HAL
open science

Fibrés uniformes de type (1,0,...,0,-1) sur P_2

Jean-Marc Drézet

To cite this version:

Jean-Marc Drézet. Fibrés uniformes de type (1,0,...,0,-1) sur P_2. Annales de l'Institut Fourier, 1981, 31 (1), pp.99-134. hal-00787344

HAL Id: hal-00787344

https://hal.science/hal-00787344

Submitted on 12 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FIBRÉS UNIFORMES DE TYPE $(1, 0, \ldots, 0, -1)$ SUR $\mathbb{P}_2$

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction 1
2. Préliminaires - Fibrés $s-$stables 3
3. Où on ramène l'étude des fibrés de type 1 à celle de certains modules de Kronecker 7
4. Étude des n-modules de Kronecker de rang $n-1$ 8
5. Description des fibrés uniformes de type 1 14
6. Fibrés de rangs 4 et 5 17
7. Stabilité 20

Références 25

1. Introduction

Soient K un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle, V un K-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V. Tous les fibrés vectoriels considérés seront algébriques (sur $P(V)$ ou sur une autre variété algébrique sur K). On note $\mathcal{O}(-1)$ le sous-fibré universel de rang 1 de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes V$, et Q le fibré universel quotient.

Ce travail est une contribution à l'étude des fibrés vectoriels uniformes sur $\mathbb{P}(V)$. Voici quelques définitions et résultats connus :

Si E est un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$ et ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$, la restriction $E_{|\ell}$ est isomorphe à une somme directe de fibrés en droites : $E_\ell \simeq \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i^\ell)$, les a_i^ℓ étant des entiers tels que $a_1^\ell \geq \cdots \geq a_r^\ell$, et la suite (a_i^ℓ) est uniquement déterminée. C'est le théorème de Birkhoff-Grothendieck ([5] et [7]).

Il existe une suite unique $(a_1, \ldots, a_r)$ d'entiers telle que l'ensemble des droites ℓ de $\mathbb{P}(V)$ telles que $E_\ell \simeq \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$ soit un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{P}(V^*)$. On appelle cette suite le *type de décomposition générique de E*. Si cet ouvert est égal à $\mathbb{P}(V^*)$, autrement dit si pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$ on a $(a_i^\ell) = (a_i)$, le fibré E est dit *uniforme*, et la suite (a_i) est appelée le *type de décomposition* ou plus simplement le *type* de E.

Un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P}(V)$ est dit *homogène* si pour tout automorphisme α de $\mathbb{P}(V)$, $\alpha^*(E)$ et E sont isomorphes

Un fibré homogène est uniforme.

A. Van de Ven [8] et G. Elencwajg [1] se sont intéressés à la réciproque. Elle est vraie pour $\mathrm{rg}(E) = 2$ (Van de Ven) et pour $\mathrm{rg}(E) = 3$ (Elencwajg). Dans les deux cas, on montre en fait que les seuls fibrés uniformes sont les fibrés "évidents" (c'est-à-dire construits à partir des fibrés en droites et de Q). G. Elencwajg ([2], [3], [4]) a entrepris l'étude des fibrés uniformes de rang 4. On peut se ramener à l'étude des fibrés *normalisés*, c'est-à-dire vérifiant $-\mathrm{rg}(E) < c_1(E) \leq 0$. Dans ce cas, Elencwajg montre que si le type de E est différent de $(0, 0, -1, -1)$ et $(1, 0, 0, -1)$ alors E est isomorphe à un des fibrés "évidents" et est donc homogène. Il présente de plus des exemples de fibrés uniformes non homogènes de type $(0, 0, -1, -1)$. Il reste à étudier les fibrés uniformes de type $(1, 0, 0, -1)$. Ce problème est évoqué dans [7]. Sa solution est le

Théorème 1 : *Les fibrés uniformes de rang 4 de type* $(1, 0, 0, -1)$ *sont (à isomorphisme près):*

$$\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1), \quad \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus Q^*, \quad Q \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1),$$
$$Q \oplus Q^* \quad \textit{et} \quad S^2Q(-1) \oplus \mathcal{O}.$$

Par conséquent ils sont homogènes.

Pour démontrer ce théorème, il faut considérer les fibrés uniformes de type $(1, 0, \ldots, 0, -1)$, en rang quelconque, qui seront dits pour simplifier, *uniformes de type 1.* Il sera utile d'examiner d'abord le cas des fibrés s-stables. Suivant K. Hulek [6], on dit qu'un fibré E sur $\mathbb{P}(V)$ est *s-stable* si pour tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(V)$, et tout morphisme non nul $L \to E$ (resp. $E \to L$), on a

$$\frac{c_1(E)}{\mathrm{rg}(E)} > c_1(L) \qquad (\text{resp.} \quad \frac{c_1(E)}{\mathrm{rg}(E)} < c_1(L)\ ).$$

Un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P}(V)$ est dit *stable* si pour tout fibré F non nul sur $\mathbb{P}(V)$ tel que $\mathrm{rg}(F) < \mathrm{rg}(E)$ et tout morphisme génériquement injectif $F \to E$, on a

$$\frac{c_1(E)}{\mathrm{rg}(E)} > \frac{c_1(F)}{\mathrm{rg}(F)}.$$

Les fibrés vectoriels s-stables de première classe de Chern nulle ont été étudiés par K. Hulek. Un résumé des résultats de Hulek utilisés ici est donné dans les Préliminaires. On donne ensuite un début de classification des fibrés uniformes de type 1 qui sont s-stables, de deuxième classe de Chern donnée. Malheureusement, le rang de tels fibrés reste inconnu. Toutefois on montre qu'un fibré uniforme de type 1 et s-stable est muni d'une forme quadratique non dégénérée, résultat essentiel à la démonstration du théorème 1.

L'étude des fibrés uniformes de type 1 non s-stables se ramène aisément à celle des fibrés s-stables. Ainsi on peut montrer que les seuls fibrés uniformes de type 1 qui sont homogènes sont les fibrés "évidents".

Le théorème 1 permet de mettre en évidence l'existence d'une famille de fibrés uniformes non homogènes de type $(1, 0, 0, 0, -1)$. Pour finir, on démontre le

Théorème 2 : *Les fibrés s-stables uniformes de type 1 sont stables.*

Je voudrais remercier J. Le Potier pour de nombreuses discussions qui m'ont beaucoup aidé.

2. Préliminaires - Fibrés $s-$stables

Les propositions 3, 4, 6 et le théorème 5 sont dus à K. Hulek [6].

Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$. Soit z un élément de V^*. Cet élément définit un morphisme $E(-2) \to E(-1)$ et donc une application linéaire $\tau_E(z) : H^1(E(-2)) \to H^1(E(-1))$.

Ainsi on a un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V^*)$:

$$\tau_E : \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E(-2)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(E(-1)).$$

Soit v un élément de V. Cet élément définit un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$\gamma : E(-2) \simeq E(-1) \otimes \wedge^2 Q^* \longrightarrow E(-1) \otimes Q^*$$

par $\gamma_x(e \otimes (z \wedge z')) = e \otimes (z'(v)z - z(v)z')$, x étant un élément de $\mathbb{P}(V)$, e un élément de $E_x(-1)$, z et z' des formes linéaires s'annulant sur x. On pose

$$c_E(v) = H^1(\gamma) : H^1(E(-2)) \longrightarrow H^1(E(-1) \otimes Q^*).$$

Les applications $c_E(v)$ définissent un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$

$$c_E : \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E(-2)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(E(-1) \otimes Q^*).$$

L'élément v définit un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$\delta : E(-1) \otimes Q^* \longrightarrow E(-1)$$

par $\delta_x(e \otimes z) = z(v).e$, x étant un élément de $\mathbb{P}(V)$, e un élément de $E_x(-1)$, z une forme linéaire s'annulant sur x. On pose

$$d_E(v) = H^1(\delta) : H^1(E(-1) \otimes Q^*) \longrightarrow H^1(E(-1)).$$

Les applications $d_E(v)$ définissent un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$:

$$d_E : \mathcal{O} \otimes H^1(E(-1) \otimes Q^*) \longrightarrow \mathcal{O}(1) \otimes H^1(E(-1)).$$

On a $d_E \circ c_E = 0$.

En identifiant V^* et $\wedge^2 V$ au moyen d'un élément non nul de $\wedge^3 V$, on a

$$\tau_E(v \wedge w) \ = \ d_E(v) \circ c_E(w),$$

v et w étant des éléments de V.

Rappelons qu'étant donnés des morphismes de fibrés sur $\mathbb{P}(V)$: $a : F \to F'$ et $b : F' \to F''$, on dit que le couple (a, b) est une *monade* si a est injectif, b est surjectif et si $b \circ a = 0$. La *cohomologie* de (a, b) est par définition le fibré $\ker(b)/\operatorname{im}(a)$.

Proposition 3 : *Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$. On a $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$ si et seulement si le couple de morphismes (c_E, d_E) est une monade. Dans ce cas, E est isomorphe à la cohomologie de (c_E, d_E).*

Si H et L sont deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives m et n, une application linéaire f de V^* dans $\mathcal{L}(H,L)$ est appelée un (m,n)-*module de Kronecker*. Si $m=n$, on dit plus simplement que f est un n-module de Kronecker.

