.*

8.1. Définition, premières propriétés

Rappelons que, maintenant que l'on a choisi une fois pour toutes un idéal premier $\mathfrak{r}_0$ ainsi qu'un isomorphisme $k_R(\mathfrak{r}_0) \xrightarrow{\sim} \mathbf{k}(V \times V^*)^{\Delta Z(W)}$, on peut identifier les ensembles G/H et W (voir §6.1.B). Ainsi, le groupe G agit sur l'*ensemble* W.

Définition 8.1.1. — *On appelle* ***$\mathfrak{r}$-cellule de Calogero-Moser*** *toute orbite du groupe d'inertie $I_{\mathfrak{r}}$ dans l'**ensemble** W. Nous noterons $\sim_{\mathfrak{r}}^{\mathrm{CM}}$ la relation d'équivalence correspondant à la partition de W en $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser.*

L'ensemble des $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser sera noté ${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{\mathfrak{r}}(W)$.

Rappelons que W s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{P-\mathrm{alg}}(Q,R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}-\mathrm{alg}}(\mathbf{L},\mathbf{M})$. En vertu de la proposition A.3.5, si w et w' sont deux éléments de W, alors

(8.1.2) $\qquad w \sim_{\mathfrak{r}}^{\mathrm{CM}} w'$ *si et seulement si* $w(q) \equiv w'(q) \mod \mathfrak{r}$ *pour tout* $q \in Q$.

Remarque 8.1.3. — Si $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}'$ sont deux idéaux premiers de R tels que $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}'$, alors $I_{\mathfrak{r}} \subset I_{\mathfrak{r}'}$ et donc les $\mathfrak{r}'$-cellules de Calogero-Moser sont des réunions de $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser. ■

***Exemple 8.1.4* (Réflexions d'ordre 2)**. — Si toutes les réflexions de W sont d'ordre 2 et si $w_0 = -\mathrm{Id}_V \in W$, alors il découle de la proposition 6.5.2 que $G \subset \{\sigma \in \mathfrak{S}_W \mid \forall\ w \in W,\ \sigma(w_0 w) = w_0 \sigma(w)\}$. Par conséquent, si Γ est une $\mathfrak{r}$-cellule de Calogero-Moser, alors $w_0\Gamma = \Gamma w_0$ est une $\mathfrak{r}$-cellule de Calogero-Moser. ■

L'action de G étant compatible avec la bi-graduation de R, le résultat suivant n'est pas étonnant :

Proposition 8.1.5. — *Soit $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ une graduation G-stable de R. Notons $\tilde{\mathfrak{r}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{r}\cap R_i$. Alors $I_{\mathfrak{r}} = I_{\tilde{\mathfrak{r}}}$ et donc les $\tilde{\mathfrak{r}}$-cellules de Calogero-Moser coïncident avec les $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser.*

Démonstration. — Cela découle du corollaire B.2.12. □

Exemple 8.1.6. — Le groupe de Galois G stabilisant la bi-graduation naturelle de R (voir la proposition 6.3.1), il stabilise toutes les graduations induites par des morphismes de monoïdes $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ comme dans la section 4.2. ■

8.2. Cellules et blocs

Si $w \in W$, on notera $e_w \in \mathbf{MH}$ l'idempotent primitif central de $\mathbf{MH}$ (qui est semi-simple déployée d'après (6.2.4)) associé au module simple $\mathscr{L}_w$: c'est l'unique idempotent primitif central de $\mathbf{MH}$ qui agit comme l'identité sur le $\mathbf{M}$-module simple $\mathscr{L}_w$. Si $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}Q)$, nous noterons $\mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b)$ l'unique partie de W telle que

$$b = \sum_{w\in \mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b)} e_w. \tag{8.2.1}$$

En d'autres termes, la bijection $W \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathrm{Irr}\,\mathbf{MH}$ se restreint en une bijection $\mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathrm{Irr}\,\mathbf{MH}b$. Il est évident que $(\mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b))_{b\in\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathbf{H})}$ est une partition de W. En fait, cette partition coïncide avec la partition en cellules de Calogero-Moser :

Théorème 8.2.2. — *Soient $w, w' \in W$ et notons b et b' les idempotents primitifs centraux de $R_{\mathfrak{r}}\mathbf{H}$ tels que $w \in \mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b)$ et $w' \in \mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b')$. Alors $w \sim^{\mathfrak{r}}_{\mathrm{CM}} w'$ si et seulement si $b = b'$.*

Démonstration. — Notons $\omega_w : \mathrm{Z}(R\mathbf{H}) = R\otimes_P Z \longrightarrow R$ le caractère central associé au $\mathbf{MH}$-module simple $\mathscr{L}_w$ (voir la sous-section C.2.A). Au vu de la définition de $\mathscr{L}_w$, on a

$$\omega_w(r\otimes_P z) = r\,w(\mathrm{cop}(z))$$

pour tous $r \in R$ et $q \in Q$. Par conséquent, d'après (8.1.2), on a $w \sim^{\mathfrak{r}}_{\mathrm{CM}} w'$ si et seulement si $\omega_w \equiv \omega_{w'} \mod \mathfrak{r}$. Le résultat d'ecoule alors du corollaire C.2.4. □

Autrement dit, on a construit des bijections

$$(8.2.3) \qquad {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{\mathfrak{r}}(W) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}Z) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(k_R(\mathfrak{r})Z).$$

Puisque $\mathbf{M}Z$ est le centre de $\mathbf{MH}$, la semi-simplicité et le déploiement de $\mathbf{MH}$ impliquent immédiatement que

$$(8.2.4) \qquad \dim_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}Zb) = |\mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b)|.$$

Rappelons que, puisque Z est un facteur direct de $\mathbf{H}$, alors $k_R(\mathfrak{r})Z$ s'identifie à son image dans $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$: cependant, cette image peut ne pas coïncider avec le centre de $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$.

Corollaire 8.2.5. — *Notons $\bar{b}$ l'image de b dans $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H} = R_{\mathfrak{r}}\mathbf{H}/\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}}\mathbf{H}$. Alors*

$$\dim k_R(\mathfrak{r})Z\bar{b} = |\mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b)|.$$

Démonstration. — Le $R_{\mathfrak{r}}$-module $R_{\mathfrak{r}}Z$ est libre (de rang $|W|$) donc le $R_{\mathfrak{r}}$-module $R_{\mathfrak{r}}Zb$ est projectif, donc libre car $R_{\mathfrak{r}}$ est local. En vertu de (8.2.4), le $R_{\mathfrak{r}}$-rang de $R_{\mathfrak{r}}Zb$ est $|\mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b)|$. D'où le résultat. □

***Exemple 8.2.6* (Spécialisation)**. — Soit $c \in \mathscr{C}$. Choisissons un idéal premier $\mathfrak{r}_c$ de R au-dessus de $\mathfrak{p}_c$ et notons, comme dans §6.1.A, $D_c = G^D_{\mathfrak{r}_c}$ et $I_c = G^I_{\mathfrak{r}_c}$. Alors $I_c = 1$ d'après 6.1.6 et donc

Les $\mathfrak{r}_c$-cellules de Calogero-Moser sont des singletons. □

8.3. Lieu de ramification

Nous noterons $\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}}$ l'idéal de définition du lieu de ramification du morphisme fini $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(P)$: en d'autres termes, R est étale sur P en $\mathfrak{r}$ si et seulement si $\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}} \not\subset \mathfrak{r}$. Rappelons [**SGA1**, exposé I, corollaire 9.11 et exposé V, corollaires 2.3 et 2.4] aussi que R est étale sur P en $\mathfrak{r}$ si et seulement si $I_{\mathfrak{r}} \neq 1$ et que R est étale sur P en $\mathfrak{r}$ si et seulement si R est net sur P en $\mathfrak{r}$. Comme G agit fidèlement sur $W \xleftrightarrow{\sim} G/H$, on a donc montré le résultat suivant (compte tenu du théorème 8.2.2) :

Proposition 8.3.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $I_{\mathfrak{r}} \neq 1$.
(2) *R n'est pas étale sur P en $\mathfrak{r}$.*
(3) *R n'est pas net sur P en $\mathfrak{r}$.*
(4) $\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}} \subset \mathfrak{r}$.
(5) $|\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}Q)| < |W|$.

Il faut cependant noter que $\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}}$ n'est pas forcément un idéal premier de R. En revanche, le théorème de pureté [**SGA1**, exposé X, théorème 3.1] nous dit que $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}})$ est vide ou purement de codimension 1 dans $\mathrm{Spec}(R)$ (car R est intégralement clos et P est régulier). D'après le corollaire 6.3.5 et la proposition précédente 8.3.1, le morphisme $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(P)$ n'est pas étale (sauf si $W = 1$). Ainsi,

(8.3.2) $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}})$ *est purement de codimension* 1 *dans* $\mathrm{Spec}(R)$.

Bien sûr, l'idéal $\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}}$ est tellement naturel que l'on en déduit que

(8.3.3) $\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}}$ *est stable sous l'action de* $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times \big((W^\wedge \times G) \rtimes \mathscr{N}\big)$.

S'il est difficile de calculer l'idéal $\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}}$ (on ne sait même pas calculer l'anneau R), il est nettement plus facile de déterminer l'idéal $\mathfrak{p}_{\mathrm{ram}} = \mathfrak{r}_{\mathrm{ram}} \cap P$. Le résultat suivant est classique :

Lemme 8.3.4. — *Notons* $\mathrm{disc}(Q/P)$ *l'idéal discriminant de* Q *dans* P. *Alors* $\mathfrak{p}_{\mathrm{ram}} = \sqrt{\mathrm{disc}(Q/P)}$.

Remarque 8.3.5. — Nous avons fait découler le fait que $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{r}_{\mathrm{ram}})$ est purement de codimension 1 dans $\mathrm{Spec}(R)$ du théorème de pureté. En vertu de l'équivalence entre (4) et (5) dans le lemme 8.3.1, nous aurions aussi pu invoquer la proposition C.2.11. ■

8.4. Cellules et lissité

Notons $\mathscr{Z}_{\mathrm{sing}}$ le lieu singulier de $\mathscr{Z} = \mathrm{Spec}(Z)$ et $\mathfrak{z}_{\mathrm{sing}}$ son idéal de définition. Puisque Z est intégralement clos,

(8.4.1) $\mathscr{Z}_{\mathrm{sing}}$ *est de codimension* $\geqslant 2$ *dans* $\mathscr{Z}$.

Bien sûr, il est possible que $\mathfrak{z}_{\mathrm{sing}}$ ne soit pas un idéal premier. Puisque $\Upsilon : \mathscr{Z} \to \mathscr{P}$ est un morphisme fini et plat, on en déduit que

(8.4.2) $\Upsilon(\mathscr{Z}_{\mathrm{sing}})$ *est fermé et de codimension* $\geqslant 2$ *dans* $\mathscr{P}$.

L'idéal de définition de $\Upsilon(\mathscr{Z}_{\mathrm{sing}})$ est $\sqrt{\mathfrak{z}_{\mathrm{sing}} \cap P}$.

> **Hypothèse.** *Dans cette section, et uniquement dans cette section, nous supposerons que* $\mathrm{Spec}(P/\mathfrak{p})$ *(qui est une sous-variété fermée irréductible de* $\mathscr{P}$*) n'est pas contenue dans* $\Upsilon(\mathscr{Z}_{\mathrm{sing}})$. *En d'autres termes, on suppose que* $\mathfrak{z}_{\mathrm{sing}} \cap P \not\subset \mathfrak{p}$.

Par conséquent, il existe $p \in \mathfrak{z}_{\mathrm{sing}} \cap P$ tel que $p \notin \mathfrak{p}$. Ainsi, $Z[1/p] = P[1/p] \otimes_P Z \subset Z_{\mathfrak{p}} = P_{\mathfrak{p}} \otimes_P Z$ et $\mathrm{Spec}(Z[1/p])$ est régulier. Il découle alors de la proposition 5.3.1 que $P[1/p] \otimes_P \mathbf{H}$ et $Q[1/p]$ sont Morita équivalentes (grâce au bimodule $P[1/p] \otimes_P \mathbf{H}e$) et, par extension des scalaires, on obtient :

Proposition 8.4.3. — *Le $(\mathbf{H}_{\mathfrak{p}}, Z_{\mathfrak{p}})$-bimodule $\mathbf{H}_{\mathfrak{p}}e$ est projectif à droite et à gauche et induit une équivalence de Morita entre $\mathbf{H}_{\mathfrak{p}}$ et $Z_{\mathfrak{p}}$.*

Par réduction modulo $\mathfrak{p}$, on obtient :

Corollaire 8.4.4. — *Le $(k_P(\mathfrak{p})\mathbf{H}, k_P(\mathfrak{p})Z)$-bimodule $k_P(\mathfrak{p})\mathbf{H}e$ est projectif à droite et à gauche et induit une équivalence de Morita entre $k_P(\mathfrak{p})\mathbf{H}$ et $k_P(\mathfrak{p})Z$.*

Par extension des scalaires, on en déduit :

Corollaire 8.4.5. — *Le $(k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}, k_R(\mathfrak{r})Z)$-bimodule $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}e$ est projectif à droite et à gauche et induit une équivalence de Morita entre $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ et $k_R(\mathfrak{r})Z$.*

Théorème 8.4.6. — *La $k_R(\mathfrak{r})$-algèbre $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ est déployée. Chaque bloc de $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ admet un unique module simple, qui est de dimension $|W|$. En particulier, les $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$-modules simples sont paramétrés naturellement par les $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser, c'est-à-dire par les $I_{\mathfrak{r}}$-orbites dans W.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord que $k_R(\mathfrak{r})Z = k_R(\mathfrak{r}) \otimes_P Z = k_R(\mathfrak{r}) \otimes_{P_{\mathfrak{p}}} Z_{\mathfrak{p}}$ est une $k_R(\mathfrak{r})$-algèbre déployée. Soient $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_l$ les idéaux premiers de Z au-dessus de $\mathfrak{p}$: en d'autres termes, $k_P(\mathfrak{p})\mathfrak{z}_1, \ldots, k_P(\mathfrak{p})\mathfrak{z}_l$ sont les idéaux premiers (et donc maximaux) de $k_P(\mathfrak{p})Z = Z_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}Z_{\mathfrak{p}}$. Alors $k_P(\mathfrak{p})(\mathfrak{z}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{z}_l)$ est le radical de $k_P(\mathfrak{p})Z$. De plus,

$$k_P(\mathfrak{p})Z \simeq k_Z(\mathfrak{z}_1) \times \cdots \times k_Z(\mathfrak{z}_l).$$

Ainsi,

$$k_R(\mathfrak{r})Z \simeq (k_R(\mathfrak{r}) \otimes_{k_P(\mathfrak{p})} k_Z(\mathfrak{z}_1)) \times \cdots \times (k_R(\mathfrak{r}) \otimes_{k_P(\mathfrak{p})} k_Z(\mathfrak{z}_l)).$$

Mais $k_R(\mathfrak{r})$ est une extension galoisienne de $k_P(\mathfrak{p})$ (de groupe $D_{\mathfrak{r}}/I_{\mathfrak{r}}$) contenant $k_Z(\mathfrak{z}_i)$ (pour tout i), ou du moins son image via cop^{-1}, et donc $k_R(\mathfrak{r}) \otimes_{k_P(\mathfrak{p})} k_Z(\mathfrak{z}_i)$ est une $k_R(\mathfrak{r})$-algèbre déployée (voir la proposition A.3.12). On a donc montré que $k_R(\mathfrak{r})Z$ est déployée : grâce à l'équivalence de Morita avec $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$, cela montre que $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ est elle aussi déployée.

D'autre part, puisque $k_R(\mathfrak{r})Z$ est commutative, chaque bloc de $k_R(\mathfrak{r})Z$ admet un unique module simple. Par équivalence de Morita, il en est de même de $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$. Pour finir, puisque le $Z_{\mathfrak{p}}$-module projectif $\mathbf{H}_{\mathfrak{p}}e$ est de rang $|W|$, il en est de même du

$k_R(\mathfrak{r})Z$-module projectif $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}e$, et donc les $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$-modules simples sont de dimension $|W|$.

La dernière assertion du théorème devient alors évidente. □

Exemple 8.4.7. — Compte tenu du corollaire 5.3.5, la condition $\mathfrak{z}_{\mathrm{sing}} \cap P \not\subset \mathfrak{p}$ est automatiquement satisfaite si $\mathrm{Spec}(P/\mathfrak{p})$ rencontre l'ouvert $\mathscr{P}^{\mathrm{rég}} = \mathscr{C} \times V^{\mathrm{rég}}/W \times V^*/W$ ou bien, par symétrie, l'ouvert $\mathscr{C} \times V/W \times V^{*\mathrm{rég}}/W$. ■

8.5. Cellules et géométrie

D'après le lemme 7.2.3, les composantes irréductibles de $\mathscr{R} \times_{\mathscr{P}} \mathscr{Z}$ sont de la forme

$$\mathscr{R}_w = \{(r, \mathrm{cop}^*(\rho_H(w(r)))) \mid r \in \mathscr{R}\}.$$

Ainsi, le morphisme $\Upsilon_{\mathscr{R}} : \mathscr{R} \times_{\mathscr{P}} \mathscr{Z} \to \mathscr{R}$ obtenu à partir de $\Upsilon : \mathscr{Z} \to \mathscr{P}$ par changement de base induit un isomorphisme entre la composante irréductible $\mathscr{R}_w$ et $\mathscr{R}$.

Par conséquent, l'image inverse par $\Upsilon_{\mathscr{R}}$ de la sous-variété fermée irréductible $\mathscr{R}(\mathfrak{r}) = \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{r})$ est une réunion de sous-variété irréductibles

$$\Upsilon_{\mathscr{R}}^{-1}(\mathscr{R}(\mathfrak{r})) = \bigcup_{w \in W} \mathscr{R}_w(\mathfrak{r}),$$

de sorte que $\mathscr{R}_w(\mathfrak{r}) \simeq \mathscr{R}(\mathfrak{r})$ soit l'image inverse de $\mathscr{R}(\mathfrak{r})$ dans $\mathscr{R}_w$.

Lemme 8.5.1. — *Soient w et $w' \in W$. Alors $\mathscr{R}_w(\mathfrak{r}) = \mathscr{R}_{w'}(\mathfrak{r})$ si et seulement si $w \sim_{\mathfrak{r}}^{\mathrm{CM}} w'$.*

Démonstration. — En effet, $\mathscr{R}_w(\mathfrak{r}) = \mathscr{R}_{w'}(\mathfrak{r})$ si et seulement si, pour tout $r \in \mathscr{R}(\mathfrak{r})$, $\rho_H(w(r)) = \rho_H(w'(r))$. Traduit au niveau des anneaux Q et R, cela est équivalent à dire que, pour tout $q \in Q$, on a $w(q) \equiv w'(q) \mod \mathfrak{r}$. □

En d'autres termes, le lemme 8.5.1 montre que les $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser paramètrent les composantes irréductible de l'image inverse de $\mathscr{R}(\mathfrak{r})$ dans le produit fibré $\mathscr{R} \times_{\mathscr{P}} \mathscr{Z}$.

PARTIE IV

CELLULES ET MODULES DE VERMA

Notations. *Fixons dans cette partie un idéal premier $\mathfrak{C}$ de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$. Nous notons $\mathscr{C}(\mathfrak{C})$ le sous-schéma irréductible fermé de $\mathscr{C}$ défini par $\mathfrak{C}$: en d'autres termes, $\mathscr{C}(\mathfrak{C}) = \operatorname{Spec}\mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}$ et nous notons $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$ (resp. $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$, resp. $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$) l'idéal premier de P correspondant au sous-schéma fermé irréductible $\mathscr{C}(\mathfrak{C}) \times \{0\} \times \{0\}$ (resp. $\mathscr{C}(\mathfrak{C}) \times V/W \times \{0\}$, resp. $\mathscr{C}(\mathfrak{C}) \times \{0\} \times V^*/W$). On pose $\bar{P}_{\mathfrak{C}} = P/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}$, $P_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} = P/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C} \otimes \mathbf{k}[V]^W$ et $P_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = P/\mathfrak{p}^{\text{right}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C} \otimes \mathbf{k}[V^*]^W$, ce qui permet de définir la $\bar{P}_{\mathfrak{C}}$-algèbre $\bar{\mathbf{H}}_{\mathfrak{C}} = \mathbf{H}/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}\mathbf{H}$, la $P_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$-algèbre $\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} = \mathbf{H}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}\mathbf{H}$ et la $P_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$-algèbre $\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = \mathbf{H}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}\mathbf{H}$. On définit aussi $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}} = k_P(\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}})$, $\mathbf{K}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} = k_P(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}})$ et $\mathbf{K}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = k_P(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}})$.*

Pour simplifier les notations, si $\mathfrak{C}$ est l'idéal nul, alors l'indice $\mathfrak{C}$ sera omis dans toutes les notations précédentes ($\bar{P}$, $\bar{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}^{\text{left}}$, $\mathbf{H}^{\text{right}}$, $\mathbf{K}^{\text{left}}$,...) et, si $c \in \mathscr{C}$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$, alors l'indice $\mathfrak{C}_c$ sera remplacé par c ($\mathfrak{p}_c^{\text{right}}$, $\mathbf{H}_c^{\text{left}}$, $\mathbf{K}_c^{\text{right}}$, $\bar{\mathbf{K}}_c$,...). Notons par exemple que $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{C}\, P$ (et de même pour $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ et $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$) et que $\bar{\mathbf{K}}_c \simeq \mathbf{k}$.

Définition. — *Fixons un idéal premier $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ (resp. $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$, resp. $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$) de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$ (resp. $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$, resp. $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$). On appelera* ***$\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère*** *(resp.* ***à gauche****, resp.* ***à droite****) toute $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$-cellule (resp. $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$-cellule, resp. $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$-cellule) de Calogero-Moser.*

Si $\mathfrak{C} = 0$, elles seront aussi appelées ***cellules de Calogero-Moser (bilatères, à gauche ou à droite) génériques****. Si $c \in \mathscr{C}$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$, elles seront appelées* ***c-cellules de Calogero-Moser (bilatères, à gauche ou à droite)****.*

Remarque. — Bien sûr, la notion de $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser (bilatère, à gauche ou à droite) dépend fortement du choix de l'idéal $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ ou $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$; cependant, comme tous les idéaux premiers de R au-dessus d'un idéal premier de P sont G-conjugués, changer l'idéal revient à transformer les cellules par l'action d'un élément de G. ■

Remarque **(Semi-continuité)**. — D'autre part, il est bien sûr possible de choisir les idéaux $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ ou $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$ de sorte que $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ contienne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ et $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$: dans ce cas, en vertu de la remarque 8.1.3, les $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser bilatères sont des réunions de $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser à gauche (resp. à droite).

De même, si $\mathfrak{C}'$ est un autre idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ tel que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}'$, alors on peut choisir les idéaux $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}'}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}'}^{\text{left}}$ ou $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}'}^{\text{right}}$ de sorte qu'ils contiennent respectivement $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ ou $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$. Ainsi, les $\mathfrak{C}'$-cellules de Calogero-Moser bilatères (resp. à gauche, resp. à

droite) sont des réunions de $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser bilatères (resp. à gauche, resp. à droite). ■

Avec la définition des cellules de Calogero-Moser bilatères, à gauche ou à droite donnée ci-dessus, le premier objectif de ce mémoire est atteint. L'objet de cette partie est l'étude de ces cellules particulières, en lien avec la théorie des représentations de $\mathbf{H}$: dans chaque cas, une famille de *modules de Verma* viendra renforcer l'arsenal mis à notre disposition. Ainsi :

- Dans le chapitre 11, nous associerons une *famille de Calogero-Moser* à chaque cellule de Calogero-Moser bilatère : les familles de Calogero-Moser forment une partition de l'ensemble $\mathrm{Irr}(W)$.
- Dans le chapitre 12, nous associerons un CM-caractère cellulaire à chaque cellule à gauche.

Nous conjecturons que, lorsque W est un groupe de Coxeter, toutes ces notions coïncident avec les notions analogues définies par Kazhdan-Lusztig dans le cadre des groupes de Coxeter. Ces conjectures seront énoncées précisément dans la partie suivante V (voir le chapitre 15) et des arguments théoriques en faveur de ces conjectures y seront développés (voir le chapitre 16).

CHAPITRE 9

BÉBÉS MODULES DE VERMA

Notations. *Rappelons que* $\bar{P} = \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ *et* $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{k}(\mathscr{C})$. *On fixe dans ce chapitre une extension* K *du corps* $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}} = \mathbf{k}_P(\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}})$. *Le morphisme naturel obtenu par la composition* $\mathbf{k}[\mathscr{C}] \to \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}} \hookrightarrow K$ *sera noté* $\theta_K : \mathbf{k}[\mathscr{C}] \to K$. *Son noyau est* $\mathfrak{C}$.

Le but de ce chapitre est de rappeler les résultats de I. Gordon [**Gor1**] sur les représentations de la K-algèbre $K\bar{\mathbf{H}} = K\bar{\mathbf{H}}_{\mathfrak{C}}$. Il n'y aura qu'une légère différence : I. Gordon travaillait avec un corps algébriquement clos, tandis qu'ici K n'est pas supposé algébriquement clos. Cela ne posera pas de difficulté (grâce à un résultat facile de déploiement), mais aura quelques conséquences utiles concernant la partition en cellules de Calogero-Moser bilatères (voir le chapitre 11).

9.1. Algèbre de Cherednik restreinte

9.1.A. Décomposition PBW. — Nous appellerons *algèbre de Cherednik restreinte générique* la $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbre $\bar{\mathbf{H}}$ définie par

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}/\bar{\mathfrak{p}}\mathbf{H} = \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes_P \mathbf{H}.$$

On déduit immédiatement du théorème 5.1.2 que :

Proposition 9.1.1. — *L'application* $\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)} \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)} \to \bar{\mathbf{H}}$ *induite par le produit est un isomorphisme de* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$*-modules. En particulier,* $\bar{\mathbf{H}}$ *est un* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$*-module libre de rang* $|W|^3$.

Nous noterons $\mathbf{A}^-$ (respectivement $\mathbf{A}^0$, respectivement $\mathbf{A}^+$) la sous-$\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbre $\mathbf{k}[\mathscr{C}]\otimes\mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)}$ (respectivement $\mathbf{k}[\mathscr{C}]\otimes\mathbf{k}W$, respectivement $\mathbf{k}[\mathscr{C}]\otimes\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}$) de $\bar{\mathbf{H}}$. Alors

(9.1.2) $\mathbf{A}^-$, $\mathbf{A}^0$ *et* $\mathbf{A}^+$ *sont des* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$*-modules libres de rang* $|W|$

et l'application

(9.1.3) $$\mathbf{A}^+\otimes_{\mathbf{k}[\mathscr{C}]}\mathbf{A}^0\otimes_{\mathbf{k}[\mathscr{C}]}\mathbf{A}^-\longrightarrow\bar{\mathbf{H}}$$

induite par le produit est un isomorphisme de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-modules (d'après la proposition 9.1.1).

Posons maintenant $\bar{\mathbf{H}}^- = \mathbf{A}^-\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^0\mathbf{A}^-$ et $\bar{\mathbf{H}}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^0\mathbf{A}^+$. Ce sont des sous-$\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbres de $\bar{\mathbf{H}}$. On obtient alors des isomorphismes de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbres

(9.1.4) $$\bar{\mathbf{H}}^+\simeq\mathbf{k}[\mathscr{C}]\otimes\big(\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}\rtimes W\big)\qquad\text{et}\qquad\bar{\mathbf{H}}^-\simeq\mathbf{k}[\mathscr{C}]\otimes\big(\mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)}\rtimes W\big).$$

En particulier,

(9.1.5) $\bar{\mathbf{H}}^-$ *et* $\bar{\mathbf{H}}^+$ *sont des* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$*-modules libre de rang* $|W|^2$.

Pour finir, on notera $\bar{Z}$ l'image de Z dans $\bar{\mathbf{H}}$ (c'est un facteur direct de $\bar{\mathbf{H}}$).

9.1.B. Automorphismes. — Rappelons que le groupe $\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times\times(W^\wedge\rtimes\mathscr{N})$ agit sur $\mathbf{H}$ par automorphismes de $\mathbf{k}$-algèbres. D'après le lemme 5.2.2, P est stable sous cette action et il est facile de vérifier que l'idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}$ l'est aussi. Ainsi, $\bar{\mathbf{H}}$ hérite d'une action de $\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times\times(W^\wedge\rtimes\mathscr{N})$: si $\tau\in\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times\times(W^\wedge\rtimes\mathscr{N})$ et $h\in\bar{\mathbf{H}}$, on notera encore ${}^\tau h$ l'image de h par l'action de τ. Rappelons toutefois que τ n'induit pas un automorphisme de la $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbre $\bar{\mathbf{H}}$ (en effet, ${}^\tau C_s=\xi\xi'\gamma(s)^{-1}C_{nsn^{-1}}$ si $\tau=(\xi,\xi',\gamma\rtimes n)$).

Lemme 9.1.6. — *Les sous-algèbres* $\mathbf{k}W$, $\bar{P}=\mathbf{k}[\mathscr{C}]$, $\bar{Z}$, $\bar{\mathbf{H}}^+$, $\bar{\mathbf{H}}^-$, $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{A}^0$ *et* $\mathbf{A}^-$ *sont stables sous l'action de* $\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times\times(W^\wedge\rtimes\mathscr{N})$.

En particulier, l'algèbre $\bar{\mathbf{H}}$ hérite de la $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-graduation. Cette bi-graduation sera notée

$$\bar{\mathbf{H}}=\bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j].$$

Nous définissons alors, comme pour $\mathbf{H}$, une $\mathbb{Z}$-graduation

$$\bar{\mathbf{H}}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]$$

ainsi qu'une $\mathbb{N}$-graduation

$$\bar{\mathbf{H}}=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}[i].$$

La $\mathbb{Z}$-graduation possède les propriétés suivantes :

Lemme 9.1.7. — *L'anneau de coefficients* $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ *est en* $\mathbb{Z}$*-degré* 0 *et les sous-*$\mathbf{k}[\mathscr{C}]$*-algèbres* $\mathbf{A}^-$, $\mathbf{A}^+$ *et* $\mathbf{A}^0$ *sont des sous-*$\mathbf{k}[\mathscr{C}]$*-algèbres graduées. De plus :*

(a) $\mathbf{A}^- \subset \mathbf{k}[\mathscr{C}] \oplus \big(\bigoplus_{i<0} \bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]\big)$.
(b) $\mathbf{A}^+ \subset \mathbf{k}[\mathscr{C}] \oplus \big(\bigoplus_{i>0} \bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]\big)$.
(c) $\mathbf{A}^0 \subset \bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[0]$.

9.2. Bébés modules de Verma, modules simples

Il résulte de (9.1.3) et du lemme 9.1.7 que :

- $K\mathbf{A}^-$, $K\mathbf{A}^0$ et $K\mathbf{A}^+$ sont des sous-K-algèbres graduées de $K\bar{\mathbf{H}}$ et le produit induit un isomorphisme de K-espaces vectoriels $K\mathbf{A}^- \otimes_K K\mathbf{A}^0 \otimes_K K\mathbf{A}^+ \xrightarrow{\sim} K\bar{\mathbf{H}}$.
- $K\mathbf{A}^- \subset K \oplus \big(\bigoplus_{i<0} K\bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]\big)$ et $K\mathbf{A}^+ \subset K \oplus \big(\bigoplus_{i>0} K\bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]\big)$.
- $(K\mathbf{A}^-)(K\mathbf{A}^0) = (K\mathbf{A}^0)(K\mathbf{A}^-)$, $(K\mathbf{A}^+)(K\mathbf{A}^0) = (K\mathbf{A}^0)(K\mathbf{A}^+)$ et $K\mathbf{A}^0 \subset K\bar{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[0]$.

Comme l'a remarqué Gordon **[Gor1]**, ces hypothèses permettent d'appliquer les résultats de Holmes et Nakano **[HoNa]**. Rappelons que la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}W$ est déployée (voir le théorème 1.4.1) : ceci implique que la K-algèbre $K\mathbf{A}^0 = K \otimes_{\mathbf{k}[\mathscr{C}]} (\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}W) = KW$ est elle aussi déployée.

Tout d'abord, notons $\bar{\mathbf{J}}^+$ (respectivement $\bar{\mathbf{J}}^-$) l'idéal bilatère nilpotent de $\bar{\mathbf{H}}^+$ (respectivement $\bar{\mathbf{H}}^-$) engendré par les éléments homogènes de degré strictement positif (respectivement négatif). Si M est un $\mathbf{k}W$-module, on notera $M^{(+)}$ (respectivement $M^{(-)}$) le $\bar{\mathbf{H}}^+$-module (respectivement $\bar{\mathbf{H}}^-$-module) d'espace vectoriel sous-jacent $\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes M$ sur lequel $\mathbf{A}^0 = \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes \mathbf{k}W$ agit naturellement et $\bar{\mathbf{J}}^+$ (respectivement $\bar{\mathbf{J}}^-$) agit par 0. On pose alors

$$\begin{array}{rccc} \bar{\mathscr{M}} : & \mathbf{k}W\text{-mod} & \longrightarrow & \bar{\mathbf{H}}\text{-mod} \\ & M & \longmapsto & \bar{\mathbf{H}} \otimes_{\bar{\mathbf{H}}} - M^{(-)}. \end{array}$$

Si P' est une $\bar{P}$-algèbre (i.e. une $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbre), nous noterons $P'\bar{\mathscr{M}}(M)$ le $P' \otimes_{\bar{P}} \bar{\mathbf{H}}$-module $P' \otimes_{\bar{P}} \bar{\mathscr{M}}(M)$. Si χ est un caractère irréductible de W, on notera V_χ un $\mathbf{k}W$-module irréductible admettant le caractère χ et on posera pour simplifier $\bar{\mathscr{M}}(\chi) = \bar{\mathscr{M}}(V_\chi)$. On vérifie facilement que

$$\bar{\mathscr{M}}(M) \simeq \bar{\mathbf{H}}^+ \otimes_{\mathbf{k}W} M \qquad \text{comme } \bar{\mathbf{H}}^+\text{-module} \tag{9.2.1}$$

et

$$\bar{\mathscr{M}}(M) \simeq \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{k}} M \qquad \text{comme } \mathbf{A}^+\text{-module.} \tag{9.2.2}$$

Par conséquent, la décomposition $\bar{\mathbf{H}}^+ = \mathbf{A}^0 \oplus \bar{\mathbf{J}}^+$ induit une décomposition

$$\bar{\mathscr{M}}(M) = (\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes M) \oplus \bar{\mathbf{J}}^+ \otimes_{\mathbf{A}^0} (\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes M) \qquad \text{comme } \mathbf{A}^0\text{-module,} \tag{9.2.3}$$

ainsi qu'un isomorphisme

(9.2.4) $$\bar{\mathscr{M}}(M)/\bar{\mathbf{J}}^{+}\bar{\mathscr{M}}(M) \simeq M^{(+)} \qquad \text{comme } \bar{\mathbf{H}}^{+}\text{-module.}$$

Nous noterons $i_M : (\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes M) \hookrightarrow \bar{\mathscr{M}}(M)$ et $\pi_M : \bar{\mathscr{M}}(M) \to M^{(+)}$ les morphismes déduits de la décomposition 9.2.3. Alors i_M est un morphisme de $\mathbf{A}^0$-modules tandis que π_M est un morphisme de $\bar{\mathbf{H}}^{+}$-modules.

Proposition 9.2.5. — *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, alors $K\bar{\mathscr{M}}(\chi)$ est un $K\bar{\mathbf{H}}$-module indécomposable, admettant un unique quotient simple, que nous notons $\bar{\mathscr{L}}_K(\chi)$. L'application* $\mathrm{Irr}(W) \longrightarrow \mathrm{Irr}(K\bar{\mathbf{H}})$, $\chi \mapsto \bar{\mathscr{L}}_K(\chi)$ *est bijective et l'algèbre $K\bar{\mathbf{H}}$ est déployée.*

Démonstration. — Cette proposition est démontrée dans [**Gor1**, proposition 4.3], en se basant sur [**HoNa**], dans le cas où K est algébriquement clos. La preuve se copie ici mot pour mot pour obtenir toutes les assertions de la proposition, sauf l'assertion sur le déploiement.

Soit donc V un KW-module simple : le foncteur $K\bar{\mathscr{M}}$ induit un morphisme de K-algèbres $m : \mathrm{End}_{KW}(V) \to \mathrm{End}_{K\bar{\mathbf{H}}}(\bar{\mathscr{L}}_K(V))$. Il suffit de montrer que m est un isomorphisme. Puisque $K\bar{\mathbf{J}}^{+} \subset \mathrm{Rad}(K\bar{\mathbf{H}}^{+})$, $K\bar{\mathscr{M}}(V)$, vu comme $K\bar{\mathbf{H}}^{+}$-module, admet un unique quotient simple (ici, $V^{(+)}$). Ainsi, $\mathrm{Rad}\, K\bar{\mathscr{M}}(V) \subset K\bar{\mathbf{J}}^{+}K\bar{\mathscr{M}}(V)$. Notons $i_V : V \hookrightarrow K\bar{\mathscr{M}}(V)$ et $\pi_V : K\bar{\mathscr{M}}(V) \twoheadrightarrow V$ les morphismes induits par la décomposition 9.2.3 : ce sont des morphismes de KW-modules et $\pi_V \circ i_V = \mathrm{Id}_V$. D'autre part, puique $\mathrm{Rad}\, K\bar{\mathscr{M}}(V) \subset K\bar{\mathbf{J}}^{+}K\bar{\mathscr{M}}(V)$, π_V induit un morphisme surjectif de KW-modules $\bar{\pi}_V : \bar{\mathscr{L}}_K(V) \twoheadrightarrow V$. Notons $\bar{i}_V : V \hookrightarrow \bar{\mathscr{L}}_K(V)$ le morphisme de KW-modules composé du morphisme canonique $K\bar{\mathscr{M}}(V) \to \bar{\mathscr{L}}_K(V)$ avec i_V : $\bar{i}_V$ est injectif car

$$\bar{\pi}_V \circ \bar{i}_V = \mathrm{Id}_V .$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathrm{End}_{K\bar{\mathbf{H}}}\bar{\mathscr{L}}_K(V)$. Alors $\bar{\pi}_V \circ \varphi \circ \bar{i}_V : V \to V$ est un endomorphisme du KW-module V. Notons-le φ_V. Alors $\psi = \varphi - m(\varphi_V)$ est un endomorphisme du $K\bar{\mathbf{H}}$-module $\bar{\mathscr{L}}_K(V)$, et il est facile de vérifier que $\bar{\pi}_V \circ \psi \circ \bar{i}_V = 0$. Cela signifie que le noyau de ψ est non nul. Puisque $\bar{\mathscr{L}}_K(V)$ est simple, il résulte du lemme de Schur que $\psi = 0$, c'est-à-dire $\varphi = m(\varphi_V)$. Donc l'application naturelle $m : \mathrm{End}_{KW}(V) \longrightarrow \mathrm{End}_{K\bar{\mathbf{H}}}(\bar{\mathscr{L}}_K(V))$ est un morphisme surjectif de K-algèbres. Mais, V étant simple, $\mathrm{End}_{KW}(V) = K$ car KW est déployée. □

À travers la proposition 9.2.5, nous identifierons le groupe de Grothendieck de $K\bar{\mathbf{H}}$ avec le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}\, W$:

(9.2.6) $$\mathscr{K}_0(K\bar{\mathbf{H}}) \simeq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}\, W.$$

Remarque 9.2.7. — Il se peut que K soit différent de $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}$. Cependant, la proposition 9.2.5 s'applique aussi au cas où $K = \bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}$ et donc en particulier, $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}$ est une $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}$-algèbre déployée. Cela implique que, dans la plupart des arguments qui vont suivre, on pourra se ramener au cas où $K = \bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}$: en d'autres termes, les objets construits ici dépendent plus de l'idéal premier $\mathfrak{C}$ que du choix de l'extension K de $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}$.

Par exemple les idempotents primitifs centraux de $K\bar{\mathbf{H}}$ appartiennent à $\mathrm{Z}(\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}})$ (et donc à $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}\bar{Z}$ d'après la proposition C.1.2). D'autre part, l'application $\mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}) \to \mathscr{K}_0(K\bar{\mathbf{H}})$, $[M]_{\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}} \mapsto [K \otimes_{\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}} M]_{K\bar{\mathbf{H}}}$ est un isomorphisme. ■

9.3. Caractères centraux

Si $z \in Z$ et si $\chi \in \mathrm{Irr}\, W$, alors z agit sur $\bar{\mathscr{L}}_K(\chi)$ par multiplication par un scalaire $\Omega_\chi^K(z) \in K$ (d'après le lemme de Schur et le fait que $K\bar{\mathbf{H}}$ est déployée). Nous noterons parfois $\Omega_\chi^{\mathfrak{C}}(z)$ l'élément $\Omega_\chi^K(z)$: en effet, $\Omega_\chi^K(z)$ appartient à $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}$ et ne dépend que de $\mathfrak{C}$ (voir la remarque 9.2.7). Pour simplifier, on posera $\Omega_\chi = \Omega_\chi^{\bar{\mathbf{K}}}$. Puisque Z est entier sur P, $\Omega_\chi(z)$ est entier sur $P/\bar{\mathfrak{p}} = \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ donc $\Omega_\chi(z) \in \mathbf{k}[\mathscr{C}]$, car $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ est intégralement clos. On a ainsi défini un morphisme de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbres

$$\Omega_\chi : Z \longrightarrow \mathbf{k}[\mathscr{C}].$$

Notons la caractérisation suivante de $\Omega_\chi^K(z)$, qui découle immédiatement de la proposition 9.2.5 :

Lemme 9.3.1. — *Si $z \in Z$ et $\chi \in \mathrm{Irr}\, W$, alors $\Omega_\chi^K(z)$ est l'unique élément $\kappa \in K$ tel que $z - \kappa$ agisse de façon nilpotente sur $K\bar{\mathscr{M}}(\chi)$.*

Corollaire 9.3.2. — $\Omega_\chi^K = \theta_K \circ \Omega_\chi$.

L'élément d'Euler est un élément particulier de Z. La formule, bien connue [**GGOR**, §3.1(4)], décrivant son image par Ω_χ est donnée par la proposition suivante, dont nous rappelons une preuve pour le cas générique :

Proposition 9.3.3. — *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, alors*

$$\begin{aligned}\Omega_\chi(\mathbf{eu}) &= \frac{1}{\chi(1)} \sum_{s \in \text{Réf}(W)} \varepsilon(s)\chi(s)\, C_s \quad \in \mathbf{k}[\mathscr{C}] \\ &= \sum_{(\Omega, j) \in \mathbf{\Omega}_W^\circ} \frac{m_{\Omega,-j}^\chi |\Omega| e_\Omega}{\chi(1)} \cdot K_{\Omega,j}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Rappelons (voir la section 4.4) que, si $(x_1,\dots,x_n)$ désigne une $\mathbf{k}$-base de V^* et si $(y_1,\dots,y_n)$ désigne sa base duale, alors

$$\mathbf{eu}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i+\sum_{s\in \text{Réf}(W)} \varepsilon(s)C_s s.$$

Soit $h\otimes_{(\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{H}}\ -)} v\in(\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{H}})\otimes_{(\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{H}}\ -)}(\bar{\mathbf{K}}V_\chi)^{(-)}=\bar{\mathscr{M}}(\chi)$. Alors

$$\mathbf{eu}\cdot(h\otimes_{(\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{H}}\ -)} v)=(\mathbf{eu}h)\otimes_{(\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{H}}^-)} v=h\mathbf{eu}\otimes_{(\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{H}}^-)} v.$$

Mais $y_i\in\bar{\mathbf{H}}^-$, donc

$$\mathbf{eu}\cdot(h\otimes_{(\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{H}}\ -)} v)=h\otimes_{(\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{H}}\ -)}\Big(\sum_{s\in\text{Réf}(W)}\varepsilon(s)C_s s\cdot v\Big).$$

Mais $\sum_{s\in\text{Réf}(W)}\varepsilon(s)C_s s$ agit sur $\bar{\mathbf{K}}V_\chi$ par multiplication par

$$\frac{1}{\chi(1)}\sum_{s\in\text{Réf}(W)}\varepsilon(s)\chi(s)\,C_s.$$

D'où la première égalité.

La deuxième découle immédiatement de la définition des $K_{H,i}$ et de manipulations élémentaires. □

Il découle de la preuve de la proposition 9.3.3 que :

Corollaire 9.3.4. — *Si $m\in K\bar{\mathscr{M}}(\chi)$, alors $\mathbf{eu}\cdot m=\Omega_\chi^K(\mathbf{eu})m$.*

9.4. Familles de Calogero-Moser

9.4.A. Définition. — Si $b\in\text{Idem}_{\text{pr}}(\text{Z}(K\bar{\mathbf{H}}))$, on notera $\text{Irr}_{\mathbf{H}}(W,b)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de W tels que $\bar{\mathscr{L}}_K(\chi)$ appartienne à $\text{Irr}\,K\bar{\mathbf{H}}b$. Il découle de la proposition C.1.2 que

$$\text{Idem}_{\text{pr}}(K\bar{Z})=\text{Idem}_{\text{pr}}(\text{Z}(K\bar{\mathbf{H}})).$$

Ainsi,

$$\text{Irr}(W)=\coprod_{b\in\text{Idem}_{\text{pr}}(K\bar{Z})}\text{Irr}_{\mathbf{H}}(W,b). \tag{9.4.1}$$

On appelle *$\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser* (ou *K-famille de Calogero-Moser*) toute partie de $\text{Irr}\,W$ de la forme $\text{Irr}_{\mathbf{H}}(W,b)$, où $b\in\text{Idem}_{\text{pr}}(K\bar{Z})$. Le lemme suivant découle du corollaire C.2.4 et de la remarque 9.2.7 :

Lemme 9.4.2. — *Soient χ, $\chi' \in \operatorname{Irr} W$. Alors χ et χ' sont dans la même $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser si et seulement si $\Omega_\chi^{\mathfrak{C}} = \Omega_{\chi'}^{\mathfrak{C}}$. D'autre part, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Theta_{\mathfrak{C}} : & \operatorname{Irr} W & \longrightarrow & \Upsilon^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}) \\ & \chi & \longmapsto & \operatorname{Ker} \Omega_\chi^{\mathfrak{C}} \end{array} \tag{9.4.3}$$

est surjective et ses fibres sont les $\mathfrak{C}$-familles de Calogero-Moser.

Corollaire 9.4.4. — *Si $\mathfrak{z}$ est un idéal premier de Z au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$, alors l'inclusion $P \hookrightarrow Z$ induit un isomorphisme $P/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}} \xrightarrow{\sim} Z/\mathfrak{z}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 9.4.2, il existe $\chi \in \operatorname{Irr}(W)$ tel que $\mathfrak{z} = \operatorname{Ker}(\Omega_\chi^{\mathfrak{C}})$. Or, d'après le corollaire 9.3.2, $\Omega_\chi^{\mathfrak{C}} : Z \to K$ se factorise à travers un morphisme surjectif $Z \to P/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$, donc $Z/\mathfrak{z} \simeq P/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$. □

Exemple 9.4.5. — On appelle *famille de Calogero-Moser générique* toute $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser, où $\mathfrak{C} = 0$. Dans ce cas, l'application $\Theta_{\mathfrak{C}}$ sera simplement notée Θ. Toute $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser est une union de familles de Calogero-Moser génériques. ■

Exemple 9.4.6. — Si $c \in \mathscr{C}$, on appelle *c-famille de Calogero-Moser* toute $\mathfrak{C}_c$-famille de Calogero-Moser. Dans ce cas, $\Omega_\chi^{\mathfrak{C}_c}$ sera notée Ω_χ^c et $\Theta_{\mathfrak{C}_c}$ sera notée Θ_c. ■

Soit $b \in \operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(K\bar{Z})$. Nous noterons $\Omega_b^K : Z \to K$ le morphisme de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbres Ω_χ^K, où χ est n'importe quel caractère dans $\operatorname{Irr}_{\mathbf{H}}(W, b)$. Si $\mathfrak{C} = 0$ (i.e. si $K = \mathbf{k}(\mathscr{C})$), alors Ω_b^K sera noté Ω_b tandis que, si $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$ (avec $c \in \mathscr{C}$), alors Ω_b^K sera noté Ω_b^c.

9.5. Caractères linéaires et familles de Calogero-Moser

Si M est un $\bar{\mathbf{H}}$-module et si $\tau \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$, nous noterons ${}^\tau M$ le $\bar{\mathbf{H}}$-module obtenu de la façon suivante. Comme $\mathbf{k}$-espace vectoriel, ${}^\tau M \simeq M$ (nous noterons $M \to {}^\tau M$, $m \mapsto {}^\tau m$ l'isomorphisme en question). Si $h \in \bar{\mathbf{H}}$ et $m \in M$, alors

$$h \cdot {}^\tau m = {}^\tau\big({}^{\tau^{-1}} h \cdot m\big).$$

Cela nous définit un foncteur

$$\tau : \bar{\mathbf{H}}\text{-mod} \longrightarrow \bar{\mathbf{H}}\text{-mod}$$

et, plus généralement, une action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ sur la catégorie $\bar{\mathbf{H}}$-mod. De même, on peut définir un foncteur

$$\tau : \mathbf{A}^0\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{A}^0\text{-mod}$$

et une action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ sur la catégorie $\mathbf{A}^0$-mod. Le lemme 9.1.6 montre que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^0\text{-mod} \arrow[r, "\mathscr{M}"] \arrow[d, "\tau"'] & \bar{\mathbf{H}}\text{-mod} \arrow[d, "\tau"] \\ \mathbf{A}^0\text{-mod} \arrow[r, "\mathscr{M}"'] & \bar{\mathbf{H}}\text{-mod} \end{tikzcd} \tag{9.5.1}$$

est commutatif. La proposition suivante est immédiate :

Proposition 9.5.2. — *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$ et si $\tau = (\xi, \xi', \gamma \rtimes g) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$, alors*

$$^\tau \bar{\mathscr{M}}(\chi) \simeq \bar{\mathscr{M}}({}^g\chi\gamma^{-1}).$$

Corollaire 9.5.3. — *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$ et si $\tau = (\xi, \xi', \gamma \rtimes g) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ stabilise $\mathfrak{C}$, alors*

$$^\tau \bar{\mathscr{L}}_K(\chi) \simeq \bar{\mathscr{L}}_K({}^g\chi\gamma^{-1}).$$

Corollaire 9.5.4. — *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$ et si $\tau = (\xi, \xi', \gamma \rtimes g) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$, alors*

$$\Omega_\chi({}^\tau z) = {}^\tau\big(\Omega_{{}^g\chi\gamma^{-1}}(z)\big)$$

pour tout $z \in Z$.

Corollaire 9.5.5. — *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, alors $\Omega_\chi : Z \to \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ est un morphisme gradué. En particulier, $\mathrm{Ker}(\Omega_\chi)$ est un idéal homogène de Z.*

Corollaire 9.5.6. — *Soit $c \in \mathscr{C}$, soit γ un caractère linéaire de W et soit $\mathscr{F}$ une c-famille de Calogero-Moser. Alors $\mathscr{F}\gamma$ est une $\gamma \cdot c$-famille de Calogero-Moser.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le corollaire 9.5.4 avec $\xi = \xi' = 1$ et de composer avec le morphisme $\theta_c : \mathbf{k}[\mathscr{C}] \to \bar{\mathbf{K}}_c \simeq \mathbf{k}$, $C_s \mapsto c_s$: en effet, $\theta_c \circ \tau = \theta_{\gamma \cdot c}$. □

Corollaire 9.5.7. — *Soit $\tau = (\xi, \xi', \gamma \rtimes g) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$ et soit $\mathscr{F}$ une $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser. Si τ stabilise $\mathfrak{C}$, alors $\mathscr{F}\gamma$ est une $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement du lemme 9.4.2, et des corollaires 9.5.4 et 9.3.2. □

Corollaire 9.5.8. — *Soient γ un caractère linéaire de W et soit $\mathscr{F}$ une famille de Calogero-Moser* ***générique****. Alors $\mathscr{F}\gamma$ est une famille de Calogero-Moser générique.*

Corollaire 9.5.9. — *Supposons que toutes les réflexions de W sont d'ordre 2. Soit $\mathscr{F}$ une $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser. Alors $\mathscr{F}\boldsymbol{\varepsilon}$ est une $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser (rappelons que $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le déterminant).*

Démonstration. — Posons $\tau = (-1, 1, \boldsymbol{\varepsilon} \rtimes 1) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$. Alors τ agit trivialement sur $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$. On peut donc appliquer le corollaire 9.5.7. □

Exemple 9.5.10 **(Familles génériques et caractères linéaires)**

Soient $\gamma \in W^\wedge$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$ dans la même famille de Calogero-Moser *générique*. Alors $\Omega_\chi(\mathbf{eu}) = \Omega_\gamma(\mathbf{eu})$, ce qui implique que, pour tout $s \in \mathrm{Réf}(W)$, $\chi(s) = \gamma(s)\chi(1)$. En d'autres termes, toutes les réflexions de W sont dans le centre de χ (c'est-à-dire le sous-groupe distingué de W formé des éléments qui agissent sur V_χ comme une homothétie), et donc le centre de χ est W tout entier. Cela force $\chi = \gamma$.

Par conséquent, un caractère linéaire est seul dans sa famille de Calogero-Moser générique. Ce résultat s'applique en particulier à $\mathbf{1}_W$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ et est compatible avec le corollaire 9.5.8. ■

9.6. Dimension graduée, b-invariant

D'après la proposition B.1.6, les éléments de $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(K\bar{Z})$ sont de $\mathbb{Z}$-degré 0. En particulier, si $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(K\bar{Z})$, alors $K\bar{Z}b$ est un K-espace vectoriel gradué. Le but de cette section est d'étudier cette graduation.

Théorème 9.6.1. — *Soit $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(K\bar{Z})$ et posons $\mathscr{F} = \mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W, b)$. Alors :*

(a) $\dim_k^{\mathrm{gr}} bK\bar{Z} = \sum_{\chi \in \mathscr{F}} f_\chi(\mathbf{t}^{-1})\, f_\chi(\mathbf{t})$.