Un (m,n)-module de Kronecker est dit *pré-stable* si les applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} V^* \longrightarrow L & \text{et} & V^* \longrightarrow H^* \\ z \longmapsto f(z)(h) & & z \longmapsto {}^t f(z)(\phi) \end{array}$$

sont de rang ≥ 2 chaque fois que les éléments h de H et ϕ de L^* sont non nuls.

Deux (m,n)-modules de Kronecker f et f', respectivement dans $\mathcal{L}(V^*,\mathcal{L}(H,L))$ et $\mathcal{L}(V^*,\mathcal{L}(H',L'))$ sont *isomorphes* s'il existe des isomorphismes $A : H' \to H$ et $B : L \to L'$ tels que pour tout élément z de V^* , on ait $f'(z) = B \circ f(z) \circ A$.

Proposition 4 : *Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$, tel que $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$. Alors le module de Kronecker τ_E est pré-stable si et seulement si les morphismes canoniques de fibrés*

$$\mathcal{O} \otimes H^0(E) \longrightarrow E \quad \textit{et} \quad \mathcal{O} \otimes H^0(E^*) \longrightarrow E^*$$

sont injectifs.

Cela découle aisément de la proposition 3. Le principal résultat de Hulek est le

Théorème 5 : *L'application $E \mapsto \tau_E$ définit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels E sur $\mathbb{P}(V)$ vérifiant $h^0(E) = h^0(E^*) = 0$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules de Kronecker pré-stables.*

Remarques : Si $c_1(E) = 0$, la condition $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$ équivaut à dire que E est s-stable. On a alors $h^1(E(-1)) = h^1(E(-2)) = c_2(E)$, d'après le théorème de Riemann-Roch.

On dit qu'un n-module de Kronecker f est *antisymétrique* s'il existe un K-espace vectoriel H de dimension n et un n-module de Kronecker g dans $\mathcal{L}(V^*,\mathcal{L}(H,H^*))$ isomorphe à f tel que pour tout élément z de V^*, l'application $g(z)$ soit antisymétrique.

Proposition 6 : *Un n-module de Kronecker pré-stable f est antisymétrique si et seulement si le fibré s-stable associé à f peut être muni d'une forme quadratique non dégénérée.*

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels E sur $\mathbb{P}(V)$ tels que $h^0(E) = h^0(E^*) = 0$.

Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels E sur $\mathbb{P}(V)$ n'ayant pas de facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}$, tels que τ_E soit pré-stable et que $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$

Soit $S : \mathcal{Z} \to \mathcal{S}$ l'application associant à la classe d'isomorphisme de E la classe d'isomorphisme du fibré défini par le module de Kronecker pré-stable τ_E , comme dans le théorème 5. Si i désigne l'inclusion de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{Z}$, on a évidemment $S \circ i = I_{\mathcal{S}}$.

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux fibres de S. Pour tout K-espace vectoriel L, on note $\mathrm{Gr}(L)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de L. Le résultat est la

Proposition 7 : *Soient e un élément de S, E un de ses représentants. Alors il existe une bijection*

$$S^{-1}(e) \longrightarrow \big(Gr(H^1(E)) \times Gr(H^1(E^*))\big)/\operatorname{Aut}(E).$$

Démonstration. Soit F un représentant d'un élément de $S^{-1}(e)$. D'après la proposition 4, le morphisme canonique de fibrés $\mathcal{O} \otimes H^0(F) \to F$ est injectif. On note G son conoyau. Le module de Kronecker τ_G est isomorphe à τ_F , et on a $h^0(G) = h^0(G^*(-1)) = 0$.

Si on applique le même procédé à G^* , on obtient un fibré E' sur $\mathbb{P}(V)$ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(G^*)^* \longrightarrow 0.$$

Le module de Kronecker $\tau_{E'}$ est isomorphe à τ_G, donc à τ_E, et on a $h^0(E') = h^0(E'^*) = 0$. Donc E' est isomorphe à E. Choisissons un isomorphisme $f : E' \to E$.

Soit $d : H^0(G^*)^* \to H^1(E')$ le morphisme de liaison provenant de la suite exacte précédente. De cette suite exacte, on déduit aussi un isomorphisme $H^1(G^*) \simeq H^1(E'^*)$. Soit $d' : H^0(F)^* \to H^1(G^*)$ le morphisme de liaison provenant de la suite exacte

$$0 \longrightarrow G^* \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(F)^* \longrightarrow 0.$$

L'élément $\big((H^1(f)(\mathrm{im}(d)), H^1({}^t f^{-1})(\mathrm{im}(d'))\big)$ du produit $\mathrm{Gr}(H^1(E)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E^*))$ dépend évidemment de f, mais son image dans $\big(\mathrm{Gr}(H^1(E)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E^*))\big)/\operatorname{Aut}(E)$ ne dépend que de F. En fait, elle ne dépend que de la classe d'isomorphisme de F : soit F_0 un fibré isomorphe à F. Il lui correspond deux suites exactes comportant les fibrés G_0 et E'_0. Un isomorphisme $F \to F_0$ se prolonge en un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \otimes H^0(F) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & G \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \otimes H^0(F_0) \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & G_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme g se prolonge en un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & G \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathcal{O} \otimes H^0(G^*)^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'_0 \arrow[r] & G_0 \arrow[r] & \mathcal{O} \otimes H^0(G_0^*)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On pose $f_0 = f \circ h^{-1} : E'_0 \to E$. C'est un isomorphisme. On a alors

$$\big((H^1(f_0)(\mathrm{im}(d_0)), H^1({}^t f_0^{-1})(\mathrm{im}(d'_0))\big) \;=\; \big((H^1(f)(\mathrm{im}(d)), H^1({}^t f^{-1})(\mathrm{im}(d'))\big).$$

On a donc bien défini une application

$$j : S^{-1}(e) \longrightarrow \big(\mathrm{Gr}(H^1(E)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E^*))\big)/\operatorname{Aut}(E).$$

L'application j est injective

Remarquons d'abord qu'avec les notations précédentes, les applications d et d' sont injectives: puisque $h^0(G) = 0$, d est injective. Supposons d' non injective, et soient D une droite de $\ker(d')$, N l'orthogonal de D. L'application quotient

$$d'' : H^0(F)^*/D \longrightarrow H^1(G^*),$$

qu'on peut considérer comme un élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O} \otimes H^0(F)^*/D, G^*)$ définit une extension $0 \to \mathcal{O} \otimes N \to F' \to G \to 0$, dont la somme directe avec la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \otimes L \to \mathcal{O} \to 0 \to 0$ (L étant une droite supplémentaire de N) donne une suite exacte $0 \to \mathcal{O} \otimes H^0(F) \to F' \oplus \mathcal{O} \to G \to 0$ dont l'élément associé de $\mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{O} \otimes H^0(F))$ est d'. On a donc un isomorphisme $F \to F' \oplus \mathcal{O}$, ce qui contredit le fait que F n'a pas de facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}$. L'application d' est donc injective.

Soit F_0 un fibré dont la classe d'isomorphisme est dans $S^{-1}(e)$ et dont l'image par j est la même que celle de F. On peut choisir les isomorphismes f et f_0 de telle sorte que

$$\big((H^1(f_0)(\mathrm{im}(d_0)), H^1({}^t f_0^{-1})(\mathrm{im}(d'_0))\big) \;=\; \big((H^1(f)(\mathrm{im}(d)), H^1({}^t f^{-1})(\mathrm{im}(d'))\big).$$

Il faut montrer que F et F_0 sont isomorphes.

À partir de F et de F_0, on a défini les deux suites exactes

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} \mathcal{O} \otimes H^0(G) \longrightarrow 0 \;\text{ et }\; 0 \longrightarrow E'_0 \xrightarrow{a_0} G_0 \xrightarrow{b_0} \mathcal{O} \otimes H^0(G_0) \longrightarrow 0\ .$$

Puisque d et d_0 sont injectives, $H^0(G)$ et $H^0(G_0)$ ont même dimension, et il existe un isomorphisme $c : H^0(G_0) \to H^0(G)$ tel que $H^1(f) \circ d \circ c = H^1(f_0) \circ d_0$. Alors aux suites exactes

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} \mathcal{O} \otimes H^0(G) \longrightarrow 0 \;\text{ et }\; 0 \longrightarrow E' \xrightarrow{a'} G_0 \xrightarrow{b'} \mathcal{O} \otimes H^0(G) \longrightarrow 0$$

où $a' = a_0 \circ f_0^{-1} \circ f$ et $b' = c \circ b_0$, sont associés les mêmes éléments de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O} \otimes H^0(G), E')$, donc G et G_0 sont isomorphes. En utilisant ce résultat et le fait que d et d'_0 sont injectives, on montre de même que F et F_0 sont isomorphes. Ceci prouve l'injectivité de j.

L'application j est surjective

Soit (M, N) un élément de $\mathrm{Gr}(H^1(E)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E^*))$. L'inclusion de M dans $H^1(E)$ peut être vue comme un élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O} \otimes M, E)$, et définit donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{O} \otimes M \longrightarrow 0.$$

De cette suite exacte, on déduit un isomorphisme $H^1(G^*) \to H^1(E^*)$, qui permet de voir l'inclusion de N dans $H^1(E^*)$ comme un élément de $\mathrm{Ext}^1(G^*, \mathcal{O} \otimes N)$, qui définit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes N^* \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

On vérifie aisément que la classe d'isomorphisme de F est un élément de $S^{-1}(e)$, dont l'image par j est la classe de (M, N). Ceci prouve la surjectivité de j et achéve la démonstration de la proposition 7. $\square$

3. Où on ramène l'étude des fibrés de type 1 à celle de certains modules de Kronecker

Les fibrés vectoriels E sur $\mathbb{P}(V)$ uniformes de type 1, tels que $h^0(E(-1)) \neq 0$ ou $h^0(E^*(-1)) \neq 0$ sont connus :

Proposition 8 : *Soit E un fibré uniforme de type 1. Si $h^0(E(-1)) \neq 0$, alors E est isomorphe à $\mathcal{O}(1) \oplus k\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$ ou à $\mathcal{O}(1) \oplus k\mathcal{O} \oplus Q^*$.*

Si $h^0(E^*(-1)) \neq 0$, alors E est isomorphe à $\mathcal{O}(1) \oplus k\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$ ou à $Q \oplus k\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$.

Démonstration. La première assertion entraine la seconde.

Supposons que $h^0(E(-1)) \neq 0$. Soit s une section non nulle de $E(-1)$. Il existe une droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$ telle que $s_{|\ell} \neq 0$. Alors $s_{|\ell}$ est un isomorphisme sur le facteur direct de $E(-1)$ isomorphe à $\mathcal{O}$, et le conoyau de $s_{|\ell}$ est isomorphe à $(r-2)\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$, r désignant le rang de E.

Le morphisme de fibrés s est injectif : si s s'annule en un point x de $\mathbb{P}(V)$, s s'annule en tous les points des droites passant par x et $s = 0$.

Le conoyau de $s : \mathcal{O} \to E(-1)$ est uniforme de type $(-1, \ldots, -1, -2)$, donc d'après Elencwajg [4], c'est un fibré isomorphe à $k\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$ ou à $k\mathcal{O}(-1) \oplus Q^*(-1)$. Comme

$$h^1(k\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(2)) \;=\; h^1(k\mathcal{O}(1) \oplus Q(1)) \;=\; 0,$$

on a $E(-1) \simeq k\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$ ou $E(-1) \simeq k\mathcal{O}(-1) \oplus Q^*(-1)$, et la proposition 8 est démontrée. □

Il suffit donc désormais de s'intéresser aux fibrés E tels que $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$.

Proposition 9 : *Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$ tel que $c_1(E) = 0$ et $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$. Alors E est uniforme de type 1 si et seulement si pour tout élément non nul z de V^*, le noyau de l'application $\tau_E(z)$ est une droite.*

Démonstration. Puisque $c_1(E) = 0$, le fibré E est uniforme de type 1 si et seulement si pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$, on a $h^0(E(-1)_{|\ell}) = 1$.

Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$, définie par un élément z de V^*. considérons la suite exacte définie par la multiplication par z :

$$0 \longrightarrow E(-2) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow E(-1)_{|\ell} \longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte :

$$H^0(E(-1)) \longrightarrow H^0(E(-1)_{|\ell}) \longrightarrow H^1(E(-2)) \xrightarrow{\tau_E(z)} H^1(E(-1)).$$

La proposition 9 en découle aussitot puisque $h^0(E(-1)) = 0$. □

Pour un fibré E vérifiant les hypothéses de la proposition 9, on a d'après le théorème de Riemann-Roch

$$h^1(E(-2)) = h^1(E(-1)) = c_2(E).$$

Définition : *Soient n un entier supérieur à 1, et f un n-module de Kronecker, élément de $\mathcal{L}(V^*, \mathcal{L}(H, L))$, H et L étant des K-espaces vectoriels de dimension n. On dit que f est de rang $n-1$ si pour tout élément non nul z de V^*, le noyau de $f(z)$ est une droite.*

D'après ce qui précède, si E est un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$ tel que $c_1(E) = 0$ et $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$, il est équivalent de dire

(i) Le fibré E est uniforme de type 1.
(ii) L'application $\tau_E : V^* \to \mathcal{L}(H^1(E(-2)), H^1(E(-1)))$ est un $c_2(E)$-module de Kronecker de rang $c_2(E) - 1$.

4. Étude des n-modules de Kronecker de rang $n-1$

A – Conditions d'existence

Soient n un entier supérieur à 1, τ un élément de $\mathcal{K}((n-1)/2)$, ensemble des classes d'isomorphisme de n-modules de Kronecker de rang $n-1$. Soit f un représentant de τ, $f : V^* \to \mathcal{L}(H, L)$.

On définit à partir de f un morphisme de fibrés vectoriels sur $P(V^*)$: $\mathcal{O}(-1) \otimes H \to \mathcal{O} \otimes L$, qu'on peut aussi noter f. Ce morphisme est de rang constant $n-1$. Puisque $\ker(f)$ (resp. $\operatorname{coker}(f)$) est un fibré de rang 1, il existe un entier k (resp. k') tel que l'on ait : $\ker(f) \simeq \mathcal{O}(-k-1)$ et $\operatorname{coker}(f) \simeq \mathcal{O}(k')$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-k-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes H \longrightarrow \mathcal{O} \otimes L \longrightarrow \mathcal{O}(k') \longrightarrow 0.$$

Proposition 10 : *L'entier n est impair, et on a $k = k' = \frac{n-1}{2}$.*

Démonstration. D'après la suite exacte précédente, on a

$$c(\mathcal{O}(-1) \otimes H).c(\mathcal{O}(k')) \;=\; c(\mathcal{O} \otimes L).c(\mathcal{O}(-k-1)),$$

c'est-à-dire, si $h = c_1(\mathcal{O}(1))$,

$$(1-h)^n.(1+k'h) \;=\; 1-(k+1)h,$$

d'où $1 + (k'-n)h + n(\frac{n-1}{2} - k')h^2 = 1 - (k+1)h$, d'où on tire $k = k' = \frac{n-1}{2}$ et le fait que n est impair. □

Proposition 11 : *Pour tout entier positif k , il existe des $2k+1$-modules de Kronecker de rang $2k$, qui sont antisymétriques.*

Par conséquent, pour tout entier n positif, $\mathcal{K}((n-1)/2)$ est non vide si et seulement si n est impair.

Démonstration. On peut supposer que $k > 0$. Soient H un K-espace vectoriel de dimension $2k+1$, et r un entier compris entre 1 et $k-1$. La sous-variété W_r de $\mathcal{L}(H, H^*)$ constituée des formes symplectiques de rang $2r$ est transitive sous l'action de $\mathrm{GL}(H)$. Soit S une telle forme. Elle définit donc une application régulière surjective $g : \mathrm{GL}(H) \to W_r$, dont toutes les fibres ont la même dimension. La fibre au dessus de S est constituée des automorphismes A de H laissant stable le noyau D de S, et tels que l'automorphisme de H/D déduit de A soit un élément du groupe symplectique de H/D muni de la forme symplectique S' déduite de S.

La dimension du groupe symplectique de S' est $r(2r+1)$, et un automorphisme de H laisse D stable et induit le même élément du groupe symplectique de S' que A si et seulement si il diffère de A d'une application linéaire à valeurs dans D. On en déduit la dimension des fibres de g :

$$r(2r+1) + (2k+1)(2k+1-2r),$$

d'où on déduit la dimension de W_r :

$$\dim(W_r) \;=\; r(4k-2r+1) \;\leq\; \dim(W_{k-1}) \;=\; k(2k+1)-3.$$

On en déduit que si W désigne la réunion des W_i, pour i compris entre 1 et $k-1$, la codimension de W dans l'espace vectoriel $\wedge^2 H^*$ des formes symplectiques sur H est 3.

Soit I l'ensemble des applications linéaires injectives de V^* dans $\wedge^2 H^*$. Soit

$$\begin{aligned} B : \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(I) &\longrightarrow \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(\wedge^2 H^*) \\ (z, f) &\longmapsto (z, f(z)) \end{aligned}$$

C'est une submersion, donc $\mathrm{codim}(B^{-1}(\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W))) = 3$.

On considère maintenant la projection $p : \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(I) \to \mathbb{P}(I)$. On a $p(B^{-1}(\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W))) \neq \mathbb{P}(I)$, puisque $\dim(\mathbb{P}(V^*)) = 2$, et un élément de $\mathbb{P}(I)$ ne se trouvant pas dans $p(B^{-1}(\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W)))$ définit un $(2k+1)$-module de Kronecker de rang $2k$ antisymétrique. □

B – Classification des n-modules de Kronecker de rang $n-1$

Soit k un entier supérieur à 1. Soient τ un élément de $\mathcal{K}(k)$, et $f : V^* \to \mathcal{L}(H, L)$ un représentant de τ, qui définit un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(V^*)$: $\mathcal{O}(-1) \otimes H \to \mathcal{O} \otimes L$, aussi noté f. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-k-1) \xrightarrow{\;i\;} \mathcal{O}(-1) \otimes H \xrightarrow{\;f\;} \mathcal{O} \otimes L \xrightarrow{\;p\;} \mathcal{O}(k) \longrightarrow 0.$$

Les morphismes i et p ne sont déterminés qu'à une constante près. On pose $X(f) = \mathrm{coker}(i) \simeq Im(f) = \ker(p)$. À la suite exacte précédente est associé un élément x de $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(-k-1)) \simeq H^2(\mathcal{O}(-2k-1))$.