(b) *Il existe un unique $\chi \in \mathscr{F}$ de* **b***-invariant minimal : notons-le $\chi_{\mathscr{F}}$.*

(c) *Le coefficient de $\mathbf{t}^{\mathbf{b}_{\chi_{\mathscr{F}}}}$ dans $f_{\chi_{\mathscr{F}}}(\mathbf{t})$ est égal à 1.*

(d) *$bK\bar{\mathbf{H}}e$ est une enveloppe projective de $\bar{\mathscr{L}}_K(\chi_{\mathscr{F}})$.*

(e) *L'algèbre $\mathrm{End}_{K\bar{\mathbf{H}}}(K\bar{\mathscr{M}}(\chi_{\mathscr{F}}))$ est un quotient de $bK\bar{Z}$: en particulier, elle est commutative.*

En vertu de 1.5.8, on obtient la conséquence immédiate suivante :

Corollaire 9.6.2. — *Soit* $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(K\bar{Z})$. *Alors*

$$\dim_K bK\bar{Z} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W,b)} \chi(1)^2.$$

Remarque 9.6.3. — Le théorème 9.6.1 généralise [**Gor1**, théorème 5.6] et le corollaire 9.6.2 généralise [**Gor1**, corollaire 5.8]. Il est à noter que, comme nous l'a fait remarquer Iain Gordon, une erreur s'est glissée dans [**Gor1**, théorème 5.6] : avec les notations en vigueur dans [**Gor1**], il y est écrit que $p_\chi(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^{\mathbf{b}_{\chi^*} - \mathbf{b}_\chi} f_\chi(\mathbf{t}) f_{\chi^*}(\mathbf{t}^{-1})$. En fait, la formule correcte est, toujours avec les notations de [**Gor1**], $p_\chi(\mathbf{t}) = f_{\chi^*}(\mathbf{t}) f_{\chi^*}(\mathbf{t}^{-1})$: la différence avec notre résultat provient du fait que nous avons pris une $\mathbb{Z}$-graduation opposée à celle de [**Gor1**, §4.1], ce qui revient à échanger V avec V^* et donc à remplacer, dans la formule, χ par χ^*. Nous remercions Iain Gordon pour nous avoir apporté ces précisions. ■

Démonstration du théorème 9.6.1. — Le $K\bar{\mathbf{H}}^-$-module gradué $K\bar{\mathbf{H}}^- e$ est isomorphe à $K[V^*]^{\mathrm{co}(W)}$, la sous-algèbre $K[V^*]^{\mathrm{co}(W)}$ agissant par multiplication à gauche et W agissant de façon naturelle. Notons M_i le sous-$K\bar{\mathbf{H}}^-$-module gradué de $K[V^*]^{\mathrm{co}(W)}$ formé des éléments de degré $\leqslant -i$. Notons N le plus grand entier tel que $M_N \neq 0$. Alors

$$0 = M_{N+1} \subsetneq M_N \subset M_{N-1} \subset \cdots \subset M_1 \subsetneq M_0 = K[V^*]^{\mathrm{co}(W)}.$$

Écrivons $f_\chi(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^N \gamma_{\chi,i} \mathbf{t}^i$ avec $\gamma_{\chi,i} \in \mathbb{N}$. Alors

$$M_i/M_{i+1} \simeq \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \left(KV_\chi^{(-)}\langle i \rangle\right)^{\gamma_{\chi,i}}$$

comme $K\bar{\mathbf{H}}^-$-module gradué. Posons $P_i = K\bar{\mathbf{H}} \otimes_{K\bar{\mathbf{H}}^-} M_i$. Puisque $K\bar{\mathbf{H}}$ est un $K\bar{\mathbf{H}}^-$-module libre de rang $|W|$, le foncteur $K\bar{\mathbf{H}} \otimes_{K\bar{\mathbf{H}}^-} -$ est exact et donc

$$0 = P_{N+1} \subsetneq P_N \subset P_{N-1} \subset \cdots \subset P_1 \subsetneq P_0 = K\bar{\mathbf{H}} e,$$

avec

$$P_i/P_{i+1} \simeq \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \left(K\bar{\mathscr{M}}(\chi)\langle i \rangle\right)^{\gamma_{\chi,i}}.$$

En tronquant par l'idempotent central b, on obtient

$$(*) \qquad 0 = bP_{N+1} \subset bP_N \subset bP_{N-1} \subset \cdots \subset bP_1 \subset bP_0 = bK\bar{\mathbf{H}} e,$$

avec

$$(**) \qquad bP_i/bP_{i+1} \simeq \bigoplus_{\chi \in \mathscr{F}} \left(K\bar{\mathscr{M}}(\chi)\langle i \rangle\right)^{\gamma_{\chi,i}}.$$

En tronquant à nouveau par l'idempotent e, on obtient

$$0 = ebP_{N+1} \subset ebP_N \subset ebP_{N-1} \subset \cdots \subset ebP_1 \subset ebP_0 = ebK\bar{\mathbf{H}} e,$$

avec

$$ebP_i/ebP_{i+1} \simeq \bigoplus_{\chi\in\mathscr{F}} \big(eK\bar{\mathscr{M}}(\chi)\langle i\rangle\big)^{\gamma_{\chi,i}}.$$

Ainsi,

$$\dim_K^{\mathrm{gr}} ebK\bar{\mathbf{H}}e = \sum_{\chi\in\mathscr{F}}\sum_{i=0}^{N}\gamma_{\chi,i}\mathbf{t}^{-i}\dim_K^{\mathrm{gr}}(eK\bar{\mathscr{M}}(\chi)) = \sum_{\chi\in\mathscr{F}} f_\chi(\mathbf{t}^{-1})\dim_K^{\mathrm{gr}}(eK\bar{\mathscr{M}}(\chi)).$$

Puisque $ebK\bar{\mathbf{H}}e \simeq bK\bar{Z}$ (comme espace vectoriels gradués), l'énoncé (a) découle du lemme facile suivant :

Lemme 9.6.4. — $\dim_K^{\mathrm{gr}}(eK\bar{\mathscr{M}}(\chi)) = f_\chi(\mathbf{t})$.

Démonstration. — D'après (9.2.2), on a

$$[K\bar{\mathscr{M}}(\chi)]_{KW}^{\mathrm{gr}} = [K[V]^{\mathrm{co}(W)}]_{KW}^{\mathrm{gr}}\cdot\chi. \tag{9.6.5}$$

D'où le résultat. □

Montrons maintenant les autres assertions. L'algèbre d'endomorphismes de $bK\bar{\mathbf{H}}e$ est isomorphe à $bK\bar{Z}$ (voir le corollaire 5.2.13) et donc est une algèbre commutative locale. Cela montre donc que $bK\bar{\mathbf{H}}e$ est indécomposable (et bien sûr projectif), donc il admet un unique quotient simple. Compte tenu de la filtration $(*)$ et de la décomposition $(**)$, cela montre (b), (c) et (d).

Pour finir, $K\bar{\mathscr{M}}(\chi_{\mathscr{F}})$ est un quotient du module projectif $bK\bar{\mathbf{H}}e$ (notons M le noyau de ce quotient) et, puisque les endomorphismes du $K\bar{\mathbf{H}}$-module $bK\bar{\mathbf{H}}e$ sont induits par multiplication par les éléments de $K\bar{Z}$, cela montre que M est stable sous l'algèbre d'endomorphismes de $bK\bar{\mathbf{H}}e$. On obtient donc un morphisme de K-algèbres $bK\bar{Z} \to \mathrm{End}_{K\mathbf{H}}(K\bar{\mathscr{M}}(\chi_{\mathscr{F}}))$ qui est surjectif en raison de la projectivité de $bK\bar{\mathbf{H}}e$. □

Corollaire 9.6.6. — *Soit $z \in Z$ et notons $\mathrm{car}_z(\mathbf{t}) \in P[\mathbf{t}]$ le polynôme caractéristique de la multiplication par z dans le P-module Z. Alors*

$$\mathrm{car}_z(\mathbf{t}) \equiv \prod_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} (\mathbf{t}-\Omega_\chi(z))^{\chi(1)^2} \mod \bar{\mathfrak{p}}.$$

Démonstration. — Si $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z})$, alors $z-\Omega_b(z)$ est un endomorphisme nilpotent de $b\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z}$. Donc le polynôme caractéristique de z sur $b\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z}$ est $(\mathbf{t}-\Omega_b(z))^{\dim_{\mathbf{k}(\mathscr{C})} b\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z}}$. Par conséquent,

$$\mathrm{car}_z(\mathbf{t}) \equiv \prod_{b\in\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z})} (\mathbf{t}-\Omega_b(z))^{\dim_{\mathbf{k}(\mathscr{C})} b\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z}} \mod \bar{\mathfrak{p}}.$$

Puisque $\Omega_b(z) = \Omega_\chi(z)$ pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W,b)$, le résultat découle de (9.4.1) et du corollaire 9.6.2. □

Corollaire 9.6.7. — *Soit $\gamma : W \longrightarrow \mathbf{k}^\times$ un caractère linéaire. Alors Z est nette sur P en* $\mathrm{Ker}(\Omega_\gamma)$.

Démonstration. — En effet, si on note b_γ l'idempotent primitif de $\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z}$ associé à γ, alors $\mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W, b_\gamma) = \{\gamma\}$ d'après l'exemple 9.5.10, ce qui implique, d'après le corollaire 9.6.2, que $\dim_{\mathbf{k}(\mathscr{C})}(b_\gamma \mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z}) = 1$.

Posons $\mathfrak{z}_\gamma = \mathrm{Ker}(\Omega_\gamma)$ (on a $\mathfrak{z}_\gamma \cap P = \bar{\mathfrak{p}}$). Alors $Z/\mathfrak{z}_\gamma \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ et donc $Z_{\mathfrak{z}_\gamma}/\mathfrak{z}_\gamma Z_{\mathfrak{z}_\gamma} \simeq \mathbf{k}(\mathscr{C})$. Mais, d'autre part, $Z_{\mathfrak{z}_\gamma}/\bar{\mathfrak{p}} Z_{\mathfrak{z}_\gamma} = b_\gamma \mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z}$. Donc $\dim_{\mathbf{k}(\mathscr{C})}(Z_{\mathfrak{z}_\gamma}/\bar{\mathfrak{p}} Z_{\mathfrak{z}_\gamma}) = 1$, ce qui implique que $\bar{\mathfrak{p}} Z_{\mathfrak{z}_\gamma} = \mathfrak{z}_\gamma Z_{\mathfrak{z}_\gamma}$, ce qui est exactement le résultat attendu. □

9.7. Géométrie

La composition

$$\mathbf{k}[\mathscr{C}] \hookrightarrow Z \xrightarrow{\Omega_b} \mathbf{k}[\mathscr{C}] \tag{9.7.1}$$

est l'identité, ce qui signifie que le morphisme de $\mathbf{k}$-variétés $\Omega_b^\sharp : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Z}$ induit par Ω_b est une section du morphisme $\pi \circ \Upsilon : \mathscr{Z} \longrightarrow \mathscr{C}$ (voir le diagramme 7.1.2). Le lemme 9.4.2 nous dit que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z}) & \longrightarrow & \Upsilon^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) \\ b & \longmapsto & \mathrm{Ker}(\Omega_b) \end{array}$$

est une bijection ou, en termes géométriques, que les composantes irréductibles de $\Upsilon^{-1}(\mathscr{C} \times 0)$ sont en bijection avec $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z})$, via l'application $b \mapsto \Omega_b^\sharp(\mathscr{C})$. Par conséquent :

Proposition 9.7.2. — *Soit $c \in \mathscr{C}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $|\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z})| = |\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\bar{\mathbf{K}}_c \bar{Z})|$.
(2) $|\Upsilon_c^{-1}(0)|$ *est égal au nombre de composantes irréductibles de* $\Upsilon^{-1}(\mathscr{C} \times 0)$.
(3) *Tout élément de* $\Upsilon_c^{-1}(0)$ *appartient à une unique composante irréductible de* $\Upsilon^{-1}(\mathscr{C} \times 0)$.
(4) *Si b et b' sont deux éléments distincts de* $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{k}(\mathscr{C})\bar{Z})$, *alors* $\theta_c \circ \Omega_b \neq \theta_c \circ \Omega_{b'}$.

Si $c \in \mathscr{C}$, nous dirons que c est *générique* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition 9.7.2. Il sera dit *particulier* dans le cas contraire. Nous noterons $\mathscr{C}_{\text{gén}}$ (respectivement $\mathscr{C}_{\text{par}}$) l'ensemble des $c \in \mathscr{C}$ génériques (respectivement particuliers).

Corollaire 9.7.3. — *$\mathscr{C}_{\text{gén}}$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathscr{C}$. D'autre part, $\mathscr{C}_{\text{par}}$ est un fermé de Zariski de $\mathscr{C}$. Si $W \neq 1$, il est purement de codimension* 1 *et contient* 0.

De plus, $\mathscr{C}_{\text{gén}}$ et $\mathscr{C}_{\text{par}}$ sont stables sous l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathscr{N})$.

Démonstration. — La stabilité sous l'action de $\mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times (W^\wedge \rtimes \mathcal{N})$ est évidente. Le fait que $\mathscr{C}_{\text{gén}}$ (respectivement $\mathscr{C}_{\text{par}}$) soit ouvert (respectivement fermé) découle de la proposition C.2.11(2). Lorsque $W \neq 1$, le caractère trivial est seul dans sa famille de Calogero-Moser générique (voir l'exemple 9.5.10) alors que sa 0-famille de Calogero-Moser est $\mathrm{Irr}(W)$. Cela montre que $0 \in \mathscr{C}_{\text{par}}$ et, en vertu de la proposition C.2.11(1), purement de codimension 1. □

On déduit de l'exemple 9.5.10 que :

Corollaire 9.7.4. — *Si $c \in \mathscr{C}$ est générique, alors tout caractère linéaire de W est seul dans sa c-famille de Calogero-Moser.*

Corollaire 9.7.5. — *Soit $\gamma : W \longrightarrow \mathbf{k}^\times$ un caractère linéaire et supposons c générique. Alors Z est nette sur P en* $\mathrm{Ker}(\Omega^c_\gamma)$.

Terminons par une courte étude de la lissité de $\mathscr{Z}$. Soit $b \in \mathrm{Idem}_{\text{pr}}(K\bar{Z})$ et notons $\bar{\mathfrak{z}}_b$ l'idéal premier de Z égal au noyau de $\Omega^K_b : Z \to K$. D'après [**Gor1**, théorème 5.6], on a :

***Proposition 9.7.6* (Gordon)**. — *Si l'anneau Z est régulier en $\bar{\mathfrak{z}}_b$, alors* $|\mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W, b)| = 1$. *De plus,*

$$K\bar{\mathbf{H}}b \simeq \mathrm{Mat}_{|W|}(bK\bar{Z})$$

et $bK\bar{Z}$ est une K-algèbre locale de dimension finie et de corps résiduel K.

Soit maintenant $c \in \mathscr{C}$ et supposons que $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$. Notons z_b le point de $\Upsilon_c^{-1}(0) \subset \mathscr{Z}_c \subset \mathscr{Z}$ correspondant à b.

Proposition 9.7.7. — *Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\mathscr{Z}$ est lisse en z_b.*
(2) *$\mathscr{Z}_c$ est lisse en z_b.*

Démonstration. — Rappelons pour commencer le lemme suivant :

Lemme 9.7.8. — *Soit $\varphi : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ un morphisme de* **k***-variétés (pas forcément réduites), soit $y \in \mathscr{Y}$ et soit $x = \varphi(y)$. On suppose qu'il existe un morphisme de* **k***-variétés $\sigma : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ tel que $y = \sigma(x)$ et $\varphi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathscr{X}}$. Alors*

$$\mathscr{T}_y(\mathscr{Y}) = \mathscr{T}_y(\varphi^*(x)) \oplus \mathscr{T}_y(\sigma(\mathscr{X})).$$

Ici, $\mathscr{T}_y(\mathscr{Y})$ désigne l'espace tangent à la **k***-variété $\mathscr{Y}$ et $\varphi^*(x)$ désigne la fibre (schématique) en x de φ, vue comme* **k***-sous-variété fermée de $\mathscr{Y}$, non nécessairement réduite.*

Soit $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W, b)$. Le morphisme de variétés $\Omega_\chi^\sharp : \mathscr{C} \to \mathscr{Z}$ qui est une section du morphisme $\pi \circ \Upsilon : \mathscr{Z} \to \mathscr{C}$. D'autre part, par hypothèse, $z_b = \Omega_\chi^\sharp(c)$. En vertu du lemme 9.7.8 ci-dessus, on a

$$\mathscr{T}_{z_b}(\mathscr{Z}) = \mathscr{T}_{z_b}(\mathscr{Z}_c) \oplus \mathscr{T}_{z_b}(\Omega_\chi^\sharp(\mathscr{C})).$$

Puisque $\mathscr{T}_{z_b}(\Omega_\chi^\sharp(\mathscr{C})) \simeq \mathscr{T}_c(\mathscr{C})$, la proposition découle de la lissité de $\mathscr{C}$ et du fait que $\dim(\mathscr{Z}) = \dim(\mathscr{Z}_c) + \dim(\mathscr{C})$. □

À la suite des travaux d'Etingof-Ginzburg [**EtGi**], Ginzburg-Kaledin [**GiKa**], Gordon [**Gor1**] et Bellamy [**Bel2**], une classification complète des groupes de réflexions complexes W tels qu'il existe $c \in \mathscr{C}$ tel que $\mathscr{Z}_c$ soit lisse a été obtenue. Notons que les assertions *"Il existe $c \in \mathscr{C}$ tel que $\mathscr{Z}_c$ soit lisse"* et *"l'anneau $\mathbf{k}(\mathscr{C}) \otimes_{\mathbf{k}[\mathscr{C}]} Z = \mathbf{k}(\mathscr{C})Z$ est régulier"* sont équivalentes. Rappelons ici le résultat, sachant que l'on peut se ramener très facilement au cas où W est irréductible :

Théorème 9.7.9 **(Etingof-Ginzburg, Ginzburg-Kaledin, Gordon, Bellamy)**
Supposons W irréductible. Alors $\mathbf{k}(\mathscr{C})Z$ est un anneau régulier si et seulement si on est dans un des deux cas suivants :

(1) *W est de type $G(d, 1, n)$, avec d, $n \geqslant 1$.*
(2) *W est le groupe noté G_4 dans la classification de Shephard-Todd.*

Il découle des travaux d'Etingof-Ginzburg [**EtGi**], Gordon [**Gor1**], Bellamy [**Bel2**] que la proposition suivante est vraie :

Proposition 9.7.10. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe $c \in \mathscr{C}$ tel que $\mathscr{Z}_c$ est lisse.*
(2) *Il existe $c \in \mathscr{C}$ tel que les points de $\Upsilon_c^{-1}(0)$ sont lisses dans $\mathscr{Z}_c$.*

À l'heure actuelle, la preuve de ce fait repose sur la classification de Shephard-Todd des groupes de réflexions complexes.

9.8. Problèmes, questions

Ce chapitre soulève plusieurs questions numériques concrètes, qu'il n'est pas facile de résoudre (voir cependant **[Gor2]**, **[GoMa]**, **[Bel5]**, **[Mar2]**, **[Thi]**).

Problème 9.8.1. — *Calculer les familles de Calogero-Moser générique.*

Problème 9.8.2. — *Calculer les c-familles de Calogero-Moser.*

Un problème beaucoup plus facile est le suivant :

Problème 9.8.3. — *Déterminer* $\mathscr{C}_{\mathrm{par}}$.

Les exemples connus jusqu'à présent suggèrent la question suivante :

Question 9.8.4. — *Est-ce que* $\mathscr{C}_{\mathrm{par}}$ *est une réunion d'hyperplans ? Si oui, sont-ce les* ***hyperplans essentiels*** *définis par Chlouveraki* **[Chl2**, §3] *?*

C'est vrai si W est abélien (par produits directs, on se ramène au cas où $\dim_{\mathbf{k}}(V) = 1$, qui est traité dans le chapitre 18). D'après le corollaire 9.7.3, $\mathscr{C}_{\mathrm{par}}$ est un fermé de $\mathscr{C}$, de codimension 1 et stable par homothéties : ce ne peut alors être qu'une réunion d'hyperplans si $\dim_{\mathbf{k}}(\mathscr{C}) \in \{1,2\}$. D'autres problèmes sont soulevés par la construction des bébés modules de Verma.

Problème 9.8.5. — *Déterminer l'image de* $K\bar{\mathscr{M}}(\chi)$ *dans* $\mathscr{K}_0(K\bar{\mathbf{H}}) \simeq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(W)$.

Rappelons que le $K\bar{\mathbf{H}}$-module simple $\bar{\mathscr{L}}_K(\chi)$ hérite d'une graduation, et donc d'une structure de KW-module gradué :

Problème 9.8.6. — *Déterminer la classe* $[\bar{\mathscr{L}}_K(\chi)]^{\mathrm{gr}}_{KW} \in \mathscr{K}_0(KW)[\mathbf{t},\mathbf{t}^{-1}]$, *ou plus simplement* $[\bar{\mathscr{L}}_K(\chi)]_{KW} \in \mathscr{K}_0(KW)$, *ou encore plus simplement* $\dim_K \bar{\mathscr{L}}_K(\chi)$.

Terminons par quelques questions de nature géométriques, en écho à la proposition 9.7.7 et au corollaire 9.7.10 :

Question 9.8.7. — *Soit* $z \in \mathscr{Z}_c \subset \mathscr{Z}$. *Est-ce que* z *est lisse dans* $\mathscr{Z}$ *si et seulement si il est lisse dans* $\mathscr{Z}_c$ *? Plus généralement, est-ce que les singularités de* $\mathscr{Z}$ *et* $\mathscr{Z}_c$ *en* z *sont équivalentes ?*

La proposition 9.7.7 (et sa preuve) montre que, si $z \in \Upsilon^{-1}(0)$, alors les singularités de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}_c$ en z sont équivalentes.

La question suivante est suggérée par le corollaire 9.7.10 : il serait souhaitable de l'étudier de manière indépendante de la classification.

Question 9.8.8. — *Est-ce que $\mathscr{X}_c$ est lisse si et seulement si $\mathscr{X}_c$ est lisse en tout point de $\Upsilon^{-1}(0)$?*

CHAPITRE 10

CONJECTURE DE MARTINO

L'objet de ce chapitre est de rappeler l'énoncé de la conjecture de Martino [**Mar1**] reliant les familles de Calogero-Moser et celles de Hecke (voir la définition 2.2.13), de rappeler l'état des connaissances dans sa preuve et d'apporter quelques arguments théoriques en sa faveur.

Dans ce chapitre, on suppose que $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ *et on fixe une fonction invariante par conjugaison* $c : \mathrm{Réf}(W) \to \mathbb{C}$ *(ainsi,* $c \in \mathscr{C}$*). On définit alors une famille* $k = (k_{\Omega,j})_{(\Omega,j)\in\mathbf{\Omega}_W^\circ}$ *par les égalités du §4.1.B et* ***on suppose dans tout ce chapitre que*** $k_{\Omega,j} \in \mathbb{R}$ ***pour tout*** $(\Omega, j) \in \mathbf{\Omega}_W^\circ$ *(ainsi,* $k \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$*).*

Notons $k^\sharp = (k^\sharp_{\Omega,j})_{(\Omega,j)\in\mathbf{\Omega}_W^\circ}$ *l'élément de* $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ *défini par* $k^\sharp_{\Omega,j} = k_{\Omega,-j}$ *(les indices* j *étant vus modulo* e_Ω*). Pour finir,* ***on suppose que l'hypothèse (Lib-Sym) est vérifiée*** *(voir §2.1.B).*

10.1. Énoncé et cas connus

Rappelons ici l'énoncé donné dans [**Mar1**, conjecture 2.7] :

***Conjecture FAM* (Martino).** — *Si* $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\bar{Z}_c)$*, alors il existe un idempotent central* $b^{\mathscr{H}}$ *de* $\mathscr{O}^{\mathrm{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k^\sharp)$ *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(a) $\mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W, b) = \mathrm{Irr}_{\mathscr{H}}(W, b^{\mathscr{H}})$;

(b) $\dim_{\mathbb{C}}(\bar{Z}b) = \dim_{F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})}\big(F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k^\sharp)b^{\mathscr{H}}\big)$.

En particulier, toute c-famille de Calogero-Moser est une réunion de $k^\sharp$*-familles de Hecke.*

Cette conjecture a été vérifiée dans certains cas en calculant séparément les partitions en familles de Hecke et en familles de Calogero-Moser. Aucun lien théorique

n'a pour l'instant été établi permettant d'imaginer une preuve de cette conjecture indépendante de la classification.

Théorème 10.1.1 **(Bellamy, Chlouveraki, Gordon, Martino)**
Supposons que W soit de type $G(de, e, n)$ et supposons que, si $n = 2$, alors e est impair ou $d = 1$. Alors la conjecture FAM est vraie.

La preuve de ce théorème découle des travaux suivants :
- M. Chlouveraki a calculé la partition en familles de Hecke dans [**Chl3**] et [**Chl5**].
- Lorsque $e = 1$, la partition en familles de Calogero-Moser a été calculée par I. Gordon [**Gor2**] pour des valeurs rationnelles de k (en utilisant des schémas de Hilbert). Ce résultat a été étendu à toutes les valeurs de k par M. Martino [**Mar2**] par des méthodes algébriques.
- La combinatoire de M. Chlouveraki et celle de I. Gordon a été comparée par M. Martino [**Mar1**] pour démontrer la conjecture FAM lorsque $e = 1$.
- Lorsque e est quelconque, la partition en familles de Calogero-Moser a été calculée par G. Bellamy [**Bel5**] pour les valeurs rationnelles de k, car ce calcul reposait sur le résultat de I. Gordon. La méthode se généralisait toutefois à toutes les valeurs de k, une fois le résultat de Martino [**Mar2**] établi.

Remarque 10.1.2. — Il était conjecturé par M. Martino que, lorsque c est générique, alors les partitions en c-familles de Calogero-Moser et en $k^\sharp$-familles de Hecke coïncident. Un contre-exemple à cela a été récemment trouvé par U. Thiel [**Thi**]. Grâce à ses calculs, U. Thiel a aussi obtenu quelques nouveaux cas de la conjecture FAM parmi les groupes exceptionnels : une publication d'U. Thiel viendra bientôt dresser une liste précise des cas connus.

Il faut noter que M. Chlouveraki a calculé les partitions en familles de Hecke des groupes exceptionnels [**Chl4**] dans tous les cas et que les programmes d'U. Thiel calculent la partition en familles de Calogero-Moser. ■

10.2. Arguments théoriques

Le corollaire 9.6.2 montre que :

Proposition 10.2.1. — *Dans la conjecture FAM, l'assertion (a) implique l'assertion (b).*

Démonstration. — Reprenons les notations de l'énoncé de la conjecture FAM (b, $b^{\mathscr{H}}$,...). Puisque l'algèbre $F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k^\sharp)$ est déployée, on a

$$\dim_{F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})}\big(F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k^\sharp)b^{\mathscr{H}}\big) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathscr{H}}(W,b^{\mathscr{H}})} \chi(1)^2.$$

Mais d'autre part, il découle du corollaire 9.6.2 que

$$\dim_{\mathbb{C}}(\bar{Z}_c b) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W,b)} \chi(1)^2.$$

D'où le résultat. □

Remarque 10.2.2. — L'argument théorique le plus probant en faveur de la conjecture FAM est le suivant. Il a été montré que, si χ et χ' sont dans la même c-famille de Calogero-Moser (respectivement $k^\sharp$-famille de Hecke), alors $\Omega_\chi^c(\mathbf{eu}) = \Omega_{\chi'}^c(\mathbf{eu})$ (respectivement $c_\chi(k^\sharp) = c_{\chi'}(k^\sharp)$) : voir le lemme 9.4.2 (respectivement le lemme 2.2.14). Or, il découle de la proposition 9.3.3 et de la définition de $c_\chi(k^\sharp)$ (voir §2.2.B) que

$$\Omega_\chi^c(\mathbf{eu}_c) = c_\chi(k^\sharp). \tag{10.2.3}$$

Si cet invariant numérique n'est pas suffisant pour déterminer en général la partition en familles de Calogero-Moser, il est quand même assez fin. ■

Un dernier argument est donné par la proposition suivante, qui fait une synthèse du lemme 2.3.2 et du corollaire 9.5.9 :

Proposition 10.2.4. — ***Supposons que toutes les réflexions de*** W ***soient d'ordre*** 2. *Si* $\mathscr{F}$ *est une c-famille de Calogero-Moser (respectivement une* $k^\sharp$*-famille de Hecke), alors* $\mathscr{F}\boldsymbol{\varepsilon}$ *est une c-famille de Calogero-Moser (respectivement une* $k^\sharp$*-famille de Hecke).*

CHAPITRE 11

CELLULES DE CALOGERO-MOSER BILATÈRES

Conformément aux notations en vigueur dans cette partie, nous fixons un idéal premier $\mathfrak{C}$ de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$. Le but de ce chapitre est d'étudier les $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser bilatères, en lien avec la théorie des bébés module de Verma rappelée dans le chapitre précédent.

11.1. Choix

Espérant relier les cellules de Calogero-Moser bilatères avec celles de Kazdahn-Lusztig, nous sommes contraints de préciser la façon de choisir un idéal premier $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$: nous n'avons pas de réponses précises à cette question, mais nous allons donner ici quelques éléments pour guider ce choix.

Rappelons que $\bar{\mathfrak{p}}$ désigne l'idéal premier de P correspondant à la sous-variété fermée irréductible $\mathscr{C} \times \{0\} \times \{0\}$ de $\mathscr{P}$ (voir la section 9.1). Il y a alors plusieurs idéaux premiers de Z au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}$: ils sont décrits dans le lemme 9.4.2, qui nous dit qu'ils sont en bijection avec l'ensemble des familles de Calogero-Moser génériques de W. Rappelons aussi que, d'après l'exemple 9.5.10, le caractère trivial $\mathbf{1}_W$ de W forme à lui seul une famille de Calogero-Moser générique : nous noterons $\bar{\mathfrak{z}}$ l'idéal premier de Z qui lui est associé :

$$\bar{\mathfrak{z}} = \mathrm{Ker}(\Omega_{\mathbf{1}_W}).$$

Nous poserons ensuite $\bar{\mathfrak{q}} = \mathrm{cop}(\bar{\mathfrak{z}})$.

Lemme 11.1.1. — *$\bar{\mathfrak{q}}$ est l'unique idéal premier de Q au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}$ contenant* $\mathrm{eu} - \sum_{H \in \mathscr{A}} e_H K_{H,0}$ *(rappelons que* $\mathrm{eu} = \mathrm{cop}(\mathbf{eu})$*). L'algèbre Q est étale sur P au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$.*

Démonstration. — Il découle du corollaire 9.6.7 que Q est nette sur P au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$: comme de plus Q est un P-module libre, donc plat et que, en caractéristique nulle, toutes les extensions de corps sont séparables, on en déduit que Q est étale sur P au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$. Le fait que $\mathbf{eu} - \sum_{H \in \mathscr{A}} e_H K_{H,0} \in \bar{\mathfrak{z}}$ découle de la proposition 9.3.3. Maintenant, si $\bar{\mathfrak{z}}'$ est un idéal premier de Z au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}$ et contenant $\mathbf{eu} - \sum_{H \in \mathscr{A}} e_H K_{H,0}$, alors il existe $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$ tel que $\bar{\mathfrak{z}}' = \mathrm{Ker}(\Omega_\chi)$. En particulier, $\Omega_\chi(\mathbf{eu}) = \sum_{H \in \mathscr{A}} e_H K_{H,0}$ et donc $\Omega_\chi(\mathbf{eu}) = \Omega_{\mathbf{1}_W}(\mathbf{eu})$. Or, il est démontré dans l'exemple 9.5.10 que cela implique que $\chi = \mathbf{1}_W$. □

Reprenons maintenant les notations du chapitre précédent 9. Comme précédemment, le lemme 9.4.2, nous dit que l'ensemble des idéaux premiers de Q au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$ est en bijection avec les $\mathfrak{C}$-familles de Calogero-Moser. Nous noterons $\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}$ l'idéal maximal correspondant à la $\mathfrak{C}$-famille contenant le caractère trivial de W :

$$\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}} = \mathrm{Ker}(\Omega_{\mathbf{1}_W}^{\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}})$$

et nous posons $\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}} = \mathrm{cop}(\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}})$.

Lemme 11.1.2. — $\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{q}} + \mathfrak{C}Q$.

Démonstration. — Le morphisme $\Omega_{\mathbf{1}_W} : Z \to \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ induit un isomorphisme $Z/\bar{\mathfrak{z}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ et, puisque $\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}$ contient $\mathfrak{C}$, $\bar{\mathfrak{z}} + \mathfrak{C}Z$ est bien un idéal premier de Z, correspondant au sous-schéma fermé irréductible $\mathscr{C}_{\mathfrak{C}}$ de $\mathscr{C}$. □

Corollaire 11.1.3. — *$\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}$ est l'unique idéal premier de Q au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$ contenant* $\mathrm{eu} - \sum_{H \in \mathscr{A}} e_H K_{H,0}$.

11.2. Cellules bilatères

Hypothèse. *Dans la suite de cette partie, nous fixons un idéal premier $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}$. Rappelons que $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}} = k_P(\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}) = k_{\mathbf{k}[\mathscr{C}]}(\mathfrak{C})$ et nous posons $\bar{\mathbf{L}}_{\mathfrak{C}} = k_Q(\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}})$ et $\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}} = k_R(\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}})$. Par cohérence avec des notations déjà utilisées, nous noterons $\bar{\mathbf{K}}$, $\bar{\mathbf{L}}$ et $\bar{\mathbf{M}}$ (respectivement $\bar{\mathbf{K}}_c$, $\bar{\mathbf{L}}_c$ et $\bar{\mathbf{M}}_c$) les corps $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}$, $\bar{\mathbf{L}}_{\mathfrak{C}}$ et $\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}$ lorsque $\mathfrak{C} = 0$ (respectivement $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$ avec $c \in \mathscr{C}$).*

Le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ sera noté $\bar{D}_{\mathfrak{C}}$ (respectivement $\bar{I}_{\mathfrak{C}}$) : on définit de même les notations $\bar{D}$, $\bar{I}$, $\bar{D}_c$ et $\bar{I}_c$.

11.2.A. Théorie de Galois. — Rappelons que, d'après le corollaire 9.4.4, l'injection canonique $P/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}} \hookrightarrow Q/\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}$ est un isomorphisme, ce qui signifique que $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}} = \bar{\mathbf{L}}_{\mathfrak{C}}$. Puisque $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}/\bar{\mathbf{L}}_{\mathfrak{C}}) = \bar{D}_{\mathfrak{C}}/\bar{I}_{\mathfrak{C}}$ (voir le théorème A.2.3), on en déduit que

$$(\bar{D}_{\mathfrak{C}} \cap H)/(\bar{I}_{\mathfrak{C}} \cap H) \simeq \bar{D}_{\mathfrak{C}}/\bar{I}_{\mathfrak{C}}. \tag{11.2.1}$$

En particulier,

$$(\bar{D}_{\mathfrak{C}} \cap H)\bar{I}_{\mathfrak{C}} = \bar{D}_{\mathfrak{C}}. \tag{11.2.2}$$

Par ailleurs, puisque l'algèbre Q est nette au-dessus de P en $\bar{\mathfrak{q}}$ (voir le lemme 11.1.1), il découle du théorème A.2.5 que $\bar{I} \subset H$. Combiné à 11.2.2, on obtient

$$\bar{I} \subset \bar{D} \subset H. \tag{11.2.3}$$

Comme le montre 17.1.2, ce dernier résultat ne se généralise pas forcément à $\bar{I}_{\mathfrak{C}}$.

Pour terminer avec les propriétés galoisiennes immédiates, notons que, d'après les corollaires 9.4.4 et A.3.8, on a

$$\bar{I}_{\mathfrak{C}} \backslash G/H = \bar{D}_{\mathfrak{C}} \backslash G/H. \tag{11.2.4}$$

11.2.B. Cellules bilatères et graduation. — Soit $\widetilde{\mathfrak{C}}$ l'idéal homogène maximal contenu dans $\mathfrak{C}$ (i.e. $\widetilde{\mathfrak{C}} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{C} \cap \mathbf{k}[\mathscr{C}]^{\mathbb{N}}[i]$). Alors $\widetilde{\mathfrak{C}}$ est un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ (voir le lemme B.2.9). Notons $\bar{\mathfrak{r}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}$ l'idéal homogène maximal contenu dans $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$: c'est un idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}$ (voir le corollaire B.2.11). Il découle alors de la proposition 8.1.5 que :

Lemme 11.2.5. — *On a $\bar{I}_{\mathfrak{C}} = \bar{I}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}$. Les $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser bilatères et les $\widetilde{\mathfrak{C}}$-cellules de Calogero-Moser bilatères coïncident.*

11.2.C. Cellules bilatères et familles. — Par construction, $\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}$ (qui est une extension finie de $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}} = k_P(\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}) = \mathrm{Frac}(\mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C})$) est une $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$-algèbre et $\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\mathbf{H} = \bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}$. On peut donc parler de $\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}$-familles de Calogero-Moser (qui sont les $\mathfrak{C}$-familles de Calogero-Moser) : le théorème 8.2.2 nous dit qu'il y a une bijection entre les $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$-cellules de Calogero-Moser et les $\mathfrak{C}$-familles de Calogero-Moser : si $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}}Z)$, alors cette bijection fait correspondre $\mathrm{CM}_{\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}}(b)$ avec $\mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W, \bar{b})$, où $\bar{b}$ désigne l'image de b dans $\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}$ (notons que, en raison du déploiement de $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}$, l'élément $\bar{b}$ appartient en fait à $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}$).

Terminologie, notation. *Si $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}} Z)$, nous dirons que la $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère $\mathrm{CM}_{\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}}(b)$* ***recouvre*** *la $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser $\mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W, b)$. Si Γ est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère, nous noterons $\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathrm{CM}}(W)$ la $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser recouverte par Γ. L'ensemble des $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser bilatères sera noté ${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{LR}^{\mathfrak{C}}(W)$.*

Remarque 11.2.6. — Il est bien sûr clair que la notion de $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère dépend du choix de l'idéal premier $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}$. Cependant, si $\bar{\mathfrak{r}}'_{\mathfrak{C}}$ est un autre idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}$, alors il existe $h \in H$ tel que $\bar{\mathfrak{r}}'_{\mathfrak{C}} = h(\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}})$ et les $\bar{\mathfrak{r}}'_{\mathfrak{C}}$-cellules de Calogero-Moser se déduisent des $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$-cellules de Calogero-Moser en faisant agir h par translation sur $W \overset{\sim}{\longleftrightarrow} G/H$. Le choix de l'idéal $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ sera donc implicite tout au long de ce chapitre. ■

Les liens entre $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser bilatères et $\mathfrak{C}$-familles sont renforcés par le théorème suivant :

Théorème 11.2.7. — *Soient $w \in W$, $b \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}} Q)$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$. Alors :*

(a) *Le groupe de décomposition $\bar{D}_{\mathfrak{C}}$ agit trivialement sur ${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{LR}^{\mathfrak{C}}(W)$.*

(b) *La $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère de w est associée à la $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser de χ si et seulement si $w^{-1}(\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}) \cap Q = \mathrm{cop}(\mathrm{Ker}(\Omega_{\chi}^{\mathfrak{C}}))$.*

(c) *La $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère de w est associée à la $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser de χ si et seulement si $(w(q) \mod \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}) = \Omega_{\chi}^{\mathfrak{C}}(\mathrm{cop}^{-1}(q)) \in \bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}} = k_R(\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}})$ pour tout $q \in Q$.*

(d) *Si Γ est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère, alors $|\Gamma| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathrm{CM}}(W)} \chi(1)^2$.*

Démonstration. — (a) découle de 11.2.4.

(b) Notons $\bar{\omega}_w : Q \to R/\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ le morphisme de P-algèbres qui, à $q \in Q$, associe l'image de $\omega_w(q) = w(q) \in R$ dans $R/\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$. Alors la $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère de w est associée à la $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser de χ si et seulement si $\bar{\omega}_w = \Omega_{\chi}$. Or, d'après le lemme 9.4.2, ceci est équivalent à dire que $\mathrm{Ker}(\bar{\omega}_w) = \mathrm{cop}(\mathrm{Ker}(\Omega_{\chi}^{\mathfrak{C}}))$. Puisque $\mathrm{Ker}(\bar{\omega}_w) = w^{-1}(\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}) \cap Q$, le résultat en découle.

(c) découle de (b) et du fait que $Q = (w^{-1}(\mathfrak{r}) \cap Q) + \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ (voir le corollaire 9.4.4) tandis que (d) découle des corollaires 9.6.2 et 8.2.5. □

Corollaire 11.2.8. — *Soit $\mathfrak{C}'$ un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ contenu dans $\mathfrak{C}$ et soit $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}'}$ un idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}'}$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}'}$. Alors toute $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère est une réunion de $\mathfrak{C}'$-cellules de Calogero-Moser bilatères. De plus, si Γ est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère et si $\Gamma = \Gamma_1 \coprod \cdots \coprod \Gamma_r$ où les Γ_i sont des $\mathfrak{C}'$-cellules de Calogero-Moser bilatères, alors*

$$\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathrm{CM},\mathfrak{C}}(W) = \mathrm{Irr}_{\Gamma_1}^{\mathrm{CM},\mathfrak{C}'}(W) \coprod \cdots \coprod \mathrm{Irr}_{\Gamma_r}^{\mathrm{CM},\mathfrak{C}'}(W).$$

Corollaire 11.2.9. — *Supposons que toutes les réflexions de W sont d'ordre 2 et que $w_0 = -\mathrm{Id}_V \in W$. Si Γ est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère recouvrant la $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser $\mathscr{F}$, alors $w_0\Gamma = \Gamma w_0$ est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère recouvrant la $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser $\varepsilon\mathscr{F}$.*

Démonstration. — Tout d'abord, $w_0\Gamma = \Gamma w_0$ est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère d'après l'exemple 8.1.4 tandis que $\varepsilon\mathscr{F}$ est une $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser d'après le corollaire 9.5.9.

Soient $w \in \Gamma$, $\chi \in \mathscr{F}$ et $q \in Q$. D'après le théorème 11.2.7(c), il suffit de montrer que $(w\,w_0(q) \bmod \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}) = \Omega_{\chi\varepsilon}^{k_R(\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}})}(q)$. Posons $\tau_0 = (-1,1,\varepsilon) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times W^\wedge$. D'après la proposition 6.5.2 on a $w_0(q) = {}^{\tau_0}q$ pour tout $q \in Q$. De plus, d'après le corollaire 9.5.4, $\Omega_{\chi\varepsilon}(q) = {}^{\tau_0}\Omega_\chi({}^{\tau_0}q)$ (car τ_0 est d'ordre 2). Puisque τ_0 agit trivialement sur $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$, on a $\Omega_{\chi\varepsilon}(q) = \Omega_\chi({}^{\tau_0}q)$. Il suffit donc de montrer que $(w({}^{\tau_0}q) \bmod \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}) = \Omega_\chi^{k_R(\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}})}({}^{\tau_0}q)$. Mais cela découle encore du théorème 11.2.7(c). □

***Exemple 11.2.10* (Lissité)**. — Si l'anneau Q est régulier en $\bar{\mathfrak{q}}_b$ et si χ désigne l'unique élément de $\mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W,b)$ (en vertu de la proposition 9.7.6), alors $|\mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b)| = \chi(1)^2$ (théorème 11.2.7(d). ■

Remarque 11.2.11. — Si $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ et $\bar{\mathfrak{r}}$ sont choisis de telle sorte que $\bar{\mathfrak{r}} \subset \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$, alors $\bar{I} \subset \bar{I}_{\mathfrak{C}}$ et donc toute $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère est réunion de cellules de Calogero-Moser bilatères génériques. C'est le pendant "cellulaire" de l'énoncé équivalent sur les familles. ■

Si γ est un caractère linéaire, alors il est seul dans sa famille de Calogero-Moser générique (voir l'exemple 9.5.10) et la cellule de Calogero-Moser bilatère générique correspondante ne contient qu'un seul élément (en vertu du théorème 11.2.7(d)). Notons w_γ cet unique élément. Alors, d'après le théorème 11.2.7(b), on a

$$w_\gamma^{-1}(\bar{\mathfrak{r}}) \cap Q = \mathrm{Ker}(\Omega_\gamma). \tag{11.2.12}$$

Corollaire 11.2.13. — *On a* $w_{\mathbf{1}_W} = 1$. *En d'autres termes,* 1 *est seul dans sa cellule de Calogero-Moser générique et recouvre la famille de Calogero-Moser générique du caractère trivial* $\mathbf{1}_W$ *(qui est un singleton).*

Démonstration. — D'après le théorème 11.2.7 et (11.2.12), $w_{\mathbf{1}_W}$ est l'unique élément $w \in W$ tel que $w^{-1}(\bar{\mathfrak{r}}) \cap Q = \mathrm{Ker}(\Omega_{\mathbf{1}_W}) = \bar{\mathfrak{q}}$. Puisque $\bar{\mathfrak{r}} \cap Q = \bar{\mathfrak{q}}$, on a $w_{\mathbf{1}_W} = 1$. □

Proposition 11.2.14. — *Soit* $\gamma \in W^\wedge$. *Alors* $\bar{I} \subset w_\gamma H w_\gamma^{-1}$.

Démonstration. — Nous allons donner deux preuves de ce fait. Tout d'abord, w_γ est seul dans sa cellule de Calogero-Moser générique, donc $\bar{I} w_\gamma H = w_\gamma H$. D'où le résultat.

Donnons maintenant une deuxième preuve. D'après le corollaire 9.6.7, Q est nette sur P en $\mathrm{Ker}(\Omega_\gamma) = w_\gamma^{-1}(\bar{\mathfrak{r}}) \cap Q$. Donc, d'après le théorème A.2.5, $I_{w_\gamma^{-1}(\bar{\mathfrak{r}})} \subset H$, ce qui est le résultat annoncé car $I_{w_\gamma^{-1}(\bar{\mathfrak{r}})} = w_\gamma^{-1} \bar{I} w_\gamma$. □

Remarque 11.2.15. — L'action de H sur $W \xleftrightarrow{\sim} G/H$ stabilise l'élément neutre (c'est-à-dire que H stabilise **eu**). Cela montre que l'énoncé du corollaire 11.2.13 ne dépend pas du choix de $\bar{\mathfrak{r}}$, comme il se doit. ■

11.3. Problèmes, questions

Les notions définies dans ce chapitre requièrent une bonne connaissance de l'anneau R, du groupe de Galois G mais aussi la connaissance de groupes d'inertie. D'après le corollaire 9.4.4, $Q/\bar{\mathfrak{q}}' \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ pour tout idéal premier $\bar{\mathfrak{q}}'$ de Q au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}$. On sait aussi que $\bar{\mathfrak{r}}$ est un idéal $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$-homogène de R (voir le corollaire B.2.10), et que la composante $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$-homogène de $R/\bar{\mathfrak{r}}$ de bi-degré $(0,0)$ est égale à $\mathbf{k}$. Il est donc naturel de se poser la question suivante :

Question 11.3.1. — *Est-ce que* $R/\bar{\mathfrak{r}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ *?*

Puisque l'extension de corps $k_R(\bar{\mathfrak{r}})/\mathbf{k}(\mathscr{C})$ est galoisienne de groupe de Galois $\bar{D}/\bar{I}$, cette question est équivalente à : est-ce que $\bar{D} = \bar{I}$? Nous verrons dans le chapitre 18 que c'est vrai si $\dim_{\mathbf{k}}(V) = 1$ (voir 18.3.10). Par produits directs, cela montre le résultat lorsque W est abélien.

Si la réponse à la question 11.3.1 est positive, alors $R_c/\bar{\mathfrak{r}}_c \simeq \mathbf{k}$ et $\bar{D}_c = \bar{I}_c$ pour tout $c \in \mathscr{C}$. Ceci est bien sûr vrai lorsque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, mais un tel résultat éviterait de devoir se ramener au cas algébriquement clos.

Question 11.3.2. — *Supposons que W soit un groupe de Coxeter. Est-il possible de choisir $\bar{\mathfrak{r}}$ de sorte que $\sigma_{\mathbf{H}}(\bar{\mathfrak{r}}) = \bar{\mathfrak{r}}$?*

Rappelons ici que $\sigma_{\mathbf{H}}$ est l'automorphisme de $\mathbf{H}$ induit par l'isomorphisme de W-modules $\sigma : V \xrightarrow{\sim} V^*$ et que l'on note encore $\sigma_{\mathbf{H}}$ l'automorphisme de R qu'il induit.

CHAPITRE 12

CELLULES DE CALOGERO-MOSER À GAUCHE ET À DROITE

Comme dans toute cette partie, $\mathfrak{C}$ désigne un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser à gauche (ou à droite), en lien avec les représentations de l'algèbre $\mathbf{H}^{\text{left}}$. Dans ce cadre, tout comme avec les cellules bilatères, nous aurons à notre disposition des *modules de Verma à gauche* (ou *à droite*). Ces modules de Verma nous permettront de définir les notions de CM-caractères $\mathfrak{C}$-cellulaires, dont nous espérons qu'ils coïncident avec les KL-caractères cellulaires (lorsque W est un groupe de Coxeter).

L'essentiel de ce chapitre traitera des $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser *à gauche* et des modules de Verma *à gauche* : les résultats se transposent sans problème dans le contexte *à droite*.

12.1. Choix

Les questions de choix d'idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ sont tout autant cruciales que dans le cas des cellules bilatères. Nous allons définir et utiliser les modules de Verma *à gauche* pour guider ce choix.

Rappelons que $P^{\text{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C} \times V/W]$. Il découle de la décomposition PBW que l'on a un isomorphisme de P^{left}-modules

$$\mathbf{H}^{\text{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C} \times V] \otimes \mathbf{k}W \otimes \mathbf{k}[V^*]^{\text{co}(W)}. \tag{12.1.1}$$

On retrouve alors l'algèbre $\bar{\mathbf{H}}^- = \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes (W \ltimes \mathbf{k}[V^*]^{\text{co}(W)})$ comme sous-$\mathbf{k}$-algèbre de $\mathbf{H}^{\text{left}}$. Cela nous permet de définir des *modules de Verma à gauche* : si $\chi \in \text{Irr}(W)$, on pose

$$\mathscr{M}^{\text{left}}(\chi) = \mathbf{H}^{\text{left}} \otimes_{\bar{\mathbf{H}}^-} (\mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes V_\chi)^{(-)}.$$

Alors $\mathscr{M}^{\text{left}}(\chi)$ est un $\mathbf{H}^{\text{left}}$-module à gauche et

(12.1.2) *$\mathscr{M}^{\text{left}}(\chi)$ est libre de rang $|W|\chi(1)$ comme P^{left}-module.*

Lemme 12.1.3. — *Si γ est un caractère* ***linéaire*** *de W, alors $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\gamma)$ est un $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$-module absolument simple.*

Démonstration. — Notons que, d'après l'exemple 8.4.7, $\mathfrak{q}_{\mathrm{sing}} \cap P \not\subset \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$. Ainsi, le théorème 8.4.6 s'applique et donc, si $\mathfrak{r}$ désigne un idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$, alors les $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$-modules simples sont absolument simples et de dimension $|W|$. Donc, pour des raisons de dimension (voir 12.1.2), $k_R(\mathfrak{r})\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\gamma)$ est forcément absolument simple et le lemme en découle. □

Fixons donc un caractère linéaire γ de W. Par le lemme 12.1.3, l'algèbre d'endomorphismes de $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\gamma)$ est égale à $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}$, ce qui induit un morphisme de P-algèbres $\Omega_\gamma^{\mathrm{left}} : Z \to \mathbf{K}^{\mathrm{left}}$ dont la restriction à P est le morphisme canonique $P \to P^{\mathrm{left}}$. Puisque Z est entier sur P, l'image de $\Omega_\gamma^{\mathrm{left}}$ est entière sur P^{left} et contenue dans $\mathbf{K}^{\mathrm{left}} = \mathrm{Frac}(P^{\mathrm{left}})$. Puisque $P^{\mathrm{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C} \times V/W]$, P^{left} est intégralement clos, cela force $\Omega_\gamma^{\mathrm{left}}$ à se factoriser à travers P^{left}. Nous poserons

$$\mathfrak{z}^{\mathrm{left}} = \mathrm{Ker}(\Omega_1^{\mathrm{left}}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}^{\mathrm{left}} = \mathrm{cop}(\mathfrak{z}^{\mathrm{left}}).$$

Alors :

Proposition 12.1.4. — *L'idéal $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$ de Q vérifie les propriétés suivantes :*

(a) $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$ *est un idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$.*
(b) $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}} \subset \bar{\mathfrak{q}}$.
(c) $P^{\mathrm{left}} = P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}} \simeq Q/\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$.

Démonstration. — Puisque $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}$ est intègre, $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$ est premier. Puisque la restriction de Ω_1^{left} à P est le morphisme canonique $P \to P^{\mathrm{left}}$, $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}} \cap P = \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$. Cela montre (a).

Par construction, $\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\gamma)/\bar{\mathfrak{p}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\gamma) = \bar{\mathscr{M}}(\gamma)$ et donc le morphisme $\Omega_\gamma : Z \to \bar{P} = P/\bar{\mathfrak{p}}$ se factorise à travers les morphismes $\Omega_\gamma^{\mathrm{left}} : Z \to P^{\mathrm{left}}$ et $P^{\mathrm{left}} \to \bar{P}$, d'où (b).

Pour finir, l'isomorphisme (c) découle du fait que l'image de Ω_γ est P^{left}. □

La proposition 12.1.4 nous permet donc de faire un choix d'idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$ cohérent avec notre choix de $\bar{\mathfrak{q}}$. Le lemme suivant montre l'unicité de ce choix :

Lemme 12.1.5. — *On a $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q_{\bar{\mathfrak{q}}} = \mathfrak{q}^{\mathrm{left}}Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$ est un idéal premier de $Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$. D'après le lemme 11.1.1, le morphisme local d'anneaux locaux $P_{\bar{\mathfrak{p}}} \to Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$ est étale. De plus, $P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C} \times V^*/W]$ est intégralement clos (c'est une algèbre de polynômes) et donc $P_{\bar{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}P_{\bar{\mathfrak{p}}}$ l'est aussi. Par changement de base, le morphisme d'anneaux $P_{\bar{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}P_{\bar{\mathfrak{p}}} \hookrightarrow Q_{\bar{\mathfrak{q}}}/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$ est étale, ce qui implique que $Q_{\bar{\mathfrak{q}}}/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$, qui est un anneau local (donc connexe), est aussi normal (en vertu de [**SGA1**, exposé I, corollaire 9.11]) et donc intègre (car connexe). Cela montre que $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$ est un idéal premier de $Q_{\bar{\mathfrak{q}}}$, comme souhaité. □

Corollaire 12.1.6. — *L'idéal $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$ est l'unique idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{q}}$. De plus, Q est étale sur P en $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$.*

Puisque $Q/\mathfrak{q}^{\mathrm{left}} \simeq P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}} = \mathbf{k}[\mathscr{C} \times V/W]$, on obtient que $Q/(\mathfrak{q}^{\mathrm{left}} + \mathfrak{C}Q) \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C} \otimes \mathbf{k}[V/W]$ et donc $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}} + \mathfrak{C}Q$ est un idéal premier de Q. Nous le noterons $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$.