De la suite exacte précédente, on déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2k-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-k-1) \otimes H \longrightarrow \mathcal{O}(-k) \otimes L \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0.$$

L'élément de $H^2(\mathcal{O}(-2k-1))$ qui lui est associé est aussi x.

Le morphisme de liaison $d : K \to H^1(X(f)(-k))$ provenant de la suite exacte $0 \to X(f)(-k) \to \mathcal{O}(-k) \otimes L \to \mathcal{O} \to 0$ est un isomorphisme. Le morphisme

de liaison $d' : H^1(X(f)(-k)) \to H^2(\mathcal{O}(-2k-1))$ provenant de la suite exacte $0 \to \mathcal{O}(-2k-1) \to \mathcal{O}(-k-1) \otimes H \to X(f)(-k) \to 0$ est injectif.

Donc $d' \circ d : K \to H^2(\mathcal{O}(-2k-1))$ est injectif. Mais c'est la multiplication par x , dont l'image est Kx , donc $x \neq 0$. La droite Kx ne change pas si on remplace i (resp. p) par un de ses multiples, ou si on remplace f par un module de Kronecker isomorphe à f. On peut donc poser $\sigma(\tau) = Kx$, ce qui définit une application $\sigma : \mathcal{K}(k) \to \mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}(-2k-1)))$.

Proposition 12 : *L'application σ est une bijection de $\mathcal{K}(k)$ sur un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}(-2k-1)))$. De plus, les éléments de $\mathcal{K}(k)$ sont antisymétriques.*

Preuve du fait que σ est injective

Lemme 13 : *Deux $(2k+1)$-modules de Kronecker de rang $2k$, f et f', sont isomorphes si et seulement si les fibrés $X(f)$ et $X(f')$ le sont.*

Démonstration. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-k-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \otimes H \longrightarrow X(f) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

on déduit un isomorphisme $H \simeq H^0(X(f)(1))$.

De la suite exacte $0 \to X(f) \to \mathcal{O} \otimes L \to \mathcal{O}(k) \longrightarrow 0$ on déduit un isomorphisme $L \simeq H^0(X(f)^*)^*$, et f est isomorphe au module de Kronecker "canonique"

$$\mathcal{O}(-1) \otimes H^0(X(f)(1)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(X(f)^*)^*.$$

Le lemme 13 en découle immédiatement. □

De la suite exacte (1) on déduit $h^0(X(f)) = 0$. De la suite exacte

$$0 \to X(f) \to \mathcal{O} \otimes L \to \mathcal{O}(k) \to 0 \tag{2}$$

et de l'égalité précédente, on déduit une injection $L \to H^0(\mathcal{O}(k))$, suffisant à définir p. On note $L(f)$ l'image de L dans $H^0(\mathcal{O}(k))$.

Soient L_1 et L_2 deux sous espaces vectoriels de $H^0(\mathcal{O}(k))$ tels que les morphismes de fibrés $\mathcal{O} \otimes L_1 \to \mathcal{O}(k)$ et $\mathcal{O} \otimes L_2 \to \mathcal{O}(k)$ définis par les inclusions de L_1 et L_2 dans $H^0(\mathcal{O}(k))$ soient surjectifs. Les noyaux de ces morphismes sont notés X_1 et X_2.

Lemme 14 : *Les fibrés X_1 et X_2 sont isomorphes si et seulement si on a $L_1 = L_2$.*

Démonstration. En effet, puisque $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(k), \mathcal{O} \otimes L_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(k), \mathcal{O} \otimes L_2) = 0$, un isomorphisme entre X_1 et X_2 se prolonge en un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O} \otimes L_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(k) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & \mathcal{O} \otimes L_2 \arrow[r] & \mathcal{O}(k) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

En passant aux sections globales et en utilisant le fait que c est une homothétie, on en déduit que $L_1 = L_2$. □

Avec le lemme 13, on peut donc en conclure que deux $(2k+1)$-modules de Kronecker de rang $2k$, f et f', sont isomorphes si et seulement si $L(f) = L(f')$.

On peut maintenant montrer que σ est injective :

De la suite exacte (2) et de l'égalité $h^0(X(f)) = 0$, on déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(k)) \xrightarrow{d} H^1(X(f)).$$

Le morphisme de liaison $d' : H^1(X(f)) \to H^2(\mathcal{O}(-k-1))$ provenant de la suite exacte (1) est injectif. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(k)) \xrightarrow{d' \circ d} H^2(\mathcal{O}(-k-1)).$$

Par conséquent, $L(f)$ est le noyau de $d' \circ d$, qui n'est autre que la multiplication par x. Ceci montre que σ est injective.

Description de l'image U ***de*** σ

Le morphisme de liaison $d : H^0(\mathcal{O}(k-1)) \to H^1(X(f)(-1))$ provenant de la suite exacte (2) tordue par $\mathcal{O}(-1)$ est un isomorphisme.

Le morphisme de liaison $d' : H^1(X(f)(-1)) \to H^2(\mathcal{O}(-k-2))$ provenant de la suite exacte (1) tordue par $\mathcal{O}(-1)$ est un isomorphisme.

Donc $d' \circ d : H^0(\mathcal{O}(k-1)) \to H^2(\mathcal{O}(-k-2))$, qui est la multiplication par x , est un isomorphisme. Soit U l'ouvert de $\mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}(-2k-1)))$ constitué des éléments $K.x$ tels que la multiplication par x, $H^0(\mathcal{O}(k-1)) \to H^2(\mathcal{O}(-k-2))$ soit un isomorphisme. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{im}(\sigma) \subset U$.

Preuve du fait que $U \subset \mathrm{im}(\sigma)$

Soit Ky un élément de U. Soit

$$\psi : H^0(\mathcal{O}(k-1)) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}(-k-2))$$

la multiplication par y , c'est un isomorphisme. On note

$$\eta : H^0(\mathcal{O}(k)) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}(-k-1)) \quad \text{et} \quad \chi : H^0(\mathcal{O}(k-2)) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}(-k-3))$$

les multiplications par y. On a compte tenu de la dualité de Serre, ${}^t\psi = \psi$, ${}^t\chi = \eta$.

Si v est un élément de V , on note $m_q(v)$ la multiplication par v,
$H^0(\mathcal{O}(k-q-1)) \to H^0(\mathcal{O}(k-q))$, et $n_q(v)$ la multiplication par v,
$H^2(\mathcal{O}(-k-q-2)) \to H^2(\mathcal{O}(-k-q-1))$.

Si $v \neq 0$, $m_q(v)$ est injective et $n_q(v)$ est surjective.

Soit v un élément non nul de V. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}(k-1)) & \xrightarrow{\psi} & H^2(\mathcal{O}(-k-2)) \\ \downarrow{\scriptstyle m_0(v)} & & \downarrow{\scriptstyle n_0(v)} \\ H^0(\mathcal{O}(k)) & \xrightarrow{\eta} & H^2(\mathcal{O}(-k-1)). \end{array}$$

Les applications ψ et $n_0(v)$ sont surjectives, il en est donc de même de la composée $n_0(v) \circ \psi = \eta \circ m_0(v)$. On en déduit que η est surjective et χ est injective.

On note L le noyau de η, on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(k)) \xrightarrow{\eta} H^2(\mathcal{O}(-k-1)) \longrightarrow 0.$$

On note H le conoyau de χ, on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(k-2)) \xrightarrow{\chi} H^2(\mathcal{O}(-k-3)) \longrightarrow H \longrightarrow 0,$$

qui est la transposée de la précédente, donc $H = L^*$. On a $\dim(H) = \dim(L) = 2k+1$.

Considèrons maintenant les morphismes de fibrés sur $\mathbb{P}(V^*)$

$a : \wedge^2 Q^* \otimes H^0(\mathcal{O}(k-2)) \longrightarrow Q^* \otimes H^0(\mathcal{O}(k-1))$ et $b : Q^* \otimes H^0(\mathcal{O}(k-1)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(k))$

définis par :

$$a_\ell((u \wedge v) \otimes h) = v \otimes m_1(u)(h) - u \otimes m_1(v)(h), \quad b_\ell(u \otimes h') = m_0(u)(h'),$$

ℓ étant une droite de $\mathbb{P}(V)$, u, v des points de ℓ, et h (resp. h') un élément de $H^0(\mathcal{O}(k-2))$ (resp. de $H^0(\mathcal{O}(k-1))$).

On note p_0 le morphisme canonique $\mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(k)) \to \mathcal{O}(k)$. Alors il est aisé de voir que la suite de morphismes de fibrés

$$0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \otimes H^0(\mathcal{O}(k-2)) \xrightarrow{a} Q^* \otimes H^0(\mathcal{O}(k-1)) \xrightarrow{b} \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(k)) \xrightarrow{p_0} \mathcal{O}(k) \longrightarrow 0$$

est exacte. En utilisant les applications η_q , on définit de même une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-k-1) \xrightarrow{i_0} \wedge^2 Q^* \otimes H^2(\mathcal{O}(-k-3)) \xrightarrow{a'}$$

$$Q^* \otimes H^2(\mathcal{O}(-k-2)) \xrightarrow{b'} \mathcal{O} \otimes H^2(\mathcal{O}(k-1)) \longrightarrow 0.$$

On a $(I_{Q^*} \otimes \psi) \circ a = a' \circ (I_{\wedge^2 Q^*} \otimes \chi)$, qui est injective, de telle sorte que le morphisme de fibrés $i : \mathcal{O}(-k-1) \to \wedge^2 Q^* \otimes H$ induit par i_0 est injectif. De même, le morphisme de fibrés $p : \mathcal{O} \otimes L \to \mathcal{O}(k)$ induit par i_0 est surjectif. En définitive, on obtient le diagramme commutatif $(\mathcal{D})$.

Posons

$$g_0 \;=\; b \circ (I_{Q^*} \otimes \psi^{-1}) \circ a' : \wedge^2 Q^* \otimes H^2(\mathcal{O}(-k-3)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(k)).$$

On a

$$g_0 \circ (I_{\wedge^2 Q^*} \otimes \chi) \;=\; b \circ (I_{Q^*} \otimes \psi^{-1}) \circ a' \circ (I_{\wedge^2 Q^*} \otimes \chi) \;=\; b \circ a \;=\; 0$$

et

$$(I_{\mathcal{O}} \otimes \eta) \circ g_0 \;=\; (I_{\mathcal{O}} \otimes \eta) \circ b \circ (I_{Q^*} \otimes \psi^{-1}) \circ a' \;=\; b' \circ a' \;= 0.$$

Donc g_0 induit un morphisme $g : \wedge Q^* \otimes H \to \mathcal{O} \otimes L$. On a

$$\begin{aligned}
\ker(g_0) &= \ker(b \circ (I_{Q^*} \otimes \psi^{-1}) \circ a') \\
&= ((I_{Q^*} \otimes \psi^{-1}) \circ a')^{-1}(\mathrm{im}(a)) \\
&= ((I_{Q^*} \otimes \psi^{-1}) \circ a')^{-1}(\mathrm{im}\left((I_Q^* \otimes \psi^{-1}) \circ a' \circ (I_{\wedge^2 Q^*} \otimes \chi)\right) \\
&= a'^{-1}\big(\mathrm{im}(a' \circ (I_{\wedge^2 Q^*} \otimes \chi)\big) \\
&= \mathrm{im}(I_{\wedge^2 Q^*} \otimes \chi) \oplus \mathcal{O}(-k-1),
\end{aligned}$$

Diagramme $(\mathcal{D})$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & & \mathcal{O}\otimes L & \longrightarrow & \mathcal{O}(k) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \| & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \wedge^2 Q^*\otimes H^0(\mathcal{O}(k-2)) & \xrightarrow{a} & Q^*\otimes H^0(\mathcal{O}(k-1)) & \xrightarrow{b} & \mathcal{O}\otimes H^0(\mathcal{O}(k)) & \longrightarrow & \mathcal{O}(k) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle I_{\wedge^2 Q^*\otimes\chi}} & & \downarrow{\scriptstyle I_{Q^*\otimes\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle I_{\mathcal{O}\otimes\eta}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(k-1) & \xrightarrow{i_0} & \wedge^2 Q^*\otimes H^2(\mathcal{O}(-k-3)) & \xrightarrow{a'} & Q^*\otimes H^2(\mathcal{O}(-k-2)) & \xrightarrow{b'} & \mathcal{O}\otimes H^2(\mathcal{O}(-k-1)) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \| & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-k-1) & \xrightarrow{i} & \wedge^2 Q^*\otimes H & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

et de même $\mathrm{im}(g_0) = \ker(p)$, de telle sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-k-1) \xrightarrow{i} \wedge^2 Q^* \otimes H \xrightarrow{g} \mathcal{O} \otimes L \xrightarrow{p} \mathcal{O}(k) \longrightarrow 0.$$

Donc g est un $(2k+1)$-module de Kronecker de rang $2k$, qui est clairement antisymétrique.

Pour achever la démonstration de la proposition 12, il faut montrer que l'élément de $\mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}(-2k-1)))$ associé à g est Ky. Si Kx est l'élément de $\mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}(-2k-1)))$ associé à g, on a vu plus haut que $Kx = \ker(H^2(I_{\mathcal{O}(-k)} \otimes i))$. Il suffit donc de montrer que $H^2(I_{\mathcal{O}(-k)} \otimes i)(y) = 0$. Cela découle du fait suivant, qui se vérifie aisément : si I désigne l'application identité de $H^0(\mathcal{O}(-k-2))$, vue comme élément de $H^2(\mathcal{O}(-k) \otimes \wedge^2 Q^*) \otimes H^0(\mathcal{O}(-k-2))$, on a $H^2(I_{\mathcal{O}(-k)\otimes\wedge^2 Q^*} \otimes \chi)(I) = H^2(I_{\mathcal{O}(-k)} \otimes i_0)(y)$.

5. Description des fibrés uniformes de type 1

A – Fibrés s-stables

Voir les Préliminaires.

Proposition 15 : *Soit k un entier positif. Alors tout $(2k+1)$-module de Kronecker de rang $2k$ est pré-stable.*

Démonstration. Soient $f : V^* \to \mathcal{L}(H, L)$ un $(2k+1)$-module de Kronecker de rang $2k$, et h un élément non nul de H. On note $\eta_f : \mathcal{O}(-1) \otimes H \to \mathcal{O} \otimes L$ le morphisme associé. Si le noyau de l'application linéaire

$$\phi : V^* \longrightarrow L$$
$$z \longmapsto f(z)(h)$$

est de dimension supérieure à 1, il contient un plan D. Si ℓ désigne la droite $\mathbb{P}(D)$ de $\mathbb{P}(V^*)$, $\ker(\eta_{f|\ell})$ contient $\mathcal{O}_\ell(-1) \otimes K.h$, mais ceci est impossible car $\ker(\eta_{f|\ell}) \simeq \mathcal{O}_\ell(-k-1)$ et $k > 0$. L'application ϕ est donc de rang au moins 2. Ceci suffit à prouver que f est pré-stable car f est antisymétrique. □

Remarquons que 0 est le seul 1-module de Kronecker de rang 0, et il n'est pas pré-stable.

Pour tout entier n, on note $S(\frac{n-1}{2})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés s-stables uniformes de type 1 sur $\mathbb{P}(V)$, de deuxième classe de Chern n. On a alors $n > 0$. Du théorème 5 et des propositions 6, 12 et 15, on déduit la

Proposition 16 : *L'ensemble $S(\frac{n-1}{2})$ est non vide si et seulement si n est impair et $n \geq 3$. Soit k un entier positif. Il existe une injection*

$$S(k) \hookrightarrow \mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2k-1)))$$

dont l'image est un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2k-1)))$.

Tout fibré s-stable, uniforme de type 1 peut être muni d'une forme quadratique non dégénérée.

Proposition 17 : *Aucun fibré s-stable uniforme de type 1, de deuxième classe de Chern ≥ 5, n'est homogène.*

Démonstration. Soit k un entier tel que $k \geq 2$. Tout élément A de $\mathrm{PGL}(V)$ induit un isomorphisme

$$\overline{A} : \mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2k-1))) \longrightarrow \mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2k-1)))$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S(k) & \hookrightarrow & \mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2k-1))) \\ \downarrow{\scriptstyle A^*} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{A}} \\ S(k) & \hookrightarrow & \mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2k-1))). \end{array}$$

La proposition 17 découle du fait qu'aucun élément de $\mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2k-1)))$ n'est invariant par tous les morphismes du type $\overline{A}$. □

Remarque : Pour $k = 1$, $\mathbb{P}(H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2k-1)))$ est réduit à un point. Il n'y a qu'un fibré uniforme de type 1, de deuxième classe de Chern 3, c'est $S^2Q(-1)$ qui est homogène.

Le résultat suivant sera utilisé par la suite :

Proposition 18 : *Tout fibré uniforme de type 1 est simple.*

En effet, pour tout entier $k \geq 1$, un $(2k+1)$-module de Kronecker de rang $2k$ est "simple", comme on le voit en considérant $X(f)$.

B − fibrés E tels que $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$

Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$ tel que $h^0(E(-1)) = h^0(E^*(-1)) = 0$. Alors E est isomorphe à la cohomologie de la monade

$$\mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E(-2)) \xrightarrow{c_E} \mathcal{O} \otimes H^1(E(-1) \otimes Q^*) \xrightarrow{d_E} \mathcal{O}(1) \otimes H^1(E(-1))$$

et on a $h^1(E(-2)) = h^1(E(-1)) = c_2(E) > 0$. Ecartons le cas où $c_2(E) = 1$:

Proposition 19 : *Les fibrés E, uniformes de type 1, de deuxième classe de Chern 1 sont (à isomorphisme près) les fibrés $Q \oplus Q^* \oplus m\mathcal{O}$.*

Démonstration. On a bien $c_2(Q \oplus Q^* \oplus m\mathcal{O}) = 1$. Supposons réciproquement que le fibré E vérifie les hypothèses de la proposition 19. Les fibrés concernés par la proposition 8 ont pour deuxième classe de Chern 0 ou -1. On a donc $H^0(E(-1)) = H^0(E^*(-1)) = 0$, et E est cohomologie d'une monade du type

$$\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a} \mathcal{O} \otimes H \xrightarrow{b} \mathcal{O}(1) \ ,$$

où a est donné par une injection $i : V \to H$, et b par une injection $j : V \to H*$.