Corollaire 12.1.7. — *On a $Q/\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}} \simeq P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$. De plus, $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ est l'unique idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{q}}$. .*

Démonstration. — La première assertion est immédiate et la deuxième en découle. □

Choix, notations. *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cette partie, nous fixons un idéal premier $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ de R au-dessus de $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$. Nous noterons $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}} = k_P(\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}})$, $\mathbf{L}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}} = k_Q(\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}})$ et $\mathbf{M}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}} = k_R(\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}})$. Le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ sera noté $D^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ (respectivement $I^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$).*

Lorsque $\mathfrak{C} = 0$ (respectivement $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$ avec $c \in \mathscr{C}$), les objets $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$, $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$, $\mathbf{L}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$, $\mathbf{M}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$, $D^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ et $I^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ seront notés respectivement $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}$, $\mathbf{L}^{\mathrm{left}}$, $\mathbf{M}^{\mathrm{left}}$, D^{left} et I^{left} (respectivement $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}_c$, $\mathbf{K}^{\mathrm{left}}_c$, $\mathbf{L}^{\mathrm{left}}_c$, $\mathbf{M}^{\mathrm{left}}_c$, D^{left}_c et I^{left}_c).

Remarque 12.1.8. — Il a été montré dans le corollaire 9.4.4 que, si $\bar{\mathfrak{q}}_\star$ est un idéal premier de Q au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}$, alors $Q/\bar{\mathfrak{q}}_\star \simeq P/\bar{\mathfrak{p}}$. Bien que $Q/\mathfrak{q}^{\mathrm{left}} \simeq P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$, nous verrons dans le chapitre 19 que ceci ne s'étend pas en toute généralité aux idéaux premiers de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$: en effet, si W est de type B_2, alors il existe un idéal premier $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\star$ de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$ tel que $P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$ soit un sous-anneau propre de $Q/\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\star$ (voir le lemme 19.7.12(c)). Donc, en général, $\mathbf{K}^{\mathrm{left}} \subsetneq \mathbf{M}^{\mathrm{left}}$. ■

Corollaire 12.1.9. — *On a* $I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset H$. *Si de plus* $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ *contient* $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, *alors* $I^{\mathrm{left}} \subset I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$.

Démonstration. — D'après le corollaire 12.1.7 et le théorème A.2.5, $\bar{I}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset H$ et $k_P(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}) = k_Q(\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}})$. Ainsi, $(D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap H)/(I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap H) \simeq D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}/I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$, d'où la première suite d'inclusions.

La dernière inclusion est triviale. □

Nous allons montrer que $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ détermine $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$: pour cela, nous utiliserons la $\mathbb{Z}$-graduation sur R définie dans §6.3. Posons

$$R_{<0} = \bigoplus_{i<0} R^{\mathbb{Z}}[i] \quad \text{et} \quad R_{>0} = \bigoplus_{i>0} R^{\mathbb{Z}}[i].$$

Alors :

Proposition 12.1.10. — $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + \langle R_{>0}, R_{<0} \rangle$.

Démonstration. — Notons I l'idéal de R engendré par $R_{>0}$ et $R_{<0}$. L'idéal $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$ de P est $\mathbb{Z}$-homogène (il n'est pas forcément $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$-homogène) donc l'idéal $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ de R est lui aussi $\mathbb{Z}$-homogène (voir le corollaire B.2.10). L'extension $R/\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ de $P/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$ est entière et, puisque $P/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$ a sa $\mathbb{Z}$-graduation concentrée en degré 0, il en découle que la $\mathbb{Z}$-graduation de $R/\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ est concentrée en degré 0 (voir la proposition B.2.4). En particulier, $I \subset \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ et donc

$$\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I \subset \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}.$$

D'autre part, $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I) \cap P$ contient $\mathfrak{C}$ et $\bar{\mathfrak{p}} = \langle P_{<0}, P_{>0} \rangle$, donc

$$\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}} \subset (\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I) \cap P.$$

Il suffit donc de montrer que $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I$ est un idéal premier.

Posons $I_0 = I \cap R_0$. Alors l'application naturelle $R_0 \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/I$ induit un isomorphisme $R_0/I_0 \xrightarrow{\sim} R/I$. Par conséquent, $R/(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I)$ est isomorphe à $R_0/((\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I) \cap R_0)$. Il nous suffit donc de montrer que $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I) \cap R_0$ est un idéal premier de R_0. En fait, nous allons montrer que $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I) \cap R_0 = \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap R_0$, ce qui terminera la démonstration.

Tout d'abord, remarquons que, puisque $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ et I sont $\mathbb{Z}$-homogènes, on a $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} + I) \cap R_0 = (\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap R_0) + I_0$. Il nous suffit donc de montrer que

$$(*) \qquad I_0 \subset \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}.$$

Puisque $R/\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ est une extension entière de $P/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ et que $P/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ est $\mathbb{N}$-gradué, on en déduit que $R/\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ est $\mathbb{N}$-gradué (voir la proposition B.2.4). Donc $R_{<0} \subset \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ et $I_0 = R_0 \cap (R \cdot R_{>0}) = R_0 \cap (R \cdot R_{<0}) = R_0 \cap (R_{<0} \cdot R_{>0}) \subset \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$. □

Corollaire 12.1.11. — $D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset \bar{D}_{\mathfrak{C}}$.

Démonstration. — Cela découle immédiatement de la proposition 12.1.10 et du fait que $R_{<0}$ et $R_{>0}$ sont G-stables (voir la proposition 6.3.1). □

Remarque 12.1.12. — La preuve algébrique de la proposition 12.1.10 présentée ci-dessus est en fait une traduction d'un fait de nature géométrique, comme on le verra dans le chapitre 14. ■

Proposition 12.1.13. — *Soit $\mathfrak{z}_*^{\mathrm{left}}$ un idéal premier de Z au-dessus de $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$. Alors il existe un unique idéal premier de Z au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$ contenant $\mathfrak{z}_*^{\mathrm{left}}$: il est égal à $\mathfrak{z}_*^{\mathrm{left}} + \langle Z_{<0}, Z_{>0}\rangle$.*

Démonstration. — Puisque Z est entier sur P, la preuve de la proposition 12.1.10 s'applique mot pour mot dans cette situation pour fournir la même conclusion. □

La proposition 12.1.13 fournit une application surjective

$$\begin{array}{rccc} \lim_{\mathrm{left}} : & \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}) & \longrightarrow & \Upsilon^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}) \\ & \mathfrak{z}_*^{\mathrm{left}} & \longmapsto & \mathfrak{z}_*^{\mathrm{left}} + \langle Z_{<0}, Z_{>0}\rangle. \end{array}$$

La notation $\lim_{\mathrm{left}}$ sera justifiée dans le chapitre 14.

12.2. Cellules à gauche

12.2.A. Définitions. — Rappelons les définitions posées en préambule à cette partie :

Définition 12.2.1. — *On appellera* ***$\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche*** *toute $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$-cellule de Calogero-Moser. Si $c \in \mathscr{C}$, on appellera* ***c-cellule de Calogero-Moser à gauche*** *toute $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}$-cellule de Calogero-Moser. On appellera* ***cellule de Calogero-Moser à gauche générique*** *toute $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$-cellule de Calogero-Moser.*

L'ensemble des $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser à gauche sera noté ${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L^{\mathfrak{C}}(W)$. Si $\mathfrak{C} = 0$ (respectivement $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$, avec $c \in \mathscr{C}$), cet ensemble sera noté ${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L(W)$ (respectivement ${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L^c(W)$).

Comme d'habitude, la notion de $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche dépend du choix de l'idéal premier $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$. La proposition suivante est immédiate :

Proposition 12.2.2. — *Si $\mathfrak{C}'$ est un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ contenu dans $\mathfrak{C}$ et si $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}'}^{\mathrm{left}}$ est contenu dans $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$, alors toute $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche est une réunion de $\mathfrak{C}'$-cellules de Calogero-Moser à gauche.*

D'autre part, puisque $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$, on obtient aussi :

Proposition 12.2.3. — *Toute $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère est une réunion de cellules de Calogero-Moser à gauche.*

Pour finir, soit $\widetilde{\mathfrak{C}}$ l'idéal homogène maximal contenu dans $\mathfrak{C}$ (i.e. $\widetilde{\mathfrak{C}} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{C} \cap \mathbf{k}[\mathscr{C}]^{\mathbb{N}}[i]$). Alors $\widetilde{\mathfrak{C}}$ est un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ (voir le lemme B.2.9). Notons $\mathfrak{r}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}^{\mathrm{left}}$ l'idéal homogène maximal contenu dans $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$: c'est un idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{q}_{\widetilde{\mathfrak{C}}}^{\mathrm{left}}$ (voir le corollaire B.2.11). On déduit de la proposition 8.1.5 le résultat suivant :

Proposition 12.2.4. — *On a $I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} = I_{\widetilde{\mathfrak{C}}}^{\mathrm{left}}$. En particulier, les $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser à gauche et les $\widetilde{\mathfrak{C}}$-cellules de Calogero-Moser à gauche coïncident.*

12.2.B. Cellules à gauche et modules simples. — D'après l'exemple 8.4.7, on a $\mathfrak{q}_{\mathrm{sing}} \cap P \not\subset \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$. Par conséquent, tous les résultats de la section 8.4 s'appliquent. Rappelons ici quelques conséquences :

Théorème 12.2.5. — *Si $\mathfrak{C}$ est un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$, alors :*

(a) *L'algèbre $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$ est déployée et ses modules simples sont de dimension $|W|$.*
(b) *Chaque bloc de $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$ admet un unique module simple.*

Si $C \in {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L^{\mathfrak{C}}(W)$, nous noterons $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ l'unique $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$-module simple appartenant au bloc de $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$ associé à C. Si $\mathfrak{C} = 0$ (respectivement $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$, avec $c \in \mathscr{C}$), le module $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ sera noté $\mathscr{L}^{\mathrm{left}}(C)$ (respectivement $\mathscr{L}_c^{\mathrm{left}}(C)$).

12.2.C. Cellules à gauche et cellules bilatères. — Nous fixons ici une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère Γ ainsi qu'une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche C contenue dans Γ. Puisque $\bar{D}_{\mathfrak{C}}$ stabilise Γ (voir le théorème 11.2.7(a)) et puisque $D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset \bar{D}_{\mathfrak{C}}$ (voir le corollaire 12.1.11), le groupe $D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ stabilise Γ (et permute les cellules gauches qui sont contenues dans Γ). Posons

$$C^D = \bigcup_{d \in D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} d(C).$$

Soit $w \in C^D$. On pose $\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma) = w^{-1}(\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}) \cap Q$ et $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D) = w^{-1}(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}) \cap Q$. On pose aussi $\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma) = \mathrm{cop}^{-1}(\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma))$ et $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D) = \mathrm{cop}^{-1}(\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D))$. Il découle de la proposition A.3.5 que

$\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma)$ ne dépend que de Γ et non du choix de C et de w, tandis que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D)$ ne dépend que de C^D et non du choix de w. On pose

$$\deg_{\mathfrak{C}}(C^D) = [k_Z(\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D)) : k_P(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}})].$$

Nous noterons quelquefois $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ ou $\deg_{\mathfrak{C}}(C)$ à la place de $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D)$ ou $\deg_{\mathfrak{C}}(C^D)$.

Proposition 12.2.6. — *Soit $w \in C^D$. Alors :*

(a) $\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma) = \lim_{\mathrm{left}}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D))$.

(b) $\deg_{\mathfrak{C}}(C^D) = \dfrac{|C^D|}{|C|} = \dfrac{|D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}|}{|(D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap {}^{w}H)I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}|}$.

(c) *L'application $D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \backslash \Gamma \longrightarrow \lim_{\mathrm{left}}^{-1}(\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma))$, $C^D \longmapsto \mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D)$ est bijective.*

Démonstration. — (a) Notons que $\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma) \in \Upsilon^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}})$, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D) \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}})$ et $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D) \subset \bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma)$, d'où le résultat d'après la proposition 12.1.13.

(b) Par transport à travers w, l'extension $k_R(w^{-1}(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}))/k_P(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}})$ est galoisienne de groupe de Galois ${}^{w^{-1}}D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}/{}^{w^{-1}}I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ tandis que l'extension $k_R(w^{-1}(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}))/k_Q(\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D))$ est galoisienne de groupe de Galois $({}^{w^{-1}}D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap H)/({}^{w^{-1}}I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap H)$. D'où

$$\deg_{\mathfrak{C}}(C^D) = \frac{|D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}|}{|(D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap {}^{w}H)I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}|}.$$

Par ailleurs, $|C^D|/|C|$ est égal à l'indice du stabilisateur de C dans $D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$: mais ce stabilisateur est exactement $(D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \cap {}^{w}H)I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$.

(c) découle essentiellement de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \backslash G/H \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}) \arrow[d, "\lim_{\mathrm{left}}"] \\
\bar{D}_{\mathfrak{C}} \backslash G/H \arrow[r, "\sim"] & \Upsilon^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}),
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est l'application canonique (car $D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset \bar{D}_{\mathfrak{C}}$). Il faut simplement rappeler que $\bar{D}_{\mathfrak{C}} \backslash G/H = \bar{I}_{\mathfrak{C}} \backslash G/H$ (voir (11.2.4)). $\square$

12.3. Caractères cellulaires

12.3.A. Multiplicités. — Les $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$-modules simples étant paramétrés par ${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(W)$, il existe une unique famille d'entiers naturels $(\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}})_{C\in{}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(W),\chi\in\mathrm{Irr}(W)}$ telle que

$$[\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}} = \sum_{C\in{}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{L}^{\mathfrak{C}}(W)} \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}} \cdot [\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}}$$

pour tout $\chi\in\mathrm{Irr}(W)$.

Proposition 12.3.1. — *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(a) *Si* $\chi\in\mathrm{Irr}(W)$, *alors* $\sum_{C\in{}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{L}^{\mathfrak{C}}(W)}\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}}=\chi(1)$.

(b) *Si* $C\in{}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{L}^{\mathfrak{C}}(W)$, *alors* $\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)}\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}}\ \chi(1)=|C|$.

(c) *Si* $C\in{}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{L}^{\mathfrak{C}}(W)$, *si* Γ *est l'unique* $\mathfrak{C}$*-cellule de Calogero-Moser bilatère contenant* C *et si* $\chi\in\mathrm{Irr}(W)$ *est tel que* $\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}}\neq 0$, *alors* $\chi\in\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathrm{CM}}(W)$.

Démonstration. — (a) découle du calcul de la dimension des modules de Verma à gauche (voir (12.1.2)).

Montrons maintenant (b). Tout d'abord, remarquons que, grâce à l'équivalence de Morita du théorème 5.3.8, on a

$$[\mathbf{MH}e]_{\mathbf{MH}} = \sum_{w\in W}[\mathscr{L}_w]_{\mathbf{MH}}.$$

En appliquant $\mathrm{déc}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ à cette égalité, on obtient

$$[\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}e]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}} = \sum_{C\in{}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{L}^{\mathfrak{C}}(W)} |C| \cdot [\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}}.$$

Pour montrer (b), il suffit de montrer que

$$[\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}e]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\cdot[\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}}. \tag{12.3.2}$$

Puisque $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$ est un $\bar{\mathbf{H}}^{-}$-module libre, le foncteur $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}\otimes_{\bar{\mathbf{H}}^{-}}-$ est exact et il suffit donc de montrer que

$$[\bar{\mathbf{H}}^{-}e]_{\bar{\mathbf{H}}^{-}} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)}[V_{\chi}^{(-)}]_{\bar{\mathbf{H}}^{-}},$$

ce qui découle du fait que $\bar{\mathbf{H}}^{-}e$ est isomorphe, comme $\mathbf{k}W$-module, à $\mathbf{k}[V^{*}]^{\mathrm{co}(W)}$, c'est-à-dire à la représentation régulière de W. D'où (b).

(c) est immédiat, car la réduction modulo $\bar{\mathfrak{p}}$ du module de Verma à gauche est le bébé module de Verma correspondant, et est donc indécomposable comme $\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}$-module. □

12.3.B. Première définition. — Si C est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche, on pose

$$[C]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}} \cdot \chi. \tag{12.3.3}$$

Définition 12.3.4. — *On appelle* CM-***caractère $\mathfrak{C}$-cellulaire*** *de W tout caractère de W de la forme $[C]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}}$, où C est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche. Si $\mathfrak{C} = 0$ (respectivement $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$ avec $c \in \mathscr{C}$), on parlera de* CM-***caractère cellulaire générique*** *(respectivement* CM-***caractère c-cellulaire***) et on notera $[C]^{\mathrm{CM}}$ (respectivement $[C]_c^{\mathrm{CM}}$).*

Compte tenu de la proposition 12.3.1(c), l'ensemble des caractères irréductibles apparaissant avec une multiplicité non nulle dans un CM-caractère $\mathfrak{C}$-cellulaire est contenu dans une $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser. On parlera alors de CM-caractère $\mathfrak{C}$-cellulaire *associé à la famille en question*.

Remarque 12.3.5. — Nous allons montrer ici que l'ensemble des CM-caractères $\mathfrak{C}$-cellulaires (associés à une $\mathfrak{C}$-famille) ne dépend pas du choix de l'idéal premier $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$. En effet, soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$. Alors il existe $g \in G$ tel que $g(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}) = \mathfrak{r}$. Ainsi, g induit un isomorphisme $R/\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \xrightarrow{\sim} R/\mathfrak{r}$, qui induit un isomorphisme $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \xrightarrow{\sim} k_R(\mathfrak{r})$.

Notons ${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L^{\mathfrak{C},*}(W)$ l'ensemble des $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser et, si $C \in {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L^{\mathfrak{C},*}(W)$, notons $\mathscr{L}_{\mathfrak{C},*}^{\mathrm{left}}(C)$ le $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$-module simple correspondant. Alors, $g^{-1}(C) \in {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L^{\mathfrak{C}}(W)$ et l'isomorphisme $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \xrightarrow{\sim} k_R(\mathfrak{r})$, qui se prolonge en un isomorphisme $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}} \xrightarrow{\sim} k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$, envoie le module simple $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(g^{-1}(C))$ sur $\mathscr{L}_{\mathfrak{C},*}^{\mathrm{left}}(C)$. Le module de Verma à gauche étant défini sur $\mathbf{K}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$, la multiplicité de $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}({}^{g^{-1}}C)$ dans $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)$ est donc égale à celle de $\mathscr{L}_{\mathfrak{C},*}^{\mathrm{left}}(C)$ dans $k_R(\mathfrak{r})\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)$. D'où le résultat. ■

Si $d \in D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ et C est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche, alors $d(C)$ est aussi une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche. La remarque 12.3.5 montre que les CM-caractères $\mathfrak{C}$-cellulaires associés à C et $d(C)$ coïncident :

Corollaire 12.3.6. — *Si $d \in D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ et C est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche, alors*

$$[d(C)]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}} = [C]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}}.$$

Remarque 12.3.7. — Le corollaire 12.3.6 précédent montre en particulier que $d(C)$ est contenue dans la même cellule bilatère que C, ce qui a déjà été démontré autrement (voir le début de la sous-section 12.2.C). ■

12.3.C. Deuxième définition. — La $\mathbf{k}$-algèbre $\bar{\mathbf{H}}^- \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}] \otimes (\mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)} \rtimes W)$ est une sous-$\mathbf{k}$-algèbre de $\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$ qui nous a servi à construire les modules de Verma à gauche. Ainsi, $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes \bar{\mathbf{H}}^-$ est une sous-$\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$-algèbre de $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$ de dimension $|W|^2$, dont le groupe de Grothendieck s'identifie à $\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(W) = \mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)$.

Si C est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche, on notera $\mathscr{P}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ une enveloppe projective du $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$-module simple $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$.

Proposition 12.3.8. — *On a*

$$[\mathrm{Soc}(\mathrm{Res}^{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\otimes\bar{\mathbf{H}}^-}\mathscr{P}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C))]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\otimes\bar{\mathbf{H}}^-} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}^{\mathrm{CM}}_{C,\chi}\cdot\chi.$$

Démonstration. — Soit $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$. Puisque l'algèbre $\mathbf{H}$ est symétrique (voir (5.4.3)), $\mathscr{P}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ est aussi une enveloppe injective de $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$. On a donc

$$\mathrm{mult}^{\mathrm{CM}}_{C,\chi} = \dim_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}}\big(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi), \mathscr{P}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)\big).$$

Mais $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi) = \mathrm{Ind}^{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\bar{\mathbf{H}}^-}(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes V_\chi^{(-)})$. Par conséquent,

$$\mathrm{mult}^{\mathrm{CM}}_{C,\chi} = \dim_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\bar{\mathbf{H}}^-}\big(V_\chi^{(-)}, \mathrm{Res}^{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\otimes\bar{\mathbf{H}}^-}\mathscr{P}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)\big).$$

D'où le résultat. □

12.3.D. Troisième définition. — D'après la remarque 12.3.5, l'ensemble des CM-caractères $\mathfrak{C}$-cellulaires ne dépend pas du choix de l'idéal $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ au-dessus de $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$. Nous allons tirer parti du fait que le module de Verma à gauche est défini sur $\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ et du fait que le CM-caractère $\mathfrak{C}$-cellulaire associé à une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche C ne dépend que de la $D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$-orbite de C pour donner une définition qui ne passe pas par l'extension des scalaires à $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ (et donc qui ne passe pas par le choix de $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$).

Pour cela, si $\mathfrak{z}$ est un idéal premier de Z et si M est un Z-module de dimension de Krull inférieure ou égale à celle de $Z/\mathfrak{z}$, alors $M_{\mathfrak{z}}$ est un $Z_{\mathfrak{z}}$-module de longueur finie et nous noterons $\mathrm{Length}_{Z_{\mathfrak{z}}}(M_{\mathfrak{z}})$ cette longueur.

Proposition 12.3.9. — *Soit C une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche, soit $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D)$ et soit M un $P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}$-module de type fini. Alors $eM_{\mathfrak{z}}$ est un $Z_{\mathfrak{z}}$-module de longueur finie et* $\mathrm{Length}_{Z_{\mathfrak{z}}}(eM_{\mathfrak{z}})$ *est égale à la multiplicité de $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ dans $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} M$.*

Démonstration. — Notons l la longueur du $Z_{\mathfrak{z}}$-module $eM_{\mathfrak{z}}$ et m la multiplicité de $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ dans $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} M$. Ainsi, le $Z_{\mathfrak{z}}$-module $eM_{\mathfrak{z}}$ admet une filtration

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_l = eM_{\mathfrak{z}}$$

telle que $M_i/M_{i-1} \simeq Z_{\mathfrak{z}}/\mathfrak{z}Z_{\mathfrak{z}} = k_Z(\mathfrak{z})$ pour tout i. Alors le $(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} Z_{\mathfrak{z}})$-module $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} eM_{\mathfrak{z}}$ admet une filtration

$$0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_l = \mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} eM_{\mathfrak{z}}$$

telle que $M'_i/M'_{i-1} \simeq \mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} k_Z(\mathfrak{z})$ pour tout i.

D'autre part, à travers l'équivalence de Morita du corollaire 8.4.5, le module simple $\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ devient $e\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$, qui est un $(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} Z)$-module, de dimension 1 comme $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$-espace vectoriel, et sur lequel un élément $z \in Z$ agit par multiplication par $w(\mathrm{cop}(z)) \bmod \mathfrak{r}$, où $w \in C$. Pour montrer que $l = m$, il suffit donc de vérifier que la multiplicité de $e\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$ dans le $(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} Z)$-module $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_{P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}} k_Z(\mathfrak{z})$ est égale à 1, ce qui découle de la proposition A.3.12 et de la définition de l'idéal $\mathfrak{z}$. □

Corollaire 12.3.10. — *Soit C une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche et soit $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D)$. Alors* $\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}} = \mathrm{Length}_{Z_{\mathfrak{z}}}\left(eP_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)\right)_{\mathfrak{z}}$.

Remarque 12.3.11. — Le corollaire 12.3.10 montre que

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{Length}_{Z_{\mathfrak{z}}}\left(eP_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)\right)_{\mathfrak{z}} \cdot \chi$$

est un CM-caractère $\mathfrak{C}$-cellulaire de W et tous sont obtenus ainsi, pour $\mathfrak{z} \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}})$.

Cela donne une définition de l'ensemble des CM-caractères $\mathfrak{C}$-cellulaires qui n'utilise à aucun moment le choix d'un idéal premier $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ de R au-dessus de $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$. ■

Corollaire 12.3.12. — *Soit C une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche et soit $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D)$. Alors* $|C| = \mathrm{Length}_{Z_{\mathfrak{z}}}(Z/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}Z)_{\mathfrak{z}}$.

Démonstration. — En effet, via l'équivalence de Morita du corollaire 8.4.4, le module $Z/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}Z$ correspond au module $P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}e$: ce dernier est filtré par les $P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)$, chaque $P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)$ apparaissant $\chi(1)$ fois (comme dans le théorème 9.6.1). Ainsi,

$$\mathrm{Length}_{Z_{\mathfrak{z}}}(Z/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}Z)_{\mathfrak{z}} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}} \cdot \chi(1) = |C|,$$

en utilisant la proposition 12.3.1(b). □

Corollaire 12.3.13. — *Suposons que toutes les réflexions de W soient d'ordre 2 et notons $\tau_0 = (-1, 1, \varepsilon) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}^\times \times W^\wedge$. Soit $\mathfrak{z}$ un idéal premier de Z et soient C et C_ε deux $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser à gauche telles que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D) = \mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C_\varepsilon^D) = \tau_0(\mathfrak{z})$. Alors*

$$[C_\varepsilon]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}} = \varepsilon \cdot [C]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}}.$$

Si de plus $w_0 = -\mathrm{Id}_V \in W$, alors on peut prendre $C_\varepsilon = C w_0$ et donc

$$[C w_0]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}} = \varepsilon \cdot [C]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}}.$$

Démonstration. — La première assertion découle du fait que ${}^{\tau_0}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi) \simeq \mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi\varepsilon)$ tandis que la deuxième se démontre comme le corollaire 11.2.9. □

12.3.E. Caractères cellulaires et b-invariant. — Le théorème suivant est un analogue du théorème 9.6.1 (énoncés (b) et (c)).

Théorème 12.3.14. — *Soit C une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche. Alors il existe un unique caractère χ de $\mathbf{b}$-invariant minimal tel que $\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}} \neq 0$ (notons-le χ_C). De plus, le coefficient de $\mathbf{t}^{\mathbf{b}_{\chi_C}}$ dans $f_{\chi_C}(\mathbf{t})$ est égal à 1.*

Démonstration. — Notons b_C l'idempotent primitif central de $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$ associé à C. L'algèbre d'endomorphismes de $b_C\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}e$ est égale à $(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \otimes_P Z)b_C$ et cette algèbre (commutative) est locale. Cela montre que le module projectif $b_C\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}e$ admet un unique quotient simple.

La preuve se conclut alors comme dans le théorème 9.6.1, en remarquant que $b_C\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}e$ est filtré par des modules de la forme $b_C\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)$. □

12.4. Problèmes, questions

Les premières questions théoriques générales concernent les idéaux premiers $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ et le corps $k_R(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}})$. En effet, la remarque 12.1.8 montre qu'en général $\mathbf{K}^{\mathrm{left}} \subsetneq \mathbf{M}^{\mathrm{left}}$. Néanmoins, la question de déterminer $\mathbf{M}^{\mathrm{left}}$ est intéressante :

Problème 12.4.1. — *Calculer $R/\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ ou, du moins, déterminer l'extension $\mathbf{K}^{\mathrm{left}} \subset \mathbf{M}^{\mathrm{left}}$ ou son groupe de Galois (qui est égal à $D^{\mathrm{left}}/I^{\mathrm{left}}$).*

Question 12.4.2. — *Est-ce que $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}} + \mathfrak{C}R$ est un idéal premier de R ?*

Si la réponse à la question 12.4.2 est positive, alors on peut prendre $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} = \mathfrak{r}^{\text{left}} + \mathfrak{C}R$. Cela impliquerait entre autres que $D^{\text{left}} \subset D_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$. Une variante plus faible de la question 12.4.2 est la suivante :

Question 12.4.3. — *Peut-on choisir* $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ *de sorte que* $\mathfrak{r}^{\text{left}} \subset \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ *et* $D^{\text{left}} \subset D_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ *?*

On a $\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} + \mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = \bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}$. Il est naturel de se demander si cela se relève à R :

Question 12.4.4. — *Est-il vrai que* $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} + \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ *?*

Bien sûr, $I_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ et $I_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$ sont contenus dans $\bar{I}_{\mathfrak{C}}$.

Question 12.4.5. — *Est-ce que* $\bar{I}_{\mathfrak{C}} = \langle I_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}, I_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} \rangle$ *?*

Une réponse positive à la question 12.4.5 impliquerait que toute partie de W qui est à la fois une union de $\mathfrak{C}$-cellules de Calogero-Moser à gauche et une union de $\mathfrak{C}$-cellules à droite serait aussi une union de $\mathfrak{C}$-cellules bilatères.

CHAPITRE 13

MATRICES DE DÉCOMPOSITION

13.1. Cadre général

Soit R_1 une R-algèbre commutative intègre et soit $\mathfrak{r}_1$ un idéal premier de R_1. On pose $R_2 = R_1/\mathfrak{r}_1$, $K_1 = \mathrm{Frac}(R_1)$ et $K_2 = \mathrm{Frac}(R_2) = k_{R_1}(\mathfrak{r}_1)$. Nous dirons que le couple $(R_1, \mathfrak{r}_1)$ vérifie la propriété $(\mathscr{D}\acute{e}c)$ si les trois assertions suivantes sont satisfaites :

(D1) R_1 est noethérien, intègre.

(D2) Si $h \in R_1\mathbf{H}$ et si $\mathscr{L}$ est un $K_1\mathbf{H}$-module simple, alors le polynôme caractéristique de h (pour son action sur $\mathscr{L}$) est à coefficients dans R_1 (notons que cette assertion est automatiquement satisfaite si R_1 est intégralement clos).

(D3) Les algèbres $K_1\mathbf{H}$ et $K_2\mathbf{H}$ sont déployées.

Dans ce contexte, totalement similaire à celui de la section C.3 (voir l'appendice C), l'application de décomposition

$$\mathrm{déc}_{R_2\mathbf{H}}^{R_1\mathbf{H}} : \mathscr{K}_0(K_1\mathbf{H}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(K_2\mathbf{H})$$

est bien définie (voir la proposition C.3.1).

Si $\mathfrak{r}_2$ est un idéal premier de R_1 contenant $\mathfrak{r}_1$, notons $R_3 = R_1/\mathfrak{r}_2 = R_2/(\mathfrak{r}_2/\mathfrak{r}_1)$, $K_3 = \mathrm{Frac}(R_3) = k_{R_1}(\mathfrak{r}_2) = k_{R_2}(\mathfrak{r}_2/\mathfrak{r}_1)$ et supposons que $(R_2, \mathfrak{r}_2)$ vérifie $(\mathscr{D}\acute{e}c)$. Ainsi, les applications $\mathrm{déc}_{R_2\mathbf{H}}^{R_1\mathbf{H}}$, $\mathrm{déc}_{R_3\mathbf{H}}^{R_1\mathbf{H}}$ et $\mathrm{déc}_{R_3\mathbf{H}}^{R_2\mathbf{H}}$ sont bien définies et, d'après le corollaire C.3.2, le diagramme

(13.1.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}_0(K_1\mathbf{H}) \arrow[r, "\mathrm{déc}_{R_2\mathbf{H}}^{R_1\mathbf{H}}"] \arrow[dr, "\mathrm{déc}_{R_3\mathbf{H}}^{R_1\mathbf{H}}"'] & \mathscr{K}_0(K_2\mathbf{H}) \arrow[d, "\mathrm{déc}_{R_3\mathbf{H}}^{R_2\mathbf{H}}"] \\
& \mathscr{K}_0(K_3\mathbf{H})
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

***Exemple 13.1.2* (Spécialisation).** — Soit $c \in \mathscr{C}$. Rappelons que $\mathfrak{q}_c = \mathfrak{p}_c Q$ est premier et notons $\mathfrak{r}_c$ un idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{q}_c$. Reprenons les notations de l'exemple 8.2.6 et de la sous-section 6.1.A. Alors $R/\mathfrak{r}_c$ est une R-algèbre, de corps des fractions $\mathbf{M}_c$. Comme dans la preuve du théorème 5.3.8, on déduit du corollaire 8.4.4 un isomorphisme de $\mathbf{K}_c$-algèbres

$$\mathbf{H}_c \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{|W|}(\mathbf{L}_c)$$

qui induit, comme dans le cas générique (voir §6.2), un isomorphisme de $\mathbf{M}_c$-algèbres

$$\mathbf{M}_c\mathbf{H}_c \xrightarrow{\sim} \prod_{d(D_c \cap H) \in D_c/(D_c \cap H)} \mathrm{Mat}_{|W|}(\mathbf{M}_c).$$

Ainsi, la $\mathbf{M}_c$-algèbre $\mathbf{M}_c\mathbf{H}_c$ est déployée, tout comme $\mathbf{MH}$, et ses modules simples sont indexés par $D_c/(D_c \cap H)$: ce dernier ensemble est en bijection naturelle avec W (corollaire 6.1.15). L'application de décomposition $\mathrm{déc}^{R\mathbf{H}}_{R_c\mathbf{H}}$ est donc bien définie : nous la noterons $\mathrm{déc}_c$. On peut de plus identifier $\mathscr{K}_0(\mathbf{M}_c\mathbf{H}_c)$ avec le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}W$ et, à travers cette identification, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{K}_0(\mathbf{MH}) \arrow[r, "\mathrm{déc}_c"] \arrow[d, equal] & \mathscr{K}_0(\mathbf{M}_c\mathbf{H}_c) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z}W \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}W}"] & \mathbb{Z}W \end{tikzcd} \tag{13.1.3}$$

est commutatif. Cela découle du fait que l'équivalence de Morita entre $\mathbf{H}_c$ et $\mathbf{L}_c$ est la "spécialisation en c" de l'équivalence de Morita entre $\mathbf{H}$ et $\mathbf{L}$. ■

13.2. Cellules et matrices de décomposition

Soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier de R. Nous noterons $D_\mathfrak{r}$ le groupe de décomposition de $\mathfrak{r}$ dans G et $I_\mathfrak{r}$ son groupe d'inertie. Le groupe de Galois G (respectivement le groupe de décomposition $D_\mathfrak{r}$) agit naturellement sur le groupe de Grothendieck $\mathscr{K}_0(\mathbf{MH})$ (respectivement $\mathscr{K}_0(k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H})$). Alors :

Lemme 13.2.1. — *Supposons que la $k_R(\mathfrak{r})$-algèbre $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ est déployée. Alors :*

(a) *L'application de décomposition* $\mathrm{déc}^{R\mathbf{H}}_{(R/\mathfrak{r})\mathbf{H}}$ *est bien définie (nous la noterons* $\mathrm{déc}_\mathfrak{r} : \mathscr{K}_0(\mathbf{MH}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H})$*).*

(b) *L'application de décomposition* $\mathrm{déc}_\mathfrak{r}$ *est $D_\mathfrak{r}$-équivariante.*

(c) *Le groupe $I_\mathfrak{r}$ agit trivialement sur $\mathscr{K}_0(k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H})$.*

(d) *Si w et w' sont dans la même $\mathfrak{r}$-cellule de Calogero-Moser, alors* $\mathrm{déc}_\mathfrak{r}(\mathscr{L}_w) = \mathrm{déc}_\mathfrak{r}(\mathscr{L}_{w'})$.

Démonstration. — Puisque R est intégralement clos, dire que la $k_R(\mathfrak{r})$-algèbre $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ est déployée équivaut à dire que $(R,\mathfrak{r})$ vérifie $(\mathscr{D}\acute{e}c)$. Les applications de décomposition étant calculées par réduction des polynômes caractéristiques, l'assertion (b) est immédiate. Le groupe $I_{\mathfrak{r}}$ agissant trivialement sur $k_R(\mathfrak{r})$ par définition, (c) est clair. L'assertion (d) découle alors de (b) et (c) car les $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser sont les $I_{\mathfrak{r}}$-orbites. □

Le lemme 13.2.1 dit que, restreinte à un $\mathfrak{r}$-bloc, l'application de décomposition $\text{déc}_{\mathfrak{r}}$ est de rang 1.

Exemple 13.2.2. — Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \cap P$ et supposons dans cet exemple, et seulement dans cet exemple, que $\mathfrak{q}_{\text{sing}} \cap P \not\subset \mathfrak{p}$. Alors le théorème 8.4.6(a) nous dit que la $k_R(\mathfrak{r})$-algèbre $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ est déployée. Par conséquent, l'application de décomposition $\text{déc}_{\mathfrak{r}} : \mathscr{K}_0(\mathbf{MH}) \to \mathscr{K}_0(k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H})$ est bien définie. Puisque les modules simples de $\mathbf{MH}$ sont de dimension $|W|$, tout comme les $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$-modules simples, l'application de décomposition envoie la classe d'un $\mathbf{MH}$-module simple sur la classe d'un $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$-module simple. Ainsi, $\text{déc}_{\mathfrak{r}}$ définit une application surjective

$$\text{déc}_{\mathfrak{r}} : W \longrightarrow \text{Irr}(k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}) \tag{13.2.3}$$

dont les fibres sont les $\mathfrak{r}$-cellules de Calogero-Moser (en vertu du lemme 13.2.1). ■

Remarque 13.2.4. — L'exemple précédent s'applique en particulier au cas où $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$ ou $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$. ■

13.3. Cellules à gauche, à droite, bilatères et matrices de décomposition

Pour pouvoir définir des matrices de décomposition, il faut vérifier que certaines hypothèses sont satisfaites (voir les conditions (D1), (D2) et (D3) précédentes). C'est l'objet de la proposition suivante que de vérifier ces hypothèses dans les cas qui nous intéressent :

Proposition 13.3.1. — *Soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier de R parmi $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$ ou $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$. Alors :*

(a) *La $k_R(\mathfrak{r})$-algèbre $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$ est déployée.*

(b) *Supposons ici $\mathfrak{r} \neq \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ ou $\mathfrak{C} = 0$ ou $\mathfrak{C}_c$ pour un $c \in \mathscr{C}$. Si $\mathscr{L}$ est un $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$-module simple et si $h \in \mathbf{H}/\mathfrak{r}\mathbf{H} = (R/\mathfrak{r})\mathbf{H}$, alors le polynôme caractéristique de h (pour son action sur $\mathscr{L}$) est à coefficients dans $R/\mathfrak{r}$.*

Démonstration. — (a) a été démontré pour $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_c$ dans l'exemple 13.1.2, pour $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ dans le théorème 12.2.5(a) et pour $\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$ dans la proposition 9.2.5.

Montrons maintenant (b). Tout d'abord, si $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}$ ou $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}$ ou $\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}$, alors les images dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{K}_0(k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H})$ des $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$-modules simples sont les images des $\mathbf{MH}$-modules simples par l'application de décomposition (voir l'exemple 13.2.2 et la remarque 13.2.4). Ainsi, si h est l'image dans $\mathbf{H}/\mathfrak{r}\mathbf{H}$ de $h' \in \mathbf{H}$, alors le polynôme caractéristique de h' agissant sur un $\mathbf{MH}$-module simple est à coefficients dans R (car R est intégralement clos) et donc le polynôme caractéristique de h est à coefficient dans $R/\mathfrak{r}$ (c'est la réduction modulo $\mathfrak{r}$ de celui de R).

Maintenant, si $\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}$ ou $\bar{\mathfrak{r}}_c$, alors les $k_R(\mathfrak{r})\mathbf{H}$-modules simples sont obtenus par extension des scalaires à partir des $k_P(\mathfrak{r} \cap P)\mathbf{H}$-modules simples, et le résultat découle alors du fait que $P/\bar{\mathfrak{p}} \simeq \mathbf{k}[\mathscr{C}]$ et $P/\bar{\mathfrak{p}}_c \simeq \mathbf{k}$ sont intégralement clos. □

Compte tenu de la proposition 13.3.1, on peut donc définir des applications de décomposition

$$\text{déc}_{\mathfrak{C}} : \mathscr{K}_0(\mathbf{MH}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{K}_0(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}\mathbf{H}),$$

$$\text{déc}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} : \mathscr{K}_0(\mathbf{MH}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}),$$

$$\text{déc}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}} : \mathscr{K}_0(\mathbf{MH}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}\mathbf{H}^{\mathrm{right}}),$$

$$\overline{\text{déc}}_{\mathfrak{C}} : \mathscr{K}_0(\mathbf{MH}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}),$$

$$\overline{\text{déc}}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} : \mathscr{K}_0(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}),$$

$$\overline{\text{déc}}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}} : \mathscr{K}_0(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}\mathbf{H}^{\mathrm{right}}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}})$$

et
$$\text{déc}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{res}} : \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{H}}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}).$$

Comme d'habitude, l'indice $\mathfrak{C}$ sera omis lorsque $\mathfrak{C} = 0$ ou sera remplacé par c si $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_c$ (avec $c \in \mathscr{C}$). Rappelons que $\text{déc}_{\mathfrak{C}}$ est un isomorphisme (d'après l'exemple 13.1.2, qui s'étend facilement au cas où $\mathfrak{C}_c$ est remplacé par un idéal premier $\mathfrak{C}$ quelconque de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$) et que

$$\mathscr{K}_0(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}\mathbf{H}) \simeq \mathbb{Z}W \qquad \text{et} \qquad \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}) \simeq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(W).$$

Notons qu'en revanche, $\text{déc}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{res}} : \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}\,\bar{\mathbf{H}}) \simeq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(W) \longrightarrow \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}) \simeq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(W)$ n'est pas un isomorphisme en général. Des formules de transitivité découlent de 13.1.1.

13.4. Classes des bébés modules de Verma

Les modules de Verma $\mathscr{M}^{\text{left}}(\chi)$ étant définis sur l'anneau P, les propriétés fondamentales des applications de décomposition montrent que

$$\overline{\text{déc}}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}[\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}\mathscr{M}^{\text{left}}(\chi)]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}\mathbf{H}^{\text{left}}} = [\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathscr{M}}(\chi)]_{\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}}. \tag{13.4.1}$$

Les multiplicités $\text{mult}_{C,\chi}^{\text{CM}}$ sont définies à partir de l'image de $\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}\mathscr{M}^{\text{left}}(\chi)$ dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{K}_0(\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}\mathbf{H}^{\text{left}})$. Nous allons maintenant nous intéresser à l'image de $\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathscr{M}}(\chi)$ dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}})$:

Fixons une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère Γ et posons $L_{\mathfrak{C}}(\Gamma) = \overline{\text{déc}}_{\mathfrak{C}}[\mathscr{L}_w]_{\mathbf{MH}}$, pour $w \in \Gamma$. Notons que $L_{\mathfrak{C}}(\Gamma)$ ne dépend pas du choix de $w \in \Gamma$ d'après le lemme 13.2.1.

Proposition 13.4.2. — *Si $\chi \in \text{Irr}_{\Gamma}^{\text{CM}}(W)$, alors*

$$[\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathscr{M}}(\chi)]_{\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}} = \chi(1)L_{\mathfrak{C}}(\Gamma).$$

Remarque 13.4.3. — La proposition 13.4.2 dit que, à l'intérieur d'une famille de Calogero-Moser donnée, la matrice de décomposition des bébés modules de Verma dans la base des modules simples est de rang 1, résultat conjecturé par U. Thiel [**Thi**]. ■

Démonstration. — Soit C une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche. Alors $\text{mult}_{C,\chi}^{\text{CM}} = 0$ si C n'est pas contenue dans Γ (voir la proposition 12.3.1(c)). Ainsi, d'après (13.4.1), on a

$$[\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathscr{M}}(\chi)]_{\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}\bar{\mathbf{H}}} = \sum_{\substack{C \in {}^{\text{CM}}\text{Cell}_L^{\mathfrak{C}}(W) \\ C \subset \Gamma}} \text{mult}_{C,\chi}^{\text{CM}} \cdot \overline{\text{déc}}^{\text{left}}[\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}(C)]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}\mathbf{H}^{\text{left}}}.$$

Mais, si $C \subset \Gamma$, alors $[\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}(C)]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}\mathbf{H}^{\text{left}}} = \text{déc}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}[\mathscr{L}_w]_{\mathbf{MH}}$ où $w \in C$. Alors, par la transitivité des applications de décomposition, on a

$$\overline{\text{déc}}^{\text{left}}[\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}(C)]_{\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}\mathbf{H}^{\text{left}}} = \mathscr{L}_{\mathfrak{C}}(\Gamma)$$

(d'après le lemme 13.2.1). Le résultat découle alors de la proposition 12.3.1(a). □

Nous terminons par un résultat comparant les CM-caractères $\mathfrak{C}$-cellulaires pour différents idéaux premiers $\mathfrak{C}$:

Proposition 13.4.4. — *Soit $\mathfrak{C}'$ un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ contenu dans $\mathfrak{C}$ et choisissons un idéal premier $\mathfrak{r}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}'}$ au-dessus de $\mathfrak{q}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}'}$ et contenu dans $\mathfrak{r}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}}$. Soit C une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche et écrivons $C = C_1 \coprod \cdots \coprod C_r$, où les C_i sont des $\mathfrak{C}'$-cellules de Calogero-Moser à gauche (voir la proposition 12.2.2). Alors*

$$[\,C\,]^{\text{CM}}_{\mathfrak{C}} = [\,C_1\,]^{\text{CM}}_{\mathfrak{C}'} + \cdots + [\,C_r\,]^{\text{CM}}_{\mathfrak{C}'}.$$

Démonstration. — D'après la proposition 13.3.1, l'application de décomposition $\mathbf{d}$: $\mathscr{K}_0(\mathbf{M}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}'}\mathbf{H}^{\text{left}}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(\mathbf{M}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}}\mathbf{H}^{\text{left}})$ est bien définie et elle vérifie la propriété de transitivité $\mathbf{d} \circ \text{déc}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}'} = \text{déc}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}}$. De plus, on a

$$\mathbf{d}\ [\,\mathbf{M}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}'}\mathscr{M}^{\text{left}}(\chi)\,]_{\mathbf{M}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}'}\mathbf{H}^{\text{left}}} = [\,\mathbf{M}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}}\mathscr{M}^{\text{left}}(\chi)\,]_{\mathbf{M}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}}\mathbf{H}^{\text{left}}}.$$

Le résultat découle alors du fait que $\mathbf{d}\ [\,\mathscr{L}_{\mathfrak{C}'}(C_i)\,]_{\mathbf{M}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}'}\mathbf{H}^{\text{left}}} = [\,\mathscr{L}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}}(C)\,]_{\mathbf{M}^{\text{left}}_{\mathfrak{C}}\mathbf{H}^{\text{left}}}$ pour tout i (voir l'exemple 13.2.2). □

13.5. Problèmes, questions

Le calcul des matrices de décomposition pose aussi de nombreuses questions. Une solution au problème 9.8.2 peut être approchée si on sait résoudre le problème 9.8.1 et calculer la matrice de décomposition $\text{déc}^{\text{res}}_c$:

Problème 13.5.1. — *Calculer* $\overline{\text{déc}}$, $\overline{\text{déc}}_c$ *et* $\text{déc}^{\text{res}}_c$ *pour tout* $c \in \mathscr{C}$.

Question 13.5.2. — *Soit $c \in \mathscr{C}$. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?*

(1) $c \in \mathscr{C}_{\text{gén}}$.
(2) $\text{déc}^{\text{res}}_c = \text{Id}_{\mathbb{Z}\,\text{Irr}(W)}$.

CHAPITRE 14

CELLULES DE BIALINICKY-BIRULA DE $\mathscr{Z}_c$

Hypothèse. *Dans ce chapitre, nous supposons que* $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ *et nous fixons un élément* $c \in \mathscr{C}$.

Le groupe $\mathbb{C}^\times$ agit sur la variété algébrique $\mathscr{Z}_c$. Nous allons ici réinterpréter géométriquement diverses notions introduites dans ce mémoire (familles, caractères cellulaires,...) en termes de cette action (points fixes, ensemble attractifs ou répulsifs,...). Le résultat principal de ce chapitre (et peut-être de ce mémoire) concerne le cas d'une famille associée à un point lisse de $\mathscr{Z}_c$: nous montrerons qu'alors les caractères cellulaires associés à cette famille sont irréductibles. Ce résultat sera vu comme étant de nature géométrique. En effet, la lissité du point fixe implique que les ensembles attractifs et répulsifs sont des espaces affines s'intersectant proprement et transversalement ; un calcul de multiplicité d'une intersection conclura la preuve (voir le théorème 14.4.1).

14.1. Généralités sur les actions de $\mathbb{C}^\times$

Soit $\mathscr{X}$ une variété algèbrique *affine* munie d'une $\mathbb{C}^\times$-action régulière $\mathbb{C}^\times \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $(\xi, x) \mapsto \xi \bullet x$. On notera $\mathscr{X}^{\mathbb{C}^\times}$ la sous-variété fermée formée des points fixes sous l'action de $\mathbb{C}^\times$. Si $x \in \mathscr{X}$, nous dirons que $\lim_{\xi \to 0} \xi \bullet x$ *existe et vaut* x_0 s'il existe un morphisme de variétés $\varphi : \mathbb{C} \to \mathscr{X}$ tel que, si $\xi \in \mathbb{C}^\times$, alors $\varphi(\xi) = \xi \bullet x$ et $\varphi(0) = x_0$. Il est alors clair que $x_0 \in \mathscr{X}^{\mathbb{C}^\times}$. De même, nous dirons que $\lim_{\xi \to 0} \xi^{-1} \bullet x$ *existe et vaut* x_0 s'il existe un morphisme de variétés $\varphi : \mathbb{C} \to \mathscr{X}$ tel que, si $\xi \in \mathbb{C}^\times$, alors $\varphi(\xi) = \xi^{-1} \bullet x$ et $\varphi(0) = x_0$.

Nous noterons $\mathscr{X}^{\text{att}}$ (respectivement $\mathscr{X}^{\text{rép}}$) l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ tel que $\lim_{\xi\to 0} \xi\bullet x$ (respectivement $\lim_{\xi\to 0} \xi^{-1}\bullet x$) existe. C'est une sous-variété fermée de $\mathscr{X}$ et les applications

$$\begin{array}{rccc} \lim_{\text{att}} : & \mathscr{X}^{\text{att}} & \longrightarrow & \mathscr{X}^{\mathbb{C}^\times} \\ & x & \longmapsto & \lim_{\xi\to 0} \xi\bullet x \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \lim_{\text{rép}} : & \mathscr{X}^{\text{rép}} & \longrightarrow & \mathscr{X}^{\mathbb{C}^\times} \\ & x & \longmapsto & \lim_{\xi\to 0} \xi^{-1}\bullet x \end{array}$$

sont des morphismes de variétés (qui sont évidemment surjectifs : une section est donnée par l'identité sur $\mathscr{X}^{\mathbb{C}^\times} \subset \mathscr{X}^{\text{att}} \cap \mathscr{X}^{\text{rép}}$), car $\mathscr{X}$ est affine par hypothèse (cela découle du fait que c'est vrai pour la variété $\mathbb{C}^N$ muni d'une action linéaire de $\mathbb{C}^\times$ et que $\mathscr{X}$ peut-être vue comme une sous-variété fermée $\mathbb{C}^\times$-stable d'un tel $\mathbb{C}^N$). Notons que cela n'est plus vrai si $\mathscr{X}$ n'est pas affine, comme le montre l'exemple de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ muni de l'action $\xi\bullet[x;y] = [\xi x; y]$.

Pour finir, si $x_0 \in \mathscr{X}^{\mathbb{C}^\times}$, nous noterons $\mathscr{X}^{\text{att}}(x_0)$ (respectivement $\mathscr{X}^{\text{rép}}(x_0)$) l'image inverse de x_0 par l'application $\lim_{\text{att}}$ (respectivement $\lim_{\text{rép}}$). Alors $\mathscr{X}^{\text{att}}(x_0)$ (respectivement $\mathscr{X}^{\text{rép}}(x_0)$) sera appelé l'*ensemble attractif* (respectivement l'*ensemble répulsif*) de x_0 : c'est une sous-variété fermée de $\mathscr{X}$. Rappelons le fait classique suivant, dû à Bialynicki-Birula [**Bia**] :

Proposition 14.1.1. — *Si x_0 est un point lisse de $\mathscr{X}$, alors il existe $N \geqslant 0$ tel que $\mathscr{X}^{\text{att}}(x_0) \simeq \mathbb{C}^N$. En particulier, $\mathscr{X}^{\text{att}}(x_0)$ est lisse et irréductible.*

Les mêmes assertions valent pour $\mathscr{X}^{\text{rép}}(x_0)$.

Nous allons dans ce chapitre revisiter les notions introduites dans les chapitres précédents (familles, CM-caractères cellulaires) à travers les notions de points fixes et d'ensembles attractifs attachés à l'action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathscr{Z}_c$.