La condition $\tau_E = 0$ (condition d'uniformité de type 1) s'écrit : pour tout couple (u, v) d'éléments de V, on a $j(u)(i(v)) = 0$.

Le sous-espace H_1 de H, intersection des noyaux des $j(u)$ contient $i(V)$ et est de codimension 3 dans H. Soient H_2 un supplémentaire de $i(V)$ dans H_1, H_3 un supplémentaire de H_1 dans H. Alors E est isomorphe à $E' \oplus (\mathcal{O} \otimes H_3)$, E' étant la cohomologie de la monade

$$\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a'} (\mathcal{O} \otimes i(V)) \oplus (\mathcal{O} \otimes H_3) \xrightarrow{b'} \mathcal{O}(1) \ ,$$

a' et b' étant induits par i et j. Il est immédiat que E' est isomorphe à $Q \oplus Q^*$, ce qui achève la démonstration de la proposition 19. □

Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$, uniforme de type 1, et tel que $c_2(E) > 1$. Alors $c_2(E)$ est impair et τ_E est un $c_2(E)$-module de Kronecker de rang $c_2(E) - 1$, qui est pré-stable. On note, pour tout entier positif k, $Z(k)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés uniformes de type 1, de deuxième classe de Chern $2k + 1$, et n'ayant pas de facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}$.

Si E est un fibré dont la classe d'isomorphisme appartient à $Z(k)$, alors τ_E est un $(2k + 1)$-module de Kronecker de rang $2k$, et donc définit un fibré s-stable $S(E)$, uniforme de type 1, de deuxième classe de Chern $2k + 1$. On définit ainsi une application $S : Z(k) \to S(k)$, et si on note i l'inclusion $S(k) \to Z(k)$, on a évidemment $S \circ i = I_{S(k)}$.

On a la

Proposition 20 : *Soit e un élément de $S(k)$, E un de ses représentants. Alors il existe une bijection*

$$S^{-1}(e) \longrightarrow \mathrm{Gr}(H^1(E)) \times \mathrm{Gr}(H^1(E)).$$

Cela découle immédiatement de la proposition 7 et du fait que, d'après la proposition 16, E est isomorphe à son dual.

Proposition 21 : *Les seuls fibrés homogènes de type 1 sont (à isomorphisme près) :*

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{O}(-1) \oplus k\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \\ & \mathcal{O}(1) \oplus k\mathcal{O} \oplus Q^* \\ & Q \oplus k\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \\ & Q \oplus k\mathcal{O} \oplus Q^* \\ \textit{et} & S^2Q(-1) \oplus k\mathcal{O} \end{array}$$

Démonstration. Les trois premiers fibrés de la liste sont les seuls fibrés uniformes de type 1 dont la seconde classe de Chern soit 0 ou -1 , d'après la proposition 8. Le quatrième est d'après la proposition 19, le seul fibré uniforme de type 1 de seconde classe de Chern 1. Le dernier est le seul fibré uniforme de type 1 de seconde classe de Chern 3 d'après la proposition précédente et le fait que $h^1(S^2Q(-1)) = 0$.

Si un fibré uniforme de type 1 de deuxième classe de Chern au moins 5 est homogène, il en est de même du fibré s-stable uniforme de type 1 de même classe de Chern qui lui est canoniquement associé. Or, ceci est impossible d'après la proposition 17. Donc les seuls fibrés homogènes de type 1 sont ceux mentionnés dans la proposition 21. □

6. Fibrés de rangs 4 et 5

A – La variété d'incidence

Soit $D(V)$ l'ensemble des couples (x, ℓ), x étant un élément de $\mathbb{P}(V)$, ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$ contenant x. C'est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$, appelée la *variété d'incidence*. On note $p : D(V) \to \mathbb{P}(V)$ et $q : D(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ les restrictions des projections. On pose

$$h = c_1(p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))), \quad u = c_1(q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(1))).$$

Alors l'anneau de Chow de $D(V)$ est engendré par u et h, avec les relations

$$u^3 = 0, \quad h^3 = 0, \quad u^2 + h^2 - uh = 0.$$

En particulier, $1, u, h, u^2, h^2, u^2h = uh^2$ en est une base.

Soit k un entier, alors on a

$$\begin{aligned} p_*q^*(\mathcal{O}(k)) &= 0 \quad \text{si } k < 0 \\ &= S^kQ \quad \text{si } k \geq 0, \\ R^1p_*q^*(\mathcal{O}(k)) &= 0 \quad \text{si } k > -2 \\ &= (S^{-2-k}Q^*)(-1) \quad \text{si } k \leq -2. \end{aligned}$$

B – Fibrés de rang 4

On prouve ici le

Théorème 1 : *Les fibrés uniformes de rang 4 de type* $(1, 0, 0, -1)$ *sont (à isomorphisme près):*

$$\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1), \quad \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus Q^*, \quad Q \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1),$$
$$Q \oplus Q^* \quad \textit{et} \quad S^2Q(-1) \oplus \mathcal{O}.$$

Par conséquent ils sont homogènes.

D'après la proposition 4, les fibrés uniformes E de type $(1, 0, 0, -1)$ tels que $H^0(E(-1)) \neq 0$ ou $H^0(E^*(-1)) \neq 0$ sont les trois premiers de la liste. Le seul dont la deuxième classe de Chern soit 1 est $Q \oplus Q^*$, d'après la proposition 19.

On s'intéresse maintenant aux fibrés vectoriels E uniformes de type $(1, 0, 0, -1)$ dont la seconde classe de Chern est au moins 2.

À un tel fibré est associé un fibré s-stable uniforme de type 1 et de rang au plus 4, F. Si E n'est pas s-stable le rang de F est au plus 3, et donc F est isomorphe à $S^2Q(-1)$, puisque d'après les résultats de Van de Ven et Elencwajg mentionnés dans l'Introduction c'est le seul

fibré s-stable uniforme de type 1 et de rang au plus 3. Mais on a $h^1(S^2Q(-1)) = 0$, donc d'après la proposition 20, E est isomorphe à $S^2Q(-1) \oplus \mathcal{O}$.

Il reste donc à montrer qu'il n'existe pas de fibré s-stable uniforme de type $(1, 0, 0, -1)$.

Soit E un tel fibré. D'après la proposition 16, E est muni d'une forme quadratique non dégénérée. Il en est donc de même de la restriction de E à une droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$ sur laquelle on a $E_{|\ell} \simeq \mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$.

Lemme 22 : *Soit M un K-espace vectoriel de dimension finie, B une forme bilinéaire non dégénérée sur le fibré $\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$ sur $\mathbb{P}(M)$. Alors l'orthogonal du sous-fibré $\mathcal{O}(1)$ est égal au sous-fibré $\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O}$.*

Démonstration. La forme B étant non dégénérée, il suffit de prouver que $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(1) \oplus 2\mathcal{O}$ sont orthogonaux.

Soit s une section de $\mathcal{O}(1)$. Le morphisme de fibrés $\mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}$ défini au point x de $\mathbb{P}(M)$ par $y \mapsto B(s(x), y)$ est évidemment nul. Pour chacun des facteurs $\mathcal{O}$, le morphisme $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ défini au point x de $\mathbb{P}(M)$ par $c \mapsto B(s(x), c)$ s'annule en un point où s s'annule, donc est nul. Le lemme 22 découle alors du fait que $\mathcal{O}(1)$ est engendré par ses sections globales. □

Sur $D(V)$, le fibré p^*E est muni de la forme bilinéaire non dégénérée provenant de celle de E. Le fibré E étant uniforme de type $(1, 0, 0, -1)$, le morphisme canonique $q^*q_*p^*(E(-1)) \to p^*(E(-1))$ est injectif. Le fibré $q_*p^*(E(-1))$ est de rang 1, on pose $d = c_1(q_*p^*(E(-1))$. Alors $q_*p^*(E(-1))$ est isomorphe à $\mathcal{O}(d)$, et on obtient un morphisme injectif

$$a : q^*(\mathcal{O}(d)) \otimes p^*(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow p^*(E).$$

Sur une fibre $q^{-1}(\ell)$ de q, ℓ étant une droite de $\mathbb{P}(V)$, on a $q^{-1}(\ell) \simeq \ell$, et a est équivalent à l'inclusion $\mathcal{O}_\ell(1) \to \mathcal{O}_\ell(1) \oplus 2\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(-1)$. On en déduit que l'on a ${}^ta \circ a = 0$, donc $(a, {}^ta)$ est une monade, dont la cohomologie est triviale sur les fibres de q, et est par conséquent isomorphe à $q^*(F)$, F étant un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}(V^*)$.

On pose $J = q^*(\mathcal{O}(d)) \otimes p^*(\mathcal{O}(1))$, c'est un sous-fibré isotrope de $p^*(E)$. D'après le lemme 22, $q^*(F)$ est isomorphe au fibré $J^\perp/J$, et est donc muni d'une forme quadratique non dégénérée.