14.2. Points fixes et familles

Ayant le choix pour l'action de $\mathbb{C}^\times$ sur nos variétés ($\mathscr{P}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{R}$,...), nous ferons le choix de l'action qui induit la $\mathbb{Z}$-graduation de l'exemple 4.2.1. En d'autres termes, un élément $\xi \in \mathbb{C}^\times$ agit sur $\mathbf{H}$ comme l'élément $(\xi^{-1}, \xi, 1\rtimes 1)$ de $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \times (\mathrm{Hom}(W, \mathbb{C}^\times) \rtimes \mathscr{N})$. Ainsi, pour l'action sur $\mathbf{H}$, ξ agit trivialement sur $\mathbb{C}[\mathscr{C}] \otimes \mathbb{C}W$, agit avec des poids positifs ou nuls sur $\mathbb{C}[V]$, avec des poids négatifs ou nuls sur $\mathbb{C}[V^*]$. On récupère ainsi une action sur P et Z_c, qui induisent des actions régulières de $\mathbb{C}^\times$ sur les variétés $\mathscr{P}_\bullet \simeq V/W \times V^*/W$ et $\mathscr{Z}_c$ rendant le morphisme naturel

$$\Upsilon_c : \mathscr{Z}_c \longrightarrow \mathscr{P}_\bullet = V/W \times V^*/W$$

$\mathbb{C}^\times$-équivariant. Si $\xi \in \mathbb{C}^\times$ et $z \in \mathscr{Z}_c$, l'image de z à travers cette action de ξ sera notée $\xi \bullet z$. L'unique point fixe de $\mathscr{P}_\bullet$ est $(0,0)$:

$$\mathscr{P}_\bullet^{\mathbb{C}^\times} = (0,0). \tag{14.2.1}$$

Puisque Υ_c est un morphisme fini, on en déduit que

$$\mathscr{Z}_c^{\mathbb{C}^\times} = \Upsilon_c^{-1}(0,0). \tag{14.2.2}$$

On obtient ainsi une bijection naturelle entre $\mathscr{Z}_c^{\mathbb{C}^\times}$ et les c-familles de Calogero-Moser.

14.3. Ensembles attractifs et caractères cellulaires

Tout d'abord, il est clair que

$$\mathscr{P}_\bullet^{\mathrm{att}} = V/W \times 0 \subset V/W \times V^*/W \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_\bullet^{\mathrm{rép}} = 0 \times V^*/W \subset V/W \times V^*/W. \tag{14.3.1}$$

En d'autres termes, $\mathscr{P}_\bullet^{\mathrm{att}}$ est la sous-variété irréductible de $\mathscr{P}_\bullet$ associée à l'idéal premier $\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}}$. De plus, puique Υ_c est un morphisme fini, on a

$$\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}} = \Upsilon_c^{-1}(V/W \times 0) \quad \text{et} \quad \mathscr{Z}_c^{\mathrm{rép}} = \Upsilon_c^{-1}(0 \times V^*/W). \tag{14.3.2}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer la première égalité, l'autre se montrant de même. Tout d'abord, il est clair que $\Upsilon_c(\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}) \subset \mathscr{P}_\bullet^{\mathrm{att}} = V/W \times 0$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que, si $\rho : Z_c \to \mathbb{C}[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres tel que $\rho(P_\bullet) \subset \mathbb{C}[\mathbf{t}]$, alors $\rho(Z_c) \subset \mathbb{C}[\mathbf{t}]$. Mais cela découle du fait que Z_c est entier sur $P_\bullet$ (et donc $\rho(Z_c)$ est entier sur $\rho(P_\bullet)$) et du fait que $\mathbb{C}[\mathbf{t}]$ est intégralement clos. □

Il découle de 14.3.2 que les composantes irréductibles de $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}$ sont en bijection avec l'ensemble $\Upsilon_c^{-1}(\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}})$ des idéaux premiers de Z_c au-dessus de $\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}}$. Si $\mathfrak{z}$ est un tel idéal premier, nous noterons $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}[\mathfrak{z}]$ la composante irréductible associée. Puisque $\lim_{\mathrm{att}} : \mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}} \to \mathscr{Z}_c^{\mathbb{C}^\times}$ est un morphisme de variétés, l'image de $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}[\mathfrak{z}]$ est irréductible : $\mathscr{Z}_c^{\mathbb{C}^\times}$ étant fini, $\lim_{\mathrm{att}}(\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}[\mathfrak{z}])$ est donc réduit à un point. Ainsi, le morphisme de variétés $\lim_{\mathrm{att}} : \mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}} \to \mathscr{Z}_c^{\mathbb{C}^\times}$ induit une application surjective $\Upsilon_c^{-1}(\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}}) \longrightarrow \Upsilon_c^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_c)$ qui n'est autre que l'application $\lim_{\mathrm{left}}$ définie dans la section 11.1.

On obtient ainsi une application entre les composantes irréductibles de $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}$ et l'ensemble des CM-caractères c-cellulaires (voir la remarque 12.3.11).

14.4. Le cas lisse

Hypothèses et notations. *Nous fixons dans cette section, et dans cette section seulement, un point $z_0 \in \mathscr{Z}_c^{\mathbb{C}^\times}$ que nous supposerons* ***lisse*** *dans $\mathscr{Z}_c$. On note χ l'unique caractère irréductible de la c-famille de Calogero-Moser associée à z_0. Nous notons Γ la c-cellule de Calogero-Moser bilatère de W associée à z_0 et nous fixons une c-cellule de Calogero-Moser à gauche C contenue dans Γ.*

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 14.4.1. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a :*

(a) $|\Gamma| = \chi(1)^2$.
(b) $\bigcup_{d \in D_c^{\mathrm{left}}} {}^d C = \Gamma$.
(c) $|C| = \chi(1)$.
(d) $[C]_c^{\mathrm{CM}} = \chi$.
(e) $\deg_c(C) = \chi(1)$.

NOTATION - Si A est un anneau commutatif local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et si M est un A-module de type fini, on notera $e_{\mathfrak{m}}(M)$ la *multiplicité* de M pour l'idéal $\mathfrak{m}$, telle qu'elle est définie dans [**Ser**, chapitre V, §A.2].

Si A est un anneau commutatif régulier (pas forcément local), si M et N sont deux A-modules de type fini tels que $M \otimes_A N$ soit de longueur fini, et si $\mathfrak{a}$ est un idéal premier de A, on posera

$$\chi_{\mathfrak{a}}(M,N) = \sum_{i=0}^{\dim A} (-1)^i \operatorname{Length}_{A_{\mathfrak{a}}}(\operatorname{Tor}_i^A(M,N)_{\mathfrak{a}}),$$

conformément à [**Ser**, chapitre V, §B, théorème 1] . ■

Démonstration. — (a) découle du théorème 11.2.7(d).

(b) L'ensemble des composantes irréductibles de $\lim_{\mathrm{att}}^{-1}(z_0)$ est en bijection avec $\Gamma/D_c^{\mathrm{left}}$ (voir la proposition 12.2.6(c)). Puisque z_0 est lisse (et isolé), alors

$$\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}(z_0) \simeq \mathbb{C}^n,$$

et donc que $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}(z_0)$ est lisse et irréductible (voir la proposition 14.1.1). Cela montre que $\lim_{\mathrm{att}}^{-1}(z_0)$ est irréductible et isomorphe à un espace affine. Ainsi $|\Gamma/D_c^{\mathrm{left}}| = 1$, ce qui montre (b). En d'autres termes, avec les notations introduites dans le chapitre précédent, on a $C^D = \Gamma$.

(c) Notons $\mathfrak{z}_L = \mathfrak{z}_c^{\mathrm{left}}(C)$: alors $\mathfrak{z}_L$ est l'idéal de définition de $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}(z_0)$, mais nous le verrons comme un idéal premier de Z_c par passage au quotient. Notons $\bar{\mathfrak{z}} = \bar{\mathfrak{z}}_c(\Gamma)$: alors $\bar{\mathfrak{z}}$ est l'idéal de définition du point z_0 (nous le verrons aussi comme un idéal de Z_c). On définit de même $\mathfrak{z}_R$ comme étant l'idéal de définition de $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{rép}}(z_0)$: on note C' une c-cellule à droite contenue dans Γ (de sorte que $\mathfrak{z}_R = \mathfrak{z}_c^{\mathrm{right}}(C')$). Le corollaire 12.3.12 montre que

$$(\clubsuit) \qquad |C| = \mathrm{Length}_{Z_{c,\mathfrak{z}_L}}(Z_c/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_c) \quad \text{et} \quad |C'| = \mathrm{Length}_{Z_{c,\mathfrak{z}_R}}(Z_c/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}} Z_c).$$

Si on note $m_L = \mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}}$, alors

$$(\diamondsuit_L) \qquad |C| = m_L \chi(1) \quad \text{et} \quad [\,C\,]_c^{\mathrm{CM}} = m_L \chi.$$

Symétriquement, on peut définir un entier naturel m_R vérifiant

$$(\diamondsuit_R) \qquad |C'| = m_R \chi(1).$$

Commençons par calculer la multiplicité du $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$-module $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$ pour $\bar{\mathfrak{z}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$. La dimension de Krull de ce module est $n = \dim_{\mathbf{k}} V$. Par la formule d'additivité [**Ser**, chapitre V, §A.2],

$$e_{\bar{\mathfrak{z}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}) = \sum_{\mathrm{coht}(\mathfrak{z})=n} \mathrm{Length}_{Z_{c,\mathfrak{z}}}(Z_{c,\mathfrak{z}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\mathfrak{z}}) e_{\bar{\mathfrak{z}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{z} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}).$$

Ici, $\mathrm{coht}(\mathfrak{z})$ désigne la cohauteur de l'idéal premier $\mathfrak{z}$ de $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$. Mais, puisque $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}(z_0)$ est irréductible de dimension n, il n'y a qu'un seul idéal premier de $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$ de cohauteur n qui contienne $\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$ (et donc tel que $\mathrm{Length}_{Z_{c,\mathfrak{z}}}(Z_{c,\mathfrak{z}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\mathfrak{z}})$ soit non nul), c'est l'idéal premier $\mathfrak{z}_L$. De plus, puisque $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{z}_L Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$ est un anneau régulier (car $\mathscr{Z}_c^{\mathrm{att}}(z_0)$ est lisse), la multiplicité $e_{\bar{\mathfrak{z}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{z} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}})$ vaut 1 (voir [**Ser**, chapitre IV]). Ainsi, il découle de ($\clubsuit$) et ($\diamondsuit_L$) que

$$(\heartsuit_L) \qquad e_{\bar{\mathfrak{z}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}) = m_L \chi(1).$$

Symétriquement,

$$(\heartsuit_R) \qquad e_{\bar{\mathfrak{z}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}) = m_R \chi(1).$$

D'autre part, $P/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}}$ est un anneau de polynôme et $Z_c/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_c$ est un $P/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}}$-module libre de rang $|W|$. Donc $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$ est un $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$-module de Cohen-Macaulay de dimension n. De même, $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$ est un $Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}$-module de Cohen-Macaulay de dimension n. Puisque Z_c est de dimension $2n$, il découle de [**Ser**, chapitre V, §B, corollaire du théorème 1] que

$$(\spadesuit) \quad \chi_{\bar{\mathfrak{z}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}, Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}) = \mathrm{Length}_{Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}} \otimes_{Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}) = \chi(1)^2 > 0.$$

Par conséquent [**Ser**, chapitre V, §B, théorème 1],

$$e_{\bar{\mathfrak{z}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}) \cdot e_{\bar{\mathfrak{z}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}) \leqslant \chi_{\bar{\mathfrak{z}}}(Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}, Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}/\mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}} Z_{c,\bar{\mathfrak{z}}}).$$

De cette dernière égalité, on déduit, en utilisant ($\heartsuit_L$), ($\heartsuit_R$) et ($\spadesuit$) que

$$m_L m_R \leqslant 1.$$

Ainsi, $m_L = m_R = 1$, ce qui prouve (c)

(d) découle immédiatement de (c).

(e) découle de (b) et de la proposition 12.2.6(b). $\square$

PARTIE V

GROUPES DE COXETER : CALOGERO-MOSER VS KAZHDAN-LUSZTIG

Hypothèses. *Tout au long de cette partie, nous supposerons que W est un groupe de Coxeter, que $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ et que $\mathbf{k}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Nous fixons aussi un élément $c \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}} \subset \mathscr{C}$.*

Dans ce cas, nous avons rappelé dans la section 3.3 la définition des c-cellules de Kazhdan-Lusztig à droite, à gauche et bilatères, des c-familles de Kazhdan-Lusztig, et des KL-caractères c-cellulaires. De même, les notions de c-cellule de Calogero-Moser à droite, à gauche et bilatère, de c-famille de Calogero-Moser et de CM-caractère c-cellulaire ont été définies et longuement étudiées dans la partie IV. Il est assez tentant de conjecturer que ces notions coïncident. Le but de cette partie est d'énoncer des conjectures aussi précises que possible et de donner des arguments en faveur de ces conjectures.

CHAPITRE 15

CONJECTURES

15.1. Cellules et caractères

La première conjecture concerne les cellules bilatères et leur famille associée :

Conjecture LR. — *Soit $c \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$. Alors il existe un choix de l'idéal premier $\bar{\mathfrak{r}}_c$ au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}_c$ tel que :*

(a) *La partition de W en c-cellules de Calogero-Moser bilatères coïncide avec la partition en c-cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères.*

(b) *Supposons que $c_s \geqslant 0$ pour tout $s \in \mathrm{Réf}(W)$. Si $\Gamma \in {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}^c_{LR}(W) = {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}^c_{LR}(W)$, alors $\mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{\Gamma}(W) = \mathrm{Irr}^{\mathrm{KL}}_{\Gamma}(W)$.*

Du côté des cellules à gauche, nous proposons une conjecture similaire, qui se décline aussi au niveau des caractères cellulaires :

Conjecture L. — *Soit $c \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$. Alors il existe un choix de l'idéal premier $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}_c$ au-dessus de $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_c$ tel que :*

(a) *La partition de W en c-cellules de Calogero-Moser à gauche coïncide avec la partition en c-cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche.*

(b) *Supposons que $c_s \geqslant 0$ pour tout $s \in \mathrm{Réf}(W)$. Si $C \in {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}^c_{L}(W) = {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}^c_{L}(W)$, alors $[C]^{\mathrm{CM}}_c = [C]^{\mathrm{KL}}_c$.*

On a bien sûr une conjecture identique pour les cellules à droite. En outre, les conjectures LRet L devraient avoir des réponses positives avec $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}_c \subset \bar{\mathfrak{r}}_c$.

15.2. Caractères

Tout d'abord, remarquons que l'ensemble des c-familles de Calogero-Moser est indépendant du choix de $\bar{\mathfrak{r}}_c$. De même, l'ensemble des CM-caractères c-cellulaires ne dépend pas du choix de l'idéal $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$. Au niveau des caractères, les énoncés (b) des conjectures LR et L impliquent les énoncés suivants, plus simples, qui ne font pas référence au choix d'un idéal premier de R.

Conjecture CAR. — *Soit $c \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$. Alors :*

(a) *La partition de* $\mathrm{Irr}(W)$ *en c-familles de Calogero-Moser coïncide avec la partition en c-familles de Kazhdan-Lusztig (Gordon-Martino).*

(b) *Si $c_s \geqslant 0$ pour tout $s \in \mathrm{Réf}(W)$, alors l'ensemble des* CM*-caractères c-cellulaires coïncide avec l'ensemble des* KL*-caractères c-cellulaires.*

Notons que le point (a) ci-dessus a été conjecturé par Gordon et Martino [**GoMa**, conjecture 1.3(1)]. La conjecture LR relève donc la conjecture de Gordon-Martino au niveau des cellules bilatères.

COMMENTAIRE - Si le choix des idéaux premiers $\bar{\mathfrak{r}}_c$ ou $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$ n'a aucune importance pour la conjecture CAR, il n'en est pas de même pour les conjectures LR et L. En effet, remplacer $\bar{\mathfrak{r}}_c$ par un autre idéal $\bar{\mathfrak{r}}'_c$ transforme l'ensemble des cellules bilatères à travers l'action d'un élément $g \in G \subset \mathfrak{S}_W$ (tel que $\bar{\mathfrak{r}}'_c = g(\bar{\mathfrak{r}}_c)$). Or, dans certains cas, G est le groupe $\mathfrak{S}_W$ tout entier...

D'autre part, la partition en c-cellules de Kazhdan-Lusztig dépend elle aussi fortement du choix d'un ensemble S de réflexions simples (changer cet ensemble reviendrait à conjuguer les cellules par un élément de W). Il est donc impératif de lier le choix de $\bar{\mathfrak{r}}_c$ (ou $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$) au choix de S, ce que nous ne savons pas faire pour le moment. ■

CHAPITRE 16

ARGUMENTS

Comme cela sera expliqué dans la partie VI, toutes les conjectures énoncées dans le chapitre 15 sont vérifiées si W est de type A_1 ou B_2 : le cas du type A_2 peut aussi être traité mais nous n'avons pas inclus les calculs dans ce mémoire. Le cas du type B_2 est traité dans le chapitre 19. Cependant, la difficulté des calculs ne nous permet pas, en l'état actuel de nos connaissances, d'allonger cette liste d'exemples. Le but de ce chapitre est plutôt d'avancer des arguments théoriques en faveur de ces conjectures, qui seront distillés sous forme de remarques successives.

16.1. Le cas $c = 0$

Les faits suivants seront démontrés dans le chapitre 17 :

Proposition 16.1.1. — *Il n'y a qu'une seule* 0*-cellule de Calogero-Moser bilatère, à gauche ou à droite : c'est W tout entier. De plus,*

$$\mathrm{Irr}_W^{\mathrm{CM}}(W) = \mathrm{Irr}(W) \qquad \textit{et} \qquad [W]_0^{\mathrm{CM}} = [\mathbf{k}W]_{\mathbf{k}W} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1)\chi.$$

Corollaire 16.1.2. — *Les conjectures L et LR sont vérifiées lorsque $c = 0$.*

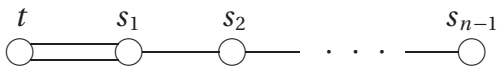
Démonstration. — Cela découle de la comparaison de [**Bon2**, corollaires 2.13 et 2.14] avec la proposition 16.1.1. □

16.2. Caractères constructibles, familles de Lusztig

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons au cas des paramètres strictement positifs : nous ne savons pas traiter le cas où seulement certains paramètres sont nuls (pour comparer avec [**Bon2**, corollaires 2.13 et 2.14]).

> Fixons dans cette section un élément $c \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ tel que $c_s > 0$ pour tout $s \in \text{Réf}(W)$.

CONVENTION - Si (W,S) est de type B_n, alors nous noterons $S = \{t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ avec la convention que t n'est conjugué à aucun des s_i. En d'autres termes, le diagramme de Dynkin est



Dans ce cas, nous poserons $b = c_t$ et $a = c_{s_1} = c_{s_2} = \cdots = c_{s_{n-1}}$. ■

Lusztig [**Lus3**, §22] a défini la notion de *caractère constructible* de W, que nous appellerons ici *caractère c-constructible*. On peut alors définir un graphe $\mathscr{G}_c(W)$ ainsi :

- L'ensemble des sommets de $\mathscr{G}_c(W)$ est $\text{Irr}(W)$.
- Deux caractères irréductibles de W sont reliés dans $\mathscr{G}_c(W)$ s'ils apparaissent dans un même caractère c-constructible.

On définit alors les *c-familles de Lusztig* comme les composantes connexes de $\mathscr{G}_c(W)$.

Proposition 16.2.1. — *Supposons que l'une des assertions suivantes soit satisfaite :*

(1) *c est constante ;*
(2) *$|S| \leqslant 2$;*
(3) *(W,S) est de type F_4 ;*
(4) *(W,S) est de type B_n, $a \neq 0$ et $b/a \in \{1/2, 1, 3/2, 2\} \cup]n-1, +\infty)$.*

Alors :

(a) *Les caractères c-constructibles et les KL-caractères c-cellulaires coïncident.*
(b) *Les c-familles de Lusztig et les c-familles de Kazhdan-Lusztig coïncident.*

Démonstration. — Lusztig [**Lus3**, conjectures 14.2] a énoncé une série de conjectures (numérotées P1, P2,..., P15) portant sur les cellules de Kazhdan-Lusztig. Elles ont été démontrées :

(1) si c est constante dans [**Lus3**, chapitre 15] ;
(2) si $|S| \leqslant 2$ dans [**Lus3**, chapitre 17] ;
(3) si (W,S) est de type F_4 dans [**Ge2**] ;

(4) si (W,S) est de type B_n et $a=0$ ou bien $a \neq 0$ et $b/a \in \{1/2,1,3/2,2\}$ dans [**Lus3**, chapitre 16] ;

(4′) si (W,S) est de type B_n, $a \neq 0$ et $b/a > n-1$ dans [**BoIa**], [**Bon1**] et [**GeIa**].

D'autre part, il est démontré dans [**Lus3**, lemme 22.2] et [**Ge3**, §6 et §7] que ces conjectures impliquent que les caractères c-constructibles et les KL-caractères c-cellulaires coïncident. Cela montre (a). L'énoncé (b) est alors démontré dans [**BoGe**, corollaire 1.8]. □

16.3. Conjectures sur les caractères

16.3.A. Familles. — Les caractères c-constructibles (et donc les c-familles de Lusztig) ont été calculé(e)s dans tous les cas par Lusztig [**Lus3**]. On déduit de la proposition 16.2.1 ce que sont les c-familles de Kazhdan-Lusztig dans les cas (1), (2), (3) et (4). Or, le calcul explicite des c-familles de Calogero-Moser en type classique a été effectué par Bellamy, Gordon et Martino dans la série d'articles [**Bel1**], [**Bel5**], [**Gor1**], [**Gor2**], [**GoMa**], [**Mar2**]. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 16.3.1. — *Supposons que l'une des assertions suivantes soit satisfaite :*

(1) $|S| \leqslant 2$.

(2) (W,S) *est de type* A_n, D_n *ou* F_4.

(3) (W,S) *est de type* B_n *et* $a=0$ *ou bien* $a \neq 0$ *et* $b/a \in \{1/2,1,3/2,2\} \cup]n-1,+\infty)$.

Alors la conjecture CAR(a) est vérifiée.

16.3.B. Caractères cellulaires. — Si (W,S) est de type A ou si (W,S) est de type B_n avec $a \neq 0$ et $b/a \in \{1/2,3/2\} \cup]n-1,+\infty)$, alors il découle des résultats précédents que les KL-caractères c-cellulaires sont les caractères irréductibles. De plus, il découle aussi des travaux de Gordon et Martino que, toujours dans le même cas, l'espace de Calogero-Moser $\mathscr{Z}_c$ est lisse. Le théorème suivant résulte alors du théorème 14.4.1.

Théorème 16.3.2. — *Supposons que l'on est dans l'un des cas suivants :*

(1) (W,S) *est de type* A *;*

(2) (W,S) *est de type* B_n *avec* $a \neq 0$ *et* $b/a \in \{1/2,3/2\} \cup]n-1,+\infty)$.

Alors la conjecture CAR(b) est vraie (et les caractères c-cellulaires sont irréductibles).

16.3.C. Autres arguments. — Tout d'abord, remarquons que, si l'on suppose les conjectures de Lusztig P1, P2,..., P15 vraies (voir [**Lus3**, conjectures 14.2]), alors les raisonnements précédents impliquent que la conjecture CAR(b) est vraie en type B et la conjecture CAR(a) est vraie en type B avec $a \neq 0$ et $b/a \notin \{1,2,\dots,n-1\}$ (car alors les caractères c-constructibles sont les caractères irréductibles et l'espace de Calogero-Moser est lisse).

Remarque 16.3.3. — Si $\mathscr{F}$ est une c-famille de Calogero-Moser (respectivement Kazhdan-Lusztig), alors $\mathscr{F}\varepsilon$ est une c-famille de Calogero-Moser (respectivement Kazhdan-Lusztig) : voir le corollaire 9.5.9 et (3.3.14).

De même, si χ est un CM-caractère (respectivement un KL-caractère) c-cellulaire, alors $\chi\varepsilon$ est un CM-caractère (respectivement un KL-caractère) c-cellulaire : voir le corollaire 12.3.13 et (3.3.13). ■

Remarque 16.3.4. — Si $\mathscr{F}$ est une c-famille de Calogero-Moser (respectivement de Lusztig), alors il existe un unique caractère $\chi \in \mathscr{F}$ de **b**-invariant minimal : voir le théorème 9.6.1(b) (respectivement [**Bon4**], ou [**Lus2**, theorème 5.25 et sa preuve] dans le cas où c est constant).

De même, si χ est un CM-caractère c-cellulaire (respectivement un caractère c-constructible), alors il existe une unique composante irréductible de χ de **b**-invariant minimal : voir le théorème 12.3.14 (respectivement [**Bon4**], ou [**Lus2**, theorème 5.25 et sa preuve] dans le cas où c est constant). ■

16.4. Cellules

16.4.A. Cellules bilatères. — Le premier argument en faveur le la conjecture LR vient de la comparaison du cardinal des cellules, et du fait que la conjecture CAR(a) a été démontrée dans de nombreux cas.

Remarque 16.4.1. — Supposons ici que (W,c) vérifie l'une des hypothèses du théorème 16.3.1. Soit $\mathscr{F}$ une c-famille de Calogero-Moser (c'est-à-dire une c-famille de Kazhdan-Lusztig en vertu du théorème 16.3.1). Notons Γ_{CM} (respectivement Γ_{KL}) la c-cellule de Calogero-Moser (respectivement Kazhdan-Lusztig) bilatère associée. Alors, il découle du théorème 11.2.7(d) que

$$|\Gamma_{\mathrm{CM}}| = \sum_{\chi \in \mathscr{F}} \chi(1)^2$$

et il découle de (3.3.6) que

$$|\Gamma_{\mathrm{KL}}| = \sum_{\chi \in \mathscr{F}} \chi(1)^2.$$

Ainsi,

$$|\Gamma_{\mathrm{CM}}| = |\Gamma_{\mathrm{KL}}|.$$

Ce n'est évidemment pas suffisant en général pour montrer que $\Gamma_{\mathrm{CM}} = \Gamma_{\mathrm{KL}}$. En revanche, cela démontre la conjecture LR dans le cas où $G = \mathfrak{S}_W$ (ce qui pourraît être le cas si W est de type A_n) : en effet, quitte à remplacer $\mathfrak{r}_c$ par $g(\mathfrak{r}_c)$ pour un certain $g \in G = \mathfrak{S}_W$, on pourrait s'arranger pour que $\Gamma_{\mathrm{CM}} = \Gamma_{\mathrm{KL}}$ (et ce pour toute famille $\mathscr{F}$). Cela montre aussi qu'il faudrait savoir préciser le choix de $\mathfrak{r}_c$ dans la conjecture LR. ■

Remarque 16.4.2. — Soit Γ_{CM} (respectivement Γ_{KL}) une c-cellule de Calogero-Moser (respectivement de Kazhdan-Lusztig) bilatère. Notons w_0 l'élément le plus long de W. Alors :

- D'après (3.3.12) et (3.3.15), $w_0\Gamma_{\mathrm{KL}} = \Gamma_{\mathrm{KL}} w_0$ est une c-cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère et $\mathrm{Irr}^{\mathrm{KL}}_{w_0\Gamma_{\mathrm{KL}}}(W) = \mathrm{Irr}^{\mathrm{KL}}_{\Gamma_{\mathrm{KL}}}(W)\varepsilon$.
- Puisque toutes les réflexions de W sont d'ordre 2, il a été montré dans le corollaire 11.2.9 que, *si w_0 est central dans W*, alors $w_0\Gamma_{\mathrm{CM}} = \Gamma_{\mathrm{CM}} w_0$ est une c-cellule de Calogero-Moser bilatère et $\mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{w_0\Gamma_{\mathrm{CM}}}(W) = \mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{\Gamma_{\mathrm{CM}}}(W)\varepsilon$.

Ces résultats montrent une certaine analogie *lorsque w_0 est central* dans W. Pour le deuxième énoncé, il n'est pas raisonnable d'espérer que ce soit vrai lorsque w_0 n'est pas central (comme le montre l'exemple du type A_2) sans avoir fait un choix judicieux de l'idéal premier $\mathfrak{r}_c$. ■

16.4.B. Cellules à gauche. — Commençons en rappelant que l'expérience montre que de nombreuses c-cellules de Kazhdan-Lusztig donnent lieu au même KL-caractère c-cellulaire. Sur le versant Calogero-Moser, le corollaire 12.3.6 montre que, si $d \in D_c^{\mathrm{left}}$, alors les CM-caractères c-cellulaires $[C]_c^{\mathrm{CM}}$ et $[{}^dC]_c^{\mathrm{CM}}$ sont égaux. Ainsi, de nombreuses c-cellules de Calogero-Moser donnent lieu au même CM-caractère c-cellulaire (voir par exemple le théorème 14.4.1 dans le cas lisse).

Remarque 16.4.3. — Soit C_{CM} (resp. C_{KL}) une c-cellule de Calogero-Moser (resp. de Kazhdan-Lusztig) à gauche. Notons w_0 l'élément le plus long de W. Alors :

- Il découle de (3.3.12) et (3.3.13) que $w_0 C_{\mathrm{KL}}$ et $C_{\mathrm{KL}} w_0$ sont des c-cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche et que $[w_0 C_{\mathrm{KL}}]_c^{\mathrm{KL}} = [C_{\mathrm{KL}} w_0]_c^{\mathrm{KL}} = [C_{\mathrm{KL}}]_c^{\mathrm{KL}}\varepsilon$.

– Puisque toutes les réflexions de W sont d'ordre 2, il découle du corollaire 12.3.13 que, *si w_0 est central dans W*, alors $w_0 C_{\mathrm{CM}} = C_{\mathrm{CM}} w_0$ est une c-cellule de Calogero-Moser à gauche et que $[\,w_0 C_{\mathrm{CM}}\,]_c^{\mathrm{CM}} = [\,C_{\mathrm{CM}} w_0\,]_c^{\mathrm{CM}} = [\,C_{\mathrm{CM}}\,]_c^{\mathrm{CM}} \varepsilon$. ■

Remarque 16.4.4. — Notons aussi l'analogie des égalités numériques suivantes : si C est une c-cellule de Calogero-Moser (respectivement de Kazhdan-Lusztig) à gauche et si $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$, alors

$$\begin{cases} |C| = \displaystyle\sum_{\psi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}^{\mathrm{CM}}_{C,\psi}\, \psi(1), \\ \chi(1) = \displaystyle\sum_{C' \in {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L(W)} \mathrm{mult}^{\mathrm{CM}}_{C',\chi} \end{cases}$$

(respectivement

$$\begin{cases} |C| = \displaystyle\sum_{\psi \in \mathrm{Irr}(W)} \mathrm{mult}^{\mathrm{KL}}_{C,\psi}\, \psi(1), \\ \chi(1) = \displaystyle\sum_{C' \in {}^{\mathrm{KL}}\mathrm{Cell}_L(W)} \mathrm{mult}^{\mathrm{KL}}_{C',\chi} \end{cases}).$$

Il serait intéressant d'étudier si d'autres propriétés numériques des cellules de Kazhdan-Lusztig à gauche (comme par exemple [**Ge3**, lemme 4.6]) sont aussi vérifiées par les cellules de Calogero-Moser à gauche. ■

Outre les exemples en petit rang, notre argument le plus probant en faveur des conjectures L et LR est le suivant :

Théorème 16.4.5. — *Supposons que l'on soit dans l'un des cas suivants :*

(1) *(W,S) est de type A et $c \neq 0$;*
(2) *(W,S) est de type B avec $a \neq 0$ et $b/a \in \{1/2, 3/2\} \cup]n-1, +\infty)$.*

Alors il existe une bijection $\varphi : W \to W$ telle que :

(a) *Si Γ est une cellule de Kazhdan-Lusztig bilatère, alors $\varphi(\Gamma)$ est une cellule de Calogero-Moser bilatère et $\mathrm{Irr}^{\mathrm{KL}}_{\Gamma}(W) = \mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{\varphi(\Gamma)}(W)$.*
(b) *Si C est une cellule de Kazhdan-Lusztig à gauche, alors $\varphi(C)$ est une cellule de Calogero-Moser à gauche et $[\,C\,]_c^{\mathrm{KL}} = [\,\varphi(C)\,]_c^{\mathrm{CM}}$.*

Démonstration. — Sous les hypothèses (1) ou (2), l'espace de Calogero-Moser $\mathscr{Z}_c$ est lisse (voir [**EtGi**, théorème 1.24] dans le cas (1) et [**Gor1**, lemme 4.3 et sa preuve]) dans le cas (2)) et donc le théorème 14.4.1 s'applique à toutes les cellules de Calogero-Moser de W. Le résultat découle alors d'une comparaison de cardinaux. □

PARTIE VI

EXEMPLES

CHAPITRE 17

UN EXEMPLE ASSEZ NUL : LE CAS $c = 0$

17.1. Cellules bilatères, familles

Rappelons que R_+ désigne l'unique idéal bi-homogène maximal de R et que

$$R/R_+ \simeq \mathbf{k}$$

(voir le corollaire 6.3.4). Rappelons aussi que D_+ (respectivement I_+) désigne son groupe de décomposition (respectivement d'inertie) et que

$$D_+ = I_+ = G$$

(voir le corollaire 6.3.5).

Proposition 17.1.1. — *R_+ est l'unique idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_0$.*

Démonstration. — En effet, $\bar{\mathfrak{p}}_0 = P_+$ et donc R_+ est un idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_0$: il est stabilisé par G ce qui termine la preuve de l'unicité. □

Notons donc $\bar{\mathfrak{r}}_0$ l'unique idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}_0 = P_+$, $\bar{D}_0$ son groupe de décomposition et $\bar{I}_0$ son groupe d'inertie. Alors

$$\bar{\mathfrak{r}}_0 = R_+ \qquad \text{et} \qquad \bar{D}_0 = \bar{I}_0 = G. \tag{17.1.2}$$

Ainsi :

Corollaire 17.1.3. — *W ne contient qu'une seule 0-cellule de Calogero-Moser bilatère, à savoir W, et*

$$\mathrm{Irr}_W^{\mathrm{CM}}(W) = \mathrm{Irr}(W).$$

Une des particularités de la spécialisation en 0 est que l'algèbre $\bar{\mathbf{H}}_0$ hérite de la $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$-graduation, et donc de la $\mathbb{N}$-graduation. Si on note

$$\bar{\mathbf{H}}_{0,+} = \bigoplus_{i\geqslant 1} \bar{\mathbf{H}}_0^{\mathbb{N}}[i],$$

alors $\bar{\mathbf{H}}_{0,+}$ est un idéal bilatère nilpotent de $\bar{\mathbf{H}}_0$ et, puisque $\bar{\mathbf{H}}_0^{\mathbb{N}}[0] = \mathbf{k}W$, on obtient le résultat suivant :

Proposition 17.1.4. — $\mathrm{Rad}(\bar{\mathbf{H}}_0) = \bar{\mathbf{H}}_{0,+}$ *et* $\bar{\mathbf{H}}_0/\mathrm{Rad}(\bar{\mathbf{H}}_0) \simeq \mathbf{k}W$.

En particulier,

$$[\bar{\mathscr{L}}_{\bar{\mathbf{K}}_0}(\chi)]^{\mathrm{gr}}_{\mathbf{k}W} = \chi \in \mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)[\mathbf{t},\mathbf{t}^{-1}] \tag{17.1.5}$$

et

$$[\bar{\mathbf{K}}_0\bar{\mathscr{M}}(\chi)]_{\bar{\mathbf{H}}_0} = \chi(1)\,[\mathbf{k}W]_{\mathbf{k}W} \in \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(W) \simeq \mathscr{K}_0(\bar{\mathbf{H}}_0). \tag{17.1.6}$$

17.2. Cellules à gauche, caractères cellulaires

Rappelons que, dans §6.1.B, il a été fixé un idéal premier $\mathfrak{r}_0$ de R au-dessus de $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{C}_0 Q$ ainsi qu'un isomorphisme de corps

$$\mathrm{iso}_0 : \mathbf{k}(V\times V^*)^{\Delta Z(W)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}_0 = k_R(\mathfrak{r}_0)$$

dont la restriction à $\mathbf{k}(V\times V^*)^{\Delta W}$ est l'isomorphisme canonique $\mathbf{k}(V\times V^*)^{\Delta W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(Z_0) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}_0$. Ainsi, $R/\mathfrak{r}_0 \subset \mathrm{iso}_0(\mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta Z(W)})$ et ces deux anneaux ont le même corps des fractions, à savoir $\mathbf{M}_0$. Rappelons aussi que nous ne savons pas si ces deux anneaux sont égaux, ce qui est équivalent à savoir si $R/\mathfrak{r}_0$ est intégralement clos (question 6.7.6).

Proposition 17.2.1. — *Il existe un unique idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{p}_0^{\mathrm{left}}$ et contenant $\mathfrak{r}_0$.*

Démonstration. — Notons $\mathfrak{p}^* = \mathrm{iso}_0^{-1}(\mathfrak{p}_0^{\mathrm{left}}/\mathfrak{p}_0)$. Alors $\mathbf{k}[V\times V^*]^{W\times W}/\mathfrak{p}^* \simeq \mathbf{k}[V\times 0]^{W\times W}$. Donc il n'y a qu'un seul idéal premier $\mathfrak{r}^*$ de $\mathbf{k}[V\times V^*]$ au-dessus de $\mathfrak{p}^*$: c'est l'idéal de définition de la sous-variété fermée irréductible $V\times 0$ de $V\times V^*$. En d'autres termes,

$$\mathbf{k}[V\times V^*]/\mathfrak{r}^* = \mathbf{k}[V\times 0].$$

Par conséquent, le seul idéal premier $\mathfrak{r}_0^{\mathrm{left}}$ de R au-dessus de $\mathfrak{p}_0^{\mathrm{left}}$ et contenant $\mathfrak{r}_0$ est défini par $\mathfrak{r}_0^{\mathrm{left}}/\mathfrak{r}_0 = \mathrm{iso}_0(\mathfrak{r}^*\cap\mathbf{k}[V\times V^*]^{\Delta Z(W)})\cap(R/\mathfrak{r}_0)$. □

Notons $\mathfrak{r}_0^{\mathrm{left}}$ l'unique idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{q}_0^{\mathrm{left}}$ et contenant $\mathfrak{r}_0$ (voir la proposition 17.2.1) et notons D_0^{left} (respectivement I_0^{left}) son groupe de décomposition (respectivement d'inertie). Alors :

Proposition 17.2.2. — (a) *$\iota(W \times W) \subset D_0^{\mathrm{left}}$ et $\iota(W \times 1) \subset I_0^{\mathrm{left}}$.*

(b) *L'application canonique $\bar{\iota} : W \times W \to D_0^{\mathrm{left}}/I_0^{\mathrm{left}}$ est surjective et son noyau contient $W \times \mathrm{Z}(W)$.*

(c) *$D_0^{\mathrm{left}}/I_0^{\mathrm{left}}$ est un quotient de $W/\mathrm{Z}(W)$.*

(d) *Si $R/\mathfrak{r}_0$ est intégralement clos (i.e. si $R/\mathfrak{r}_0 \simeq \mathbf{k}[V \times V^*]^{\Delta \mathrm{Z}(W)}$), alors $\mathrm{Ker}(\bar{\iota}) = W \times \mathrm{Z}(W)$ et $D_0^{\mathrm{left}}/I_0^{\mathrm{left}} \simeq W/\mathrm{Z}(W)$.*

Démonstration. — La première assertion de (a) découle de l'unicité de $\mathfrak{r}_0^{\mathrm{left}}$ (voir la proposition 17.2.1). Pour la deuxième assertion, reprenons les notations de la preuve de la proposition 17.2.1, et remarquons que $W \times 1$ agit trivialement sur $\mathbf{k}[V \times V^*]/\mathfrak{r}^*$.

Notons B_0 l'image inverse de $R/\mathfrak{r}_0$ dans $\mathbf{k}[V \times V^*]$ via iso_0. Alors $\mathbf{k}[V \times 0]^{W \times W} \subset B_0/\mathfrak{r}^* \subset \mathbf{k}[V \times 0]^{\Delta \mathrm{Z}(W)} = \mathbf{k}[V \times 0]^{W \times \mathrm{Z}(W)} \subset \mathbf{k}[V \times 0]$. (b), (c) et (d) découlent alors de ces observations. □

Après cette étude des groupes de décomposition et d'inertie, on peut immédiatement en déduire :

Corollaire 17.2.3. — *W ne contient qu'une seule 0-cellule de Calogero-Moser à gauche, à savoir W, et*

$$[W]_0^{\mathrm{CM}} = [\mathbf{k}W]_{\mathbf{k}W} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)} \chi(1).$$

Démonstration. — La première assertion découle de la proposition 17.2.2(a) tandis que la deuxième découle de la proposition 12.3.1(a). □

Terminons avec une remarque facile, mais qui, combinée avec la propositoin 17.2.2, montre que le couple $(I_0^{\mathrm{left}}, D_0^{\mathrm{left}})$ est assez surprenant :

Proposition 17.2.4. — *Soit $\mathfrak{C}$ un idéal premier de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$. Alors il existe $h \in H$ tel que ${}^h I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset I_0^{\mathrm{left}}$.*

Démonstration. — Notons $\widetilde{\mathfrak{C}}$ l'idéal homogène maximal de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ contenu dans $\mathfrak{C}$. D'après la proposition 12.2.4, on a $I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} = I_{\widetilde{\mathfrak{C}}}^{\mathrm{left}}$. Cela signifie que l'on peut supposer $\mathfrak{C}$ homogène. En particulier, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_0$. Donc $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset \mathfrak{q}_0^{\mathrm{left}}$ et il existe $h \in H$ tel que $h(\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}) \subset \mathfrak{r}_0^{\mathrm{left}}$. Par suite, ${}^h I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}} \subset I_0^{\mathrm{left}}$. □

Il serait tentant de penser, après la proposition 17.2.2, que $D_0^{\text{left}} = \iota(W \times W)$ et $I_0^{\text{left}} = \iota(W \times \mathrm{Z}(W))$. Cependant, ceci entre en contradiction avec la proposition précédente 17.2.4, surtout si l'on espère que les conjectures LR et L soient valides : en effet, I_0^{left} doit donc contenir des conjugués de sous-groupes admettant pour orbites les cellules de Calogero-Moser à gauche. Nous verrons dans le chapitre 18 que si $\dim_{\mathbf{k}}(V) = 1$, alors $D_0^{\text{left}} = G$.

CHAPITRE 18

GROUPES DE RANG 1

Hypothèses et notation. *Dans ce chapitre, et seulement dans ce chapitre, nous supposons que* $\dim_{\mathbf{k}} V = 1$, *nous fixons un élément non nul* y *de* V *et nous noterons* x *l'unique élément de* V^* *tel que* $\langle y, x\rangle = 1$. *Fixons un entier* $d \geqslant 2$ *et supposons que* $\mathbf{k}$ *contienne une racine primitive* d*-ième de l'unité* ζ. *Notons* s *l'automorphisme de* V *défini par* $s(y) = \zeta y$ *(on a alors* $s(x) = \zeta^{-1}x$*) et supposons de plus que* $W = \langle s\rangle$ *:* s *est une réflexion (!) et* W *est cyclique d'ordre* d.

18.1. L'algèbre H

18.1.A. Définition. — Bien sûr, $\mathrm{Réf}(W) = \{s^i \mid 1 \leqslant i \leqslant d-1\}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant d-1$, nous noterons C_i l'indéterminée C_{s^i}, de sorte que $\mathbf{k}[\mathscr{C}] = \mathbf{k}[C_1, C_2, \ldots, C_{d-1}]$. La relation suivante est vérifiée dans $\mathbf{H}$:

$$[y, x] = \sum_{1 \leqslant i \leqslant d-1} (\zeta^i - 1) C_i \, s^i. \tag{18.1.1}$$

Nous poserons $C_0 = C_{s^0} = 0$. Puisque l'arrangement d'hyperplans $\mathscr{A}$ est réduit à un élément, et donc $\mathscr{A}/W$ aussi (écrivons $\mathscr{A}/W = \{\Omega\}$), nous poserons pour simplifier $K_j = K_{\Omega,j}$ (pour $0 \leqslant j \leqslant d-1$). Rappelons que la famille $(K_j)_{0 \leqslant j \leqslant d-1}$ est déterminée par les relations

$$\forall\ 0 \leqslant i \leqslant d-1,\ C_i = \sum_{j=0}^{d-1} \zeta^{i(j-1)} K_j. \tag{18.1.2}$$

Pour simplifier certains énoncés de cette partie, nous posons

$$K_{di+j} = K_j$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Rappelons que

$$K_0 + K_1 + \cdots + K_{d-1} = 0 \qquad \text{(c'est-à-dire} \quad K_1 + K_2 + \cdots + K_d = 0).$$

18.1.B. Calcul de $(V \times V^*)/W$. — Posons $X = x^d$, $Y = y^d$ et rappelons que $\mathbf{eu}_0 = xy$. Ainsi

$$\mathbf{k}[V \times V^*]^W = \mathbf{k}[X, Y, \mathbf{eu}_0]$$

et la relation suivante

$$\mathbf{eu}_0^d = XY \tag{18.1.3}$$

est satisfaite. Il est facile de vérifier que cette relation engendre l'idéal des relations.

18.2. L'algèbre Z

Rappelons que $\mathbf{eu} = yx + \sum_{i=1}^{d-1} C_i\ s^i$ (de sorte que son image dans $\mathbf{H}_0$ est $\mathbf{eu}_0$) et que $\varepsilon : W \to \mathbf{k}^\times$ est le déterminant : il est caractérisé par $\varepsilon(s) = \zeta$. On a $\varepsilon^d = 1$ et

$$\operatorname{Irr} W = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{d-1}\}.$$

L'image de l'élément d'Euler par Ω_χ se calcule grâce à la proposition 9.3.3 :

$$\Omega_{\varepsilon^i}(\mathbf{eu}) = d\,K_{-i} \tag{18.2.1}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Le résultat suivant est certainement bien connu :

Théorème 18.2.2. — *On a $Z = P[\mathbf{eu}] = \mathbf{k}[C_1, \dots, C_{d-1}, X, Y, \mathbf{eu}] = \mathbf{k}[K_1, \dots, K_{d-1}, X, Y, \mathbf{eu}]$ et l'idéal des relations est engendré par*

$$\prod_{i=1}^{d} (\mathbf{eu} - d\,K_i) = XY.$$

Démonstration. — Soit $z = \prod_{i=1}^{d} (\mathbf{eu} - d\,K_i) - XY$. On a $z \in k[\mathscr{C}]_+ Z$ et z est bihomogène de degré (d, d). On en déduit que $z = \sum_{j=0}^{d-1} z_j\, d^{-j}\, \mathbf{eu}^j$, où $z_j \in k[\mathscr{C}]$ est bihomogène de bidegré $(d-j, d-j)$. On a $\Omega_{\varepsilon^i}(z) = 0 = \sum_{j=0}^{d-1} z_j K_{-i}^j$. Les z_j sont solutions d'un système de Vandermonde de déterminant $\prod_{1 \leqslant j < j' \leqslant d} (K_j - K_{j'}) \neq 0$, donc $z_0 = \dots = z_{d-1} = 0$.

Puisque le polynôme minimal de $\mathbf{eu}$ sur P est de degré $|W| = d$ (voir le corollaire 5.2.10), on en déduit que

$$\prod_{i=1}^{d} (\mathbf{t} - d\,K_i) - XY$$

est le polynôme minimal de $\mathbf{eu}$ sur P, ce qui termine la preuve du théorème. □

Corollaire 18.2.3. — *La $\mathbf{k}$-algèbre Z est d'intersection complète.*

Nous noterons $F_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t}) \in P[\mathbf{t}]$ le polynôme minimal de **eu** sur P. D'après le théorème 18.2.2, on a

$$F_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{d} (\mathbf{t} - d\,K_i) - XY. \tag{18.2.4}$$

18.3. L'anneau R, le groupe G

18.3.A. Polynômes symétriques. — Pour tirer parti du fait que le polynôme minimal de l'élément d'Euler est symétrique en les variables K_i, nous rappelons quelques résultats classiques sur les polynômes symétriques. Si T_1, T_2,..., T_d sont des indéterminées et si $1 \leqslant i \leqslant d$, notons $\sigma_i(\mathbf{T})$ la i-ième fonction symétrique élémentaire

$$\sigma_i(\mathbf{T}) = \sigma_i(T_1, \dots, T_d) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant d} T_{j_1} \cdots T_{j_i}.$$

Rappelons la formule bien connue

$$\det\Big(\frac{\partial \sigma_i(\mathbf{T})}{\partial T_j}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant d} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (T_j - T_i). \tag{18.3.1}$$

Le groupe $\mathfrak{S}_d$ agit sur $\mathbf{k}[T_1, \dots, T_d]$ par permutation des indéterminées. Rappelons le résultat classique suivant (cas particulier du théorème 1.2.1) :

Proposition 18.3.2. — *Les polynômes $\sigma_1(\mathbf{T})$,..., $\sigma_d(\mathbf{T})$ sont algébriquement indépendants et $\mathbf{k}[T_1, \dots, T_d]^{\mathfrak{S}_d} = \mathbf{k}[\sigma_1(\mathbf{T}), \dots, \sigma_d(\mathbf{T})]$. De plus, la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[T_1, \dots, T_d]$ est un $\mathbf{k}[\sigma_1(\mathbf{T}), \dots, \sigma_d(\mathbf{T})]$-module libre de rang d!*

Rappelons aussi que $\sigma_1(\mathbf{T}) = T_1 + \cdots + T_d$:

Corollaire 18.3.3. — *On a $\big(\mathbf{k}[T_1, \dots, T_d]/\langle \sigma_1(\mathbf{T}) \rangle\big)^{\mathfrak{S}_d} \simeq \mathbf{k}[\sigma_2(\mathbf{T}), \dots, \sigma_d(\mathbf{T})]$ et la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[T_1, \dots, T_d]/\langle \sigma_1(\mathbf{T}) \rangle$ est un $\mathbf{k}[\sigma_2(\mathbf{T}), \dots, \sigma_d(\mathbf{T})]$-module libre de rang d!*

Comme conséquence de la proposition 18.3.2, il existe un unique polynôme Δ_d en d variables tel que

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (T_j - T_i)^2 = \Delta_d(\sigma_1(\mathbf{T}), \sigma_2(\mathbf{T}), \dots, \sigma_d(\mathbf{T})). \tag{18.3.4}$$

18.3.B. Présentation de R. — Notons $\sigma_i(\mathbf{K}) = \sigma_i(K_1, \dots, K_d)$ (en particulier, $\sigma_1(\mathbf{K}) = 0$). Alors, d'après le corollaire 18.3.3, $P_{\mathrm{sym}} = \mathbf{k}[\sigma_2(\mathbf{K}), \dots, \sigma_d(\mathbf{K}), X, Y]$ est l'anneau des invariants, dans P, du groupe $\mathfrak{S}_d$ agissant par permutations des K_i. De plus,

(18.3.5) *P est un P_{sym}-module libre de rang d!*

Introduisons une nouvelle famille d'indéterminées $E_1, \dots, E_{d-1}$, et définissons $E_d = -(E_1 + \cdots + E_{d-1})$ et $\sigma_i(\mathbf{E}) = \sigma_i(E_1, \dots, E_d)$ (en particulier $\sigma_1(\mathbf{E}) = 0$). Notons $R_{\mathrm{sym}} = \mathbf{k}[E_1, \dots, E_{d-1}, X, Y] = \mathbf{k}[E_1, \dots, E_d, X, Y]/\langle \sigma_1(\mathbf{E}) \rangle$, sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit par permutations des E_i. L'anneau $R_{\mathrm{sym}}^{\mathfrak{S}_d}$ est donc encore une algèbre de polynômes égale à $\mathbf{k}[\sigma_2(\mathbf{E}), \dots, \sigma_d(\mathbf{E}), X, Y]$ (toujours grâce au corollaire 18.3.3).

Identification. *Nous identifions les* $\mathbf{k}$*-algèbres* P_{sym} *et* $R_{\mathrm{sym}}^{\mathfrak{S}_d}$ *à travers les égalités*

$$\begin{cases} \sigma_1(d\mathbf{K}) = \sigma_1(\mathbf{E}) = 0 \\ \forall\, 2 \leqslant i \leqslant d-1,\ \sigma_i(d\mathbf{K}) = \sigma_i(\mathbf{E}) \\ \sigma_d(d\mathbf{K}) = \sigma_d(\mathbf{E}) + (-1)^d XY \end{cases}$$

Rappelons que $\sigma_i(d\mathbf{K}) = d^i \sigma_i(\mathbf{K})$.

Ainsi,

(18.3.6) *R_{sym} est un P_{sym}-module libre de rang d!*

Lemme 18.3.7. — *L'anneau $P \otimes_{P_{\mathrm{sym}}} R_{\mathrm{sym}}$ est intègre et intégralement clos.*

Démonstration. — Notons tout d'abord que nous pouvons, et nous le ferons, supposer dans cette preuve que $\mathbf{k}$ est algébriquement clos. Posons $\tilde{R} = P \otimes_{P_{\mathrm{sym}}} R_{\mathrm{sym}}$. Alors $\tilde{R}$ admet la présentation suivante :

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{cases} \text{Générateurs :} & K_1, K_2, \dots, K_d, E_1, E_2, \dots, E_d, X, Y \\ \text{Relations :} & \begin{cases} \sigma_1(d\mathbf{K}) = \sigma_1(\mathbf{E}) = 0 \\ \forall\, 2 \leqslant i \leqslant d-1,\ \sigma_i(d\mathbf{K}) = \sigma_i(\mathbf{E}) \\ \sigma_d(d\mathbf{K}) = \sigma_d(\mathbf{E}) + (-1)^d XY \end{cases} \end{cases}$$

La présentation $(\mathscr{P})$ de $\tilde{R}$ montre que l'on peut graduer $\tilde{R}$ de sorte que $\deg(K_i) = \deg(E_i) = 2$ et $\deg(X) = \deg(Y) = d$. Ainsi, la composante de degré 0 de $\tilde{R}$ est isomorphe à $\mathbf{k}$, ce qui montre que

(♣) *$\tilde{R}$ est connexe.*

D'autre part, il découle de (18.3.5) et (18.3.6) que $\tilde{R}$ est un P-module libre de rang $d!$ (et un P_{sym}-module libre de rang $(d!)^2$), et donc que

($\diamondsuit$) *$\tilde{R}$ est un anneau de Cohen-Macaulay purement de dimension $d+1$.*

Mieux, la présentation ($\mathscr{P}$) montre que

($\heartsuit$) *$\tilde{R}$ est un anneau d'intersection complète.*

Montrons maintenant que

($\spadesuit$) *$\tilde{R}$ est régulier en codimension* 1.