Lemme 23 :*Soit H un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors toute forme bilinéaire non dégénérée sur le fibré $\mathcal{O} \otimes H$ sur $\mathbb{P}(M)$ provient d'une forme bilinéaire non dégénérée sur H.*

(Évident.)

On en déduit que la forme quadratique non dégénérée sur $q^*(F)$ provient d'une forme quadratique non dégénérée sur F. Retenons ceci : le fibré F est muni d'une forme quadratique non dégénérée.

On a $c(p^*(E)) = c(J).c(q^*(F)).c(J^*)$, et $c_2(E) = 2k + 1$, k étant un entier tel que $k \geq 2$ (le cas $k = 1$ a déjà été traité, cf. la remarque suivant la proposition 17). Donc

$$1 + (2k + 1)h^2 \;=\; 1 + c_1(F)u + (c_2(F) - 2d - d^2)u^2 - (2d + 1)h^2 - (2d + 1)c_1(F)u^2h,$$

d'où on tire $c_1(F) = 0$ et $d = -k - 1$. Le fibré F est stable : puisque $c_1(F) = 0$, il suffit de montrer que $h^0(F) = 0$. Considèrons le déploiement de la monade $(a, {}^t a)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ker({}^t a) \arrow[r] \arrow[d] & q^*(F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r] & p^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(a) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & J^* \arrow[r, equal] \arrow[d] & J^* \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On a $h^0(F) = h^0(q^*(F))$, il faut donc montrer que $h^0(q^*(F)) = 0$. On a $h^0(p^*(E)) = h^0(E) = 0$, car E est s-stable. On a donc $h^0(\ker({}^t a)) = 0$, et il suffit de montrer que $h^1(J) = 0$. On a $R^1 q_*(J) = 0$, car sur une fibre $q^{-1}(\ell) \simeq \ell$ de q, $J \simeq \mathcal{O}_\ell(1)$, donc on a $h^1(J) = h^1(q_*(J))$. Mais $q_*(J) \simeq \mathcal{O}(-k-1) \otimes Q$, donc $h^1(q_*(J)) = 0$ puisque $k \geq 2$.

Le fibré F est donc s-stable, donc stable car il est de rang 2, et muni d'une forme quadratique non dégénérée. Ceci est impossible car F est simple et déjà muni d'une forme symplectique non dégénérée. Ceci achéve la démonstration du théorème 1.

C – Fibrés de rang 5

Proposition 24 : *Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$ dont la classe d'isomorphisme est un élément de $S(2)$. Alors E est de rang 5.*

Démonstration. Le fibré E est de rang au plus 5. Il ne peut être de rang 2 ou 3, car d'après les résultats d'Elencwajg mentionnés dans l'Introduction, $S^2Q(-1)$ est le seul fibré uniforme de type 1 de rang 3, tandis que d'après le théorème de Van de Ven, $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ est le seul fibré uniforme de type 1 de rang 2. Le fibré E ne peut pas non plus être de rang 4, car d'après le théorème 1, aucun fibré uniforme de type 1 de rang 4 n'a pour deuxième classe de Chern 5. Donc E est de rang 5. □

D'après la proposition 17, les fibrés E dont la classe d'isomorphisme est un élément de $S(2)$ ne sont pas homogènes. On a, d'après le théorème de Riemann-Roch $h^1(E) = c_2(E) - rg(E) = 0$, donc $S(2) = Z(2)$.

7. Stabilité

On prouve ici le

Théorème 2 : *Les fibrés s-stables uniformes de type 1 sont stables.*

Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$, uniforme de type 1 et s-stable, de rang r. Il faut montrer qu'étant donné un fibré vectoriel F sur $\mathbb{P}(V)$ non nul de rang inférieur à r, et un morphisme génériquement injectif $f : F \to E$, on a $c_1(F) < 0$.

Soit $(a_1, \dots, a_t)$ le type de décomposition générique de F. On a $a_1 \leq 1$ et $a_i \leq 0$ si $i > 1$, donc $a_1 + \cdots + a_t = c_1(F) \leq 1$, et il faut montrer qu'on ne peut pas avoir $c_1(F) = 0$ ou 1.

Le cas $c_1(F) = 1$

On a alors $(a_1, \dots, a_t) = (1, 0, \dots, 0)$.

Lemme 25 : *Soient M un K-espace vectoriel de dimension finie, et g un morphisme de fibrés sur $\mathbb{P}(M)$:*

$$\mathcal{O}(1) \oplus k\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \oplus k'\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1).$$

Alors g est injectif sur $\mathbb{P}(M)$, ou non injectif en tout point de $\mathbb{P}(M)$.

Démonstration. Ecrivons la matrice de g : $\begin{pmatrix} \lambda & A \\ 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $\lambda \in K$, B est une matrice de scalaires et A une matrice de formes linéaires sur M. Le lemme 25 découle du fait que l'injectivité de g dépend uniquement de λ et des mineurs de rang k de B, qui sont constants. □

Supposons que F n'est pas uniforme, et soit ℓ' une droite de saut de F. Alors on a sur ℓ' : $F_{|\ell'} \simeq \mathcal{O}(a'_1) \oplus \cdots \mathcal{O}(a'_t)$, avec $a'_1 + a'_2 \geq 2$, donc f n'est injectif en aucun point de ℓ'. Si ℓ est une droite générique de $\mathbb{P}(V)$, d'après le lemme 25 et le fait que ℓ et ℓ' ont une intersection non vide, on déduit que $f_{|\ell}$ n'est injectif en aucun point de ℓ. Ceci contredit le fait que f est génériquement injectif.

Le fibré F est donc uniforme de type $(1, 0, \dots, 0)$, et est donc, d'après Elencwajg ([3] et [4]) isomorphe à $Q \oplus \mathcal{O}$ où à $\mathcal{O}(1) \oplus k\mathcal{O}$. Mais c'est impossible car E n'a pas de sections globales non nulles. On ne peut donc pas avoir $c_1(F) = 1$.

Avant de poursuivre l'étude des autres cas, faisons la remarque suivante : si z est un élément non nul de V^*, définissant une droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$, on a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(F(-1)_{|\ell}) & \longrightarrow & H^1(F(-2)) & \longrightarrow & H^1(F(-1)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle H^0(f(-1)_{|\ell})} & & \downarrow{\scriptstyle H^0(f(-2))} & & \downarrow{\scriptstyle H^0(f(-1))} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(E(-1)_{|\ell}) & \longrightarrow & H^1(E(-2)) & \longrightarrow & H^1(F(-1)) \end{array}$$

provenant des suites exactes définies par la multiplication par z

$$0 \longrightarrow F(-2) \longrightarrow F(-1) \longrightarrow F(-1)_{|\ell} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow E(-2) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow E(-1)_{|\ell} \longrightarrow 0,$$

et du fait que $H^0(E) = 0$.

Le cas $c_1(F) = 0$

Dans ce cas le type de décomposition générique de F est $(0, \dots, 0)$ ou $(1, 0, \dots, 0, -1)$.

Le cas où F est de type $(0, ...0)$

On a le diagramme commutatif suivant de fibrés sur $\mathbb{P}(V^*)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(F(-2)) & \xrightarrow{\tau_F} & \mathcal{O} \otimes H^1(F(-1)) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle H^1(f(-2))=f'} & & \Big\downarrow {\scriptstyle H^1(f(-1))=f''} \\ \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E(-2)) & \xrightarrow{\tau_E} & \mathcal{O} \otimes H^1(E(-1)) \end{array} .$$

On a $h^0(F(-1)) = h^0(F^*(-1)) = 0$, à cause du type de décomposition de F, donc d'après le théorème de Riemann-Roch on a $h^1(F(-2)) = h^1(F(-1))$.

Remarquons que F ne peut pas être uniforme, car alors F serait trivial ([7], [8]), ce qui est absurde car E n'a pas de sections globales non nulles. Il existe donc un élément non nul z de V^* tel que l'application $\tau_E(z)$ ne soit pas injective. En particulier on a $h^1(F(-2)) \neq 0$.

Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$ telle que $F_{|\ell}$ soit trivial et que $f_{|\ell}$ soit génériquement injectif, mais non injectif. On a alors le

Lemme 26 : *Le morphisme $f_{|\ell}$ est non injectif en un seul point de ℓ.*

Démonstration. Ecrivons la matrice de $f_{|\ell} : t\mathcal{O}_\ell \to \mathcal{O}_\ell(1) \oplus k\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(-1)$: $\begin{pmatrix} \phi \\ A \\ 0 \end{pmatrix}$, où $A : K^t \to K^k$ et $\phi = \mathcal{O}_\ell \otimes K^t \to \mathcal{O}_\ell(1)$. Soit $H = \ker(A)$. On a $H \neq \{0\}$, car sinon f_ℓ est injectif en tout point. La restriction de $f_{|\ell}$, $g : \mathcal{O}_\ell \otimes \ker(A) \to \mathcal{O}_\ell(1)$ est génériquement injective, donc $\ker(A)$ est de dimension 1, et g (et donc $f_{|\ell}$) est non injectif en un seul point de ℓ. □

On en déduit le résultat suivant : il existe au plus une droite l_0 de $\mathbb{P}(V)$ telle que $f_{|\ell_0}$ ne soit pas génériquement injectif. En effet, s'il en existait deux, sur une droite générique de $\mathbb{P}(V)$ f serait non injective en au moins deux points, donc partout sur cette droite d'après le lemme 26. Cela contredirait le fait que f est génériquement injectif.