Pour cela, notons $\tilde{\mathscr{R}}$ la sous-variété fermée de $\mathbb{A}^{2d+2}(\mathbf{k})$ formée des éléments $r = (k_1,\dots,k_d,e_1,\dots,e_d,x,y)$ satisfaisant aux équations ($\mathscr{P}$). Le Jacobien $\mathrm{Jac}(r)$ du système d'équations ($\mathscr{P}$) en $r \in \tilde{\mathscr{R}}$ est donné par

$$\mathrm{Jac}(r) = \begin{pmatrix} d & \cdots & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \sigma_2(d\mathbf{K})}{\partial K_1}(r) & \cdots & \frac{\partial \sigma_2(d\mathbf{K})}{\partial K_d}(r) & -\frac{\partial \sigma_2(\mathbf{E})}{\partial E_1}(r) & \cdots & -\frac{\partial \sigma_2(\mathbf{E})}{\partial E_d}(r) & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{d-1}(d\mathbf{K})}{\partial K_1}(r) & \cdots & \frac{\partial \sigma_{d-1}(d\mathbf{K})}{\partial K_d}(r) & -\frac{\partial \sigma_{d-1}(\mathbf{E})}{\partial E_1}(r) & \cdots & -\frac{\partial \sigma_{d-1}(\mathbf{E})}{\partial E_d}(r) & 0 & 0 \\ \frac{\partial \sigma_d(d\mathbf{K})}{\partial K_1}(r) & \cdots & \frac{\partial \sigma_{d-1}(d\mathbf{K})}{\partial K_d}(r) & -\frac{\partial \sigma_d(\mathbf{E})}{\partial E_1}(r) & \cdots & -\frac{\partial \sigma_d(\mathbf{E})}{\partial E_d}(r) & (-1)^{d+1}y & (-1)^{d+1}x \end{pmatrix}$$

Puisque $\tilde{\mathscr{R}}$ est purement de dimension $d+1$ et d'intersection complète, r est un point lisse si et seulement si le rang de $\mathrm{Jac}(r)$ est égal à $(2d+2)-(d+1) = d+1$. Or, si le rang de $\mathrm{Jac}(r)$ est inférieur ou égal à d, cela implique que

$$\det\Big(\frac{\partial \sigma_i(d\mathbf{K})}{\partial K_j}(k_1,\dots,k_d)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant d} = \det\Big(\frac{\partial \sigma_i(\mathbf{E})}{\partial E_j}(e_1,\dots,e_d)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant d} = 0.$$

D'après (18.3.1), cela signifie que

$$\prod_{1 \leqslant i<j \leqslant d}(k_j - k_i) = \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant d}(e_j - e_i) = 0$$

En particulier,

$$\Delta_d(\sigma_1(k_1,\dots,k_d),\dots,\sigma_d(k_1,\dots,k_d)) = \Delta_d(\sigma_1(e_1,\dots,e_d),\dots,\sigma_d(e_1,\dots,e_d)) = 0.$$

Compte tenu du fait que $r \in \tilde{\mathscr{R}}$ vérifie les équations ($\mathscr{P}$), cela montre que la projection du lieu singulier de $\tilde{\mathscr{R}}$ sur la variété $\mathscr{P}_{\mathrm{sym}} \simeq \mathbb{A}^{d+1}(\mathbf{k})$ est contenu dans l'ensemble des $(d+2)$-uplets $(a_2,\dots,a_d,x,y) \in \mathbb{A}^{d+1}(\mathbf{k})$ tels que

($*$) $$\Delta_d(0,a_2,\dots,a_{d-1},a_d) = \Delta_d(0,a_2,\dots,a_{d-1},a_d + (-1)^d xy) = 0.$$

Il est bien connu que $\Delta_d(0,U_2,\dots,U_d)$ est un polynôme irréductible en les indéterminées $U_1,\dots,U_d$. Par conséquent, pour montrer que la sous-variété de $\mathbb{A}^{d+1}(\mathbf{k})$

définie par les équations $(*)$ est de codimension $\geqslant 2$, il suffit de montrer qu'il existe $(a_2,\dots,a_d,x,y)\in\mathbb{A}^{d+1}(\mathbf{k})$ tel que $\Delta_d(0,a_2,\dots,a_{d-1},a_d)=0$ et $\Delta_d(0,a_2,\dots,a_{d-1},a_d+(-1)^d xy)\neq 0$. Il suffit pour cela de prendre $a_2=\cdots=a_d=0$ et $x=y=1$. Cela termine la démonstration de (♠).

En conclusion, d'après (♢) et (♠), $\tilde{R}$ est normal (voir [**Ser**, §IV.D, théorème 11]). C'est donc un produit direct d'anneaux intègres intégralement clos mais, étant connexe d'après (♣), cela signifie que $\tilde{R}$ est intègre et intégralement clos. □

Comme conséquence du lemme précédent, nous obtenons :

Théorème 18.3.8. — *L'anneau R vérifie les propriétés suivantes :*

(a) *R est isomorphe à $P\otimes_{P_{\mathrm{sym}}} R_{\mathrm{sym}}$. Il admet la présentation suivante :*

$$(\mathscr{P})\qquad \begin{cases} \textit{Générateurs :} & K_1,K_2,\dots,K_d,E_1,E_2,\dots,E_d,X,Y \\ \textit{Relations :} & \begin{cases} \sigma_1(d\mathbf{K})=\sigma_1(\mathbf{E})=0 \\ \forall\ 2\leqslant i\leqslant d-1,\ \sigma_i(d\mathbf{K})=\sigma_i(\mathbf{E}) \\ \sigma_d(d\mathbf{K})=\sigma_d(\mathbf{E})+(-1)^d XY \end{cases} \end{cases}$$

(b) *R est un anneau d'intersection complète et R est un P-module libre de rang $d!$ (en particulier, R est un anneau de Cohen-Macaulay).*

(c) *Il existe un unique morphisme de P-algèbres $\mathrm{cop}:Z\to R$ tel que $\mathrm{cop}(\mathbf{eu})=E_d$. Ce morphisme est injectif (on note Q son image).*

(d) *Pour l'action du groupe $\mathfrak{S}_d$ par permutation des E_i, on a $R^{\mathfrak{S}_d}=P$ et $R^{\mathfrak{S}_{d-1}}=Q$.*

(e) *$G=\mathfrak{S}_W\simeq\mathfrak{S}_d$; si $\sigma\in\mathfrak{S}_d$ et $1\leqslant i\leqslant d$, alors $\sigma(E_i)=E_{\sigma(i)}$. L'élément* eu *de Q s'identifie à E_d.*

(f) *G est un groupe de réflexions pour son action sur $R_+/(R_+)^2$.*

Démonstration. — Reprenons la notation $\tilde{R}=P\otimes_{P_{\mathrm{sym}}} R_{\mathrm{sym}}$ utilisée dans la preuve du lemme 18.3.7. Les relations $(\mathscr{P})$ montrent que, dans l'anneau de polynômes $\tilde{R}[\mathbf{t}]$, on a l'égalité

$$\prod_{i=1}^{d}(\mathbf{t}-dK_i)-XY=\prod_{i=1}^{d}(\mathbf{t}-E_i).$$

Ainsi, E_d annule le polynôme minimal de **eu** sur P ce qui, compte tenu du théorème 18.2.2, montre qu'il existe un unique morphisme de P-algèbres $\mathrm{cop}:Z\to\tilde{R}$ tel que $\mathrm{cop}(\mathbf{eu})=E_d$. Si on note $\mathfrak{z}=\mathrm{Ker}(\mathrm{cop})$, alors $\mathfrak{z}\cap P=0$ car $P\subset\tilde{R}$ et, puisque Z est intègre et est un P-module de type fini, cela force $\mathfrak{z}=0$. Donc $\mathrm{cop}:Z\to\tilde{R}$ est injectif (on note Q son image).

Notons $\tilde{\mathbf{M}}$ le corps des fractions de $\tilde{R}$ (rappelons que $\tilde{R}$ est intègre en vertu du lemme 18.3.7). Par construction, $\tilde{R}$ est P-libre de rang $d!$ et, d'après le corollaire 18.3.3, $\tilde{R}^{\mathfrak{S}_d}=P$. Donc l'extension $\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{K}$ est galoisienne, contient $\mathbf{L}$ (le corps

des fractions de Q) et vérifie $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{K}) = \mathfrak{S}_d$. De plus, toujours par construction, $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{L}) = \mathfrak{S}_{d-1}$ (car $\mathfrak{S}_{d-1}$ est le stabilisateur de E_d dans $\mathfrak{S}_d$). Puisque le seul sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_d$ contenu dans $\mathfrak{S}_{d-1}$ est le groupe trivial, cela montre donc que $\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{K}$ est une clôture galoisienne de $\mathbf{L}/\mathbf{K}$. Donc $\tilde{\mathbf{M}} \simeq \mathbf{M}$.

Puisque $\tilde{R}$ est intégralement clos (voir le lemme 18.3.7) et entier sur P, cela implique que $\tilde{R} \simeq R$. Tous les énoncés du théorème 18.3.8 se déduisent de ces observations (pour l'énoncé (f), on peut cependant utiliser (b), et la proposition B.3.7 car $\mathfrak{S}_d$ agit trivialement sur les relations, ou alors vérifier directement en remarquant que $R_+/(R_+)^2$ est le $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension $2d$ engendré par $K_1, \dots, K_d$, $E_1, \dots, E_d$, X, Y, avec les relations $K_1 + \cdots + K_d = 0$ et $E_1 + \cdots + E_d = 0$: cela montre que, comme représentation de $\mathfrak{S}_d$, $R_+/(R_+)^2$ est la somme directe de la représentation irréductible de réflexion et de $d+1$ copies de la représentation triviale). □

18.3.C. Choix de l'idéal $\mathfrak{r}_0$. — Notons $\mathfrak{r}'$ l'idéal de R engendré par les éléments $E_i - \zeta^i E_d$. On a alors

$$\sigma_1(\mathbf{E}) \equiv \sigma_2(\mathbf{E}) \equiv \cdots \equiv \sigma_{d-1}(\mathbf{E}) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}'.$$

Nous choisissons pour $\mathfrak{r}_0$ l'idéal de R égal à $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}' + \langle K_1, \dots, K_d \rangle_R$. Alors $R/\mathfrak{r}_0$ admet la présentation suivante :

$$(\mathscr{P}_0) \qquad \begin{cases} \text{Générateurs :} & E_d, X, Y \\ \text{Relation :} & E_d^d = XY \end{cases}$$

Rappelons que $\mathrm{Z}(W) = W$. Ainsi, comme prévu, $R/\mathfrak{r}_0 \simeq Q/\mathfrak{q}_0 \simeq \mathbf{k}[V \times V^*]^{\Delta W}$, à travers l'isomorphisme qui envoie $\mathrm{eu} = E_d$ sur $\mathbf{eu}_0 = yx \in \mathbf{k}[V \times V^*]^{\Delta W}$. Rappelons qu'un élément $w \in W$, vu comme un élément du groupe de Galois $G = \mathfrak{S}_W \simeq \mathfrak{S}_d$, est caractérisé par l'égalité

$$(w(\mathrm{eu}) \mod \mathfrak{r}_0) \equiv w(y)x \in \mathbf{k}[V \times V^*]^{\Delta W}.$$

Or, $s^i(y) = \zeta^i y$, donc

$$s^i(\mathrm{eu}) = E_i. \tag{18.3.9}$$

Pour l'action de $G = \mathfrak{S}_W \simeq \mathfrak{S}_d$, cela revient à identifier les ensembles $\{1, 2, \dots, d\}$ et W à travers la bijection $i \mapsto s^i$, ce qui est naturel.

18.3.D. Choix des idéaux $\mathfrak{r}^{\text{left}}$, $\mathfrak{r}^{\text{right}}$ et $\bar{\mathfrak{r}}$. — Notons $\mathfrak{r}''$ l'idéal de R engendré par les $E_i - dK_i$. Ainsi

$$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant d,\ \sigma_i(d\mathbf{K}) \equiv \sigma_i(\mathbf{E}) \mod \mathfrak{r}''.$$

En particulier, $XY \in \mathfrak{r}''$. Nous choisissons $\mathfrak{r}^{\text{left}} = \mathfrak{r}'' + \langle Y \rangle_R$, $\mathfrak{r}^{\text{right}} = \mathfrak{r}'' + \langle X \rangle_R$ et $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}'' + \langle X, Y \rangle_R$. Alors

$$\begin{cases} R/\mathfrak{r}^{\text{left}} \simeq \mathbf{k}[K_1, \dots, K_{d-1}, X] = P/\mathfrak{p}^{\text{left}}, \\ R/\mathfrak{r}^{\text{right}} \simeq \mathbf{k}[K_1, \dots, K_{d-1}, Y] = P/\mathfrak{p}^{\text{right}}, \\ R/\bar{\mathfrak{r}} \simeq \mathbf{k}[K_1, \dots, K_{d-1}] = \mathbf{k}[\mathscr{C}] = P/\bar{\mathfrak{p}}. \end{cases} \tag{18.3.10}$$

Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

Proposition 18.3.11. — $D^{\text{left}} = I^{\text{left}} = D^{\text{right}} = I^{\text{right}} = \bar{D} = \bar{I} = 1$.

18.4. Cellules, familles, caractères cellulaires

> **Notation.** *Nous fixons dans cette section un idéal premier $\mathfrak{C}$ de $\mathbf{k}[\mathscr{C}]$ et nous notons k_i l'image de K_i dans $\mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}$.*

Compte tenu de (18.3.10), on a

$$\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} = \mathfrak{r}^{\text{left}} + \mathfrak{C}R, \quad \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = \mathfrak{r}^{\text{right}} + \mathfrak{C}R \quad \text{et} \quad \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{r}} + \mathfrak{C}R \tag{18.4.1}$$

et

$$\begin{cases} R/\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} = \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C} \otimes \mathbf{k}[X] = P/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}, \\ R/\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C} \otimes \mathbf{k}[Y] = P/\mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}, \\ R/\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}} = \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C} = P/\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}. \end{cases} \tag{18.4.2}$$

On notera $\mathfrak{S}[\mathfrak{C}]$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_d$ formé des permutations stabilisant les fibres de l'application $\{1, 2, \dots, d\} \to \mathbf{k}[\mathscr{C}]/\mathfrak{C}$, $i \mapsto k_i$. En d'autres termes,

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{C}] = \{\sigma \in \mathfrak{S}_d \mid \forall\ 1 \leqslant i \leqslant d,\ k_{\sigma(i)} = k_i\}.$$

Alors :

Proposition 18.4.3. — $D_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} = I_{\mathfrak{C}}^{\text{left}} = D_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = I_{\mathfrak{C}}^{\text{right}} = \bar{D}_{\mathfrak{C}} = \bar{I}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{S}[\mathfrak{C}]$.

Corollaire 18.4.4. — *Soient $i, j \in \mathbb{Z}$. Alors s^i et s^j sont dans la même $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère (resp. à gauche, resp. à droite) si et seulement si $k_i = k_j$.*

Terminons avec la description des familles et des caractères cellulaires.

Corollaire 18.4.5. — *Soient $i, j \in \mathbb{Z}$. Alors ε^{-i} et ε^{-j} sont dans la même $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser bilatère (resp. à gauche, resp. à droite) si et seulement si $k_i = k_j$.*

L'application $\omega \mapsto \sum_{i\in\omega} \varepsilon^{-i}$ induit une bijection entre l'ensemble des $\mathfrak{S}[\mathfrak{C}]$-orbites dans $\{1,2,\dots,d\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des fibres de l'application $i \mapsto k_i$) et l'ensemble des CM-*caractères $\mathfrak{C}$-cellulaires.*

Démonstration. — Puisque $Z = P[\mathbf{eu}]$, on déduit que ε^{-i} et ε^{-j} sont dans la même $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser si et seulement si $\Omega^{\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}}_{\varepsilon^{-i}}(\mathbf{eu}) = \Omega^{\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}}_{\varepsilon^{-j}}(\mathbf{eu})$. Donc la première assertion découle de 18.2.1.

Pour la deuxième, on remarque que **eu** agit sur $\mathscr{L}_{s^i}$ par multiplication par $s^i(\mathrm{eu}) = E_i$. Donc, modulo $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}$ (ou $\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$), l'élément $s^i(\mathrm{eu})$ est congru à $d\,k_i = \Omega^{\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}}_{\varepsilon^{-i}}(\mathbf{eu})$. Ainsi, si ω est une $\mathfrak{S}[\mathfrak{C}]$-orbite dans $\{1,2,\dots,d\}$, alors $C = \{s^i \mid i \in \omega\}$ est une $\mathfrak{C}$-cellule de Calogero-Moser à gauche, à droite ou bilatère (voir le corollaire 18.4.4) et, en tant que cellule bilatère, elle recouvre la $\mathfrak{C}$-famille de Calogero-Moser $\{\varepsilon^{-i} \mid i \in \omega\}$. Or, $\mathbf{M}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\varepsilon^{-i})$ est un $\mathbf{M}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}\mathbf{H}^{\mathrm{left}}$-module (absolument) simple (car il est de dimension $|W|$) : c'est forcément $\mathscr{L}^{\mathrm{left}}_{\mathfrak{C}}(C)$. Ceci montre que $[\,C\,]^{\mathrm{CM}}_{\mathfrak{C}} = \sum_{i\in\omega} \varepsilon^{-i}$. □

18.5. Compléments

On va s'intéresser ici aux propriétés géométriques de $\mathscr{X}$ (lissité, ramification) et aux propriétés du groupe D_c. Pour simplifier les énoncés, nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse et notations. *Dans cette section, et seulement dans cette section, nous supposerons que* $\mathbf{k}$ *est* ***algébriquement clos****. Nous identifierons la variété* $\mathscr{X}$ *avec*

$$\mathscr{X} = \{(k_1,\dots,k_d,x,y,e) \in \mathbb{A}^{d+3}(\mathbf{k}) \mid k_1+\cdots+k_d = 0 \text{ et } \prod_{i=1}^{d}(e-d\,k_i) = xy\}.$$

De même, $\mathscr{P}$ *(respectivement* $\mathscr{C}$*) sera identifié avec l'hyperplan*

$$\mathscr{P} = \{(k_1,\dots,k_d,x,y) \in \mathbb{A}^{d+2}(\mathbf{k}) \mid k_1+\cdots+k_d = 0\}$$

(respectivement

$$\mathscr{C} = \{(k_1,\dots,k_d) \in \mathbb{A}^{d}(\mathbf{k}) \mid k_1+\cdots+k_d = 0\} \quad),$$

ce qui permet de redéfinir

$$\begin{array}{rccc} \Upsilon : & \mathscr{X} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ & (k_1,\dots,k_d,x,y,e) & \longmapsto & (k_1,\dots,k_d,x,y). \end{array}$$

Pour finir, nous noterons $\mathscr{X}_{\mathrm{sing}}$ *le lieu singulier de* $\mathscr{X}$ *et* $\mathscr{X}_{\mathrm{ram}}$ *le lieu de ramification du morphisme* Υ.

18.5.A. Lissité. — Commençons par la description des singularités de la variété $\mathscr{X}$:

Proposition 18.5.1. — *Si* $1 \leqslant i < j \leqslant d$*, notons* $\mathscr{X}_{i,j} = \{(k_1,\dots,k_d,x,y,e) \in \mathscr{X} \mid e = k_i = k_j \text{ et } x = y = 0\}$*. Alors*

$$\mathscr{X}_{\mathrm{sing}} = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant d} \mathscr{X}_{i,j}.$$

De plus, $\mathscr{X}_{i,j} \simeq \mathbb{A}^{d-2}(\mathbf{k})$ *est une composante irréductible de* $\mathscr{X}_{\mathrm{sing}}$ *et* $\mathscr{X}_{\mathrm{sing}}$ *est purement de codimension* 3.

Démonstration. — La variété $\mathscr{X}$ étant décrite comme une hypersurface dans l'espace affine $\{(k_1,\dots,k_d,x,y,e) \in \mathbb{A}^{d+3}(\mathbf{k}) \mid k_1+\cdots+k_d = 0\} \simeq \mathbb{A}^{d+2}(\mathbf{k})$, un point $z = (k_1,\dots,k_d,x,y,e) \in \mathscr{X}$ est singulier si et seulement si la matrice jacobienne de cette équation s'annule en z. Cela est équivalent au système d'équations :

$$\begin{cases} x = y = 0, \\ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant d, \prod_{j \neq i}(e - d\,k_j) = 0, \\ \sum_{i=1}^{d} \prod_{j \neq i}(e - d\,k_j) = 0. \end{cases}$$

La dernière équation étant impliquée par la deuxième famille d'équations, il est alors facile de vérifier que $\mathscr{X}_{\mathrm{sing}}$ est bien décrit comme l'énoncé le prétend.

Les dernières assertions sont immédiates. □

Corollaire 18.5.2. — *Si $c \in \mathscr{C}$ et $z \in \mathscr{Z}_c$, alors z est singulier dans $\mathscr{Z}$ si et seulement si il l'est dans $\mathscr{Z}_c$.*

18.5.B. Ramification. — La variété $\mathscr{Z}$ étant normale, la variété $\mathscr{P}$ étant lisse et le morphisme $\Upsilon : \mathscr{Z} \to \mathscr{P}$ étant plat et fini, le théorème de pureté du lieu de ramification [**SGA1**, Exposé X, théorème 3.1] nous dit que le lieu de ramification de Υ est purement de codimension 1. Il est en fait aisément calculable :

Proposition 18.5.3. — *Soit $z = (k_1, \dots, k_d, x, y, e) \in \mathscr{Z}$ et $p = (k_1, \dots, k_d, x, y) = \Upsilon(z) \in \mathscr{P}$. On note $F_{\mathbf{eu},p}(\mathbf{t}) \in \mathbf{k}[\mathbf{t}]$ la spécialisation de $F_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$ en p. Alors Υ est ramifié en z si et seulement si $F'_{\mathbf{eu},p}(e) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si e est une racine multiple de $F_{\mathbf{eu},p}$.*

Démonstration. — Puisque $Z = P[\mathbf{t}]/\langle F_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})\rangle$ (voir le théorème 18.2.2), cela découle immédiatement de [**SGA1**, Exposé I, corollaire 7.2]. □

Corollaire 18.5.4. — *Soit $c = (k_1, \dots, k_d) \in \mathscr{C}$ et $(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ (de sorte que $(c, x, y) \in \mathscr{P}$). Alors $(c, x, y) \in \Upsilon(\mathscr{Z}_{\mathrm{ram}})$ si et seulement si $\Delta_d(0, \sigma_2(c), \dots, \sigma_{d-1}(c), \sigma_d(c) - (-1)^d xy) = 0$.*

18.5.C. Sur les groupes D_c. — Parmi les groupes D_c, le seul dont nous ayons besoin est le groupe D_0. Dans cette sous-section, nous allons montrer que, même lorsque $n = \dim_{\mathbf{k}}(V) = 1$, les groupes D_c ont un comportement extrêmement difficile à cerner : c'est une chance de ne pas avoir à les utiliser.

Les faits rapportés dans cette sous-section nous ont été expliqués par G. Malle (les erreurs éventuelles nous étant dues). Nous le remercions chaleureusement pour son aide. Fixons $c \in \mathscr{C}$, et notons $F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$ la spécialisation de $F_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$ en c. C'est un polynôme appartenant à $\mathbf{k}[X, Y][\mathbf{t}]$ et D_c est le groupe de Galois de $F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t}) \in \mathbf{k}[X, Y][\mathbf{t}]$, vu comme polynôme à coefficients dans le corps $\mathbf{k}(X, Y)$. Notons qu'en fait $F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t}) \in \mathbf{k}[XY][\mathbf{t}]$: nous noterons $T = XY$, de sorte que $F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t}) \in \mathbf{k}[T][\mathbf{t}]$. Le résultat suivant permet de simplifier le calcul de D_c :

Lemme 18.5.5. — *D_c est le groupe de Galois de $F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$ vu comme polynôme à coefficients dans le corps $\mathbf{k}(T)$.*

Démonstration. — Si L est un corps de décomposition du polynôme $F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$ sur $\mathbf{k}(T)$, alors le corps $L(Y)$ des fractions rationnelles est un corps de décomposition du même polynôme sur $\mathbf{k}(T, Y) = \mathbf{k}(X, Y)$. Le résultat en découle. □

Corollaire 18.5.6. — *Le sous-groupe D_c de $G = \mathfrak{S}_d$ contient un cycle de longueur d.*

Démonstration. — Grâce au lemme 18.5.5, voyons $F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$ comme appartenant à $\mathbf{k}[T][\mathbf{t}]$. Puisque $\mathbf{k}$ est de caractéristique zéro et $\mathbf{k}[T]$ est régulier de dimension 1, le groupe d'inertie à l'infini I est cyclique. Puisque $d \geqslant 2$, le polynôme $F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$ est totalement ramifié à l'infini, ce qui implique que I agit transitivement sur $\{1, 2, \ldots, d\}$. D'où le résultat. □

Le corollaire 18.5.6 impose des restrictions sévères sur le groupe D_c. Notons celles-ci (la première est due à Schur, la deuxième à Burnside) :

Corollaire 18.5.7. — (a) *Si d n'est pas premier et D_c est primitif, alors D_c est 2-transitif.*

(b) *Si d est premier, alors D_c est 2-transitif ou bien D_c contient un d-sous-groupe de Sylow distingué.*

De plus, $\mathbf{k}(T)[\mathbf{t}]/\langle F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})\rangle \simeq \mathbf{k}(\mathbf{t})$, donc la courbe projective lisse de corps des fractions $\mathbf{k}(T)[\mathbf{t}]/\langle F^c_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})\rangle$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$: elle est de genre zéro. La conjecture de Guralnick-Thompson, dont la preuve a été complété par Frohardt et Magaard [**FrMa**], implique alors le résultat suivant :

Théorème 18.5.8 **(Conjecture de Guralnick-Thompson)**. — *Il existe un ensemble fini $\mathscr{E}$ de groupes finis simples tels que, pour tout $d \geqslant 2$ et pour tout $c \in \mathscr{C}$, tout facteur de composition de D_c non abélien et non alterné appartienne à $\mathscr{E}$.*

Nous allons montrer ici par quelques exemples que le calcul de D_c en général peut cependant se révéler extrêmement compliqué : il peut même dépendre du choix du corps de base $\mathbf{k}$, comme le montre le tableau suivant, qui donne le groupe D_c selon que $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ (dans ce tableau, Fr_{pr} désigne le groupe de Frobenius $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, vu comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$, où p est premier et r divise $p-1$).

$F_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t})$	$\mathbf{k}=\mathbb{Q}$	$\mathbf{k}=\mathbb{C}$
$(\mathbf{t}^2+20\mathbf{t}+180)(\mathbf{t}^2-5\mathbf{t}-95)^4-XY$	$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_6)$	$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_6)$
$(\mathbf{t}+1)^4(\mathbf{t}-2)^2(\mathbf{t}^3-3\mathbf{t}-14)-XY$	$(\mathfrak{S}_3 \wr \mathfrak{S}_3)\cap\mathfrak{A}_9$	$(\mathfrak{S}_3 \wr \mathfrak{S}_3)\cap\mathfrak{A}_9$
$\mathbf{t}(\mathbf{t}^8+6\mathbf{t}^4+25)-XY$	$\mathfrak{A}_9$	$\mathfrak{A}_9$
$\mathbf{t}(\mathbf{t}^4+6\mathbf{t}^2+25)^2-XY$	$\mathfrak{A}_9$	$\mathfrak{A}_9$
$\mathbf{t}^9-9\mathbf{t}^7+27\mathbf{t}^5-30\mathbf{t}^3+9\mathbf{t}-XY$	$\mathfrak{S}_3\ltimes(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$	$\mathfrak{S}_3\ltimes(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
$\mathbf{t}^{11}-11\mathbf{t}^9+44\mathbf{t}^7-77\mathbf{t}^5+55\mathbf{t}^3-11\mathbf{t}-XY$	Fr_{110}	Fr_{22}
$\mathbf{t}^{13}-13\mathbf{t}^{11}+65\mathbf{t}^9-156\mathbf{t}^7+182\mathbf{t}^5-91\mathbf{t}^3+13\mathbf{t}-XY$	Fr_{156}	Fr_{26}

À propos de ce tableau, quelques commentaires s'imposent. Pour préciser sur quel corps on travaille, notons $D_c^{\mathbf{k}}$ le groupe de Galois D_c. Commençons par rappeler quelques faits classiques :

(a) $D_c^{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe distingué de $D_c^{\mathbb{Q}}$.

(b) Le calcul de $D_c^{\mathbb{Q}}$ dans tous les exemples ci-dessus peut être effectué grâce au logiciel MAGMA (voir [**Magma**]).

(c) Puisqu'il n'existe pas de revêtement non ramifié de la droite affine, $D_c^{\mathbb{C}}$ est engendré par ses sous-groupes d'inertie.

(d) Si $z\in\mathbb{C}$, notons $F_{\mathbf{eu}}^{c,z}(\mathbf{t})$ la spécialisation en $T\mapsto z$ de $F_{\mathbf{eu}}^{c}(\mathbf{t})$. Si $\alpha\in\mathbb{C}$ est une racine de $F_{\mathbf{eu}}^{c,z}(\mathbf{t})$ de multiplicité m, alors $D_c^{\mathbb{C}}$ contient un élément d'ordre m.

À partir de ces faits-là, le tableau ci-dessus s'obtient de la façon suivante (notons $\Delta_c(T)\in\mathbf{k}[T]$ le discriminant du polynôme $F_{\mathbf{eu}}^{c}(\mathbf{t})$) :

(1) Le calcul de $D_c^{\mathbb{Q}}$ dans le premier exemple est effectué dans [**MalMat**, théorème I.9.7]. Notons que, pour retrouver le polynôme de [**MalMat**, théorème I.9.7], il faut remplacer dans le polynôme ci-dessus $\mathbf{t}$ par $2\mathbf{t}-5$, et renormaliser : cette opération nous permet d'obtenir un polynôme dont le coefficient de $\mathbf{t}^9$ est nul, comme cela doit être le cas pour $F_{\mathbf{eu}}^{c}(\mathbf{t})$. Le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$ en découle, car cet exemple provient d'un *triplet rigide*.

(2) Dans le deuxième exemple, le logiciel MAGMA nous dit que $D_c^{\mathbb{Q}}=(\mathfrak{S}_3\wr\mathfrak{S}_3)\cap\mathfrak{A}_9$. D'autre part, $D_c^{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe distingué de $D_c^{\mathbb{Q}}$ contenant un élément d'ordre 9. De plus, -1 est une racine de $F_{\mathbf{eu}}^{c,0}(\mathbf{t})$ de multiplicité 4, donc $D_c^{\mathbb{C}}$ contient un élément d'ordre 4 (voir (d)). Il contient aussi un élément d'ordre 9

(voir le corollaire 18.5.6). Or $D_c^{\mathbb{Q}}$ ne contient qu'un seul sous-groupe distingué contenant un élément d'ordre 9 et un élément d'ordre 4, c'est lui-même. D'où $D_c^{\mathbb{C}} = D_c^{\mathbb{Q}}$.

(3-4) Dans les troisième et quatrième exemples, le fait que $D_c^{\mathbb{Q}} = \mathfrak{A}_9$ est obtenu grâce au logiciel MAGMA. Le fait que $D_c^{\mathbb{C}} = \mathfrak{A}_9$ découle de ce que $D_c^{\mathbb{C}}$ est distingué dans $D_c^{\mathbb{Q}}$ et contient un élément d'ordre 9.

(5) Une fois le calcul de $D_c^{\mathbb{Q}}$ via MAGMA effectué, remarquons que

$$F_{\mathbf{eu}}^{c,2}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}-2)(\mathbf{t}+1)^2(\mathbf{t}^3-3\mathbf{t}+1)^2$$

ce qui permet d'affirmer, grâce à (d) et au corollaire 18.5.6, que $D_c^{\mathbb{C}}$ contient un élément d'ordre 9 et un élément d'ordre 2. Donc 18 divise $|D_c^{\mathbb{C}}|$. Or $D_c^{\mathbb{Q}}$ ne contient pas de sous-groupe distingué d'indice 3 et contenant un élément d'ordre 9.

(6-7) Les deux derniers exemples se traitent de la même manière. Nous ne traiterons ici que le dernier. Dans ce cas, grâce au logiciel MAGMA, on obtient

$$\Delta_c(T) = 13^{13}(T-2)^6(T+2)^6.$$

Ce discriminant n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}(T)$, alors que c'est un carré dans $\mathbb{C}(T)$. Les groupes d'inertie non triviaux de $D_c^{\mathbb{C}}$, en dehors du groupe d'inertie à l'infini, se trouvent au-dessus des idéaux $\langle T-2\rangle$ et $\langle T+2\rangle$. Or,

$$F_{\mathbf{eu}}^{c,2}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}-2)(\mathbf{t}^6+\mathbf{t}^5-5\mathbf{t}^4-4\mathbf{t}^3+6\mathbf{t}^2+3\mathbf{t}-1)^2$$

et

$$F_{\mathbf{eu}}^{c,-2}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}+2)(\mathbf{t}^6-\mathbf{t}^5-5\mathbf{t}^4+4\mathbf{t}^3+6\mathbf{t}^2-3\mathbf{t}-1)^2.$$

Donc les groupes d'inertie sont d'ordre 2, ce qui montre que $D_c^{\mathbb{C}}$ est engendré par ses éléments d'ordre 2. D'où $D_c^{\mathbb{C}} = \mathrm{Fr}_{26}$.

CHAPITRE 19

LE TYPE B_2

Hypothèses et notations. *Dans ce chapitre, et seulement dans ce chapitre, nous supposons que* $\dim_{\mathbf{k}} V = 2$, *nous fixons une* $\mathbf{k}$*-base* (x, y) *de* V *et nous noterons* (X, Y) *sa* $\mathbf{k}$*-base duale. Notons* s *et* t *les deux réflexions de* $\mathrm{GL}_{\mathbf{k}}(V)$ *dont les matrices dans la base* (x, y) *sont données par*

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous supposons de plus que $W = \langle s, t \rangle$ *: c'est un groupe de Weyl de type* B_2.

19.1. L'algèbre H

Posons alors $w = st$, $w' = ts$, $s' = tst$, $t' = sts$ et $w_0 = stst = tsts = -\mathrm{Id}_V$. Alors

$$W = \{1, s, t, w, w', s', t', w_0\} \qquad \text{et} \qquad \text{Réf}(W) = \{s, t, s', t'\}.$$

De plus,

$$\text{Réf}(W)/W = \{\{s, s'\}, \{t, t'\}\}.$$

Les matrices des éléments w, w', s', t' et w_0 dans la base (x,y) sont données par

$$\text{(19.1.1)} \qquad \begin{cases} w = st = s't' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ w' = ts = t's' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ s' = tst = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ t' = sts = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ w_0 = ss' = tt' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Nous poserons $A = C_s$ et $B = C_t$ de sorte que, dans $\mathbf{H}$, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\text{(19.1.2)} \qquad \begin{cases} [x,X] = -A(s+s') - 2Bt, \\ [x,Y] = A(s-s'), \\ [y,X] = A(s-s'), \\ [y,Y] = -A(s+s') - 2Bt'. \end{cases}$$

On en déduit par exemple

$$\text{(19.1.3)} \qquad \begin{cases} [x,X^2] = -A(s+s')X - A(s-s')Y, \\ [x,XY] = -2BtY, \\ [x,Y^2] = A(s+s')X + A(s-s')Y, \\ [y,X^2] = A(s+s')Y + A(s-s')X, \\ [y,XY] = -2Bt'X, \\ [y,Y^2] = -A(s+s')Y - A(s-s')X. \end{cases}$$

Notons enfin que $\mathbf{H}$ est muni d'un automorphisme η correspondant à $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$:

$$\eta(x) = y - x, \quad \eta(y) = x + y, \quad \eta(X) = \frac{Y-X}{2}, \quad \eta(Y) = \frac{X+Y}{2},$$
$$\eta(A) = B, \quad \eta(B) = A, \quad \eta(s) = t \quad \text{et} \quad \eta(s) = t.$$

19.2. Caractères irréductibles

Notons ε_s (respectivement ε_t) l'unique caractère linéaire de W tel que $\varepsilon_s(s) = -1$ et $\varepsilon_s(t) = 1$ (respectivement $\varepsilon_t(s) = 1$ et $\varepsilon_t(t) = -1$). Remarquons que $\varepsilon_s\varepsilon_t = \varepsilon$. Notons

g	1	w_0	s	t	w
$\lvert \mathrm{Cl}_W(g)\rvert$	1	1	2	2	2
$o(g)$	1	2	2	2	4
$\mathrm{C}_W(g)$	W	W	$\langle s, s'\rangle$	$\langle t, t'\rangle$	$\langle w\rangle$
1	1	1	1	1	1
ε_s	1	1	-1	1	-1
ε_t	1	1	1	-1	-1
ε	1	1	-1	-1	1
χ	2	-2	0	0	0

TABLE 19.2.1. Table des caractères de W

χ le caractère de la représentation V de W. Alors

$$\mathrm{Irr}(W) = \{1, \varepsilon_s, \varepsilon_t, \varepsilon, \chi\}$$

et la table des caractères de W est donnée dans la table 19.2.1. Les degrés fantômes sont donnés par

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{t}) = 1, \\ f_{\varepsilon_s}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^2, \\ f_{\varepsilon_t}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^2, \\ f_{\varepsilon}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^4, \\ f_{\chi}(\mathbf{t}) = \mathbf{t} + \mathbf{t}^3. \end{cases} \tag{19.2.2}$$

19.3. Calcul de $(V \times V^*)/W$

Avant de calculer le centre Z de $\mathbf{H}$, nous allons calculer sa spécialisation Z_0 en $(A, B) \mapsto (0, 0)$. D'après l'exemple 5.2.7,

$$Z_0 = \mathbf{k}[V \times V^*]^W.$$

Grâce à (19.2.2) et à la proposition 1.5.12. la série de Hilbert bi-graduée de Z_0 est donnée par

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(Z_0) = \frac{1+\mathbf{tu}+\mathbf{tu}^3+2\mathbf{t}^2\mathbf{u}^2+\mathbf{t}^3\mathbf{u}+\mathbf{t}^3\mathbf{u}^3+\mathbf{t}^4\mathbf{u}^4}{(1-\mathbf{t}^2)(1-\mathbf{t}^4)(1-\mathbf{u}^2)(1-\mathbf{u}^4)}. \tag{19.3.1}$$

Posons

$$\sigma = x^2+y^2, \quad \pi = x^2y^2, \quad \Sigma = X^2+Y^2 \quad \text{et} \quad \Pi = X^2Y^2.$$

Alors

$$\mathbf{k}[V^*]^W = \mathbf{k}[\sigma,\pi] \qquad \text{et} \qquad \mathbf{k}[V]^W = \mathbf{k}[\Sigma,\Pi]. \tag{19.3.2}$$

La série de Hilbert bi-graduée de $P_\bullet = \mathbf{k}[V\times V^*]^{W\times W} = \mathbf{k}[V]^W \otimes \mathbf{k}[V^*]^W = \mathbf{k}[\sigma,\pi,\Sigma,\Pi]$ est donc donnée par

$$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}(P_\bullet) = \frac{1}{(1-\mathbf{t}^2)(1-\mathbf{t}^4)(1-\mathbf{u}^2)(1-\mathbf{u}^4)}. \tag{19.3.3}$$

Posons maintenant

$$\mathbf{eu}_0 = xX+yY, \ \ \mathbf{eu}_0' = (xY+yX)XY, \ \ \mathbf{eu}_0'' = xy(xY+yX), \ \ \mathbf{eu}_0''' = xy(xX+yY)XY,$$
$$\boldsymbol{\delta}_0 = xyXY, \quad \boldsymbol{\delta}_0' = (x^2-y^2)(X^2-Y^2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Delta}_0 = xy(x^2-y^2)XY(X^2-Y^2).$$

Il est alors facile de vérifier que la famille $(1,\mathbf{eu}_0,\mathbf{eu}_0',\mathbf{eu}_0'',\mathbf{eu}_0''',\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_0',\boldsymbol{\Delta}_0)$ est $P_\bullet$-linéairement indépendante et est contenue dans $\mathbf{k}[V\times V^*]^W$. D'autre part, 1, $\mathbf{eu}_0$, $\mathbf{eu}_0'$, $\mathbf{eu}_0''$, $\mathbf{eu}_0'''$, $\boldsymbol{\delta}_0$, $\boldsymbol{\delta}_0'$ et $\boldsymbol{\Delta}_0$ ont respectivement pour bi-degré $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(3,3)$, $(2,2)$, $(2,2)$ et $(4,4)$. Donc la série de Hilbert bi-graduée du $P_\bullet$-module libre de base $(1,\mathbf{eu}_0,\mathbf{eu}_0',\mathbf{eu}_0'',\mathbf{eu}_0''',\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_0',\boldsymbol{\Delta}_0)$ est égale à celle de Z_0 (voir (19.3.1) et (19.3.3)). Ainsi

$$\mathbf{k}[V\times V^*]^W = P_\bullet \oplus P_\bullet\mathbf{eu}_0 \oplus P_\bullet\mathbf{eu}_0' \oplus P_\bullet\mathbf{eu}_0'' \oplus P_\bullet\mathbf{eu}_0''' \oplus P_\bullet\boldsymbol{\delta}_0 \oplus P_\bullet\boldsymbol{\delta}_0' \oplus P_\bullet\boldsymbol{\Delta}_0. \tag{19.3.4}$$

Le résultat suivant, déjà connu (voir par exemple [**AlFo**]), décrit l'algèbre Z_0 :

Théorème 19.3.5. — $Z_0 = \mathbf{k}[V\times V^*]^W = \mathbf{k}[\sigma,\pi,\Sigma,\Pi,\mathbf{eu}_0,\mathbf{eu}_0',\mathbf{eu}_0'',\boldsymbol{\delta}_0]$. *D'autre part, l'idéal des relations est engendré par les relations suivantes :*

$$\begin{cases}
(1) & \mathbf{eu}_0\,\mathbf{eu}_0' = \sigma\Pi + \Sigma\,\boldsymbol{\delta}_0,\\
(2) & \mathbf{eu}_0\,\mathbf{eu}_0'' = \Sigma\pi + \sigma\,\boldsymbol{\delta}_0,\\
(3) & \boldsymbol{\delta}_0\,\mathbf{eu}_0' = \Pi\,\mathbf{eu}_0'',\\
(4) & \boldsymbol{\delta}_0\,\mathbf{eu}_0'' = \pi\,\mathbf{eu}_0',\\
(5) & \boldsymbol{\delta}_0^2 = \pi\Pi,\\
(6) & \mathbf{eu}_0'^2 = \Pi(4\,\boldsymbol{\delta}_0 - \mathbf{eu}_0^2 + \sigma\Sigma),\\
(7) & \mathbf{eu}_0''^2 = \pi(4\,\boldsymbol{\delta}_0 - \mathbf{eu}_0^2 + \sigma\Sigma),\\
(8) & \mathbf{eu}_0'\,\mathbf{eu}_0'' = 4\pi\Pi + \sigma\Sigma\,\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_0\,\mathbf{eu}_0^2,\\
(9) & \mathbf{eu}_0(4\,\boldsymbol{\delta}_0 - \mathbf{eu}_0^2 + \sigma\Sigma) = \sigma\,\mathbf{eu}_0' + \Sigma\,\mathbf{eu}_0''.
\end{cases}$$

De plus, $Z_0 = P \oplus P\mathbf{eu}_0 \oplus P\mathbf{eu}_0^2 \oplus P\boldsymbol{\delta}_0 \oplus P\boldsymbol{\delta}_0\mathbf{eu}_0 \oplus P\boldsymbol{\delta}_0\mathbf{eu}_0^2 \oplus P\mathbf{eu}_0' \oplus P\mathbf{eu}_0''$.

Démonstration. — Il est facile de vérifier que

$$\boldsymbol{\delta}'_0 = 2\,\mathbf{eu}_0^2 - \sigma\Sigma - 4\,\boldsymbol{\delta}_0, \quad \boldsymbol{\Delta}_0 = \boldsymbol{\delta}_0\,\boldsymbol{\delta}'_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{eu}_0''' = \boldsymbol{\delta}_0\,\mathbf{eu}_0. \tag{19.3.6}$$

En vertu de (19.3.4), ces trois relations impliquent immédiatement que $\mathbf{k}[V \times V^*]^W = \mathbf{k}[\sigma, \pi, \Sigma, \Pi, \mathbf{eu}_0, \mathbf{eu}'_0, \mathbf{eu}''_0, \boldsymbol{\delta}_0]$. Cela montre la première assertion.

Les relations présentées dans l'énoncé du théorème 19.3.5 résultent de calculs directs. Compte tenu de la relation (5), la relation (8) peut se réécrire

$$\mathbf{eu}'_0\,\mathbf{eu}''_0 = \boldsymbol{\delta}_0(4\,\boldsymbol{\delta}_0 + \sigma\Sigma - \mathbf{eu}_0^2), \tag{8'}$$

tandis que (6) et (7) impliquent

$$\pi\,\mathbf{eu}_0'^2 = \Pi\,\mathbf{eu}_0''^2. \tag{10}$$

Soient E, E', E'' et D des indéterminées sur le corps $\mathbf{k}(\sigma, \pi, \Sigma, \Pi)$ et notons

$$\rho : \mathbf{k}[\sigma, \pi, \Sigma, \Pi, E, E', E'', D] \longrightarrow \mathbf{k}[V \times V^*]^W$$

l'unique morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres qui envoie la suite $(\sigma, \pi, \Sigma, \Pi, E, E', E'', D)$ sur $(\sigma, \pi, \Sigma, \Pi, \mathbf{eu}_0, \mathbf{eu}'_0, \mathbf{eu}''_0, \boldsymbol{\delta}_0)$. Alors ρ est surjectif. Notons f_i l'élément de $\mathbf{k}[\sigma, \pi, \Sigma, \Pi, E, E', E'', D]$ correspondant à la relation (i) de l'énoncé (pour $1 \leqslant i \leqslant 9$), en soustrayant le terme de droite au terme de gauche. Posons

$$\mathfrak{I} = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9 \rangle \subset \operatorname{Ker} \rho.$$

Notons $\tilde{Z}_0 = \mathbf{k}[\sigma, \pi, \Sigma, \Pi, E, E', E'', D]/\mathfrak{I}$ et soient e, e', e'' et d les images respectives de E, E', E'' et D dans $\tilde{Z}_0$. Posons

$$\tilde{Z}'_0 = P_\bullet + P_\bullet\, e + P_\bullet\, e^2 + P_\bullet\, e' + P_\bullet\, e'' + P_\bullet\, d + P_\bullet\, d\, e + P_\bullet\, d\, e^2.$$

Alors $\tilde{Z}'_0$ est un sous-$\mathbf{k}$-espace vectoriel de $\tilde{Z}_0$. Les relations données par les $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant 9}$ montrent que $\tilde{Z}'_0$ est une sous-$\mathbf{k}$-algèbre de $\tilde{Z}_0$. Comme de plus σ, π, Σ, Π, e, e', e'' et d appartiennent à $\tilde{Z}'_0$, on en déduit que $\tilde{Z}_0 = \tilde{Z}'_0$.

Par conséquent, $\tilde{Z}_0$ est un quotient du $\mathbf{k}$-espace vectoriel gradué

$$\mathscr{E} = P_\bullet \oplus P_\bullet[-2] \oplus (P_\bullet[-4])^3 \oplus P_\bullet[-6] \oplus P_\bullet[-8],$$

et Z_0 est un quotient de $\tilde{Z}_0$. Comme la série de Hilbert du $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathscr{E}$ est égale à la série de Hilbert de Z_0, on en déduit que

$$\tilde{Z}'_0 = P_\bullet \oplus P_\bullet e \oplus P_\bullet e^2 \oplus P_\bullet e' \oplus P_\bullet e'' \oplus P_\bullet d \oplus P_\bullet d\, e \oplus P_\bullet d\, e^2$$

et que $\tilde{Z}_0 \simeq Z_0$, ce qui montre que $\operatorname{Ker} \rho = \mathfrak{I}$. □

Corollaire 19.3.7. — *Les relations* (1), (2),..., (9) *forment un système* ***minimal***. *En particulier, la* $\mathbf{k}$*-algèbre* $Z_0 = \mathbf{k}[V \times V^*]^W$ *n'est pas d'intersection complète.*

Démonstration. — En reprenant les notations de la preuve du théorème 19.3.5, il suffit de montrer que $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant 9}$ est un système minimal de générateurs de $\mathfrak{I}$. Notons $\bar{Z}_0 = Z_0/\langle \sigma, \pi, \Sigma, \Pi \rangle$ et notons e, e', e'' et d les images respectives de $\mathbf{eu}_0$, $\mathbf{eu}'_0$, $\mathbf{eu}''_0$ et $\boldsymbol{\delta}_0$ dans $\bar{Z}_0$. Alors il découle de 19.3.2 et des relations 19.3.6 que

$$\bar{Z}_0 = \mathbf{k} \oplus \mathbf{k}e \oplus \mathbf{k}e^2 \oplus \mathbf{k}e' \oplus \mathbf{k}e'' \oplus \mathbf{k}d \oplus \mathbf{k}d\,e \oplus \mathbf{k}d\,e^2.$$

Notons $\bar{f}_i \in \mathbf{k}[E, E', E'', D]$ la réduction du polynôme f_i modulo $\langle \sigma, \pi, \Sigma, \Pi \rangle$. Il suffit de montrer que $(\bar{f}_i)_{1 \leqslant i \leqslant 9}$ est un système de générateurs minimal du noyau du morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\bar{\rho} : \mathbf{k}[E, E', E'', D] \longrightarrow \bar{Z}_0$$

qui envoie E, E', E'' et D sur e, e', e'' et d respectivement.

L'algèbre $N = k[E, E', E'', D]$ est bigraduée, avec E, E', E'' et D de bidegrés respectifs $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$ et $(2,2)$, et les éléments $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_9$ sont homogènes de bidegrés respectifs $(2,4)$, $(4,2)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(4,4)$, $(2,6)$, $(6,2)$, $(4,4)$, $(3,3)$. On en déduit que

$$\Big(\sum_{i=1}^{9} \mathbf{k}\bar{f}_i\Big) \cap \Big(\sum_{i=1}^{9} N_+\bar{f}_i\Big) \subset \Big(\sum_{i=1}^{9} \mathbf{k}\bar{f}_i\Big) \cap \Big(\sum_{i=1}^{9} \mathbf{k}E\bar{f}_i\Big)$$

Puisque tous ces espaces sont bigradués, cette intersection est contenue dans

$$(\mathbf{k}\bar{f}_3) \cap (\mathbf{k}E\bar{f}_1) + (\mathbf{k}\bar{f}_4) \cap (\mathbf{k}E\bar{f}_2) + (\mathbf{k}\bar{f}_5 + \mathbf{k}\bar{f}_8) \cap (\mathbf{k}Ef_9).$$

Puisque E ne divise pas $\bar{f}_3$ ni $\bar{f}_4$, ni aucun élément non nul de $\mathbf{k}\bar{f}_5 + \mathbf{k}\bar{f}_8$, on conclut que $\big(\sum_{i=1}^{9} \mathbf{k}\bar{f}_i\big) \cap \big(\sum_{i=1}^{9} N_+\bar{f}_i\big) = 0$, donc $(\bar{f}_i)_{1 \leqslant i \leqslant 9}$ est un système minimal de générateurs de $\ker \bar{\rho}$. □

Corollaire 19.3.8. — *Le polynôme minimal de* $\mathbf{eu}_0$ *sur* $P_\bullet$ *est*

$$\mathbf{t}^8 - 2\sigma\Sigma\,\mathbf{t}^6 + \big(\sigma^2\Sigma^2 + 2(\sigma^2\Pi + \Sigma^2\pi - 8\pi\Pi)\big)\,\mathbf{t}^4 - 2\sigma\Sigma(\sigma^2\Pi + \Sigma^2\pi - 8\pi\Pi)\,\mathbf{t}^2 + (\sigma^2\Pi - \Sigma^2\pi)^2.$$

Démonstration. — En multipliant la relation (9) par $\mathbf{eu}_0$ et en utilisant les relations (1) et (2), on obtient

$$\mathbf{eu}_0^2(4\boldsymbol{\delta}_0 + \sigma\Sigma - \mathbf{eu}_0^2) = \sigma^2\Pi + \Sigma^2\pi + 2\sigma\Sigma\boldsymbol{\delta}_0.$$

On en déduit immédiatement que

$$\boldsymbol{\delta}_0(4\mathbf{eu}_0^2 - 2\sigma\Sigma) = \mathbf{eu}_0^4 - \sigma\Sigma\mathbf{eu}_0^2 + \sigma^2\Pi + \Sigma^2\pi.$$

En élevant au carré cette relation et en utilisant la relation (5), on obtient que le polynôme annoncé annule $\mathbf{eu}_0$. Le degré du polynôme minimal de $\mathbf{eu}_0$ sur $P_\bullet$ étant égal à $|W| = 8$, la preuve du corollaire est terminée. □

19.4. L'algèbre Z

Rappelons que

$$\mathbf{eu} = xX + yY + A(s+s') + B(t+t')$$

et posons

$$\begin{cases} \mathbf{eu}' = (xY + yX)XY - A(s-s')XY + BtY^2 + Bt'X^2, \\ \mathbf{eu}'' = xy(xY+yX) - Axy(s-s') + By^2t + Bx^2t', \\ \boldsymbol{\delta} = xyXY + Bxt'X + Byt\,Y + B^2(1+w_0) + AB(w+w'). \end{cases}$$

Un calcul assez fastidieux montre que

$$\mathbf{eu}, \mathbf{eu}', \mathbf{eu}'', \boldsymbol{\delta} \in Z = \mathrm{Z}(\mathbf{H}) \tag{19.4.1}$$

et que les relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \text{(Z1)} & \mathbf{eu}\ \mathbf{eu}' = \sigma\Pi + \Sigma\ \boldsymbol{\delta}, \\ \text{(Z2)} & \mathbf{eu}\ \mathbf{eu}'' = \Sigma\pi + \sigma\ \boldsymbol{\delta}, \\ \text{(Z3)} & \boldsymbol{\delta}\ \mathbf{eu}' = \Pi\ \mathbf{eu}'' + B^2\Sigma\ \mathbf{eu}, \\ \text{(Z4)} & \boldsymbol{\delta}\ \mathbf{eu}'' = \pi\ \mathbf{eu}' + B^2\sigma\ \mathbf{eu}, \\ \text{(Z5)} & \boldsymbol{\delta}^2 = \pi\Pi + B^2\ \mathbf{eu}^2, \\ \text{(Z6)} & \mathbf{eu}'^2 = \Pi(4\ \boldsymbol{\delta} - \mathbf{eu}^2 + \sigma\Sigma + 4A^2 - 4B^2) + B^2\Sigma^2, \\ \text{(Z7)} & \mathbf{eu}''^2 = \pi(4\ \boldsymbol{\delta} - \mathbf{eu}^2 + \sigma\Sigma + 4A^2 - 4B^2) + B^2\sigma^2, \\ \text{(Z8)} & \mathbf{eu}'\ \mathbf{eu}'' = \boldsymbol{\delta}(4\ \boldsymbol{\delta} - \mathbf{eu}^2 + \sigma\Sigma + 4A^2 - 4B^2) - B^2\sigma\Sigma, \\ \text{(Z9)} & \mathbf{eu}(4\ \boldsymbol{\delta} - \mathbf{eu}^2 + \sigma\Sigma + 4A^2 - 4B^2) = \sigma\ \mathbf{eu}' + \Sigma\ \mathbf{eu}''. \end{cases} \tag{19.4.2}$$

On voit immédiatement que $\mathbf{eu}_0$, $\mathbf{eu}'_0$, $\mathbf{eu}''_0$ et $\boldsymbol{\delta}_0$ sont les images respectives, dans $Z_0 = Z/\mathfrak{p}_0 Z$, des éléments $\mathbf{eu}$, $\mathbf{eu}'$, $\mathbf{eu}''$ et $\boldsymbol{\delta}$. D'autre part, les relations (1), (2),..., (9) du théorème 19.3.5 sont aussi les images, modulo $\mathfrak{p}_0$, des relations (Z1), (Z2),..., (Z9).

Théorème 19.4.3. — *La* $\mathbf{k}$*-algèbre* Z *est engendrée par* A, B, σ, π, Σ, Π, $\mathbf{eu}$, $\mathbf{eu}'$, $\mathbf{eu}''$ *et* $\boldsymbol{\delta}$. *L'idéal des relations est engendré par* (Z1), (Z2),..., (Z9).

De plus, $Z = P \oplus P\mathbf{eu} \oplus P\mathbf{eu}^2 \oplus P\boldsymbol{\delta} \oplus P\boldsymbol{\delta}\mathbf{eu} \oplus P\boldsymbol{\delta}\mathbf{eu}^2 \oplus P\mathbf{eu}' \oplus P\mathbf{eu}''$.

Démonstration. — La preuve suit strictement les mêmes arguments que ceux du théorème 19.3.5, basés entre autres sur des comparaisons de séries de Hilbert bi-graduées. □

Corollaire 19.4.4. — *Les relations* (Z1), (Z2),..., (Z9) *forment un système minimal. En particulier, la* $\mathbf{k}$*-algèbre* Z *n'est pas d'intersection complète.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement du théorème 19.4.3 et du corollaire 19.3.7. □

Corollaire 19.4.5. — *Le polynôme minimal de* **eu** *sur* P *est*

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^8 - 2(\sigma\Sigma + 4A^2 + 4B^2)\,\mathbf{t}^6 + \big(\sigma^2\Sigma^2 + 2(\sigma^2\Pi + \Sigma^2\pi - 8\pi\Pi) + 8(A^2+B^2)\sigma\Sigma + 16(A^2-B^2)^2\big)\,\mathbf{t}^4 \\ - 2\big((\sigma\Sigma + 4A^2 - 4B^2)(\sigma^2\Pi + \Sigma^2\pi) - 8\sigma\Sigma\pi\Pi + 2B^2\sigma^2\Sigma^2\big)\,\mathbf{t}^2 + (\sigma^2\Pi - \Sigma^2\pi)^2.\end{aligned}$$

Démonstration. — La preuve suit exactement le même schéma que la preuve du corollaire 19.3.8, mais en partant des relations (Z1),..., (Z9) au lieu des relations (1),..., (9). □

Remerciements — Les calculs ci-dessus (vérification du fait que **eu**, **eu**′, **eu**″ et $\boldsymbol{\delta}$ sont centraux et vérification des relations (Z1),..., (Z9)) ont été effectués *à la main*. Malgré toute notre bonne volonté, la lourdeur des calculs fait qu'il pourrait être envisageable qu'une erreur se soit glissée insidieusement. Cependant, Ulrich Thiel a écrit des programmes (basés sur le logiciel MAGMA, voir [**Magma**]) permettant de calculer dans l'algèbre **H** : ainsi, il a pu vérifier *indépendamment* que les éléments **eu**, **eu**′, **eu**″ et $\boldsymbol{\delta}$ sont centraux et que les relations (Z1),..., (Z9) sont satisfaites. Nous tenons à remercier chaleureusement Ulrich Thiel pour avoir effectué ce travail de vérification : il a aussi vérifié que le polynôme minimal de **eu** est bien donné par le corollaire 19.4.5. ■

19.5. Familles de Calogero-Moser

La table 19.5.1 donne la valeur de Ω_ψ (pour $\psi \in \mathrm{Irr}(W)$) en les générateurs de la P-algèbre Z. Elles sont obtenues soit en calculant effectivement l'action des éléments **eu**, **eu**′, **eu**″ et $\boldsymbol{\delta}$ ou alors en utilisant la proposition 9.3.3 et en utilisant ensuite les relations (Z1),..., (Z9) (sachant que $\Omega_\psi(\sigma) = \Omega_\psi(\pi) = \Omega_\psi(\Sigma) = \Omega_\psi(\Pi) = 0$).

Soit maintenant k un corps commutatif et fixons un morphisme $\mathbf{k}[\mathscr{C}] \to k$. On note a l'image de A et b l'image de B (dans k). Le tableau précédent permet de calculer immédiatement les partitions de $\mathrm{Irr}(W)$ en k-familles de Calogero-Moser, en fonction des valeurs de a et b. Le résultat (classique) est donné dans la table 19.5.2.

$z \in Z$	**eu**	**eu**$'$	**eu**$''$	$\boldsymbol{\delta}$
Ω_1	$-2(B+A)$	0	0	$2B(B+A)$
Ω_{ε_s}	$-2(B-A)$	0	0	$2B(B-A)$
Ω_{ε_t}	$2(B-A)$	0	0	$2B(B-A)$
Ω_{ε}	$2(B+A)$	0	0	$2B(B+A)$
Ω_{χ}	0	0	0	0

TABLE 19.5.1. Table des caractères centraux de $\bar{\mathbf{H}}$

Conditions	k-familles
$a=b=0$	$\mathrm{Irr}(W)$
$a=0,\, b\neq 0$	$\{1,\varepsilon_s\}$, $\{\varepsilon_t,\varepsilon\}$ et $\{\chi\}$
$a\neq 0,\, b=0$	$\{1,\varepsilon_t\}$, $\{\varepsilon_s,\varepsilon\}$ et $\{\chi\}$
$a=b\neq 0$	$\{1\}$, $\{\varepsilon\}$ et $\{\varepsilon_s,\varepsilon_t,\chi\}$
$a=-b\neq 0$	$\{\varepsilon_s\}$, $\{\varepsilon_t\}$ et $\{1,\varepsilon,\chi\}$
$ab\neq 0,\, a^2\neq b^2$	$\{1\}$, $\{\varepsilon_s\}$, $\{\varepsilon_t\}$, $\{\varepsilon\}$ et $\{\chi\}$

TABLE 19.5.2. k-familles de Calogero-Moser

19.6. Le groupe G

Puisque $w_0=-\mathrm{Id}_V$ appartient à W (et puisque les réflexions de W sont d'ordre 2), les résultats de la section 6.5 s'appliquent. En particulier, si $\tau_0=(-1,1,\varepsilon)\in\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}^\times\times W^\wedge$, alors τ_0 peut être vu comme l'élément $w_0\in W\hookrightarrow G$ et est central dans G (voir la proposition 6.5.2). Ainsi, d'après (6.5.3), on a

$$G\subset W_4,$$

où W_4 est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_W$ formé des permutations σ de W telles que $\sigma(-x)=-\sigma(x)$ pour tout $x\in W$. On note N_4 le sous-groupe (distingué) de W_4 formé des

permutations $\sigma \in W_4$ telles que $\sigma(x) \in \{x, -x\}$ pour tout $x \in W$. Alors, en notant $\mu_2 = \{1, -1\}$,

$$N_4 \simeq (\mu_2)^4.$$

De plus,

$$|W_4| = 384 \qquad \text{et} \qquad |N_4| = 16.$$

Notons $\varepsilon_W : \mathfrak{S}_W \to \mu_2 = \{1, -1\}$ la signature et posons $W_4' = W_4 \cap \operatorname{Ker} \varepsilon_W$ et $N_4' = W_4' \cap N_4$. Alors

$$N_4' = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in (\mu_2)^4 \mid \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 = 1\} \simeq (\mu_2)^3.$$

De plus,

$$|W_4'| = 192 \qquad \text{et} \qquad |N_4'| = 8.$$

Rappelons que H s'identifie au stabilisateur, dans G, de $1 \in W$. De plus, G contient l'image de $W \times W$ dans $\mathfrak{S}_W$. Cette image, isomorphe à $(W \times W)/\Delta Z(W)$, est d'ordre 32 et son intersection avec H, isomorphe à $\Delta W/\Delta Z(W) \simeq W/Z(W)$, est d'ordre 4. Les éléments (s, s) et (t, t) de $W \times W$ s'envoient sur des éléments distincts de N_4. Donc $H \cap N_4$ est un sous-groupe de N_4' d'ordre 4. Puisque $(w_0, 1)$ s'envoie aussi sur un élément de N_4' qui n'est pas dans H, on en déduit que

$$N_4' \subset G.$$

Notons $f(\mathbf{t}) \in P[\mathbf{t}]$ l'unique polynôme unitaire de degré 4 tel que $f(\mathbf{eu}^2) = 0$ (ce polynôme est donné par le corollaire 19.4.5). En vertu de (A.6.1), on a

$$\operatorname{disc}(f(\mathbf{t}^2)) = 256 \operatorname{disc}(f)^2 \cdot (\sigma^2\Pi - \Sigma^2\pi)^2,$$

et donc le discriminant du polynôme minimal de **eu** est un carré dans P. Ainsi,

$$G \subseteq W_4'.$$

Nous allons montrer que cette inclusion est une égalité.

Théorème 19.6.1. — $G = W_4'$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $|G| = 192$. On sait déjà que $N_4' \subset G \subset W_4'$, ce qui montre que $G \cap N_4 = N_4'$. Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que $G/N_4' \simeq \mathfrak{S}_4$. Or, $G/N_4' = G/(G \cap N_4)$ est le groupe de Galois du polynôme f. Il suffit donc de montrer que le groupe de Galois de f sur K est $\mathfrak{S}_4$. Notons $\bar{G}$ ce groupe de Galois.

Posons $\mathfrak{p} = \langle \sigma - 2, \Sigma + 2, A - 1, B, \Pi - \pi \rangle$. Alors $\mathfrak{p}$ est un idéal premier et $P/\mathfrak{p} \simeq \mathbf{k}[\pi]$. Notons $\bar{f}$ la réduction de f modulo $\mathfrak{p}$. Alors

$$\bar{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}(\mathbf{t}^3 + (16\pi - 16\pi^2)\mathbf{t} - 64\pi^2).$$

Donc, d'après (A.6.2), on a

$$\operatorname{disc}(\bar{f}) = (64\pi^2)^2 \cdot \left(-4(16\pi - 16\pi^2)^3 - 27 \cdot (-64\pi^2)^2\right) = 2^{24}\pi^7(\pi - 4)(2\pi + 1)^2.$$

Donc le discriminant de $\bar{f}$ n'est pas un carré dans $\mathbf{k}[\pi]$, ce qui implique que le discriminant de f n'est pas un carré dans P. Donc $\bar{G}$ n'est pas contenu dans le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

Puisque f est irréductible, $\bar{G}$ est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_4$. En particulier, 4 divise $|\bar{G}|$. D'autre part, si $c \in \mathscr{C}$ est tel que $c_s = c_t = 1$, alors, d'après la table 19.5.2 et le théorème 11.2.7, G admet un sous-groupe (le groupe d'inertie de $\bar{\mathfrak{r}}_c$) qui admet une orbite de longueur 6. Donc 3 divise $|G|$ et donc 3 divise aussi $|\bar{G}|$. Ainsi, 12 divise $|\bar{G}|$ et, puisque $\bar{G} \not\subset \mathfrak{A}_4$, cela force $\bar{G} = \mathfrak{S}_4$. □

Remarque 19.6.2. — Rappelons que W_4 est un groupe de Weyl de type B_4 et que W_4' est un groupe de Weyl de type D_4. ■

19.7. Cellules de Calogero-Moser, CM-caractères cellulaires

19.7.A. Résultats. — L'objectif de cette section est de démontrer les conjectures LR et L pour W. Si a et b sont des nombres réels strictement positifs et si $c_s = a$ et $c_t = b$, alors la description des cellules de Kazhdan-Lusztig bilatères, à gauche, à droite, des familles de Kazhdan-Lusztig et des KL-caractères cellulaires est facile et est faite, par exemple, dans [**Lus3**]. Les différents cas à considérer sont $a > b$, $a = b$ et $a < b$: en utilisant l'automorphisme de W qui échange s et t, on se ramène aisément au cas où $a \geqslant b > 0$. Les conjectures LR et L découlent alors de la description des cellules de Calogero-Moser bilatères, à gauche, à droite, des familles de Calogero-Moser et des CM-caractères cellulaires donnée dans la table 19.7.2 :

Théorème 19.7.1. — *Soit $c \in \mathscr{C}$, posons $a = c_s$ et $b = c_t$ et supposons que $ab \neq 0$. Alors il existe un choix d'idéaux premiers $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}} \subset \bar{\mathfrak{r}}_c$ tel que les c-cellules de Calogero-Moser bilatères, à gauche, les c-familles de Calogero-Moser et les* CM*-caractères c-cellulaires soient donnés par la table 19.7.2.*

En conséquence, les conjectures LR et L sont vérifiées si W est de type B_2.

NOTATIONS - Dans la table 19.7.2, on a posé :

$$\Gamma_\chi = \{t, st, ts, sts\},\ \Gamma_\chi^+ = \{t, st\},\ \Gamma_\chi^- = \{ts, sts\},\ \Gamma_s = \{s, ts, sts\} \text{ et } \Gamma_t = \{t, st, tst\}.$$

D'autre part :

- $W_3' = H$ désigne le stabilisateur de $1 \in W$ dans $G = W_4'$ et W_2' désigne le stabilisateur de s dans W_3'. Notons que W_3' (respectivement W_2') est un groupe de Weyl de type D_3 (respectivement $D_2 = A_1 \times A_1$).
- $\mathfrak{S}_3$ désigne le sous-groupe de W_3' qui stabilise Γ_s (c'est aussi le stabilisateur de Γ_t) : il est bien isomorphe au groupe symétrique de degré 3.

Conditions	$\bar{D}_c = \bar{I}_c$	Cellules bilatères			ψ	$\dim_{\mathbf{k}} \mathscr{L}_c(\psi)$	I_c^{left}	D_c^{left}	Cellules à gauche		
		Γ	$\lvert\Gamma\rvert$	$\mathrm{Irr}_\Gamma(W)$					C	$\lvert C\rvert$	$[C]_c^{\text{CM}}$
$a^2 \neq b^2$ $ab \neq 0$	W_2'	1	1	$\mathbf{1}_W$	$\mathbf{1}_W$	8	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	W_2'	1	1	$\mathbf{1}_W$
		w_0	1	ε	ε	8			w_0	1	ε
		s	1	ε_s	ε_s	8			s	1	ε_s
		$w_0 s$	1	ε_t	ε_t	8			$w_0 s$	1	ε_t
		Γ_χ	4	χ	χ	8			Γ_χ^+	2	χ
									Γ_χ^-	2	χ
$a = b$ $ab \neq 0$	W_3'	1	1	$\mathbf{1}_W$	$\mathbf{1}_W$	8	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$	1	1	$\mathbf{1}_W$
		w_0	1	ε	ε	8			w_0	1	ε
		$W \setminus \{1, w_0\}$	6	$\varepsilon_s, \varepsilon_t, \chi$	ε_s	1			Γ_s	3	$\varepsilon_s + \chi$
					ε_t	1			Γ_t	3	$\varepsilon_t + \chi$
					χ	6					

TABLE 19.7.2. Cellules de Calogero-Moser, familles, caractères cellulaires

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ désigne le stabilisateur, dans W_2', de Γ_χ^+ (ou Γ_χ^-). ■

Nous allons maintenant nous consacrer à la preuve du théorème 19.7.1 : nous commencerons par étudier le cas générique, en descendant la chaîne d'idéaux premiers $\bar{\mathfrak{p}} \supset \mathfrak{p}^{\text{left}} \supset \langle \pi \rangle$. L'utilisation de l'idéal premier $\langle \pi \rangle$ nous servira à lever une ambiguïté pour le calcul des cellules de Calogero-Moser à gauche. Il est naturel de se demander si cette méthode ne peut pas se généraliser, car l'idéal premier $\langle \pi \rangle$ n'est pas quelconque : c'est l'idéal d'annulation d'une W-orbite d'hyperplans de réflexions dans V^*.

Après avoir étudié le cas générique, nous spécialiserons nos paramètres pour en déduire le théorème 19.7.1. Le point le plus délicat est la détermination des cellules à gauche (notamment la proposition 19.7.23).

Notation. *Si $z \in Z$ (ou $q \in Q$), nous noterons $F_z(\mathbf{t})$ (ou $F_q(\mathbf{t})$) le polynôme minimal de z (ou q) sur P. Si $F(\mathbf{t}) \in P[\mathbf{t}]$, nous noterons $\bar{F}(\mathbf{t})$ (respectivement $F^{\text{left}}(\mathbf{t})$, respectivement $F^{\pi}(\mathbf{t})$) la réduction de $F(\mathbf{t})$ modulo $\bar{\mathfrak{p}}$ (respectivement $\mathfrak{p}^{\text{left}}$, respectivement $\langle \pi \rangle$).*

19.7.B. Cellules bilatères génériques. — Cette section contient le travail préparatoire à la preuve du théorème 19.7.1, qui en découlera assez facilement. On pose $\mathrm{eu} = \mathrm{cop}(\mathbf{eu})$, $\mathrm{eu}' = \mathrm{cop}(\mathbf{eu}')$, $\mathrm{eu}'' = \mathrm{cop}(\mathbf{eu}'')$ et $\delta = \mathrm{cop}(\boldsymbol{\delta})$. Rappelons que $\bar{\mathfrak{p}} = \langle \sigma\,\pi, \Sigma, \Pi\rangle_P$, que $\bar{\mathfrak{z}} = \mathrm{Ker}(\Omega_1)$ et que $\bar{\mathfrak{q}} = \mathrm{cop}(\bar{\mathfrak{z}})$: en vertu de la table 19.5.1, on a

$$\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{p}}Q + \langle \mathrm{eu} + 2(A+B), \delta - 2B(A+B), \mathrm{eu}', \mathrm{eu}''\rangle_Q. \tag{19.7.3}$$

On a $Q/\bar{\mathfrak{q}} = P/\bar{\mathfrak{p}} = \mathbf{k}[A, B]$. Rappelons que

$$\bar{F}_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^4(\mathbf{t} - 2(A+B))(\mathbf{t} - 2(B-A))(\mathbf{t} + 2(A+B))(\mathbf{t} + 2(B-A)). \tag{19.7.4}$$

Rappelons aussi que, puisque $w_0 = -\mathrm{Id}_V \in W$ et que W est engendré par des réflexions d'ordre 2, on a $\mathrm{eu}_{v w_0} = -\mathrm{eu}_v$ pour tout $v \in W$ (voir la proposition 6.5.2).

Lemme 19.7.5. — *Soit $v \in W \setminus \{1, w_0\}$. Alors il existe un unique idéal premier $\bar{\mathfrak{r}}$ de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$ tel que* $\mathrm{eu}_v \equiv 2(A-B) \mod \bar{\mathfrak{r}}$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord l'existence. Soit $\bar{\mathfrak{r}}'$ un idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$: alors $\mathrm{eu} \equiv -2(A+B) \mod \bar{\mathfrak{r}}'$ et $\mathrm{eu}_{w_0} \equiv 2(A+B) \mod \bar{\mathfrak{r}}'$. D'après (19.7.4), il existe un unique élément $v' \in W \setminus \{1, w_0\}$ tel que $\mathrm{eu}_{v'} \equiv 2(A-B) \mod \bar{\mathfrak{r}}$.

Rappelons que H est le stabilisateur de $1 \in W$ dans $G \subset \mathfrak{S}_W$: c'est aussi le stabilisateur de w_0. Alors H agit transitivement sur $W \setminus \{1, w_0\}$ (d'après le théorème 19.6.1) et donc il existe $\sigma \in H$ tel que $\sigma(v') = v$. Posons $\bar{\mathfrak{r}} = \sigma(\bar{\mathfrak{r}}')$. Alors $\bar{\mathfrak{r}}$ est un idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$ (car $\sigma \in H$) et $\mathrm{eu}_v \equiv 2(A-B) \mod \bar{\mathfrak{r}}$. Cela termine la preuve de l'existence.

Montrons maintenant l'unicité. Soient donc $\bar{\mathfrak{r}}$ et $\bar{\mathfrak{r}}'$ deux idéaux premiers de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$ tels que $\mathrm{eu}_v - 2(A-B) \in \bar{\mathfrak{r}} \cap \bar{\mathfrak{r}}'$. Alors il existe $\sigma \in H$ tel que $\bar{\mathfrak{r}}' = \sigma(\bar{\mathfrak{r}})$. On a donc $\mathrm{eu}_v \equiv \mathrm{eu}_{\sigma(v)} \equiv 2(B-A) \mod \bar{\mathfrak{r}}$. D'après (19.7.4), on sait que $2(A-B)$ est une racine simple de $\bar{f}(\mathbf{t})$, donc $\sigma(v) = v$. Par conséquent, $\sigma \in I$, où I est le stabilisateur de v dans H. D'après le théorème 19.6.1, I est le groupe de Klein agissant sur $W \setminus \{1, w_0, v, v w_0\}$ (notons que $|I| = 4$).

Notons $\bar{D}$ (respectivement $\bar{I}$) le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\bar{\mathfrak{r}}$ (dans G). D'après (19.7.4), on a $\bar{I} \subset \bar{D} \subset I$ et il nous reste à montrer que $I = \bar{I}$. Or la cellule bilatère générique recouvrant la famille de Calogero-Moser générique $\{\chi\}$ a pour cardinal $\chi(1)^2 = 4$, et c'est une orbite sous l'action de $\bar{I}$. Donc $|\bar{I}| \geqslant 4 = |I|$. D'où le résultat. □

Comme conséquence de la preuve du lemme précédent, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 19.7.6. — *Soit $v \in W \setminus \{1, w_0\}$. Notons $\bar{\mathfrak{r}}$ l'unique idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$ et tel que $\mathrm{eu}_v \equiv 2(A-B) \mod \bar{\mathfrak{r}}$. Notons $\bar{D}$ (respectivement $\bar{I}$) le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\bar{\mathfrak{r}}$ dans G. Alors :*

(a) $\bar{D} = \bar{I} = \{\tau \in G \mid \tau(1) = 1 \text{ et } \tau(v) = v\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(b) $R/\bar{\mathfrak{r}} = Q/\bar{\mathfrak{q}} = P/\bar{\mathfrak{p}} \simeq \mathbf{k}[A, B]$.
(c) *Les cellules de Calogero-Moser bilatères génériques (par rapport à $\bar{\mathfrak{r}}$) sont $\{1\}$, $\{w_0\}$, $\{v\}$, $\{v w_0\}$ et $W \setminus \{1, w_0, v, v w_0\}$. De plus, $\mathrm{Irr}_{\{1\}}(W) = \{\mathbf{1}_W\}$, $\mathrm{Irr}_{\{w_0\}}(W) = \{\varepsilon\}$, $\mathrm{Irr}_{\{v\}}(W) = \{\varepsilon_s\}$, $\mathrm{Irr}_{\{v w_0\}}(W) = \{\varepsilon_t\}$ et $\mathrm{Irr}_{\{1\}}(W) = \{\chi\}$.*

> **Choix.** *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, nous noterons $\bar{\mathfrak{r}}$ l'unique idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{q}}$ tel que $\mathrm{eu}_s \equiv 2(A-B) \mod \bar{\mathfrak{r}}$.*

Dans ce cas,

$$\bar{D} = \bar{I} = W_2', \tag{19.7.7}$$

les cellules de Calogero-Moser bilatères génériques sont $\{1\}$, $\{s\}$, $\{w_0 s\}$, $\{w_0\}$ et Γ_χ et

$$\begin{cases} \mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{\{1\}}(W) = \{\mathbf{1}_W\}, \\ \mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{\{s\}}(W) = \{\varepsilon_s\}, \\ \mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{\{w_0 s\}}(W) = \{\varepsilon_t\}, \\ \mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{\{w_0\}}(W) = \{\varepsilon\}, \\ \mathrm{Irr}^{\mathrm{CM}}_{\Gamma_\chi}(W) = \{\chi\}. \end{cases} \tag{19.7.8}$$

19.7.C. Caractères cellulaires génériques. — Rappelons que $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}} = \langle \Sigma, \Pi \rangle_P$.

Lemme 19.7.9. — *On a $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}} = \mathfrak{p}^{\mathrm{left}} Q + \langle \mathrm{eu} + 2(B+A), \mathrm{eu}' + B\Sigma, \mathrm{eu}'', \delta - 2B(A+B) \rangle_Q$.*

Démonstration. — Posons $\mathfrak{q}' = \langle \mathrm{eu} + 2(B+A), \mathrm{eu}' + B\Sigma, \mathrm{eu}'', \delta - 2B(A+B) \rangle_Q$. Tout d'abord, remarquons que $Q/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}} Q$ est la $P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}} = \mathbf{k}[A, B, \Sigma, \Pi]$-algèbre admettant la

présentation

$$(19.7.10)\qquad \begin{cases} (\mathrm{Q1}^{\mathrm{left}}) & \mathrm{eu}\ \mathrm{eu}' = \Sigma\ \delta, \\ (\mathrm{Q2}^{\mathrm{left}}) & \mathrm{eu}\ \mathrm{eu}'' = 0, \\ (\mathrm{Q3}^{\mathrm{left}}) & \delta\ \mathrm{eu}' = \Pi\ \mathrm{eu}'' + B^2\Sigma\ \mathrm{eu}, \\ (\mathrm{Q4}^{\mathrm{left}}) & \delta\ \mathrm{eu}'' = 0, \\ (\mathrm{Q5}^{\mathrm{left}}) & \delta^2 = B^2\ \mathrm{eu}^2, \\ (\mathrm{Q6}^{\mathrm{left}}) & \mathrm{eu}'^2 = \Pi(4\ \delta - \mathrm{eu}^2 + 4A^2 - 4B^2) + B^2\Sigma^2, \\ (\mathrm{Q7}^{\mathrm{left}}) & \mathrm{eu}''^2 = 0, \\ (\mathrm{Q8}^{\mathrm{left}}) & \mathrm{eu}'\ \mathrm{eu}'' = \delta(4\ \delta - \mathrm{eu}^2 + 4A^2 - 4B^2), \\ (\mathrm{Q9}^{\mathrm{left}}) & \mathrm{eu}(4\ \delta - \mathrm{eu}^2 + 4A^2 - 4B^2) = \Sigma\ \mathrm{eu}''. \end{cases}$$

Un calcul immédiat montre que toutes ces relations sont satisfaites dans $Q/\mathfrak{q}'$. Posons $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q + \mathfrak{q}'$. Alors $Q/\mathfrak{q}'' \simeq \mathbf{k}[\Sigma, \Pi, A, B] \simeq P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$, donc $\mathfrak{q}''$ est un idéal premier de Q, contenant $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{q}}$ (d'après (19.7.3)). Le résultat découle alors de l'unicité d'un tel idéal premier (voir le corollaire 12.1.6). □

Rappelons que l'on peut définir les CM-caractères cellulaires sans passer par le calcul des cellules de Calogero-Moser à gauche, en utilisant les idéaux premiers de Z (ou Q) au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$ (voir la remarque 12.3.11). Remarquons aussi que

$$(19.7.11)\qquad F^{\mathrm{left}}_{\mathbf{eu}}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^4(\mathbf{t} - 2(A+B))(\mathbf{t} - 2(B-A))(\mathbf{t} + 2(A+B))(\mathbf{t} + 2(B-A)).$$

Cette égalité nous permet de construire d'autres idéaux premiers de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$:

Lemme 19.7.12. — *Posons*

$$\begin{cases} \mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_1 = \mathfrak{q}^{\mathrm{left}} = \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q + \langle \mathrm{eu} + 2(B+A), \mathrm{eu}' - B\Sigma, \mathrm{eu}'', \delta - 2B(B+A)\rangle_Q, \\ \mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\varepsilon_s} = \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q + \langle \mathrm{eu} + 2(B-A), \mathrm{eu}' - B\Sigma, \mathrm{eu}'', \delta - 2B(B-A)\rangle_Q, \\ \mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\varepsilon_t} = \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q + \langle \mathrm{eu} - 2(B-A), \mathrm{eu}' + B\Sigma, \mathrm{eu}'', \delta - 2B(B-A)\rangle_Q, \\ \mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\varepsilon} = \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q + \langle \mathrm{eu} - 2(B+A), \mathrm{eu}' + B\Sigma, \mathrm{eu}'', \delta - 2B(A+B)\rangle_Q, \\ \mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_{\chi} = \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q + \langle \mathrm{eu}, \mathrm{eu}'', \delta\rangle_Q. \end{cases}$$

Alors :

(a) *Si $\gamma \in \mathrm{Irr}(W)$, alors $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\gamma$ est un idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$. Le* CM-*caractère cellulaire générique associé est γ.*

(b) *Si $\gamma \in W^\wedge$, alors $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\gamma = \mathrm{Ker}(\Omega^{\mathrm{left}}_\gamma)$ et $Q/\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\gamma = P^{\mathrm{left}}$.*

(c) *Si on note eu'_χ l'image de eu' dans $Q/\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\chi$, alors $Q/\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\chi = (P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}})[\mathrm{eu}'_\chi]$ et le polynôme minimal de eu'_χ est $\mathbf{t}^2 - \Pi(4A^2 - 4B^2) - B^2\Sigma^2$. En particulier, $[k_Q(\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\chi) : k_P(\mathfrak{p}^{\mathrm{left}})] = 2$.*

(d) *Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de Q au-dessus de $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$, alors il existe $\gamma \in \mathrm{Irr}(W)$ tel que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{\mathrm{left}}_\gamma$.*

Démonstration. — (b) est aisément vérifiable par un calcul direct, ce qui implique (a) lorsque γ est un caractère linéaire.

Il découle de la présentation (19.7.10) de $Q/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}Q$ que $Q/\mathfrak{q}_\chi^{\mathrm{left}} = (P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}})[\mathrm{eu}'_\chi]$ et que le polynôme minimal de eu'_χ est $\mathbf{t}^2 - \Pi(4A^2 - 4B^2) - B^2\Sigma^2$. Puisque ce dernier polynôme à coefficients dans $P/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}} = \mathbf{k}[\Sigma, \Pi, A, B]$ est irréductible, cela implique que $\mathfrak{q}_\chi^{\mathrm{left}}$ est bien un idéal premier au-dessus de $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$. On en déduit (c) et la première assertion de (a). La deuxième assertion de (a) résulte du théorème 14.4.1.

(d) découle du fait que la somme des CM-caractères cellulaire déjà construits est égal au caractère de la représentation régulière de W. □

19.7.D. Cellules à gauche génériques. —

Corollaire 19.7.13. — *Soit $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ un idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{r}}$ et notons D^{left} son groupe de décomposition et I^{left} son groupe d'inertie. Alors $D^{\mathrm{left}} = W_2'$ et $|I^{\mathrm{left}}| = 2$.*

Démonstration. — Tout d'abord, d'après le corollaire 12.1.11, on a $D^{\mathrm{left}} \subset \bar{D} = W_2'$. Il résulte du lemme 19.7.12(c) que, si C est une cellule à gauche générique contenue dans la cellule bilatère Γ associée à χ, alors $|C| = 2$ et $|C^D| = 4$. En particulier, 2 divise $|I^{\mathrm{left}}|$ et $I^{\mathrm{left}} \subsetneq D^{\mathrm{left}}$ d'après la proposition 12.2.6(b). D'où le résultat. □

Corollaire 19.7.14. — *Il existe un unique idéal premier $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ de R au-dessus de $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{r}}$.*

Démonstration. — Soient $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ et $\mathfrak{r}_*^{\mathrm{left}}$ deux idéaux premiers de R au-dessus de $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$ et contenus dans $\bar{\mathfrak{r}}$. Alors il existe $h \in H$ tel que $\mathfrak{r}_*^{\mathrm{left}} = h(\mathfrak{r}^{\mathrm{left}})$. On déduit de la proposition 12.1.10 que $\bar{\mathfrak{r}} = g(\bar{\mathfrak{r}})$. Donc h appartient au groupe de décomposition de $\bar{\mathfrak{r}}$, qui est le même que celui de $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ (d'après le corollaire 19.7.13). Donc $\mathfrak{r}_*^{\mathrm{left}} = \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$. □

> *Nous noterons $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ l'unique idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}}$ et contenu dans $\bar{\mathfrak{r}}$. Nous noterons D^{left} son groupe de décomposition et I^{left} son groupe d'inertie.*

Le corollaire 19.7.13 nous dit que

$$D^{\mathrm{left}} = W_2' \qquad \text{et} \qquad |I^{\mathrm{left}}| = 2. \tag{19.7.15}$$

Corollaire 19.7.16. — *$R/\mathfrak{r}^{\mathrm{left}} \simeq Q/\mathfrak{q}_\chi^{\mathrm{left}}$ est intégralement clos.*

Corollaire 19.7.17. — *$\{1\}$, $\{s\}$, $\{tst\}$ et $\{w_0\}$ sont des cellules de Calogero-Moser à gauche génériques, et leurs* CM*-caractères cellulaires associés sont donnés par*

$$\begin{cases} [\,1\,]^{\mathrm{CM}}_{\mathbf{k}W} = \mathbf{1}_W, \\ [\,s\,]^{\mathrm{CM}}_{\mathbf{k}W} = \varepsilon_s, \\ [\,tst\,]^{\mathrm{CM}}_{\mathbf{k}W} = \varepsilon_t, \\ [\,w_0\,]^{\mathrm{CM}}_{\mathbf{k}W} = \varepsilon. \end{cases}$$

Démonstration. — Cela découle du fait que les parties données sont aussi des cellules de Calogero-Moser bilatères génériques et que les familles de Calogero-Moser génériques associées sont données dans le corollaire 19.7.6. □

Corollaire 19.7.18. — *Les congruences suivantes sont vérifiées dans R :*

$$\begin{cases} \mathrm{eu} \equiv -2(B+A) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ s(\mathrm{eu}) \equiv -2(B-A) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ tst(\mathrm{eu}) \equiv 2(B-A) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ w_0(\mathrm{eu}) \equiv 2(B+A) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ t(\mathrm{eu}) \equiv st(\mathrm{eu}) \equiv ts(\mathrm{eu}) \equiv sts(\mathrm{eu}) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}. \end{cases}$$

Démonstration. — D'après (19.7.11), la congruence suivante est vérifiée dans $R[\mathbf{t}]$:

$$(*) \quad \prod_{w \in W} (\mathbf{t} - w(\mathrm{eu})) \equiv \mathbf{t}^4(\mathbf{t}-2(A+B))(\mathbf{t}-2(B-A))(\mathbf{t}+2(A+B))(\mathbf{t}+2(B-A)) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}} R[\mathbf{t}].$$

On sait déjà, puisque $\mathfrak{q}^{\mathrm{left}} \subset \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, que $\mathrm{eu} \equiv -2(B+A) \bmod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$. Cela implique que $s(\mathrm{eu})$ est congru à $-2(B-A)$, $2(B+A)$, $2(B-A)$ ou 0 modulo $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$. Mais, puisque $s(\mathrm{eu}) \equiv -2(B-A) \bmod \bar{\mathfrak{r}}$ par construction, cela force $s(\mathrm{eu}) \equiv -2(B-A) \bmod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$.

Les troisième et quatrième congruences s'obtiennent à partir des deux premières en remarquant que $tst(\mathrm{eu}) = w_0 s(\mathrm{eu}) = -s(\mathrm{eu})$ et $w_0(\mathrm{eu}) = -\mathrm{eu}$.

La dernière découle de $(*)$. □

Corollaire 19.7.19. — *Les congruences suivantes sont vérifiées dans R :*

$$\begin{cases} \delta \equiv 2B(B+A) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ s(\delta) \equiv 2B(B-A) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ tst(\delta) \equiv 2B(B-A) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ w_0(\delta) \equiv 2B(B+A) \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ t(\delta) \equiv st(\delta) \equiv ts(\delta) \equiv sts(\delta) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}} \end{cases}$$

$$et \qquad \begin{cases} \mathrm{eu}' \equiv -B\Sigma \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ s(\mathrm{eu}') \equiv -B\Sigma \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ tst(\mathrm{eu}') \equiv B\Sigma \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ w_0(\mathrm{eu}') \equiv B\Sigma \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ t(\mathrm{eu}')^2 \equiv st(\mathrm{eu}')^2 \equiv ts(\mathrm{eu}')^2 \equiv sts(\mathrm{eu}')^2 \equiv B^2(\Sigma^2 - 4\Pi) + 4A^2\Pi \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}. \end{cases}$$

Pour finir, $g(\mathrm{eu}'') \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ *pour tout* $g \in G$.

Démonstration. — Les égalités $(Q1^{\mathrm{left}}),\dots,(Q9^{\mathrm{left}})$ sont évidemment satisfaites aussi dans l'algèbre $R/\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}R$. Puisque $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}R$ est un idéal G-stable de R, on peut appliquer tout élément de G aux égalités $(Q1^{\mathrm{left}}),\dots,(Q9^{\mathrm{left}})$, et ensuite réduire modulo $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$. On déduit par exemple de $(Q7^{\mathrm{left}})$ que $g(\mathrm{eu}'') \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ pour tout $g \in G$, comme annoncé.

Lorsque $g(\mathrm{eu}) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, on déduit de $(Q9^{\mathrm{left}})$ que $4g(\delta) \equiv g(\mathrm{eu})^2 - 4A^2 + 4B^2 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, ce qui permet de montrer que les congruences de δ, $s(\delta)$, $tst(\delta)$ et $w_0(\delta)$ modulo $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ sont bien celles attendues. D'autre part, si $g \in W \setminus \{1, s, tst, w_0\}$, alors $g(\mathrm{eu}) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ et on déduit donc de $(Q5^{\mathrm{left}})$ que $g(\delta) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$.

Pour finir, lorsque $g(\mathrm{eu}) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, la congruence de $g(\mathrm{eu}')$ modulo $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ est aisément déterminée par $(Q1^{\mathrm{left}})$, et est conforme aux prévisions. En revanche, lorsque $g(\mathrm{eu}) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, alors $g(\delta) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ d'après ce qui précède, et il découle de $(\mathrm{Q}6^{\mathrm{left}})$ que $g(\mathrm{eu}')^2 \equiv B^2(\Sigma^2 - 4\Pi) + 4A^2\Pi \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$. □

Lemme 19.7.20. — $F^{\mathrm{left}}_{\mathrm{eu}'}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t} - B\Sigma)^2(\mathbf{t} + B\Sigma)^2(\mathbf{t}^2 - B^2\Sigma^2 - 4A^2\Pi + 4B^2\Pi)^2$.

Démonstration. — Tout d'abord, en appliquant les éléments de $W \times W$ à $\mathbf{eu}'_0 \in \mathbf{k}[V \times V^*]$, on remarque que $\mathbf{eu}'_0$ a huit conjugués, et donc le polynôme minimal de $\mathbf{eu}'_0$ sur $P_\bullet$ est de degré 8. Par conséquent, $F_{\mathrm{eu}'}(\mathbf{t})$ est de degré 8 : c'est en fait le polynôme caractéristique de la multiplication par $\mathbf{eu}'$ dans le P-module libre Z. Ainsi,

$$F_{\mathrm{eu}'}(\mathbf{t}) = \prod_{w \in W} (\mathbf{t} - w(\mathrm{eu}'))$$

et le résultat découle alors du corollaire 19.7.19. □

En conclusion, si $g \in \{t, st, ts, sts\}$ et si $q \in \{\mathrm{eu}, \mathrm{eu}'', \delta\}$ alors

$$g(q) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}} \tag{19.7.21}$$

et

$$g(\mathrm{eu}')^2 \equiv B^2(\Sigma^2 - 4\Pi) + 4A^2\Pi \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}. \tag{19.7.22}$$

La proposition suivante précise la congruence 19.7.22 : c'est le point le plus délicat de ce chapitre.

Proposition 19.7.23. — *Les congruences suivantes sont vraies dans R :*

$$\begin{cases} t(\mathrm{eu}') \equiv st(\mathrm{eu}') \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ ts(\mathrm{eu}') \equiv sts(\mathrm{eu}') \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}, \\ t(\mathrm{eu}') \not\equiv ts(\mathrm{eu}') \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}. \end{cases}$$

Démonstration. — D'après le corollaire 19.7.19,

$$(\mathbf{t}-t(\mathrm{eu}'))(\mathbf{t}-st(\mathrm{eu}'))(\mathbf{t}-ts(\mathrm{eu}'))(\mathbf{t}-sts(\mathrm{eu}')) \equiv (\mathbf{t}^2 - B^2\Sigma^2 - 4A^2\Pi + 4B^2\Pi)^2 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}} R[\mathbf{t}].$$

Cela montre qu'il existe un unique $g_0 \in \{st, ts, sts\}$ tel que $g_0(\mathrm{eu}') \equiv t(\mathrm{eu}') \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$. Puisque $t(\mathrm{eu}') \not\equiv 0 \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ et $sts(\mathrm{eu}') = tw_0(\mathrm{eu}') = -t(\mathrm{eu}')$, l'élément g_0 n'est pas égal à sts. Donc

$$g_0 \in \{st, ts\}.$$

Il nous suffit de montrer que

$$(*) \qquad g_0 = st.$$

Notons $F^{\pi}_{\mathrm{eu}'}(\mathbf{t})$ la réduction modulo πP du polynôme minimal de eu'. Posons

$$\begin{aligned} F^{\pi}(\mathbf{t}) \;=\; & \mathbf{t}^4 + 2B\Sigma\mathbf{t}^3 + (-4A^2\Pi + 4B^2\Pi - \sigma\Sigma\Pi)\mathbf{t}^2 \\ & -(8A^2B\Sigma\Pi + 2B^3\Sigma^3 - 8B^3\Sigma\Pi + 2B\sigma\Sigma^2\Pi - 4B\sigma\Pi^2)\mathbf{t} \\ & -4A^2B^2\Sigma^2\Pi - B^4\Sigma^4 + 4B^4\Sigma^2\Pi - B^2\sigma\Sigma^3\Pi + 4B^2\sigma\Sigma\Pi^2 + \sigma^2\Pi^3. \end{aligned}$$

En utilisant le logiciel MAGMA (voir [**Magma**]), on obtient :

$$F^{\pi}_{\mathrm{eu}'}(\mathbf{t}) = F^{\pi}(\mathbf{t}) \cdot F^{\pi}(-\mathbf{t}).$$

Notons $\mathfrak{r}^{\pi}$ un idéal premier de R au-desus de πP et contenu dans $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$. Notons $\mathfrak{r}^{\pi}_0$ un idéal premier de R au-dessus de $\pi P + \mathfrak{p}_0$ et contenu dans $\mathfrak{r}^{\pi}$. On vérifie facilement que $F^{\pi}(\mathbf{t})$ est premier avec $F^{\pi}(-\mathbf{t})$ et est séparable, donc $F^{\pi}_{\mathrm{eu}'}(\mathbf{t})$ admet huit racines distinctes dans $R/\mathfrak{r}^{\pi}$, qui sont les classes des $g(\mathrm{eu}')$, où g parcourt W. Notons $F^{\mathrm{left}}(\mathbf{t})$ la restriction modulo $\mathfrak{p}^{\mathrm{left}}$ de $F^{\pi}(\mathbf{t})$. Alors

$$F^{\mathrm{left}}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t} + B\Sigma)^2(\mathbf{t}^2 - B^2\Sigma^2 - 4A^2\Pi + 4B^2\Pi).$$

Donc il découle du corollaire 19.7.19 que eu' et $s(\mathrm{eu}')$ sont des racines de $F^{\pi}(\mathbf{t})$ dans $R/\mathfrak{r}^{\pi}$. D'autre part, puisque W_2' agit transitivement sur $\{t, st, ts, sts\}$ et stabilise $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, on peut, quitte à remplacer $\mathfrak{r}^{\pi}$ par $g(\mathfrak{r}^{\pi})$ pour un $g \in W_2'$, supposer que $t(\mathrm{eu}')$ est une racine de $F^{\pi}(\mathbf{t})$ modulo $\mathfrak{r}^{\pi}$. L'autre racine modulo $\mathfrak{r}^{\pi}$ est donc $st(\mathrm{eu}')$ ou $ts(\mathrm{eu}')$ (ce ne peut pas être $sts(\mathrm{eu}') = -t(\mathrm{eu}')$, car ce dernier est une racine de $F^{\pi}(-\mathbf{t})$ modulo $\mathfrak{r}^{\pi}$). Notons donc g_1 l'unique élément de $\{st, ts\}$ tel que $g_1(\mathrm{eu}')$ soit une racine de $F^{\pi}(\mathbf{t})$ modulo $\mathfrak{r}^{\pi}$. Par réduction modulo $\mathfrak{r}^{\pi}_0$, on obtient

$$\mathrm{eu}' \cdot s(\mathrm{eu}') \cdot t(\mathrm{eu}') \cdot g_1(\mathrm{eu}') \equiv F^{\pi}(0) \equiv \sigma^2\Pi^3 \mod \mathfrak{r}^{\pi}_0.$$

D'autre part, il existe $g \in G$ tel que $\mathfrak{r}_0 \subset g(\mathfrak{r}_0^\pi)$. Or, puisque $G = W_4'$, il existe des signes η_1, η_2, η_3, η_4 tels que $\{g(1), g(s), g(t), g(g_1)\} = \{\eta_1, \eta_2 s, \eta_3 t, \eta_4 g_1\}$ et $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 = 1$. Par conséquent,

$$\mathrm{eu}' \cdot s(\mathrm{eu}') \cdot t(\mathrm{eu}') \cdot g_1(\mathrm{eu}') \equiv \sigma^2 \Pi^3 \mod \mathfrak{r}_0.$$

Le calcul suivant peut s'effectuer directement à l'intérieur de $\mathbf{k}[V \times V^*]^{\Delta Z(W)} \supset R/\mathfrak{r}_0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{eu}_0' \cdot s(\mathrm{eu}_0') \cdot t(\mathrm{eu}_0') \cdot ts(\mathrm{eu}_0') &= (xY + yX)(xX + yY)(-xY + yX)(-xX + yY)X^4Y^4 \\
&= (y^2Y^2 - x^2X^2)(y^2X^2 - x^2Y^2)\Pi^2 \\
&= ((x^4 + y^4)\Pi - \pi(X^4 + Y^4))\Pi^2 \\
&\equiv \sigma^2\Pi^3 \mod \pi\mathbf{k}[V \times V^*].
\end{aligned}$$

Donc $g_1 = ts$.

On a donc montré que

$$(\mathbf{t} - \mathrm{eu}')(\mathbf{t} - s(\mathrm{eu}'))(\mathbf{t} - t(\mathrm{eu}'))(\mathbf{t} - ts(\mathrm{eu}')) \equiv F^\pi(\mathbf{t}) \mod \mathfrak{r}^\pi R[\mathbf{t}].$$

Par réduction modulo $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, on obtient

$$(\mathbf{t} - t(\mathrm{eu}'))(\mathbf{t} - ts(\mathrm{eu}')) \equiv \mathbf{t}^2 - B^2\Sigma^2 - 4A^2\Pi + 4B^2\Pi \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}} R[\mathbf{t}].$$

Donc $t(\mathrm{eu}') \equiv -ts(\mathrm{eu}') \mod \mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$, ce qui montre que $g_0 \neq ts$. Donc $g_0 = st$. □

Corollaire 19.7.24. — *Pour le choix de $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ effectué dans cette section, les cellules de Calogero-Moser à gauche génériques sont $\{1\}$, $\{s\}$, $\{tst\}$, $\{w_0\}$, $\{ts, sts\}$ et $\{t, st\}$.*

Notons g_{left} l'involution de G qui laisse fixe 1, s, tst et w_0 et telle que $g_{\mathrm{left}}(t) = st$ et $g_{\mathrm{left}}(ts) = sts$. Alors $I^{\mathrm{left}} = \langle g_{\mathrm{left}} \rangle$.

Remarque 19.7.25. — On comprend mieux ici la convention choisie pour l'action de $W \times W$ sur $\mathbf{k}(V \times V^*)$ (voir la sous-section 6.1.B). En effet, si on avait choisi l'autre action (celle décrite dans la remarque 6.1.10), les cellules de Calogero-Moser *à gauche* auraient coïncidées avec les cellules de Kazhdan-Lusztig *à droite*. ■

19.7.E. Preuve du théorème 19.7.1. — Reprenons les notations du théorème 19.7.1 ($a = c_s$, $b = c_t$). Fixons pour l'instant un idéal premier $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}$ de R contenant $\mathfrak{r}^{\mathrm{left}}$ et $\mathfrak{p}_c R$. Puisque $R/\bar{\mathfrak{r}} \simeq P/\bar{\mathfrak{p}}$, on déduit que $\bar{\mathfrak{r}}_c = \bar{\mathfrak{r}} + \bar{\mathfrak{p}}_c R$ est l'unique idéal premier de R au-dessus de $\bar{\mathfrak{r}}$ et contenant $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}$. On notera D_c^{left} (respectivement I_c^{left}) le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}$ et $\bar{D}_c$ (respectivement $\bar{I}_c$) le groupe de décomposition (respectivement d'inertie) de $\bar{\mathfrak{r}}_c$.

Il découle des corollaires 19.7.18 et 19.7.19 et de la proposition 19.7.23 que :

$$(\clubsuit)\qquad \begin{cases} \mathrm{eu} \equiv -2(b+a) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ s(\mathrm{eu}) \equiv -2(b-a) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ tst(\mathrm{eu}) \equiv 2(b-a) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ w_0(\mathrm{eu}) \equiv 2(b+a) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ t(\mathrm{eu}) \equiv st(\mathrm{eu}) \equiv ts(\mathrm{eu}) \equiv sts(\mathrm{eu}) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}. \end{cases}$$

$$(\diamondsuit)\qquad \begin{cases} \delta \equiv 2b(b+a) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ s(\delta) \equiv 2b(b-a) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ tst(\delta) \equiv 2b(b-a) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ w_0(\delta) \equiv 2b(b+a) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ t(\delta) \equiv st(\delta) \equiv ts(\delta) \equiv sts(\delta) \equiv 0 \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}} \end{cases}$$

$$(\heartsuit)\qquad \begin{cases} \mathrm{eu}' \equiv -b\Sigma \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ s(\mathrm{eu}') \equiv -b\Sigma \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ tst(\mathrm{eu}') \equiv b\Sigma \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ w_0(\mathrm{eu}') \equiv b\Sigma \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ t(\mathrm{eu}') \equiv st(\mathrm{eu}') \equiv -ts(\mathrm{eu}') \equiv -sts(\mathrm{eu}') \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}, \\ t(\mathrm{eu}')^2 \equiv b^2\Sigma^2 + 4(a^2-b^2)\Pi \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}. \end{cases}$$

et

$$(\spadesuit)\qquad g(\mathrm{eu}'') \equiv 0 \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}$$

pour tout $g \in G$. Rappelons que l'on suppose que $ab \neq 0$ et que deux éléments g et g' de W sont dans la même c-cellule de Calogero-Moser à gauche (respectivement bilatère) si et seulement si $g(q) \equiv g'(q) \mod \mathfrak{r}_c^{\mathrm{left}}$ (respectivement $\mod \bar{\mathfrak{r}}_c$) pour tout $q \in \{\mathrm{eu}, \mathrm{eu}, \mathrm{eu}'', \delta\}$ (car $Q = P[\mathrm{eu}, \mathrm{eu}', \mathrm{eu}'', \delta]$).

Le cas $a^2 \neq b^2$. — Supposons ici que $a^2 \neq b^2$. Il découle des congruences ($\clubsuit$), ($\diamondsuit$), ($\heartsuit$) et ($\spadesuit$) que les c-cellules de Calogero-Moser à gauche sont $\{1\}$, $\{s\}$, $\{tst\}$, $\{w_0\}$, $\Gamma_\chi^+ = \{t, st\}$ et $\Gamma_\chi^- = \{ts, sts\}$ et que les c-cellules de Calogero-Moser bilatères sont $\{1\}$, $\{s\}$, $\{tst\}$, $\{w_0\}$ et Γ_χ.

Les résultats sur les c-familles de Calogero-Moser et les CM-caractères c-cellulaires donnés par la table 19.7.2 découlent alors du corollaire 11.2.8, de la proposition 13.4.4, de (19.7.8) et du corollaire 19.7.17.

Déterminons maintenant D_c^{left} et I_c^{left}. Notons que $I^{\mathrm{left}} \subset I_c^{\mathrm{left}}$ et que, vu la description des c-cellules de Calogero-Moser à gauche, c'est-à-dire des I_c^{left}-orbites, cela

force l'égalité. D'autre part, puique $\bar{\mathfrak{r}}_c = \bar{\mathfrak{r}} + \bar{\mathfrak{p}}_c R$, on a $D^{\text{left}} \subset D_c^{\text{left}}$. Puisque les D_c^{left}-orbites sont contenues dans les c-cellules de Calogero-Moser bilatères, la description de ces dernières force encore l'égalité. On montre de même que $\bar{D}_c = \bar{D} = W_2'$ et que $\bar{I}_c = \bar{I} = W_2'$.

Le cas où $a = b$. — Dans ce cas, la dernière congruence de (♡) devient

$$t(\mathrm{eu}')^2 \equiv b^2\Sigma^2 \mod \mathfrak{r}_c^{\text{left}}.$$

Donc $t(\mathrm{eu}') \equiv b\Sigma \mod \mathfrak{r}_c^{\text{left}}$ ou $t(\mathrm{eu}') \equiv -b\Sigma \mod \mathfrak{r}_c^{\text{left}}$. Quitte à remplacer $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$ par $g(\mathfrak{r}_c^{\text{left}})$, où $g \in W_2' = D^{\text{left}}$ échange t et sts, on peut faire le choix suivant :

> **Choix de $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$.** *Nous choisissons l'idéal premier $\mathfrak{r}_c^{\text{left}}$ de sorte que $t(\mathrm{eu}') \equiv b\Sigma \mod \mathfrak{r}_c^{\text{left}}$.*

La famille de congruences (♣), (♢), (♡) et (♠) montre que les c-cellules de Calogero-Moser à gauche sont $\{1\}$, $\{w_0\}$, $\Gamma_s = \{s, ts, sts\}$ et $\Gamma_t = \{t, st, tst\}$ et que les c-cellules de Calogero-Moser bilatères sont $\{1\}$, $\{w_0\}$ et $W \setminus \{1, w_0\}$.

Comme précédemment, les résultats sur les c-familles de Calogero-Moser et les CM-caractères c-cellulaires donnés par la table 19.7.2 découlent alors du corollaire 11.2.8, de la proposition 13.4.4, de (19.7.8) et du corollaire 19.7.17.

Terminons par la description de D_c^{left}, I_c^{left}, $\bar{D}_c$ et $\bar{I}_c$. Tout d'abord, I_c^{left} a deux orbites de longueur 3 (Γ_s et Γ_t) donc son ordre est divisible par 3. De plus, il contient I^{left} qui est d'ordre 2. Donc son ordre est divisible par 6. La description des c-cellules à gauche permet alors de conclure que $I_c^{\text{left}} = \mathfrak{S}_3$. D'autre part, D_c^{left} permute les c-cellules à gauche qui ont le même CM-caractère c-cellulaire associé. Donc D_c^{left} stabilise Γ_s et Γ_t, ce qui force l'égalité $D_c^{\text{left}} = I_c^{\text{left}} = \mathfrak{S}_3$.

Du côté des cellules bilatères, rappelons que $\bar{D}_c = \bar{I}_c$ car $\bar{D}_c/\bar{I}_c$ est un quotient de $\bar{D}/\bar{I}$. De plus, les inclusions $W_2' \subset \bar{I}_c$ et $I_c^{\text{left}} \subset \bar{I}_c$ montrent que $W_3' \subset \bar{I}_c$. L'égalité $\bar{I}_c = W_3'$ s'impose alors.

APPENDICES

APPENDICE A

RAPPELS DE THÉORIE DE GALOIS

Soit R un anneau commutatif, G un groupe fini agissant sur R et H un sous-groupe de G. On pose $Q = R^H$ et $P = R^G$, de sorte que $P \subset Q \subset R$. Si $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de R, on note $k_R(\mathfrak{r})$ le corps des fractions de $R/\mathfrak{r}$ (c'est-à-dire le quotient $R_\mathfrak{r}/\mathfrak{r}R_\mathfrak{r}$) et $G_\mathfrak{r}^D$ le stabilisateur de $\mathfrak{r}$ dans G. Ce sous-groupe de G agit alors sur $R/\mathfrak{r}$ et on note $G_\mathfrak{r}^I$ le noyau de cette action. En d'autres termes,

$$G_\mathfrak{r}^I = \{g \in G \mid \forall\ r \in R,\ g(r) \equiv r \mod \mathfrak{r}\}.$$

Le groupe $G_\mathfrak{r}^D$ (respectivement $G_\mathfrak{r}^I$) est appelé le *groupe de décomposition* (respectivement le *groupe d'inertie*) de G en $\mathfrak{r}$.

Nous fixons dans ce chapitre un idéal premier $\mathfrak{r}$ de R et nous posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} \cap Q$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \cap P = \mathfrak{q} \cap P$:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{r} & \subset & R \\ | & & | \\ \mathfrak{q} & \subset & Q \\ | & & | \\ \mathfrak{p} & \subset & P \end{array}$$

On note

$$\rho_G : \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} P,$$

$$\rho_H : \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} Q$$

et

$$\Upsilon : \operatorname{Spec} Q \to \operatorname{Spec} P$$

les applications induites respectivement par les inclusions $P \subset R$, $Q \subset R$ et $Q \subset R$. On a bien sûr $\rho_G = \Upsilon \circ \rho_H$: en d'autres termes, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} R \arrow[r, "\rho_H"] \arrow[rr, bend right, "\rho_G"'] & \operatorname{Spec} Q \arrow[r, "\Upsilon"] & \operatorname{Spec} P. \end{tikzcd}$$

est commutatif. Par exemple,

$$\rho_G(\mathfrak{r}) = \mathfrak{p}, \qquad \rho_H(\mathfrak{r}) = \mathfrak{q} \qquad \text{et} \qquad \Upsilon(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}.$$

Pour finir, posons

$$D = G_{\mathfrak{r}}^D \qquad \text{et} \qquad I = G_{\mathfrak{r}}^I.$$

A.1. Autour du lemme de Dedekind

Rappelons que $(R, \times)$ est un monoïde. Si M est un autre monoïde, on notera $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mon}}(M, R)$ l'ensemble des morphismes de monoïdes $M \to (R, \times)$. Si A est un anneau commutatif, on notera $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(A, R)$ l'ensemble des morphismes d'anneaux de A vers R : on peut le voir comme un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mon}}((A, \times), R)$. Ce sont des sous-ensembles de l'ensemble $\mathscr{F}(M, R)$ des applications de M dans R : notons que $\mathscr{F}(M, R)$ est un R-module.

Lemme de Dedekind. *Si R est **intègre**, alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mon}}(M, R)$ *forme une famille R-linéairement indépendante d'éléments de $\mathscr{F}(M, R)$.*

Démonstration. — Supposons que ce n'est pas le cas et notons d un entier naturel minimal tel qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale de longueur d entre éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mon}}(M, R)$. Il existe donc des éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mon}}(M, R)$ et des éléments *non nuls* $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ de R tels que

$$(*) \qquad \forall\ m \in M,\ \lambda_1 \varphi_1(m) + \cdots + \lambda_d \varphi_d(m) = 0.$$

Notons que $d \geqslant 2$ car l'intégrité de R forcerait $\varphi_1(m) = 0$ pour tout $m \in M$, ce qui est impossible. De plus, par minimalité de d, on a $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Ainsi, il existe $m_0 \in M$ tel que $\varphi_1(m_0) \neq \varphi_2(m_0)$. Par conséquent, il résulte de $(*)$ que

$$\lambda_1 \varphi_1(m_0 m) + \cdots + \lambda_d \varphi_d(m_0 m) = 0.$$

et

$$\varphi_1(m_0) \cdot \big(\lambda_1 \varphi_1(m) + \cdots + \lambda_d \varphi_d(m)\big) = 0$$

pour tout $m \in M$. En soutrayant la deuxième équation à la première, on obtient :

$$\forall\ m \in M,\ \sum_{i=2}^{d} \lambda_i (\varphi_i(m_0) - \varphi_1(m_0)) \varphi_i(m) = 0.$$

Or, puisque R est intègre, $\lambda_2(\varphi_2(m_0) - \varphi_1(m_0))$ est non nul, donc on a trouvé une relation de dépendance linéaire non triviale de longueur inférieure à d, ce qui contredit la minimalité de d. $\square$

Corollaire A.1.1. — *Soit A un anneau commutatif et supposons R* ***intègre***. *Alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(A,R)$ *forme une famille R-linéairement indépendante d'éléments de $\mathscr{F}(A,R)$.*

Démonstration. — En effet, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(A,R)$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mon}}((A,\times),R)$: on applique alors le lemme de Dedekind. □

A.2. Groupe de décomposition, groupe d'inertie

Nous rappelons quelques résultats plus ou moins classiques dans cette situation.

Proposition A.2.1. — *Le groupe G agit transitivement sur les fibres de ρ_G.*

Remarque A.2.2. — Bien sûr, l'énoncé s'applique à H : le groupe H agit transitivement sur les fibres de ρ_H. ■

Démonstration. — Voir [**Bou**, chapitre 5, §2, théorème 2(i)]. □

Théorème A.2.3. — *L'extension de corps $k_R(\mathfrak{r})/k_P(\mathfrak{p})$ est normale, de groupe de Galois D/I $(=G_{\mathfrak{r}}^D/G_{\mathfrak{r}}^I)$.*

Démonstration. — Voir [**Bou**, chapitre 5, §2, théorème 2(ii)]. □

Corollaire A.2.4. — *Soit $\mathfrak{r}'$ un idéal premier de R contenant $\mathfrak{r}$ et soient $D'=G_{\mathfrak{r}'}^D$ et $I'=G_{\mathfrak{r}'}^I$. Alors D'/I' est isomorphe à un sous-quotient de D/I.*

Démonstration. — En remplaçant R par $R/\mathfrak{r}$, Q par $Q/\mathfrak{q}$ et P par $P/\mathfrak{p}$, D/I s'identifie à G et le corollaire se déduit immédiatement du théorème A.2.3. □

Théorème A.2.5. — *Si Q est* ***nette*** *sur P en $\mathfrak{q}$ (i.e. si $\mathfrak{p}Q_{\mathfrak{q}}=\mathfrak{q}Q_{\mathfrak{q}}$), alors I est contenu dans H.*

Démonstration. — Voir [**Ray**, chapitre X, théorème 1]. □

A.3. Sur la $P/\mathfrak{p}$-algèbre $Q/\mathfrak{p}Q$

A.3.A. Doubles classes. — La proposition A.3.5 ci-dessous, certainement bien connue (et facile), sera au cœur de notre mémoire. Nous en donnons donc une preuve pour la commodité au lecteur. Nous aurons besoin de quelques notations. Si $g \in G$, le morphisme composé $Q \xrightarrow{g} R \xrightarrow{\text{can}} R/\mathfrak{r}$ se factorise en un morphisme $\bar{g} : Q/\mathfrak{p}Q \to R/\mathfrak{r}$. Les deux remarques suivantes sont évidentes.

(A.3.1) *Si $h \in H$ et $i \in I$, alors $\overline{igh} = \bar{g}$.*

On obtient donc une application bien définie

$$\begin{array}{ccc} I\backslash G/H & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{(P/\mathfrak{p})\text{-alg}}(Q/\mathfrak{p}Q, R/\mathfrak{r}) \\ IgH & \longmapsto & \bar{g} \end{array}. \tag{A.3.2}$$

Notons que $\mathrm{Hom}_{(P/\mathfrak{p})\text{-alg}}(Q/\mathfrak{p}Q, R/\mathfrak{r}) = \mathrm{Hom}_{P\text{-alg}}(Q, R/\mathfrak{r})$. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{P/\mathfrak{p}-\text{alg}}(Q/\mathfrak{p}Q, R/\mathfrak{r})$, alors on note $\tilde{\varphi}$ la composée $Q \xrightarrow{\text{can}} Q/\mathfrak{p}Q \xrightarrow{\varphi} R/\mathfrak{r}R$ et il est clair que $\mathrm{Ker}\,\tilde{\varphi} \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p})$. Cela nous définit une application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{(P/\mathfrak{p})\text{-alg}}(Q/\mathfrak{p}Q, R/\mathfrak{r}) & \longrightarrow & \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Ker}\,\tilde{\varphi}. \end{array} \tag{A.3.3}$$

Puisque $R/\mathfrak{r}$ est intègre, $\mathrm{Ker}\,\tilde{\varphi}$ est un idéal premier de Q.

Si $g \in G$, alors $g(\mathfrak{r}) \cap Q \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p})$. De plus, si $h \in H$ et $d \in D$, alors

$$hgd(\mathfrak{r}) \cap Q = g(\mathfrak{r}) \cap Q.$$

On a ainsi défini une application

$$\begin{array}{ccc} D\backslash G/H & \longrightarrow & \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}) \\ DgH & \longmapsto & g^{-1}(\mathfrak{r}) \cap Q. \end{array} \tag{A.3.4}$$

Proposition A.3.5. — *L'application $I\backslash G/H \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(P/\mathfrak{p})\text{-alg}}(Q/\mathfrak{p}Q, R/\mathfrak{r})$ définie en A.3.2 est bijective, tout comme l'application $D\backslash G/H \to \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p})$ définie en A.3.4. De plus, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} I\backslash G/H \arrow[r, "\sim", "IgH \mapsto \tilde{g}"'] \arrow[d, "\text{can}"'] & \mathrm{Hom}_{(P/\mathfrak{p})\text{-alg}}(Q/\mathfrak{p}Q, R/\mathfrak{r}) \arrow[d, "\varphi \mapsto \mathrm{Ker}\,\tilde{\varphi}"] \\ D\backslash G/H \arrow[r, "\sim", "DgH \mapsto g^{-1}(\mathfrak{r}) \cap Q"'] & \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}). \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Commençons par montrer l'injectivité de la première application. Soient g et g' deux éléments de G tels que $\bar{g} = \bar{g}'$. Cela signifie donc que

$$\forall\ q \in Q,\ g(q) \equiv g'(q) \mod \mathfrak{r}.$$

Par conséquent,

$$\forall\ r \in R,\ \sum_{h \in H} g\,h(r) \equiv \sum_{h \in H} g'\,h(r) \mod \mathfrak{r}.$$

Or, d'après le lemme de Dedekind, la famille des morphismes d'anneaux $R \to R/\mathfrak{r}$ est $R/\mathfrak{r}$-linéairement indépendante. Cela signifie donc qu'il existe $h \in H$ tel que

$$\forall\ r \in R,\ g(r) \equiv g'\,h(r) \mod \mathfrak{r},$$

ou encore

$$\forall\ r \in R,\ g'\,h(g^{-1}(r)) \equiv r \mod \mathfrak{r}.$$

En d'autres termes, $g'\,h\,g^{-1} \in I$ et donc $g' \in I\,g\,H$.

Montrons maintenant la surjectivité. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{P/\mathfrak{p}-\mathrm{alg}}(Q/\mathfrak{p}Q, R/\mathfrak{r})$ et soit $\mathfrak{q}' = \mathrm{Ker}\,\tilde{\varphi}$. Puisque φ est $(P/\mathfrak{p})$-linéaire, on a $\mathfrak{q}' \cap P = \mathfrak{p}$. Notons $\mathfrak{r}'$ un idéal premier de R au-dessus de $\mathfrak{q}'$. Alors il existe $g \in G$ tel que $\mathfrak{r}' = g(\mathfrak{r})$. Donc l'application $g \circ \tilde{\varphi} : Q \to R/\mathfrak{r}'$ a pour noyau $\mathfrak{q}' = \mathfrak{r}' \cap Q$ et est Q-linéaire. D'après le théorème A.2.3, il existe donc $d \in G^D_{\mathfrak{r}'}$ tel que $g \circ \tilde{\varphi}(q) \equiv d(q) \mod \mathfrak{r}'$ pour tout $q \in Q$. Ainsi, $\tilde{\varphi}(q) \equiv g^{-1}d(q) \mod \mathfrak{r}$, c'est-à-dire que $\varphi = \overline{g^{-1}d}$.

Montrons maintenant la bijectivité de la deuxième application. Si $\mathfrak{q}' \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p})$, alors il existe $\mathfrak{r}' \in \mathrm{Spec}\,R$ tel que $\mathfrak{q}' \cap Q = \mathfrak{r}'$. En outre, $\mathfrak{r}' \cap P = \mathfrak{q}' \cap P = \mathfrak{p}$ et donc, d'après la proposition A.2.1, il existe $g \in G$ tel que $\mathfrak{r}' = g(\mathfrak{r})$. Cela montre la surjectivité de la flèche horizontale inférieure du diagramme. L'injectivité découle encore de la proposition A.2.1.

La commutativité du diagramme découle des arguments précédents. □

A.3.B. Corps résiduels. — Soit $g \in [D\backslash G/H]$. On pose pour simplifier $\mathfrak{q}_g = \mathfrak{r} \cap g(Q)$. Notons que $\mathfrak{q}_g \cap P = \mathfrak{p}$ et que l'on obtient une suite de morphismes injectifs d'anneaux $P/\mathfrak{p} \hookrightarrow g(Q)/\mathfrak{q}_g \hookrightarrow R/\mathfrak{r}$. On a donc une suite d'inclusions de corps

$$k_P(\mathfrak{p}) \quad \subset \quad k_{g(Q)}(\mathfrak{q}_g) \quad \subset \quad k_R(\mathfrak{r}).$$

Lemme A.3.6. — *L'extension $k_R(\mathfrak{r})/k_{g(Q)}(\mathfrak{q}_g)$ est normale de groupe de Galois $(D \cap {}^gH)/(I \cap {}^gH)$.*

Remarque A.3.7. — Notons que $(D \cap {}^gH)/(I \cap {}^gH)$ est naturellement un sous-groupe de D/I, comme il se doit... ■

Démonstration. — En effet, cela découle du fait que $g(Q) = R^{gH}$ et du théorème A.2.3. □

Corollaire A.3.8. — *Supposons que, pour tout idéal premier* $\mathfrak{q}' \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p})$, *on ait* $k_Q(\mathfrak{q}') = k_P(\mathfrak{p})$. *Alors* $D\backslash G/H = I\backslash G/H$.

Démonstration. — D'après le lemme A.3.6 et le théorème A.2.3, il découle de l'hypothèse que, pour tout $g \in G$, $(D \cap {}^gH)/(I \cap {}^gH) \simeq D/I$. En d'autres termes,

$$\forall\ g \in G,\ D = I \cdot (D \cap {}^gH).$$

Soient donc $g \in G$ et $d \in D$. Alors il existe $i \in I$ et $h \in H$ tels que $d = ighg^{-1}$, c'est-à-dire $dg = igh$. Donc $DgH = IgH$. □

Lemme A.3.9. — *Écrivons* $\Upsilon^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$ *et supposons que* Q *est nette sur* P *en* $\mathfrak{q}_i$ *pour tout* i. *Alors* $I \subset \bigcap_{g \in G} {}^gH$.

Démonstration. — Soit $g \in G$. Alors $g(\mathfrak{r}) \cap Q \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{p})$ et donc il découle du théorème A.2.5 que ${}^gI \subset H$ (car ${}^gI$ est le groupe d'inertie de $g(\mathfrak{r})$). Ainsi, $I \subset {}^{g^{-1}}H$. □

Proposition A.3.10. — *Si* $I = \bigcap_{g \in G} {}^gH = 1$ *et si l'extension* $k_R(\mathfrak{r})/k_P(\mathfrak{p})$ *est séparable, alors* $k_R(\mathfrak{r})/k_P(\mathfrak{p})$ *est la clôture galoisienne de la famille d'extensions* $k_{gQ}(\mathfrak{q}_g)/k_P(\mathfrak{p})$, $g \in [D\backslash G/H]$.

REMARQUE - Si R est intègre (ce qui implique que P et Q le sont) et si G agit fidèlement, alors l'hypothèse $\bigcap_{g \in G} {}^gH = 1$ équivaut à dire que l'extension $\mathrm{Frac}(R)/\mathrm{Frac}(P)$ est la clôture galoisienne de $\mathrm{Frac}(Q)/\mathrm{Frac}(P)$.

Notons aussi que l'hypothèse $I = 1$ implique que G agit fidèlement. ■

Démonstration. — D'après le théorème A.2.3, l'extension $k_R(\mathfrak{r})/k_P(\mathfrak{p})$ est normale de groupe de Galois D. D'après le lemme A.3.6, l'extension $k_R(\mathfrak{r})/k_{g(Q)}(\mathfrak{q}_g)$ est normale de groupe de Galois $D \cap {}^gH$.

Notons k la clôture normale de la famille d'extensions $k_{g(Q)}(\mathfrak{q}_g)/k_P(\mathfrak{p})$, $g \in [H\backslash G/D]$. Alors le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_R(\mathfrak{r})/k)$ est l'intersection des conjugués, dans D, des groupes $D \cap {}^gH$, g variant dans $[H\backslash G/D]$. On a

$$\mathrm{Gal}(k_R(\mathfrak{r})/k) = \bigcap_{\substack{g \in [H\backslash G/D] \\ d \in D}} {}^d(D \cap {}^gH) = \bigcap_{\substack{g \in [D\backslash G/H] \\ d \in D}} D \cap {}^{dg}H.$$

Puisque ${}^hH = H$ pour tout $h \in H$, on a donc

$$\mathrm{Gal}(k_R(\mathfrak{r})/k) = \bigcap_{\substack{g \in [D\backslash G/H] \\ d \in D \\ h \in H}} D \cap {}^{dgh}H = \bigcap_{g \in G} {}^gH = 1,$$

par hypothèse. D'où le résultat. □

Contre-exemple A.3.11. — S'il y a de la ramification, alors la proposition ci-dessus est fausse, même si on suppose que P, Q et R sont des anneaux de Dedekind (même de valuation discrète). En effet, soit $\sqrt[3]{2}$ une racine cubique de 2 dans $\mathbb{C}$, ζ une racine primitive cubique de l'unité dans $\mathbb{C}$ et notons R la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$. Posons $G = \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_3$ et $H = \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, $P = \mathbb{Z}$ et, si $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de R tel que $\mathfrak{r} \cap \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$, alors $D = G$ et $|I| = 3$.

Ainsi, $D\backslash G/H$ est réduit à un élément et l'extension de corps correspondante $k_R(\mathfrak{r})/k_Q(\mathfrak{q})$ est galoisienne de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (en vertu du lemme A.3.6), tout comme $k_R(\mathfrak{r})/k_P(\mathfrak{p})$. Donc $k_P(\mathfrak{p}) = k_Q(\mathfrak{q}) \simeq \mathbb{F}_2$ et $k_R(\mathfrak{r}) \simeq \mathbb{F}_4$. Donc $k_R(\mathfrak{r})$ n'est pas la clôture galoisienne de l'extension $k_Q(\mathfrak{q})/k_P(\mathfrak{p})$. ■

A.3.C. Cas des corps. — Dans le cas où R est un corps, la situation se simplifie grandement.

> **Hypothèse.** *Dans cette sous-section, et dans cette sous-section seulement, nous reprenons les notations de la sous-section précédente (P, Q, R, G, H, D, I...) et nous supposons de plus que R est un corps : nous le noterons M. Nous poserons $L = Q = M^H$ et $K = P = M^G$. Nous supposerons aussi de plus que G agit fidèlement sur M. Ainsi, M/K est une extension galoisienne de groupe G et M/L est une extension galoisienne de groupe H.*

Il découle de l'hypothèse que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = \mathfrak{r} = 0$ et que $D = G$ et $I = 1$. Ainsi, la proposition A.3.5 fournit une bijection

$$G/H \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K-\mathrm{alg}}(L, M).$$

Si $g \in G$, le morphisme de K-algèbres $L \to M$, $q \mapsto g(q)$, s'étend en un morphisme de M-algèbres

$$\begin{array}{rccc} g_L : & M \otimes_K L & \longrightarrow & M \\ & m \otimes_K l & \longmapsto & m\, g(l). \end{array}$$

Proposition A.3.12. — *Le morphisme de M-algèbres*

$$\sum_{g \in [G/H]} g_L : M \otimes_K L \longrightarrow \bigoplus_{g \in [G/H]} M$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Puisque L est un K-espace vectoriel de dimension $|G/H|$, alors $M \otimes_K L$ est un M-espace vectoriel de dimension $|G/H|$. Il suffit donc de montrer l'injectivité de $\sum_{g\in[G/H]} g_L$, ce qui équivaut exactement à la M-indépendance linéaire des applications $L \to M$, $q \mapsto g(q)$, lorsque g parcourt $[G/H]$ (voir le corollaire A.1.1 au lemme de Dedekind). □

A.4. Rappels sur la clôture intégrale

Proposition A.4.1. — *Soit $f \in P[\mathbf{t}]$, soit P' une P-algèbre contenant P et soit $g \in P'[\mathbf{t}]$. On suppose que f et g sont unitaires et que g divise f (dans $P'[\mathbf{t}]$). Alors les coefficients de g sont entiers sur P.*

Démonstration. — Voir [**Bou**, chapitre 5, §1, proposition 11]. □

Corollaire A.4.2. — *Si P est **intègre et intégralement clos**, de corps des fractions K, si A est une K-algèbre et si $x \in A$ est entier sur P, alors le polynôme minimal de x sur K appartient à $P[\mathbf{t}]$.*

Démonstration. — Voir [**Bou**, chapitre 5, §1, corollaire de la proposition 11]. □

Proposition A.4.3. — *Si P est **intègre** et si $f \in P[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ est entier sur P, alors $f \in P$.*

Démonstration. — Soit $d \geqslant 1$ et soient $p_0, p_1, \ldots, p_{d-1}$ des éléments de P tels que $p_0 + p_1 f + \cdots + p_{d-1} f^{d-1} = f^d$. Notons δ la $\mathbf{t}$-valuation de P et δ' son degré. Puisque P est intègre, le degré de f^d est $d\delta'$, et donc l'égalité ci-dessus ne peut avoir lieu que si $\delta' = 0$. De même, $\delta = 0$. Donc f est constant. □

Contre-exemple A.4.4. — L'hypothèse d'intégrité est nécessaire dans la proposition précédente. Par exemple, si $p \in P$ est nilpotent, alors $p\mathbf{t}$ est entier sur P. ■

A.5. Rappels sur les calculs de groupes de Galois

Soit K un corps commutatif et soit $f(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^d + a_{d-1}\mathbf{t}^{d-1} + \cdots + a_1\mathbf{t} + a_0 \in K[\mathbf{t}]$. On note M un corps de décomposition de f (sur K) et on note

$$\mathrm{Gal}_K(f) = \mathrm{Gal}(M/K).$$

Le groupe $\mathrm{Gal}_K(f)$ est appelé le *groupe de Galois* de f sur K.

Notons $t_1, \ldots, t_d$ les éléments de M tels que

$$f(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{d} (\mathbf{t} - t_i),$$

de sorte que

$$M = K[t_1, \dots, t_d] = K(t_1, \dots, t_d).$$

Cette numérotation nous fournit un morphisme de groupes injectif

$$\mathrm{Gal}_K(f) \hookrightarrow \mathfrak{S}_d.$$

Supposons que P est intègre et intégralement clos, que K est le corps des fractions de P, et que $f \in P[\mathbf{t}]$. Notons R la clôture intégrale de P dans M et soit $G = \mathrm{Gal}(M/K)$. Alors $P = R^G$ car P est intégralement clos. Si $r \in R$, on note $\bar{r}$ son image dans $R/\mathfrak{r}$. Écrivons

$$\bar{f} = \prod_{j=1}^{l} f_j,$$

où $f_j \in k_P(\mathfrak{p})[\mathbf{t}]$ est un polynôme irréductible. Alors $D/I = \mathrm{Gal}(k_R(\mathfrak{r})/k_P(\mathfrak{p}))$ d'après le théorème A.2.3. Mais, R contient $t_1, \dots, t_d$, donc

$$\bar{f}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{d} (\mathbf{t} - \bar{t}_i).$$

On note Ω_j la partie de $\{1, 2, \dots, d\}$ telle que

$$f_j(\mathbf{t}) = \prod_{i \in \Omega_j} (\mathbf{t} - \bar{t}_i).$$

Soit $k_j = k_P(\mathfrak{p})((\bar{t}_i)_{i \in \Omega_j})$: c'est un corps de décomposition de f_j sur $k_P(\mathfrak{p})$. Soit $G_j = \mathrm{Gal}(k_j/k_P(\mathfrak{p}))$, c'est-à-dire le groupe de Galois de $\bar{f}_j$. Alors,

(A.5.1)

le morphisme canonique $D/I = \mathrm{Gal}(k_R(\mathfrak{r})/k_P(\mathfrak{p})) \to \mathrm{Gal}(k_j/k_P(\mathfrak{p})) = G_j$ *est surjectif*

pour tout j. Comme G_j agit transitivement sur Ω_j, on obtient en particulier que

(A.5.2) $\qquad |\Omega_j|$ *divise* $|G|$ *pour tout* j.

A.6. Quelques calculs de discriminant

Soient P un anneau commutatif et soit $f(\mathbf{t}) \in P[\mathbf{t}]$ un polynôme unitaire de degré d. On notera $\mathrm{disc}(f)$ son discriminant. Alors

(A.6.1) $$\mathrm{disc}(f(\mathbf{t}^2)) = (-4)^d \, \mathrm{disc}(f)^2 \cdot f(0).$$

Démonstration. — Par des arguments faciles de spécialisation, on peut supposer que P est un corps algébriquement clos. Notons $E_1, \dots, E_d$ les éléments de P tels que

$$f(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{d} (\mathbf{t} - E_i).$$

Fixons une racine carré e_i de E_i dans P. Alors

$$f(\mathbf{t}^2)) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \prod_{\varepsilon \in \{1,-1\}} (\mathbf{t} - \varepsilon e_i)$$

et le discriminant de $f(\mathbf{t}^2)$ vaut donc

$$\operatorname{disc}(f(\mathbf{t}^2)) = \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d} \prod_{\varepsilon, \varepsilon' \in \{1,-1\}} (\varepsilon e_i - \varepsilon' e_j)^2 \Big) \cdot \prod_{i=1}^{d} (e_i - (-e_i))^2.$$

En d'autres termes,

$$\operatorname{disc}(f(\mathbf{t}^2)) = 4^d \cdot \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (E_i - E_j)^4 \Big) \cdot \prod_{i=1}^{d} E_i = 4^d \ \operatorname{disc}(f)^2 \cdot (-1)^d f(0),$$

comme annoncé. □

Terminons par un résultat tout aussi facile :

(A.6.2) $$\operatorname{disc}(\mathbf{t} f(\mathbf{t})) = \operatorname{disc}(f) \cdot f(0)^2.$$

Démonstration. — Comme précédemment, on peut supposer que P est un corps algébriquement clos, et on note $E_1, \ldots, E_d$ les éléments de P tels que

$$f(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{t} - E_i).$$

Alors

$$\operatorname{disc}(\mathbf{t} f(\mathbf{t})) = \Big(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (E_i - E_j)^2 \Big) \cdot \prod_{i=1}^{d} (0 - E_i)^2.$$

D'où le résultat. □

APPENDICE B

GRADUATION ET EXTENSIONS ENTIÈRES

B.1. Idempotents, radical

Soit $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ un anneau $\mathbb{Z}$-gradué. Si B est un anneau contenant A et si $\xi \in B^\times$ commute avec A, alors il existe un unique morphisme d'anneaux

$$\mu_A^\xi : A \longrightarrow B$$

tel que $\mu_A^\xi(a) = a\xi^i$ si $a \in A_i$. Notons que, si A est $\mathbb{N}$-gradué (c'est-à-dire si $A_i = 0$ pour $i < 0$), alors μ_A^ξ peut être défini aussi lorsque ξ n'est pas inversible. Par exemple, si $\mathbf{t}$ est une indéterminée sur A, alors

$$\mu_A^{\mathbf{t}} : A \longrightarrow A[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$$

est un morphisme d'anneaux. Si on note $\mathrm{ev}_A^\xi : A[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] \to B$ le morphisme d'évaluation en ξ, alors

$$\mu_A^\xi = \mathrm{ev}_A^\xi \circ \mu_A^{\mathbf{t}}. \tag{B.1.1}$$

En particulier, si $B = A$ et $\xi = 1$, alors

$$\mu_A^1 = \mathrm{Id}_A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ev}_A^1 \circ \mu_A^{\mathbf{t}} = \mathrm{Id}_A\,. \tag{B.1.2}$$

D'autre part, le morphisme $\mu_A^\xi : A \longrightarrow B$ s'étend en un morphisme $\mathbb{Z}[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$-linéaire $\boldsymbol{\mu}_A^\xi : A[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] \longrightarrow B[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ et

$$\boldsymbol{\mu}_A^\xi \circ \mu_A^{\mathbf{t}} = \mu_A^{\xi\mathbf{t}}. \tag{B.1.3}$$

Comme cas particuliers, on peut prendre $B = A[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$ et $\xi = \mathbf{u}$, où $\mathbf{u}$ est une autre indéterminée, ou bien on peut prendre $B = A[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ et $\xi = \mathbf{t}^{-1}$. On obtient les deux égalités suivantes :

$$\boldsymbol{\mu}_A^{\mathbf{u}} \circ \mu_A^{\mathbf{t}} = \mu_A^{\mathbf{tu}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\mu}_A^{\mathbf{t}^{-1}} \circ \mu_A^{\mathbf{t}}(a) = a \in A[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] \tag{B.1.4}$$

pour tout $a \in A$. Pour finir, remarquons que

$$\mathrm{ev}_A^1 \circ \boldsymbol{\mu}_A^{\mathbf{t}^{-1}} = \mathrm{ev}_A^1. \tag{B.1.5}$$

Proposition B.1.6. — *Supposons A commutatif. Soit e un idempotent de A. Alors $e \in A_0$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer A par l'anneau engendré par les composantes homogènes de e, on peut supposer que A est noethérien. De plus, $\mu_A^{\mathbf{t}^l}(e)$ est un idempotent de $A[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$. Puisque A est commutatif et noethérien, $A[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ est aussi commutatif et noethérien, et donc ne contient qu'un nombre fini d'idempotents. Par conséquent, il existe $m > l > 0$ tels que $\mu_A^{\mathbf{t}^l}(e) = \mu_A^{\mathbf{t}^m}(e)$, ce qui implique que $e \in A_0$. □

Proposition B.1.7. — $\mathrm{Rad}(A)$ *est un idéal homogène de A.*

Démonstration. — Voir **[Puc]**. □

B.2. Extension de la graduation

> **Notations.** *Nous fixons dans cette section un anneau commutatif $\mathbb{Z}$-gradué intègre P. Nous noterons P_i sa composante homogène de degré i. Soit Q un anneau* ***intègre*** *contenant P et* ***entier*** *sur P.*

Le but de cette section est d'étudier les graduations de Q qui étendent celles de P. Commençons par régler le problème de l'unicité :

Lemme B.2.1. — *Si $Q = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_i = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \hat{Q}_i$ sont deux graduations de Q étendant celle de P (c'est-à-dire que $P_i = \tilde{Q}_i \cap P = \hat{Q}_i \cap P$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$), alors $\tilde{Q}_i = \hat{Q}_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$).*

Démonstration. — Comme dans la section B.1 (dont on reprend les notations), les graduations $Q = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_i$ et $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \hat{Q}_i$ correspondent à des morphismes d'anneaux $\tilde{\mu}_Q^{\mathbf{t}} : Q \to Q[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ et $\hat{\mu}_Q^{\mathbf{t}} : Q \to Q[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ étendant $\mu_P^{\mathbf{t}} : P \to P[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$. Notons

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & Q & \longrightarrow & Q[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] \\ & q & \longmapsto & \tilde{\boldsymbol{\mu}}_Q^{\mathbf{t}^{-1}}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_Q^{\mathbf{t}}(q)). \end{array}$$

Alors α est un morphisme d'anneaux et $\alpha(p) = p$ pour tout $p \in P$ d'après B.1.4. Par conséquent, si $q \in Q$, alors $\alpha(q) \in Q[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ est entier sur P. En particulier, $\alpha(q)$ est entier sur Q. Puisque Q est intègre, cela implique que $\alpha(q) \in Q$ (voir la proposition A.4.3).

Mais $\mathrm{ev}_Q(\alpha(q)) = q$ d'après (B.1.5), donc $\alpha(q) = q$, ce qui implique que $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_Q^{\mathbf{t}^{-1}} \circ \tilde{\mu}_Q^{\mathbf{t}} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_Q^{\mathbf{t}^{-1}} \circ \hat{\mu}_Q^{\mathbf{t}}$, toujours d'après (B.1.5). Puisque $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_Q^{\mathbf{t}^{-1}}$ est injectif, on en déduit que $\tilde{\mu}_Q^{\mathbf{t}} = \hat{\mu}_Q^{\mathbf{t}}$. □

Corollaire B.2.2. — *Si $Q = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Q_i$ est une graduation sur Q étendant celle de P et si G est un groupe agissant sur Q, stabilisant P et respectant la graduation de P, alors G respecte la graduation de Q.*

Démonstration. — En effet, si $g \in G$, alors $Q = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} g(Q_i)$ est une graduation sur Q étendant celle de P. En vertu du lemme B.2.1, on a $g(Q_i) = Q_i$ pour tout i. □

Contre-exemple B.2.3. — On ne peut pas se passer de l'hypothèse d'intégrité de Q dans le lemme B.2.1. En effet, si $P = P_0$ et si $Q = P \oplus P\varepsilon$ avec $\varepsilon^2 = 0$, alors on peut munir Q d'une infinité de graduations étendant celle de P en décrétant que ε est homogène de degré arbitraire. ■

Proposition B.2.4. — *Si $Q = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Q_i$ est une $\mathbb{Z}$-graduation de Q étendant celle de P et si $P_i = 0$ pour tout $i < 0$, alors $Q_i = 0$ pour tout $i < 0$.*

Démonstration. — Soit $i < 0$ et $q \in Q_i$. Puisque Q est entier sur P, il existe $r \geqslant 0$ et p_0, $p_1, \ldots, p_r$ dans P tels que $q^{r+1} = p_0 + p_1 q + \cdots + p_r q^r$. Alors $q^{r+1} \in Q_{(r+1)i}$ tandis que $p_0 + p_1 q + \cdots + p_r q^r \in \bigoplus_{j \geqslant ri} Q_j$. Donc $q^{r+1} = 0$ et donc $q = 0$. □

Nous allons maintenant nous intéresser à la question de l'existence. Pour cela, notons $K = \mathrm{Frac}(P)$, $L = \mathrm{Frac}(Q)$ et supposons que l'extension L/K est de degré fini.

Lemme B.2.5. — *La graduation de P s'étend en une graduation de sa clôture intégrale dans K. En outre, si P est en fait $\mathbb{N}$-gradué (c'est-à-dire $P_i = 0$ si $i < 0$), alors sa clôture intégrale dans K l'est aussi.*

Démonstration. — Voir [**Bou**, chapitre 5, §1, proposition 21]. □

Nous allons maintenant montrer que la question de l'existence se transmet à la clôture normale. Notons M la clôture normale de l'extension L/K et R la clôture intégrale de P dans M. Le lemme suivant est facile :

Lemme B.2.6. — *Graduons $P[\mathbf{x}]$ en attribuant à $\mathbf{x}$ le degré $d \in \mathbb{Z}$. Soit $F \in P[\mathbf{x}]$ un polynôme unitaire et* ***homogène*** *pour cette graduation. Si $F = F_1 \cdots F_r$, avec $F_i \in P[\mathbf{x}]$ unitaire, alors F_i est homogène pour tout i.*

Démonstration. — Le morphisme d'anneaux $\mu_P^{\mathbf{t}} : P \to P[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ associé à la graduation sur P (voir la section B.1) s'étend en un morphisme d'anneaux $\mu_{P[\mathbf{x}]}^{\mathbf{t}} : P[\mathbf{x}] \to P[\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ envoyant $\mathbf{x}$ sur $\mathbf{x}\mathbf{t}^d$. Notons l le degré *total* de F. Alors

$$\mu_{P[\mathbf{x}]}^{\mathbf{t}}(F) = F(X)\mathbf{t}^l = \mu_{P[\mathbf{x}]}^{\mathbf{t}}(F_1) \cdots \mu_{P[\mathbf{x}]}(F_r).$$

L'anneau $P[\mathbf{x}]$ étant intègre, de corps des fractions $K(\mathbf{x})$, la factorialité de $K(\mathbf{x})[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ implique qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K(\mathbf{x})$ et $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\mu_{P[\mathbf{x}]}^{\mathbf{t}}(F_i) = \lambda_i \mathbf{t}^{d_i}$$

pour tout i. Cela force F_i à être homogène de degré d_i, et $F_i = \lambda_i$. □

Corollaire B.2.7. — *Graduons $P[\mathbf{x}]$ en attribuant à $\mathbf{x}$ le degré $d \in \mathbb{Z}$. Soit $F \in P[\mathbf{x}]$ un polynôme unitaire et* ***homogène*** *pour cette graduation. On suppose que M est le corps de décomposition de F sur K. Alors R admet une graduation étendant celle de P.*

En outre, si P est $\mathbb{N}$-gradué et $d \geqslant 0$, alors R est $\mathbb{N}$-gradué.

Démonstration. — D'après le lemme B.2.5, on peut supposer que P est intégralement clos. Notons δ le degré de F *en la variable* $\mathbf{x}$. Nous allons montrer le résultat par récurrence sur δ, le cas où $\delta = 1$ étant trivial (car alors $P = R$).

Supposons donc $\delta \geqslant 2$ et soit F_1 un polynôme irréductible unitaire de $K[\mathbf{x}]$ divisant F. D'après la proposition A.4.1, $F_1 \in P[\mathbf{x}]$. Posons $K' = K[\mathbf{x}]/ < F_1 >$ et notons x l'image de $\mathbf{x}$ dans K'. Alors K' est un corps commutatif et il contient l'anneau $P' = P[\mathbf{x}]/ < F_1 >$. En fait, K' est le corps des fractions de P. Puisque F_1 est homogène, P' est gradué (avec x homogène de degré d). D'après le lemme B.2.5, la clôture intégrale P'' de P' dans K' hérite d'une graduation. D'autre part, $K' \subset M$ et M est le corps de décomposition de F sur K'. Dans $P''[\mathbf{x}]$, on a

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - x)F_0(\mathbf{x}),$$

avec $F_0(\mathbf{x}) \in P''[\mathbf{x}]$ homogène, et de degré *en la variable* $\mathbf{x}$ égal à $\delta - 1$. Puisque le corps de décomposition de F sur K est égal au corps de décomposition de F_0 sur K', le résultat se déduit de l'hypothèse de récurrence.

L'énoncé concernant la $\mathbb{N}$-graduation découle de la preuve ci-dessus et de l'unicité de l'extension de la graduation (voir le lemme B.2.1). □

Proposition B.2.8. — *Supposons P et Q intégralement clos. Si la graduation de P s'étend en une graduation sur Q, alors elle s'étend aussi en une graduation de R.*

En outre, si Q est $\mathbb{N}$-gradué, alors R l'est aussi.

Démonstration. — Soient $q_1, \ldots, q_r$ des éléments de Q, homogènes de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_r$ et tels que $L = K[q_1, \ldots, q_r]$. On note $F_i \in K[\mathbf{t}]$ le polynôme minimal de

q_i : en fait, $F_i \in P[\mathbf{t}]$ en vertu du corollaire A.4.2. Alors M est le corps de décomposition de $F_1 \cdots F_r$. Quitte à raisonner par récurrence, on peut alors supposer que $r = 1$: on écrira alors $q = q_1$, $d = d_1$ et $F = F_1$.

Si on attribue à l'indéterminée $\mathbf{t}$ le degré d, alors on vérifie facilement que F est un polynôme homogène (pour le degré total sur $P[\mathbf{t}]$). L'existence de l'extension de la graduation découle alors du corollaire B.2.7.

Le résultat sur la $\mathbb{N}$-graduation se démontre de même. □

Lemme B.2.9. — *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de P et notons $\tilde{\mathfrak{p}}$ l'idéal homogène maximal de P contenu dans $\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire $\tilde{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{p} \cap P_i$). Alors $\tilde{\mathfrak{p}}$ est premier.*

Démonstration. — En effet, $(P/\mathfrak{p})[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ est intègre et $\tilde{\mathfrak{p}}$ est le noyau du morphisme composé $P \longrightarrow P[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] \twoheadrightarrow (P/\mathfrak{p})[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ (ici, la première application est $\mu_P^{\mathbf{t}}$). □

Lemme B.2.10. — *Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de Q et soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap P$. Supposons que la graduation de P s'étende à Q. Alors $\mathfrak{p}$ est homogène si et seulement si $\mathfrak{q}$ l'est.*

Démonstration. — Si $\mathfrak{q}$ est homogène, alors $\mathfrak{p}$ l'est bien évidemment. Réciproquement, supposons $\mathfrak{p}$ homogène. On pose $\mathfrak{q}' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{q} \cap Q_i)$. Alors $\mathfrak{q}'$ est un idéal homogène de Q contenu dans $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}' \cap P = \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap P$. D'après le lemme B.2.9, $\mathfrak{q}'$ est un idéal premier, donc $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$ car Q est entier sur P. □

Terminons par quelques résultats sur les homogénéisés des idéaux premiers de P ou Q :

Corollaire B.2.11. — *Supposons que la graduation de P s'étende à Q. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de P et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de Q tel que $\mathfrak{q} \cap P = \mathfrak{p}$. Notons $\tilde{\mathfrak{p}}$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{q}}$) l'idéal homogène maximal de P (respectivement Q) contenu dans $\mathfrak{p}$ (respectivement $\mathfrak{q}$). Alors $\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{q}} \cap P$.*

Démonstration. — Cela découle de la preuve précédente et du fait que le diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, hook] & (P/\mathfrak{p})[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] \arrow[d, hook] \\ Q \arrow[r] & Q/\mathfrak{q}[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] \end{tikzcd}$$

est commutatif. □

Corollaire B.2.12. — *Supposons que la graduation de P s'étende à Q et qu'il existe un groupe fini G agissant sur Q et tel que $P = Q^G$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de Q et notons $\tilde{\mathfrak{q}}$ l'idéal homogène maximal de Q contenu dans $\mathfrak{q}$. Notons $D_{\mathfrak{q}}$ (respectivement $D_{\tilde{\mathfrak{q}}}$) le groupe de décomposition de $\mathfrak{q}$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{q}}$) dans G et $I_{\mathfrak{q}}$ (respectivement $I_{\tilde{\mathfrak{q}}}$) le groupe d'inertie de $\mathfrak{q}$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{q}}$) dans G. Alors*

$$D_{\mathfrak{q}} \subset D_{\tilde{\mathfrak{q}}} \qquad \textit{et} \qquad I_{\mathfrak{q}} = I_{\tilde{\mathfrak{q}}}.$$

Démonstration. — La première inclusion est immédiate, car G respecte la graduation (voir le corollaire B.2.2). D'autre part, $Q/\mathfrak{q}$ est un quotient de $Q/\tilde{\mathfrak{q}}$, donc $I_{\tilde{\mathfrak{q}}} \subset I_{\mathfrak{q}}$. Réciproquement, si $g \in I_{\mathfrak{q}} \subset D_{\mathfrak{q}} \subset D_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ et si $q \in \mathfrak{q} \cap Q_i$, alors $g(q) - q \in \mathfrak{q} \cap Q_i \subset \tilde{\mathfrak{q}}$. Donc $g \in I_{\tilde{\mathfrak{q}}}$. □

B.3. Graduation et groupes de réflexions

Notation. *Dans cette section, nous fixons un corps commutatif k de caractéristique nulle et une k-algèbre commutative $\mathbb{N}$-graduée* ***intègre*** *$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$. Nous supposons de plus que $R_0 = k$ et que R est de type fini. Nous fixons aussi un groupe fini G agissant* ***fidèlement*** *sur R par automorphismes de k-algèbre graduée et nous notons $P = R^G$. Notons $R_+ = \bigoplus_{i>0} R_i$: c'est l'unique idéal maximal gradué de R. Nous fixons un sous-espace vectoriel gradué et G-stable E^* de R tel que $R_+ = R_+^2 \oplus E^*$ (un tel sous-espace existe car kG est semi-simple) et nous notons E le k-dual de E^*.*

Le groupe G agit sur l'espace vectoriel E et le but de cette section est de donner quelques critères permettant de déterminer si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_k(E)$ engendré par des réflexions. Nos résultats s'inspirent de [**BeBoRo**].

Tout d'abord, le graduation sur E^* induit une graduation sur E et une graduation sur $k[E]$, l'algèbre des fonctions polynomiales sur E (ou encore l'algèbre symétrique de E^*). De même, $k[E]$ hérite d'une action de G, qui préserve la graduation. Nous noterons $k[E]_+$ l'unique idéal maximal gradué de $k[E]$. L'inclusion $E^* \hookrightarrow R$ induit un morphisme G-équivariant de k-algèbres gradués

$$\pi : k[E] \longrightarrow R$$

dont il est facile de vérifier qu'il est surjectif et que

(B.3.1) *le nombre minimal de générateurs de la k-algèbre R est* $\dim_k E$

(voir par exemple [**BeBoRo**, lemme 2.1]). Nous noterons

$$I = \operatorname{Ker} \pi,$$

de sorte que

(B.3.2) $$R \simeq k[E]/I.$$

En particulier, G agit fidèlement sur E. Puisque I est homogène, il découle immédiatement du lemme de Nakayama gradué que

(B.3.3) *le nombre minimal de générateurs de l'idéal I est* $\dim_k I/k[E]_+I$

D'autre part, il est tout aussi facile de vérifier que

(B.3.4) $I = k[E]I^G$ *si et seulement si G agit trivialement sur $I/k[E]_+I$.*

(voir par exemple [**BeBoRo**, lemme 3.1]). Pour finir, puisque kG est semi-simple, on a

(B.3.5) $$P \simeq k[E]^G/I^G.$$

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme B.3.6. — *Si R est un P-module libre, alors le rang du P-module R est $|G|$.*

Démonstration. — Notons d le P-rang de R. Puisque R est intègre, P l'est aussi et, si on pose $K = \mathrm{Frac}(P)$ et $M = \mathrm{Frac}(R)$, alors $K = L^G$ (et donc $[L:K] = |G|$) et $L = K \otimes_P R$ (et donc $[L:K] = d$). Par conséquent, $d = |G|$. □

Le résultat principal de cette section est le suivant (comparer avec [**BeBoRo**, théorème 3.2], dont nous reprenons presque mot pour mot la preuve) :

Proposition B.3.7. — *On suppose que P est régulière et que R est un P-module libre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *R est d'intersection complète et G agit trivialement sur $I/k[E]_+I$.*
(2) *G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_k(E)$ engendré par des réflexions.*

Remarque B.3.8. — Si P est régulière et puisque l'on travaille avec des objets gradués, les assertions suivantes sont équivalentes :

- R est un P-module libre.
- R est un P-module plat.
- R est de Cohen-Macaulay.

D'autre part, si R est d'intersection complète, alors R est de Cohen-Macaulay. ■

Démonstration. — Posons $e = \dim_k E$, $i = \dim_k I/k[E]_+I$ et notons d la dimension de Krull de R (qui est aussi celle de P). De plus, e est la dimension de Krull de $k[E]$ et de $k[E]^G$.

Montrons tout d'abord que (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons donc que R est d'intersection complète et que G agit trivialement sur $I/k[E]_+I$. Puisque R est d'intersection complète et d'après (B.3.2) et (B.3.3), on a

$$d = e - i.$$

De plus, puique G agit trivialement sur $I/k[E]_+I$, l'idéal I de $k[E]$ peut être engendré par i éléments G-invariants homogènes $f_1, \ldots, f_i$ et donc l'idéal I^G de $k[E]^G$ est engendré par $f_1, \ldots, f_i$. Puisque P est régulière de dimension de Krull d, $P = k[E]^G/I^G$ peut-être engendrée par d éléments $\pi(g_1), \ldots, \pi(g_d)$ où $g_j \in k[E]^G$ est homogène. Par conséquent, la k-algèbre $k[E]^G$ est engendrée par $f_1, \ldots, f_i, g_1, \ldots, g_d$, c'est-à dire qu'elle est engendrée par $i + d = e$ éléments. Puisque la dimension de Krull de $k[E]^G$ est aussi égale à e, cela montre que $k[E]^G$ est une algèbre de polynômes, donc que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_k(E)$ engendré par des réflexions d'après le théorème 1.2.1.

Réciproquement, montrons maintenant que (2) $\Rightarrow$ (1). Supposons donc que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_k(E)$ engendré par des réflexions. Alors $k[E]$ est un $k[E]^G$-module libre de rang $|G|$ (d'après le théorème 1.2.1) et donc $(k[E]^G/I^G) \otimes_{k[E]^G} k[E]$ est un P-module libre de rang $|G|$ (voir (B.3.5)). D'autre part, $k[E]/I = R$ est un P-module libre de rang $|G|$ d'après le lemme B.3.6. Donc la surjection canonique $(k[E]^G/I^G) \otimes_{k[E]^G} k[E] \twoheadrightarrow k[E]/I$ (entre deux P-modules de même rang) est un isomorphisme, ce qui signifie que I est engendré par I^G et donc que G agit trivialement sur $I/k[E]_+I$ (d'après (B.3.4)).

D'autre part, puisque $k[E]^G$ et $k[E]^G/I^G = P$ sont toutes deux des algèbres de polynômes (d'après le théorème 1.2.1 pour $k[E]^G$), P est d'intersection complète et donc I^G peut être engendré par $e - d$ éléments. On décuit de (B.3.3) et (B.3.4) que $i \leqslant e - d$ et donc forcément $i = e - d$ et R est d'intersection complète. $\square$

APPENDICE C

BLOCS, MATRICES DE DÉCOMPOSITION

Hypothèses et notations. *Nous fixons dans cet appendice un anneau commutatif R que nous supposerons* ***noethérien***, ***intègre*** *et* ***intégralement clos****. Nous fixons un idéal premier $\mathfrak{r}$. Nous fixons aussi une R-algèbre $\mathscr{H}$ que nous supposons être, comme R-module, libre et de type fini. Nous noterons $\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ le centre de $\mathscr{H}$, $k = \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{r}) = k_R(\mathfrak{r})$ et $K = \mathrm{Frac}(R) = k_R(0)$. Pour finir, l'image d'un élément $h \in \mathscr{H}$ dans $k\mathscr{H}$ sera notée $\bar{h}$.*

C.1. Blocs de $k\mathscr{H}$

Si A est un anneau (non nécessairement commutatif), nous noterons $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(A)$ l'ensemble de ses idempotents primitifs. Par exemple, $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(\mathscr{H}))$ est l'ensemble des idempotents primitifs centraux de $\mathscr{H}$. Puisque $\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ est noethérien,

$$1 = \sum_{e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(\mathscr{H}))} e. \tag{C.1.1}$$

D'autre part, le morphisme $\mathscr{H} \to k\mathscr{H}$ induit un morphisme $\pi_{\mathrm{Z}} : k\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \to \mathrm{Z}(k\mathscr{H})$ (qui peut n'être ni surjectif ni injectif). Cependant, le résultat suivant à été démontré par Müller [**Mül**, théorème 3.7] :

***Proposition C.1.2* (Müller).** — (a) *Si $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(k\mathrm{Z}(\mathscr{H}))$, alors $\pi_{\mathrm{Z}}(e) \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H}))$.*
(b) *L'application $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(k\mathrm{Z}(\mathscr{H})) \to \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H}))$, $e \mapsto \pi_{\mathrm{Z}}(e)$ est bijective.*

Dans une k-algèbre commutative de dimension finie $\mathscr{A}$ (par exemple $\mathrm{Z}(k\mathscr{H})$ ou $k\mathrm{Z}(\mathscr{H})$), les idéaux premiers sont maximaux et sont en bijection avec l'ensemble des idempotents primitifs de $\mathscr{A}$: si $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}\,\mathscr{A}$ et $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathscr{A})$, alors e et $\mathfrak{m}$ se correspondent par cette bijection si et seulement si $e \notin \mathfrak{m}$ (ou encore si et seulement si $\mathfrak{m} = \mathrm{Rad}(\mathscr{A}e) + (1-e)\mathscr{A}$). La proposition C.1.2 montre donc que $\mathrm{Spec}\,k\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ est en

bijection avec $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H}))$, c'est-à-dire avec l'ensemble des idempotents primitifs centraux de $k\mathscr{H}$.

Par ailleurs, le morphisme naturel (et injectif) $R \hookrightarrow \mathrm{Z}(\mathscr{H})$ induit un morphisme $\Upsilon : \mathrm{Spec}\,\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \to \mathrm{Spec}\,R$. L'application $\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \to k\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ induit une bijection entre les ensembles $\mathrm{Spec}\,k\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ et $\Upsilon^{-1}(\mathfrak{r})$. Rappelons que

$$\Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) = \{\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}\,\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \mid \mathfrak{z} \cap R = \mathfrak{r}\}.$$

Au final, on obtient une bijection

$$\Xi_{\mathfrak{r}} : \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H})) \xrightarrow{\sim} \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) \tag{C.1.3}$$

caractérisée par la propriété suivante :

Lemme C.1.4. — *Si $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H}))$ et si $\mathfrak{z} \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r})$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathfrak{z} = \Xi_{\mathfrak{r}}(e)$.
(2) $e \notin \pi_{\mathrm{Z}}(k\mathfrak{z})$.
(3) $\mathfrak{z}$ *est l'image inverse, dans* $\mathrm{Z}(\mathscr{H})$, *de* $\pi_{\mathrm{Z}}^{-1}(\mathrm{Rad}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H})e) + (1-e)\mathrm{Z}(k\mathscr{H}))$.

Maintenant, par localisation en $\mathfrak{r}$, $\Upsilon^{-1}(\mathfrak{r})$ est en bijection avec $\Upsilon_{\mathfrak{r}}^{-1}(\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}})$, où $\Upsilon_{\mathfrak{r}} : \mathrm{Spec}\,R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \to \mathrm{Spec}\,R_{\mathfrak{r}}$ est l'application induite par l'inclusion $R_{\mathfrak{r}} \hookrightarrow R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H})$. Les bijections, réciproques l'une de l'autre, entre $\Upsilon^{-1}(\mathfrak{r})$ et $\Upsilon_{\mathfrak{r}}^{-1}(\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}})$ sont données par

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) & \longrightarrow & \Upsilon_{\mathfrak{r}}^{-1}(\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}}) \\ \mathfrak{z} & \longmapsto & R_{\mathfrak{r}}\mathfrak{z} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_{\mathfrak{r}}^{-1}(\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}}) & \longrightarrow & \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) \\ \mathfrak{z} & \longmapsto & \mathfrak{z} \cap \mathrm{Z}(\mathscr{H}). \end{array}$$

Le centre de l'algèbre $R_{\mathfrak{r}}\mathscr{H}$ est égal à $R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ et le morphisme canonique $\mathscr{H} \to k\mathscr{H}$ s'étend en un morphisme $R_{\mathfrak{r}}\mathscr{H} \to k\mathscr{H}$, que nous noterons encore $h \mapsto \bar{h}$. Pour finir, nous noterons $R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \to k\mathrm{Z}(\mathscr{H})$, $z \mapsto \hat{z}$, le morphisme canonique (de sorte que $\bar{z} = \pi_{\mathrm{Z}}(\hat{z})$ si $z \in R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H})$).

Pour résumer, on obtient un diagramme naturel de bijections

(C.1.5)

$$\begin{tikzcd} \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \Upsilon_{\mathfrak{r}}^{-1}(\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}}) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \mathrm{Spec}\,k\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"] & \mathrm{Spec}\,\mathrm{Z}(k\mathscr{H}) \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"] \\ & & \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(k\mathrm{Z}(\mathscr{H})) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H})). \end{tikzcd}$$

C.2. Blocs de $R_{\mathfrak{r}}\mathscr{H}$

> **Hypothèse.** *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposerons que la K-algèbre $K\mathscr{H}$ est* ***déployée****.*

La question du relèvement des idempotents lorsque l'anneau local $R_{\mathfrak{r}}$ est complet pour la topologie $\mathfrak{r}$-adique est classique. Nous proposerons ici une autre version, valable lorsque la K-algèbre $K\mathscr{H}$ est déployée (seule la normalité de R intervient : aucune hypothèse sur la dimension de Krull de R ou sa complétude n'est nécessaire).

C.2.A. Caractères centraux. — Si V est un $K\mathscr{H}$-module simple, et si $z \in K\mathrm{Z}(\mathscr{H})$, alors z agit sur V par multiplication par un élément $\omega_V(z) \in K$ (car $K\mathscr{H}$ étant déployée, on a $\mathrm{End}_{K\mathscr{H}}(V) = K$). Cela définit un morphisme de K-algèbres

$$\omega_V : K\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \longrightarrow K$$

dont la restriction à $\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ est à valeurs dans R (car $\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ est entier sur R et R est intégralement clos). Ainsi, cela définit un morphisme de R-algèbres

$$\omega_V : \mathrm{Z}(\mathscr{H}) \longrightarrow R.$$

Par composition avec la projection canonique $R \to R/\mathfrak{r}$, on obtient un morphisme de R-algèbres

$$\omega_V^{\mathfrak{r}} : \mathrm{Z}(\mathscr{H}) \longrightarrow R/\mathfrak{r}.$$

Puisque $\omega_V(1) = 1$ et que $R/\mathfrak{r}$ est intègre, $\mathrm{Ker}\,\omega_V$ est un idéal premier de $\mathrm{Z}(\mathscr{H})$ tel que $\mathrm{Ker}\,\omega_V \cap R = \mathfrak{r}$. Donc

$$\mathrm{Ker}\,\omega_V^{\mathfrak{r}} \in \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}). \tag{C.2.1}$$

Cela nous définit une application

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{K}er_{\mathfrak{r}} : & \mathrm{Irr}(K\mathscr{H}) & \longrightarrow & \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) \\ & V & \longmapsto & \mathrm{Ker}\,\omega_V^{\mathfrak{r}} \end{array}.$$

Définition C.2.2. — *Les fibres de l'application $\mathscr{K}er_{\mathfrak{r}}$ sont appelées les* ***$\mathfrak{r}$-blocs*** *de $\mathscr{H}$.*

Les $\mathfrak{r}$-blocs de $\mathscr{H}$ sont donc des sous-ensembles de l'ensemble $\mathrm{Irr}(K\mathscr{H})$, dont ils forment une partition. Notons que, puisque $\mathrm{Z}(\mathscr{H}) = R + \mathrm{Ker}(\omega_V^{\mathfrak{r}})$, le caractère central $\omega_V^{\mathfrak{r}}$ est déterminé par son noyau. Ainsi, deux $K\mathscr{H}$-modules simples V appartiennent au même $\mathfrak{r}$-bloc si et seulement si $\omega_V^{\mathfrak{r}} = \omega_{V'}^{\mathfrak{r}}$.

C.2.B. Relèvement des idempotents. — Le résultat principal de cette section est le suivant :

Proposition C.2.3. — *On a :*

(a) *Si* $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H}))$, *alors* $\hat{e} \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(k\mathrm{Z}(\mathscr{H}))$.
(b) *L'application* $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H})) \to \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(k\mathrm{Z}(\mathscr{H}))$, $e \mapsto \hat{e}$ *est bijective.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{array}{rccc} \Omega : & R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H}) & \longrightarrow & \prod_{V \in \mathrm{Irr}(K\mathscr{H})} R_{\mathfrak{r}} \\ & z & \longmapsto & (\omega_V(z))_{V \in \mathrm{Irr}(K\mathscr{H})}. \end{array}$$

Alors Ω est un morphisme de $R_{\mathfrak{r}}$-algèbres, de noyau I égal à $R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \cap \mathrm{Rad}(K\mathscr{H})$ et dont on notera A l'image.

Par conséquent, I est nilpotent et donc Ω induit une bijection $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H})) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(A)$. De plus, d'après le corollaire C.4.3, la réduction modulo $\mathfrak{r}$ induit une bijection $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(A) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(kA)$. Il nous reste donc à montrer que le noyau de l'application naturelle $k\mathrm{Z}(\mathscr{H}) \twoheadrightarrow kA$ est nilpotent, ce qui est évident car c'est l'image de I dans $k\mathrm{Z}(\mathscr{H})$. □

Corollaire C.2.4. — *L'application* $\mathscr{K}er_{\mathfrak{r}} : \mathrm{Irr}(K\mathscr{H}) \to \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r})$ *est surjective. Ses fibres sont de la forme* $\mathrm{Irr}(K\mathscr{H}e)$, *où* $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H}))$.

Démonstration. — La première assertion découle de C.4.4 et la deuxième de la preuve de la proposition C.2.3. □

En combinant les propositions C.1.2 et C.2.3, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire C.2.5. — *On a :*

(a) *Si* $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H}))$, *alors* $\bar{e} \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H}))$.
(b) *L'application* $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H})) \to \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(\mathrm{Z}(k\mathscr{H}))$, $e \mapsto \bar{e}$ *est bijective.*

Ainsi, on obtient une bijection

$$\Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H})) \tag{C.2.6}$$

Si $\mathfrak{z} \in \Upsilon_{\mathfrak{r}}^{-1}(\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}})$ et si $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathrm{Z}(\mathscr{H}))$, alors

(C.2.7) *e et $\mathfrak{z}$ sont associés par cette bijection si et seulement si $e \notin R_{\mathfrak{r}}\mathfrak{z}$.*

Pour résumer, on obtient un diagramme naturel de bijections

(C.2.8)

$$\begin{tikzcd}
\Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[dr, leftrightarrow, dashed, "\sim"] & \Upsilon_{\mathfrak{r}}^{-1}(\mathfrak{r}R_{\mathfrak{r}}) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[d, leftrightarrow, dashed, "\wr"] & \operatorname{Spec} kZ(\mathscr{H}) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"] & \operatorname{Spec} Z(k\mathscr{H}) \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"] \\
& \operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}Z(\mathscr{H})) \arrow[r, leftrightarrow, dashed, "\sim"] & \operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(kZ(\mathscr{H})) \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(Z(k\mathscr{H})),
\end{tikzcd}$$

les bijections en pointillé n'existant à coup sûr que parce que la K-algèbre $K\mathscr{H}$ est déployée.

Nous noterons

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) & \longrightarrow & \operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}Z(\mathscr{H})) \\ \mathfrak{z} & \longmapsto & e_{\mathfrak{z}} \end{array}$$

la bijection du diagramme C.2.8. On obtient une partition de $\operatorname{Irr}(K\mathscr{H})$ grâce à l'action des idempotents centraux $e_{\mathfrak{z}}$:

$$\operatorname{Irr}(K\mathscr{H}) = \coprod_{\mathfrak{z}\in\Upsilon^{-1}(\mathfrak{r})} \operatorname{Irr}(K\mathscr{H}e_{\mathfrak{z}}). \tag{C.2.9}$$

Les sous-ensembles $\operatorname{Irr}(K\mathscr{H}e_{\mathfrak{z}})$ sont les $\mathfrak{r}$-blocs de $\mathscr{H}$.

Exemple C.2.10. — Lorsque $\mathfrak{r}$ est l'idéal nul, alors $R_{\mathfrak{r}} = k = K$, $\Upsilon^{-1}(\mathfrak{r}) \simeq \operatorname{Spec} KZ(\mathscr{H})$, $\operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}\mathscr{H}) = \operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(K\mathscr{H})$ et $\omega_V^{\mathfrak{r}} = \omega_V$. ■

C.2.C. Lieu de ramification. — La proposition suivante est certainement classique (et nécessite le fait que R soit intégralement clos) :

Proposition C.2.11. — *Supposons l'algèbre $K\mathscr{H}$* ***déployée****. Alors il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de R vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(1) $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{a})$ *est vide ou purement de codimension* 1 *dans* $\operatorname{Spec}(R)$ *;*

(2) *Si $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de R, alors* $\operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}Z(\mathscr{H})) = \operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(KZ(\mathscr{H}))$ *si et seulement si* $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{r}$.

Démonstration. — Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une R-base de $\mathscr{H}$ et soit $\operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(KZ(\mathscr{H})) = \{e_1, \dots, e_l\}$ avec $l = |\operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(Z(\mathscr{H}))|$. Fixons un idéal premier $\mathfrak{r}$ de R. On écrit

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, b_j$$

avec $k_{ij} \in K$. Alors $\operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(R_{\mathfrak{r}}Z(\mathscr{H})) = \operatorname{Idem}_{\mathrm{pr}}(KZ(\mathscr{H}))$ si et seulement si

$$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant l,\ \forall\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ k_{ij} \in R_{\mathfrak{r}}. \tag{♣}$$

Si $k \in K$, on pose $\mathfrak{a}_k = \{r \in R \mid rk \in R\}$. Alors $\mathfrak{a}_k$ est un idéal de R et, si $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de R, alors $k \in R_{\mathfrak{r}}$ si et seulement si $\mathfrak{a}_k \not\subset \mathfrak{r}$. Posons

$$\mathfrak{a} = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant l \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \mathfrak{a}_{k_{ij}}.$$

Ainsi, (♣) devient équivalent à $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{r}$. Cela démontre l'assertion (2).

Montrons maintenant que $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{a})$ est vide ou purement de codimension 1 dans $\mathrm{Spec}(R)$. Pour cela, il suffit de montrer que $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{a}_k)$ est vide ou purement de codimension 1 dans $\mathrm{Spec}(R)$. Si $k \in R$, alors $\mathfrak{a}_k = R$ et il n'y rien à montrer. Supposons donc que $k \notin R$, et montrons qu'alors $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{a}_k)$ est purement de codimension 1 dans $\mathrm{Spec}(R)$. Soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier minimal de R contenant $\mathfrak{a}_k$. Alors $k \notin R_{\mathfrak{r}}$. Il nous faut montrer que $\mathfrak{r}$ est de hauteur 1. Mais, puisque R est intégralement clos, il en est de même de $R_{\mathfrak{r}}$: donc $R_{\mathfrak{r}}$ est l'intersection des localisés $R_{\mathfrak{r}'}$, où $\mathfrak{r}'$ parcours l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de R contenus dans $\mathfrak{r}$ (voir [**Mat**, théorème 11.5]). Donc il existe un idéal premier $\mathfrak{r}'$ de R de hauteur 1 contenu dans $\mathfrak{r}$ et tel que $k \notin R_{\mathfrak{r}'}$. Ainsi $\mathfrak{a}_k \subset \mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$ et la minimalité de $\mathfrak{r}$ implique que $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'$, c'est-à-dire que $\mathfrak{r}$ est de hauteur 1. □

C.3. Matrices de décomposition

Soit R_1 une R-algèbre commutative et soit $\mathfrak{r}_1$ un idéal premier de R_1. On pose $R_2 = R_1/\mathfrak{r}_1$, $K_1 = \mathrm{Frac}(R_1)$ et $K_2 = \mathrm{Frac}(R_2) = k_{R_1}(\mathfrak{r}_1)$. Notons $\mathscr{F}(\mathscr{H}, K_1[\mathbf{t}])$ l'ensemble des applications $\mathscr{H} \to K_1[\mathbf{t}]$. Si V est un $K_1\mathscr{H}$-module de type fini et si $h \in \mathscr{H}$, nous noterons $\mathrm{Char}_{K_1}^V(h)$ le polynôme caractéristique de h pour son action sur le K_1-espace vectoriel de dimension finie V. Ainsi, $\mathrm{Char}_{K_1}^V \in \mathscr{F}(\mathscr{H}, K_1[\mathbf{t}])$. D'autre part, $\mathrm{Char}_{K_1}^V$ ne dépend que de la classe de V dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{K}_0(K_1\mathscr{H})$. Cela définit donc une application

$$\mathrm{Char}_{K_1} : \mathscr{K}_0^+(K_1\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathscr{H}, K_1[\mathbf{t}]),$$

où $\mathscr{K}_0^+(K_1\mathscr{H})$ désigne le sous-monoïde de $\mathscr{K}_0(K_1\mathscr{H})$ formé des classes d'isomorphie de $K_1\mathscr{H}$-modules de type fini. Il est bien connu que Char_{K_1} est injective [**GeRo**, proposition 2.5].

Nous dirons que le couple $(R_1, \mathfrak{r}_1)$ vérifie la propriété ($\mathscr{D}$*éc*) si les trois assertions suivantes sont satisfaites :

(D1) R_1 est noethérien, intègre.

(D2) Si $h \in R_1\mathbf{H}$ et si V est un $K_1\mathbf{H}$-module simple, alors $\mathrm{Char}_{K_1}^V(h) \in R_1[\mathbf{t}]$ (notons que cette propriété est automatiquement satisfaite si R_1 est intégralement clos).

(D3) Les algèbres $K_1\mathbf{H}$ et $K_2\mathbf{H}$ sont déployées.

On note $\text{réd}_{\mathfrak{r}_1} : \mathscr{F}(\mathscr{H}, R_1[\mathbf{t}]) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathscr{H}, R_2[\mathbf{t}])$ la réduction modulo $\mathfrak{r}_1$. D'autre part, sous l'hypothèse (D3), si K_2' est une extension de K_2, l'extension des scalaires induit un isomorphisme $\mathscr{K}_0(K_2\mathscr{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{K}_0(K_2'\mathscr{H})$, et nous identifierons donc ces deux groupes de Grothendieck.

***Proposition C.3.1* (Geck-Rouquier).** — *Si $(R_1, \mathfrak{r}_1)$ vérifie $(\mathscr{D}\text{éc})$, alors il existe une unique application $\text{déc}_{R_2\mathscr{H}}^{R_1\mathscr{H}} : \mathscr{K}_0(K_1\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(K_2\mathscr{H})$ rendant le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}_0(K_1\mathscr{H}) \arrow[r, "\mathrm{Char}_{K_1}"] \arrow[d, "\text{déc}_{R_2\mathscr{H}}^{R_1\mathscr{H}}"'] & \mathscr{F}(\mathscr{H}, R_1[\mathbf{t}]) \arrow[d, "\text{réd}_{\mathfrak{r}_1}"] \\
\mathscr{K}_0(K_2\mathscr{H}) \arrow[r, "\mathrm{Char}_{K_2}"] & \mathscr{F}(\mathscr{H}, K_2[\mathbf{t}])
\end{tikzcd}$$

commutatif. Si $\mathscr{O}_1$ est un sous-anneau de K_1 contenant R_1, si $\mathfrak{m}_1$ est un idéal de $\mathscr{O}_1$ tel que $\mathfrak{m}_1 \cap R_1 = \mathfrak{r}_1$, et si $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{O}_1\mathscr{H}$-module qui est $\mathscr{O}_1$-libre et de type fini, alors $k_{\mathscr{O}_1}(\mathfrak{m}_1)$ est une extension de K_2 et

$$\text{déc}_{R_1\mathscr{H}}^{R_2\mathscr{H}}[\,K_1\mathscr{L}\,]_{K_1\mathscr{H}} = [\,k_{\mathscr{O}_1}(\mathfrak{m}_1)\mathscr{L}\,]_{k_{\mathscr{O}_1}(\mathfrak{m}_1)\mathscr{H}}.$$

Démonstration. — Cette proposition est démontrée dans [**GeRo**, proposition 2.11] lorsque R_1 est intégralement clos. Nous allons déduire le cas général du cas particulier. Si on suppose seulement que (D2) est vraie, notons R_1' la clôture intégrale de R_1 dans K_1. Puisque R_1' est entier sur R_1, il existe un idéal premier $\mathfrak{r}_1'$ de R_1' tel que $\mathfrak{r}_1' \cap R_1 = \mathfrak{r}_1$. Posons $R_2' = R_1'/\mathfrak{r}_1'$. Alors $k_{R_1'}(\mathfrak{r}_1')$ est une extension de $k_{R_1}(\mathfrak{r}_1)$ donc $k_{R_1'}(\mathfrak{r}_1)\mathscr{H}$ est déployée, ce qui signifie que, d'après [**GeRo**, proposition 2.11], $\text{déc}_{R_2'\mathscr{H}}^{R_1'\mathscr{H}} : \mathscr{K}_0(K_1\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{K}_0(k_{R_1'}(\mathfrak{r}_1')\mathscr{H})$ est bien définie et vérifie les propriétés souhaitées. On définit alors $\text{déc}_{R_2\mathscr{H}}^{R_1\mathscr{H}}$ en utilisant l'isomorphisme $\mathscr{K}_0(k_{R_1'}(\mathfrak{r}_1')\mathscr{H}) \simeq \mathscr{K}_0(K_2\mathscr{H})$ et il est facile de vérifier que cette application vérifie les propriétés attendues. □

Il s'en suit un résultat de transitivité immédiat [**GeRo**, proposition 2.12] :

***Corollaire C.3.2* (Geck-Rouquier).** — *Soit R_1 une R-algèbre, soit $\mathfrak{r}_1$ un idéal premier de R_1 et soit $\mathfrak{r}_2$ un idéal premier de $R_2 = R_1/\mathfrak{r}_1$. On suppose que $(R_1, \mathfrak{r}_1)$ et $(R_2, \mathfrak{r}_2)$ vérifient $(\mathscr{D}\text{éc})$ et on pose $R_3 = R_2/\mathfrak{r}_2$. Alors*

$$\text{déc}_{R_3\mathscr{H}}^{R_1\mathscr{H}} = \text{déc}_{R_3\mathscr{H}}^{R_2\mathscr{H}} \circ \text{déc}_{R_2\mathscr{H}}^{R_1\mathscr{H}}.$$

C.4. Idempotents et caractères centraux

Le but de cette section est de compléter la preuve de la proposition C.2.5. Soit $\mathscr{O}$ un anneau local noethérien et soit A une sous-$\mathscr{O}$-algèbre de $\mathscr{O}^d = \mathscr{O} \times \mathscr{O} \times \cdots \times \mathscr{O}$ (d fois). On note $\mathfrak{m} = J(\mathscr{O})$, $k = \mathscr{O}/\mathfrak{m}$ et, si $r \in \mathscr{O}$, on note $\bar{r}$ son image dans k.

Si $1 \leqslant i \leqslant d$, on note $\pi_i : \mathscr{O}^d \to \mathscr{O}$ la i-ème projection et

$$\omega_i : A \longrightarrow \mathscr{O}$$

désigne la restriction de π_i à A. On pose

$$\begin{array}{rccc} \bar{\omega}_i : & A & \longrightarrow & k \\ & a & \longmapsto & \overline{\omega_i(a)}. \end{array}$$

Sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, d\}$, on note $\smile$ la relation d'équivalence définie par

$$i \smile j \quad \text{si et seulement si} \quad \bar{\omega}_i = \bar{\omega}_j.$$

Pour finir, on pose

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ème position}}, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{O}^d.$$

Alors :

Lemme C.4.1. — *Soit $I \in \{1, 2, \ldots, d\}/\smile$. Alors $\sum_{i \in I} e_i \in A$.*

Démonstration. — Quitte à réordonner, on peut supposer que $I = \{1, 2, \ldots, d'\}$ avec $d' \leqslant d$. Procédons par étapes :

(♣) *Si $i \in I$ et $j \notin I$, alors il existe $a_{ij} \in A$ tel que $\omega_i(a_{ij}) = 1$ et $\omega_j(a_{ij}) = 0$.*

Preuve de (♣). Puisque $i \not\smile j$, il existe $a \in A$ tel que $\bar{\omega}_i(a) \neq \bar{\omega}_j(a)$. Posons $r = \omega_j(a)$ et $u = \omega_i(a) - \omega_j(a)$. Alors $u \in \mathscr{O}^\times$ car $\mathscr{O}$ est local et $a_{ij} = u^{-1}(a - r \cdot 1_A) \in A$ vérifie les conditions. ■

(♢) *Il existe $a_1 \in A$ tel que $\omega_1(a_1) = 1$ et $\omega_j(a_1) = 0$ si $j \notin I$.*

Preuve de (♢). D'après (♣), il existe, pour tous $i \in I$ et $j \notin J$, $a_{ij} \in A$ tel que $\omega_i(a_{ij}) = 1$ et $\omega_j(a_{ij}) = 0$. Notons que, si $i' \in I$, alors $\omega_{i'}(a_{ij}) \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$ car $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{i'}$. Posons $a = \prod_{i \in I, j \notin J} a_{ij}$. Alors il est clair que $\omega_j(a) = 0$ si $j \notin I$ et $\omega_i(a) \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$ si $i \in I$. Il suffit alors de prendre $a_1 = \omega_1(a)^{-1} a$. ■

On définit alors par récurrence la suite $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant d'}$:

$$a_{i+1} = a_i^2(1 + \omega_{i+1}(a_i)^{-2}(1 - a_i^2)).$$

on va montrer par récurrence sur $i \in \{1, 2, \ldots, d'\}$ les deux faits suivants :

($\heartsuit_i$) *L'élément a_i est bien défini et appartient à A.*

($\spadesuit_i$) *Si $1 \leqslant i' \leqslant i$ et $j \notin I$, alors $\omega_{i'}(a_i) = 1$ et $\omega_j(a_i) = 0$.*

Preuve de ($\heartsuit_i$) *et* ($\spadesuit_i$). C'est clair pour $i = 1$. On raisonne donc par récurrence en supposant que ($\heartsuit_i$) et ($\spadesuit_i$) sont vérifiées (avec $i \leqslant d' - 1$). Montrons ($\heartsuit_{i+1}$) et ($\spadesuit_{i+1}$).

Alors $i \smile i+1$ et donc $\omega_{i+1}(a_i) \equiv \omega_i(a_i) = 1 \mod \mathfrak{m}$. Donc $\omega_{i+1}(a_i)$ est inversible et donc a_{i+1} est bien défini et appartient à A (ce qui est exactement ($\heartsuit_{i+1}$)).

D'autre part, posons pour simplifier $r = \omega_{i+1}(a_i)$. Alors :

- Si $1 \leqslant i' \leqslant i$, on a $\omega_{i'}(a_{i+1}) = 1 \cdot (1 + r^{-2}(1 - 1^2)) = 1$.
- $\omega_{i+1}(a_{i+1}) = r^2(1 + r^{-2}(1 - r^2)) = 1$.
- Si $j \notin I$, alors $\omega_j(a_{i+1}) = 0 \cdot (1 + r^{-2}(1 - 0^2)) = 0$.

D'où le résultat. ■

Ainsi, $a_{d'} = \sum_{i \in I} e_i \in A$. □

Corollaire C.4.2. — *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \{1, 2, \ldots, d\}/\smile & \longrightarrow & \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(A) \\ I & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i \in I} e_i \end{array}$$

est bien définie et bijective.

Démonstration. — Le lemme C.4.1 montre que, si $I \in \{1, 2, \ldots, d\}/\smile$, alors $e_I = \sum_{i \in I} e_i \in A$. Si e_I n'est pas primitif, cela signifie, puisque $\mathcal{O}$ est local, qu'il existe deux parties non vides I_1 et I_2 de I telles que $e_{I_1}, e_{I_2} \in A$, et $I = I_1 \coprod I_2$. Mais, si $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$, alors $\bar{\omega}_{i_1}(e_{I_1}) = 1 \neq 0 = \bar{\omega}_{i_2}(e_{I_1})$, ce qui est impossible car $i_1 \smile i_2$. Donc l'application $I \mapsto e_I$ est bien définie. Sa bijectivité est claire. □

Si $a \in A$, on note $\hat{a}$ son image dans $kA = k \otimes_{\mathcal{O}} A$.

Corollaire C.4.3. — *Avec ces notations, on a :*

(a) *Si $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(A)$, alors $\hat{e} \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(kA)$.*
(b) *L'application $\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(A) \to \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(kA)$, $e \mapsto \hat{e}$ est bijective.*

Démonstration. — (a) Soit $e \in \mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(A)$ et supposons que $\hat{e} = e_1 + e_2$, o'u e_1 et e_2 sont des idempotents centraux orthogonaux de kA. L'anneau $\mathscr{O}$ étant noethérien, kA est une k-algèbre commutative de dimension finie. Donc il existe deux morphismes de k-algèbres $\rho_1, \rho_2 : kA \to k'$ (où k' est une extension finie de k) tels que $\rho_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Notons $\tilde{\rho}_i$ la composition $A \to kA \xrightarrow{\rho_i} k'$.

Posons $\mathfrak{a}_i = \mathrm{Ker}(\tilde{\rho}_i)$. L'image de ρ_i étant un sous-corps de k', $\mathfrak{a}_i$ est un idéal maximal de A. Puisque $\mathscr{O}^d$ est entier sur A, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}_i$ de $\mathscr{O}^d$ tel que $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{m}_i \cap A$. Puisque $\mathscr{O}$ est local, $\mathfrak{m}_i$ est de la forme $\mathscr{O} \times \cdots \times \mathscr{O} \times \mathfrak{m} \times \mathscr{O} \times \cdots \times \mathscr{O}$, où $\mathfrak{m}$ est en t_i-ième position (pour un $t_i \in \{1, 2, \ldots, d\}$), ce qui implique que $\tilde{\rho}_i = \bar{\omega}_{t_i}$.

Puisque $\rho_1 \neq \rho_2$ et $\rho_i(e_j) = \delta_{i,j}$, on obtient $\bar{\omega}_{t_1} \neq \bar{\omega}_{t_2}$ et $\bar{\omega}_{t_1}(e) = \rho_1(e_1 + e_2) = 1 = \rho_2(e_1 + e_2) = \bar{\omega}_{t_2}(e)$. Cela contredit le corollaire C.4.2. □

Dans le cours de cette preuve, le résultat suivant a été démontré : si k' est une extension finie de k et si $\rho : kA \to k'$ est un morphisme de k-algèbres, alors

(C.4.4) *il existe $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ tel que $\rho(\hat{a}) = \bar{\omega}_i(a)$ pour tout $a \in A$.*

INDEX

$\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^0, \mathbf{A}^+$, **112**
$\mathscr{A}$, **29**
α_s, $\alpha_s^\vee$, **27**
α_s^W , **73**
B_W , **35**
$\mathbf{b}_\chi$, **32**
bigr^R , **90**
$\mathrm{bigr}_{\xi,\xi'}$, **63**
$\boldsymbol{\beta}$, **65**
C^D , **144**
C_s , **57**
C_w , **50**
$C_w^{(k)}$, **50**
$[\,C\,]_c^{\mathrm{KL}}$, **51**
$[\,C\,]_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{CM}}, [\,C\,]^{\mathrm{CM}}, [\,C\,]_c^{\mathrm{CM}}$, **147**
$\mathscr{C}$, **57**
$\mathscr{C}(\mathfrak{C})$, **108**
$\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$, **39**
$\widetilde{\mathscr{C}}$, **57**
$\widetilde{\mathfrak{C}}_{t,c}$, **59**
$\mathfrak{C}_c$, **67**
$\mathrm{CM}_{\mathfrak{r}}(b)$, **102**
${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L^{\mathfrak{C}}(W), {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L(W), {}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_L^c(W)$, **143**
${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{\mathfrak{r}}(W)$, **101**
${}^{\mathrm{CM}}\mathrm{Cell}_{LR}^{\mathfrak{C}}(W)$, **134**
c , **49**
c_I , **53**
$c_\chi(k)$, **42**
c_s , **57**
c_{s_H} , **49**
car_w , **89**
$\mathrm{cas}_{\mathbf{H}}$, **75**
cop , **82**
cop_c , **84**
$D_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, D^{\mathrm{left}}, D_c^{\mathrm{left}}$, **141**
D_+ , **91**
D_c , **83**
$\bar{D}_{\mathfrak{C}}, \bar{D}, \bar{D}_c$, **132**
$\mathrm{déc}_{R_2\mathscr{H}}^{R_1\mathscr{H}}$, **245**
$\mathrm{déc}_{\mathfrak{C}}, \mathrm{déc}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, \mathrm{déc}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}\ \mathrm{déc}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{res}}$, **156**
disc , **229**
$\overline{\mathrm{déc}}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, \overline{\mathrm{déc}}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}$, **156**
$\mathrm{déc}_c$, **154**
$\mathrm{déc}_{\mathfrak{r}}$, **154**
$\mathrm{disc}(D/P)$, **104**
deg , **38**
$\deg_{\mathfrak{C}}(C^D), \deg_{\mathfrak{C}}(C)$, **145**
$\dim_{\mathbf{k}}^{\mathrm{bigr}}$, **30**
d_i , **28**
Δ , **84**
$\mathscr{E}(\mathbf{k})$, **29**
$\widetilde{\mathbf{eu}}$, **61**
e , **62**
e_H , **29**
e_Ω , **29**
e_w , **102**
eu , **87**
eu_w , **87**
$\mathbf{eu}$, **68**
$\mathbf{eu}_c$, **70**
ε , **27**
F , **35**
$F(\mathbf{q}^{\mathbb{R}})$, **38**
$F(\mathbf{q}_{\text{gén}})$, **36**
$F_{\mathbb{R}}$, **47**
$\mathscr{F}_n\widetilde{\mathbf{H}}$, **61**
$f_\chi(\mathbf{t})$, **31**
G , **82**
$G_{\mathfrak{r}}^D, G_{\mathfrak{r}}^I$, **221**
$\gamma \cdot c$, **52**
$\gamma_{\mathscr{C}}$, **63**

H , 82
$\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)$, 38
$\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{>0}$, 50
$\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{\leqslant_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma}$, $\mathscr{H}_W^{\mathrm{cyc}}(k)_{<_?^{\mathrm{KL},c}\Gamma}$, 51
$\mathscr{H}_W^{\mathrm{gén}}$, 36
$\bar{\mathbf{H}}, \mathbf{H}^{\mathrm{left}}, \mathbf{H}^{\mathrm{right}}, \bar{\mathbf{H}}_c, \mathbf{H}_c^{\mathrm{left}}, \mathbf{H}_c^{\mathrm{right}}$, 108
$\bar{\mathbf{H}}_{\mathfrak{C}}, \mathbf{H}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, \mathbf{H}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}$, 108
$\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}[i,j]$, $\widetilde{\mathbf{H}}^{\varphi}[i]$, $\widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{N}}[i], \widetilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{Z}}[i]$, 60
$\widetilde{\mathbf{H}}_{\varphi}[i]$, 60
$\widetilde{\mathbf{H}}_{t,c}$, 59
$\mathbf{H}$, 67
$\mathbf{H}^{\mathrm{rég}}$, 73
$\mathbf{H}_c$, 67
$\mathbf{H}_{\mathfrak{C}}$, 68
${}^{\tau}h$, 65
$I_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, I^{\mathrm{left}}, I_c^{\mathrm{left}}$, 141
I_+ , 91
I_c , 83
$\mathrm{Irr}(W)$, $\mathrm{Irr}(\mathbf{k}W)$, 30
$\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathrm{KL}}(W)$, 51
$\mathrm{Irr}_{\Gamma}^{\mathrm{CM}}(W)$, 134
$\mathrm{Irr}_{\mathbf{H}}(W,b)$, 116
$\mathrm{Irr}_{\mathscr{H}}(W,b)$, 42
$\bar{I}_{\mathfrak{C}}, \bar{I}, \bar{I}_c$, 132
$\mathrm{Idem}_{\mathrm{pr}}(A)$, 239
i_c, j_c , 97
iso_0 , 85
ι , 85
$K_{\Omega,j}$, $K_{H,j}$, 58
$\bar{\mathbf{K}}, \mathbf{K}^{\mathrm{left}}, \mathbf{K}^{\mathrm{right}}, \bar{\mathbf{K}}_c, \mathbf{K}_c^{\mathrm{left}}, \mathbf{K}_c^{\mathrm{right}}$, 108
$\bar{\mathbf{K}}_{\mathfrak{C}}, \mathbf{K}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, \mathbf{K}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}$, 108
$\mathbf{K}$, 82
$\mathbf{K}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, \mathbf{K}^{\mathrm{left}}, \mathbf{K}_c^{\mathrm{left}}$, 141
$\mathbf{K}_c$, 83
$\mathscr{K}_0(\mathbf{k}W)$, 30
$k_R(\mathfrak{r})$, 221
$\mathbf{k}$, 27
$\mathbf{k}[V]$, $\mathbf{k}[V^*]$, 28
$\mathbf{k}[V]^W$, $\mathbf{k}[V^*]^W$, 28
$\mathbf{k}[V]^{\mathrm{co}(W)}$, $\mathbf{k}[V^*]^{\mathrm{co}(W)}$, 28
$\mathbf{k}[V]_+$, $\mathbf{k}[V^*]_+$, 28
$\chi^{\mathrm{gén}}$, χ_k^{cyc} , 41
$\mathrm{Length}_{Z_{\mathfrak{z}}}(M_{\mathfrak{z}})$, 148
$\bar{\mathbf{L}}_{\mathfrak{C}}, \bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{L}}_c$, 132
$\mathbf{L}$, 82
$\mathbf{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, \mathbf{L}^{\mathrm{left}}, \mathbf{L}_c^{\mathrm{left}}$, 141
$\mathbf{L}_c$, 83
$\mathscr{L}_w$, 88
$\mathscr{L}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C), \mathscr{L}^{\mathrm{left}}(C) \mathscr{L}_c^{\mathrm{left}}(C)$, 144
$[M]_{\mathbf{k}W}$, 30
$[M]_{\mathbf{k}W}^{\mathrm{gr}}$, 31
$\bar{\mathbf{M}}_{\mathfrak{C}}, \bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}_c$, 132
$\bar{\mathscr{M}}$, 113
$\mathbf{M}$, 82
$\mathbf{M}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, \mathbf{M}^{\mathrm{left}}, \mathbf{M}_c^{\mathrm{left}}$, 141
$\mathbf{M}_c$, 83
$\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{CM}}$, 146
$\mathscr{M}^{\mathrm{left}}(\chi)$, 139
$m_{\Omega,j}^{\chi}$, 40
m_{st} , 48
$\mathrm{mult}_{C,\chi}^{\mathrm{KL}}$, 51
μ_A^{ξ} , 231
$\boldsymbol{\mu}_W$, 35
$\mathscr{N}$, 64
n , 27
$\mathscr{O}$, 35
$\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$, 38
$\mathscr{O}[\mathbf{q}^{\mathbb{X}}]$, 50
$\mathscr{O}[\mathbf{q}_{\mathrm{gén}}^{\pm 1}]$, 36
$\mathscr{O}^{\mathrm{cyc}}[\mathbf{q}^{\mathbb{R}}]$, 42
Ω_{χ}^c , 117
$\Omega_{\gamma}^{\mathrm{left}}$, 140
$\Omega_b^K, \Omega_b, \Omega_b^c$, 117
$\Omega_b^{\sharp}$, 122
$\omega_V, \omega_V^{\mathfrak{r}}$, 241
$\boldsymbol{\Omega}_W$, 29
$\boldsymbol{\Omega}_W^{\circ}$, 36
ω_w , 102
$\omega_{\chi,k}^{\mathrm{cyc}}$, 42
$\boldsymbol{\omega}_{\chi}^{\mathrm{gén}}$, 40
P , 69
$P^{\mathrm{rég}}$, 73
P_W , 35
$P_{\bullet}$, 70, 83
$\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_{\bullet}$, 97
$\bar{P}, P^{\mathrm{left}}, P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}, \bar{P}, P_c^{\mathrm{left}}, P_c^{\mathrm{right}}$, 108
$\bar{P}_{\mathfrak{C}}, P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, P_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}$, 108
$\mathscr{P}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C)$, 148
$\bar{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}^{\mathrm{left}}, \mathfrak{p}^{\mathrm{right}}, \bar{\mathfrak{p}}_c, \mathfrak{p}_c^{\mathrm{left}}, \mathfrak{p}_c^{\mathrm{right}}$, 108
$\bar{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{C}}, \mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}, \mathfrak{p}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{right}}$, 108
$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, 101
$\mathfrak{p}_c$, 83
$\mathfrak{p}_{\mathrm{ram}}$, 104
π , 98
$\boldsymbol{\pi}$, 36
Q , 82
Q_c , 83
$\mathscr{Q}$, 98
$\bar{\mathfrak{q}}$, 131
$\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}$, 132
$\bar{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{left}}(C^D)$, 144

$\mathbf{q}_{H,j}$, 36
$\mathbf{q}_{\text{gén}}$, $\mathbf{q}_{\Omega,j}$, 36
$\mathbf{q}_{s,j}$, 49
$\mathfrak{q}^{\text{left}}$, 140
$\mathfrak{q}_c$, 83
$\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}$, 141
R , 82
R_+ , 90
R_c , 83
$\text{Réf}(W)$, 27
$\mathscr{R}$, 98
$\mathscr{R}(\mathfrak{r})$, 106
$\mathscr{R}_c$, 98
$\mathscr{R}_w$, 99
$\mathscr{R}_w(\mathfrak{r})$, 106
$\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}$, 132
$\bar{\mathfrak{r}}, \mathfrak{r}^{\text{left}}, \mathfrak{r}^{\text{right}}, \bar{\mathfrak{r}}_c, \mathfrak{r}_c^{\text{left}}, \mathfrak{r}_c^{\text{right}}$, 108
$\bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{C}}, \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}, \mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{right}}$, 108
$\mathfrak{r}_c$, 83
$\mathfrak{r}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}, \mathfrak{r}^{\text{left}}, \mathfrak{r}_c^{\text{left}}$, 141
$\mathfrak{r}_{\text{ram}}$, 103
$\rho^{\mathscr{B}}$, 88
ρ_G , 98
ρ_H , 98
$\rho_w^{\mathscr{B}}$, 88
$\rho_{\tilde{\mathbf{H}}}$, 66
s_H , 29
$s_\chi^{\text{cyc}}(k)$, 41
$\mathbf{s}_\chi^{\text{gén}}$, 40
sch_w , 89
σ , 65
$\sigma_{\tilde{\mathbf{H}}}$, 65
$\sigma_{\mathbf{H}}$, 79
$\boldsymbol{\sigma}_H$, 36
$\boldsymbol{\sigma}_s$, 48
$\boldsymbol{\sigma}_w$, 48
T , 57
T_H, $T_H^{(k)}$, 38
$\mathbf{T}_H$, 36
$\mathbf{T}_s$, 49
$\mathbf{T}_w$, 49
$\overline{T}_w$, 50
$\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, 30
τ_0 , 93
τ_k^{cyc} , 41
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{H}}$, 75
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{MH}}$, 89
$\boldsymbol{\tau}_{\mathscr{H}}$, 37
Θ , 73, 117
Θ_c , 117
Θ_k^{cyc} , 38
$\Theta_{\mathfrak{C}}$, 117
θ_K , 111
Υ, Υ_c , 97
V , 27
V_F , 35
V_χ , 113
$V_{F_{\mathbb{R}}}$, 47
$V_{\mathbb{C}}^{\text{rég}}$, 35
val , 38
$v_{\mathbb{C}}$, 35
$v_{\mathbb{R}}$, 47
W , 27
W^I , 53
$W^\wedge$, 30
W_I , 53
W_X , 29
w_0 , 48
Z, Z_c , 69
$Z[U^{-1}]$, 73
$Z^{\text{rég}}$, 73
$Z_c^{\text{rég}}$, 74
$\mathscr{Z}$, $\mathscr{Z}_c$, 97
$\mathscr{Z}^{\text{rég}}$, 98
$\mathscr{Z}_{\text{sing}}$, 104
$\mathfrak{z}_{\text{sing}}$, 104
$\bar{\mathfrak{z}}_b$, 123
$\bar{\mathfrak{z}}$, 131
$\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}$, 132
$\bar{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{C}}(\Gamma), \mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}(C^D), \mathfrak{z}_{\mathfrak{C}}^{\text{left}}(C)$, 144
$\mathfrak{z}^{\text{left}}$, 140
ζ_e , 29
$*$, 52
$\dagger$, 43
$\leqslant_L^c$, $\leqslant_R^c$, $\leqslant_{LR}^c$, 50
$\xleftarrow{L,c}$, $\xleftarrow{R,c}$, 50
$\sim_L^{\text{KL},c}$, $\sim_R^{\text{KL},c}$, $\sim_{LR}^{\text{KL},c}$, 50
$\sim_{\mathfrak{r}}^{\text{CM}}$, 101
$\{,\}$, 75
$\langle,\rangle$, 27
$\langle,\rangle_W$, 30

BIBLIOGRAPHIE

[AlFo] J. ALEV & L. FOISSY, Le groupe des traces de Poisson de certaines algèbres d'invariants, *Comm. Algebra* **37** (2009), 368-388.

[Bel1] G. BELLAMY, *Generalized Calogero-Moser spaces and rational Cherednik algebras*, PhD thesis, University of Edinburgh, 2010.

[Bel2] G. BELLAMY, On singular Calogero-Moser spaces, *Bull. of the London Math. Soc.* **41** (2009), 315-326.

[Bel3] G. BELLAMY, Factorization in generalized Calogero-Moser spaces, *J. Algebra* **321** (2009), 338-344.

[Bel4] G. BELLAMY, Cuspidal representations of rational Cherednik algebras at $t = 0$, *Math. Z.* (2011) **269**, 609-627.

[Bel5] G. BELLAMY, The Calogero-Moser partition for $G(m, d, n)$, *Nagoya Math. J.* **207** (2012), 47-77.

[Ben] M. BENARD, Schur indices and splitting fields of the unitary reflection groups, *J. Algebra* **38** (1976), 318-342.

[Bes] D. BESSIS, Sur le corps de définition d'un groupe de réflexions complexe, *Comm. Algebra* **25** (1997), 2703-2716.

[BeBoRo] D. BESSIS, C. BONNAFÉ & R. ROUQUIER, Quotients et extensions de groupes de réflexion complexes, *Math. Ann.* **323** (2002), 405-436.

[Bia] A. BIALYNICKI-BIRULA, Some theorems on actions of algebraic groups, *Ann. of Math.* **98** (1973), 480-497.

[Bon1] C. BONNAFÉ, Two-sided cells in type B (asymptotic case), *J. Algebra* **304** (2006), 216-236.

[Bon2] C. BONNAFÉ, Semicontinuity properties of Kazhdan-Lusztig cells, *New-Zealand J. Math.* **39** (2009), 171-192.

[Bon3] C. BONNAFÉ, On Kazhdan-Lusztig cells in type B, *J. Algebraic Combin.* **31** (2010), 53-82. Erratum to: On Kazhdan-Lusztig cells in type B, *J. Algebraic Combin.* **35** (2012), 515-517.

[Bon4] C. BONNAFÉ, Constructible characters and **b**-invariant, preprint (2013), disponible sur `arxiv`.

[BoDy] C. BONNAFÉ & M. DYER, Semidirect product decomposition of Coxeter groups, *Comm. in Algebra* **38** (2010), 1549-1574.

[BoGe] C. BONNAFÉ & M. GECK, Conjugacy classes of involutions and Kazhdan-Lusztig cells, preprint (2012), `arXiv:1205.4092`.

[BGIL] C. BONNAFÉ, M. GECK, L. IANCU & T. LAM, On domino insertion and Kazhdan-Lusztig cells in type B_n, *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 33-54, Progress in Mathematics **284**, Birkhäuser/Springer, New York, 2010.

[BoIa] C. BONNAFÉ & L. IANCU, Left cells in type B_n with unequal parameters, *Representation Theory* **7** (2003), 587-609.

[BoKe] C. BONNAFÉ & G. KEMPER, Some complete intersection symplectic quotients in positive characteristic: invariants of a vector and a covector, *J. Algebra* **335** (2011), 96-112.

[Bou] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative, chapitres 5, 6, 7*.

[Bri] E. BRIESKORN, Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe, *Invent. Math.* **12** (1971), 57-61.

[Bro] M. BROUÉ, *Introduction to complex reflection groups and their braid groups*, Lecture Notes in Mathematics **1988**, 2010, Springer.

[BrKi] M. BROUÉ & S. KIM, Familles de caractères des algèbres de Hecke cyclotomiques, *Adv. Math.* **172** (2002), 53-136.

[BrMaMi1] M. BROUÉ, G. MALLE & J. MICHEL, Towards Spetses I, *Transformation Groups* **4** (1999) 157-218.

[BrMaMi2] M. BROUÉ, G. MALLE & J. MICHEL, Split Spetses for primitive reflection groups, preprint (2012), `arXiv:1204.5846`.

[BrMaRo] M. BROUÉ, G. MALLE & R. ROUQUIER, Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras, *J. Reine Angew. Math.* **500** (1998), 127-190.

[BrMi] M. BROUÉ & J. MICHEL, Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne-Lusztig associées, *Finite reductive groups* (Luminy, 1994), 73-139, Progr. Math. **141**, Birkhäuser, Boston, MA, 1997.

[BrGo] K. A. BROWN & I. G. GORDON, The ramification of centres: Lie algebras in positive characteristic and quantised enveloping algebras, *Math. Z.* **238** (2001), 733-779.

[BrGoSt] K. A. BROWN, I. G. GORDON & C. H. STROPPEL, Cherednik, Hecke and quantum algebras as free Frobenius and Calabi-Yau extensions, *J. Algebra* **319** (2008), 1007-1034.

[Chl1] M. CHLOUVERAKI, *Sur les algèbres de Hecke cyclotomiques des groupes de réflexions complexes*, thèse, Paris 7 (2007).

[Chl2] M. CHLOUVERAKI, Rouquier blocks of the cyclotomic Hecke algebras, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **344** (2007), 615-620.

[Chl3] M. CHLOUVERAKI, Rouquier blocks of the cyclotomic Ariki-Koike algebras, *Algebra Number Theory* **2** (2008), 689-720.

[Chl4] M. CHLOUVERAKI, *Blocks and families for cyclotomic Hecke algebras*, Lecture Notes in Mathematics **1981**, 2009, Springer.

[Chl5] M. CHLOUVERAKI, Rouquier blocks of the cyclotomic Hecke algebras of $G(de,e,r)$, *Nagoya Math. J.* **197** (2010), 175-212.

[EtGi] P. ETINGOF & V. GINZBURG, Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism, *Invent. Math.* **147** (2002), 243-348.

[FrMa] D. FROHARDT & K. MAGAARD, Composition factors of monodromy groups, *Ann. of Math.* **154** (2001), 327-345.

[Ge1] M. GECK, On the induction of Kazhdan-Lusztig cells, *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), 608-614.

[Ge2] M. GECK, Computing Kazhdan–Lusztig cells for unequal parameters *J. Algebra* **281** (2004) 342-365.

[Ge3] M. GECK, Left cells and constructible representations, *Represent. Theory* **9** (2005), 385-416; Erratum to: "Left cells and constructible representations", *Represent. Theory* **11** (2007), 172-173.

[GeIa] M. GECK & L. IANCU, Lusztig's **a**-function in type B_n in the asymptotic case, *Nagoya Math. J.* **182** (2006), 199-240.

[GePf] M. GECK & G. PFEIFFER, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs, New Series **21**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000, xvi+446 pp.

[GeRo] M. GECK & R. ROUQUIER, Centers and simple modules for Iwahori-Hecke algebras, in *Finite reductive groups* (Luminy, 1994), 251-272, Progr. in Math. **141**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.

[GGOR] V. GINZBURG, N. GUAY, E. OPDAM & R. ROUQUIER, On the category $\mathcal{O}$ for rational Cherednik algebras, *Invent. Math.* **154** (2003), 617-651.

[GiKa] V. GINZBURG & D. KALEDIN, Poisson deformations of symplectic quotient singularities, *Adv. in Math.* **186** (2004), 1-57.

[Gor1] I. GORDON, Baby Verma modules for rational Cherednik algebras, *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), 321-336.

[Gor2] I. GORDON, Quiver varieties, category $\mathcal{O}$ for rational Cherednik algebras, and Hecke algebras, *Int. Math. Res. Pap. IMRP* (2008), no. 3, Art. ID rpn006, 69 pp.

[GoMa] I. G. GORDON & M. MARTINO, Calogero-Moser space, restricted rational Cherednik algebras and two-sided cells, *Math. Res. Lett.* **16** (2009), 255-262.

[HoNa] R. R. HOLMES & D. K. NAKANO, Brauer-type reciprocity for a class of graded associative algebras, *J. of Algebra* **144** (1991), 117-126.

[KaLu] D. KAZHDAN & G. LUSZTIG, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.* **53** (1979), 165-184.

[Lus1] G. LUSZTIG, Left cells in Weyl groups, in *Lie group representations, I*, 99-111, Lecture Notes in Math. **1024**, Springer, Berlin, 1983.

[Lus2] G. LUSZTIG, *Characters of reductive groups over finite fields*, Ann. Math. Studies **107**, Princeton UP (1984), 384 pp.

[Lus3] G. LUSZTIG, *Hecke algebras with unequal parameters*, CRM Monograph Series **18**, American Mathematical Society, Providence, RI (2003), 136 pp.

[Magma] W. BOSMA, J. CANNON & C. PLAYOUST, The Magma algebra system. I. The user language, *J. Symbolic Comput.* **24** (1997), 235-265.

[Mal] G. MALLE, On the rationality and fake degrees of characters of cyclotomic algebras, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **6** (1999), 647-677.

[MalMat] G. MALLE & B. H. MATZAT *Inverse Galois theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1999), xvi+436 pp.

[Mar1] M. MARTINO, The Calogero-Moser partition and Rouquier families for complex reflection groups, *J. of Algebra* **323** (2010), 193-205.

[Mar2] M. MARTINO, Blocks of restricted rational Cherednik algebras for $G(m,d,n)$, prépublication (2010), `arXiv:1009.3200`.

[Mat] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **8**, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, xiv+320 pp.

[Mül] B. J. MÜLLER, Localization in non-commutative Noetherian rings, *Canad. J. Math.* **28** (1976), 600-610.

[Puc] E. R. PUCZYLOWSKI, Behaviour of radical properties of rings under some algebraic constructions, *Radical theory (Eger, 1982)*, 449-480, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 38, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[Ray] M. RAYNAUD, *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Mathematics **169**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1970), v+129 pp.

[Rou] R. ROUQUIER, q-Schur algebras and complex reflection groups, *Mosc. Math. J.* **8** (2008), 119-158.

[Ser] J.-P. SERRE, *Algèbre locale. Multiplicités*, Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par P. Gabriel, Lecture Notes in Mathematics **11**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1965), vii+188 pp.

[SGA1] A. GROTHENDIECK, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1960-1961, Documents Mathématiques **3**, Société Mathématique de France, Paris, 2003, 327+xviii pages.

[ShTo] G. C. SHEPHARD & J. A. TODD, Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 274-304.

[Spr] T.A. SPRINGER, Regular elements of finite reflection groups, *Invent. Math.* **25** (1974), 159-198.

[Thi] U. THIEL, *On restricted rational Cherednik algebras*, thése, Kaiserslautern (2012).