En particulier, pour toute droite de saut ℓ de F, sauf peut-être une, F_ℓ est de type $(1, 0, \dots, 0, -1)$ et $f_{|\ell}$ induit un isomorphisme entre les sous-fibrés de F et E isomorphes à $\mathcal{O}_\ell(1)$. Donc si z est une équation de ℓ, l'application $H^1(f(-2))$ est injective sur $\ker(\tau_F(z))$. On a évidemment

$$\tau_F(\mathcal{O}(-1) \otimes \ker(H^1(f(-2)))) \subset \mathcal{O} \otimes \ker(H^1(f(-1))).$$

On note

$$\tau' : \mathcal{O}(-1) \otimes \ker(H^1(f(-2))) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \ker(H^1(f(-1)))$$

la restriction de τ_F. D'après ce qui précéde, τ' est non injectif en au plus un point de $\mathbb{P}(V^*)$. Ceci entraine que

$$\dim(\ker(H^1(f(-2)))) \ \leq \ \dim(\ker(H^1(f(-1)))),$$

avec égalité si et seulement si $H^1(f(-2))$ et $H^1(f(-1))$ sont injectives. On a donc, puisque $h^1(F(-2)) = h^1(F(-1))$,

$$\dim(\mathrm{im}(H^1(f(-2)))) \ \geq \ \dim(\mathrm{im}(H^1(f(-1)))).$$

Si $H^1(f(-2))$ est surjective, il en est de même de $H^1(f(-1))$, et en fait ces applications sont des isomorphismes car les inégalités précédentes sont alors des égalités. Les modules de Kronecker τ_F et τ_E sont isomorphes et d'après les constructions de la proposition 7 on a $\mathrm{rg}(F) \geq \mathrm{rg}(E)$, ce qui est absurde.

On peut donc supposer que $0 < \dim(\mathrm{im}(H^1(f(-2)))) < \dim(H^1(E(-2)))$. Remarquons en outre que

$$\tau_E(\mathcal{O}(-1) \otimes \mathrm{im}(H^1(f(-2)))) \ \subset \mathcal{O} \otimes \mathrm{im}(H^1(f(-1))).$$

La contradiction découle alors du résultat suivant : le module de Kronecker τ_E est *irréductible* au sens de Hulek [6], c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-espaces vectoriels H et L de $H^1(E(-2))$ et $H^1(E(-1))$ respectivement, tels que $0 < \dim(H) = \dim(L) < n = c_2(E)$ et $\tau_E(\mathcal{O}(-1) \otimes H) \subset \mathcal{O} \otimes L$.

Pour le montrer supposons le contraire, donc qu'il existe de tels H et L. Soit z une forme linéaire sur V. Alors $\tau_E(z)(H) \subset L$. Rappelons qu'on a un isomorphisme canonique $H^1(E(-1)) \simeq H^1(E(-2))^*$, et que $\tau_E(z)$ est antisymétrique. On a ${}^t\tau_E(z)(L^\perp) \subset H^\perp$, et puisque τ_E est anti-symétrique, $\tau_E(z)(L^\perp) \subset H^\perp$. Donc $\tau_E(z)(H \cap L^\perp) \subset H^\perp \cap L$. On a

$$\begin{aligned} \dim(H^\perp \cap L) &= \dim(H^\perp) + \dim(L) - \dim(H^\perp + L) \\ &= n - \dim((H \cap L^\perp)^\perp) \\ &= \dim(H \cap L^\perp). \end{aligned}$$

En supposant $\dim(H)$ minimal, on obtient donc que $H \cap L^\perp = \{0\}$ ou $H \subset L^\perp$.

Premier cas : $H \cap L^\perp = \{0\}$

On a donc $H \oplus L^\perp = H^1(E(-2))$. En utilisant cette décomposition, on voit qu'il existe une base de $H^1(E(-2))$ telle que la matrice de τ_E relativement à cette base soit de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

A et B étant des matrices carrées d'éléments V, de tailles non nulles. Le déterminant de A s'annule sur au moins une courbe de $\mathbb{P}(V^*)$, ainsi que le déterminant de B, donc il existe au moins un point Kz de $\mathbb{P}(V^*)$ sur lequel $\det(A)$ et $\det(B)$ s'annulent. On en déduit que $\ker(\tau_E(z))$ est au moins de dimension 2, ce qui est absurde.

Deuxième cas : $H \subset L^\perp$

En utilisant un sous-espace vectoriel de $L^\perp$ supplémentaire de H et un sous-espace vectoriel de $H^1(E(-2))$ supplémentaire de $L^\perp$ on peut choisir une base de $H^1(E(-2))$ de telle sorte que la

matrice antisymétrique de τ_E soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -{}^tA \\ 0 & B & -{}^tC \\ A & C & E \end{pmatrix} ,$$

A et B étant des matrices carrées d'éléments de V. Ici H est le domaine de définition de A, et $L^\perp$ la somme directe de ceux de A et C.

Montrons qu'on a $\ker(\tau_E) \subset \mathcal{O}(-1) \otimes L^\perp$:

On a $\det(\tau_E) = \pm \det(A)^2 \det(B) = 0$, donc $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$.

Si $\det(A) = 0$, on a $\ker(\tau_E) \subset \mathcal{O}(-1) \otimes H \subset \mathcal{O}(-1) \otimes L^\perp$.

Si $\det(A) \neq 0$, $\det(B) = 0$, et $\det(A)$ s'annule sur une courbe de $\mathbb{P}(V^*)$. Soit Kz un point de $\mathbb{P}(V^*)$.

Si $\det(A(z)) = 0$, $\ker(\tau_E(z)) = \ker(A(z))) \subset L^\perp$.

Si $\det(A(z)) \neq 0$, et si h est un élément non nul de $\ker(B(z))$, on a
$\ker(\tau_E(z)) = K.(h - A(z)^{-1}C(h)) \subset L^\perp$.

On a donc bien $\ker(\tau_E) \subset \mathcal{O}(-1) \otimes L^\perp$.

Le sous-espace vectoriel $L^\perp$ est différent de $\{0\}$ et $H^1(E(-2))$. Mais ceci est impossible : en effet, dans le cas contraire, le fibré $X(\tau_E)$ aurait un facteur direct isomorphe à $\mathcal{O}(-1)$, ce qui est en contradiction avec le fait que $h^2(X(\tau_E)(-2)) = 0$, ce qui peut se voir en considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow X(\tau_E) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(E(-1)) \longrightarrow \mathcal{O}(\frac{n-1}{2}) \longrightarrow 0.$$

Le fibré F ne peut donc pas être de type de décomposition générique $(0, \ldots, 0)$.

Le cas où F est de type $(1, 0, \ldots, 0, -1)$

Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}(V)$ sur laquelle F est de type $(1, 0, \ldots, 0, -1)$ et telle que $f_{|l}$ soit génériquement injectif. Alors on a le

Lemme 27 : *Le morphisme $f_{|l}$ est non injectif en au plus un point de ℓ.*

Démonstration. Supposons que $f_{|l}$ est non injectif en au moins un point de ℓ. Ecrivons la matrice de $f_{|l} : \mathcal{O}_\ell(1) \oplus k\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(-1) \to \mathcal{O}_\ell(1) \oplus k'\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(-1)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \phi & B \\ 0 & A & \Phi \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

λ et μ sont des scalaires, A une matrice de scalaires, ϕ et Φ des matrices de formes linéaires sur D et B une forme quadratique sur D, où D est le plan de V sous-jacent à ℓ.

On a $\lambda \neq 0$, car $f_{|l}$ est génériquement injectif. On peut donc supposer que $\phi = 0$. On a $\mu = 0$, car dans le cas contraire, le rang de $f_{|l}$, dépendant des mineurs de A qui sont constants, serait constant. Or, ceci est faux d'après l'hypothése.

La matrice A est de rang k, car dans le cas contraire, on montre aisément en utilisant le fait que $\phi = 0$, que $f_{|l}$ n'est pas génériquement injectif. On peut donc écrire A sous la forme $A = \begin{pmatrix} A' \\ 0 \end{pmatrix}$, A' étant une matrice inversible.

Posons

$$\Phi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{k'} \end{pmatrix},$$

z_i étant une forme linéaire sur D. Les formes $z_{k+1}, \dots, z_{k'}$ ne sont pas toutes nulles, car dans le cas contraire, on montre aisément en utilisant le fait que A' est inversible, que $f_{|l}$ n'est pas génériquement injectif. Alors les points x de ℓ tels que f_x ne soit pas injective sont les solutions des équations $z_{k+1}(x) = \cdots = z_{k'}(x) = 0$. Il y a évidemment au plus une seule telle solution. Ceci prouve le lemme 27. □

Le lemme 27 entraine que, comme précédemment, il existe au plus une droite de $\mathbb{P}(V)$ telle que la restriction de f à cette droite ne soit pas un morphisme de fibrés génériquement injectif.

Si ℓ est une droite de saut de F, $F_{|\ell}$ ne peut pas être de type $(0, \dots, 0)$, donc $f_{|l}$ n'est pas génériquement injectif. Par conséquent il existe au plus une droite de saut pour F.

Remarquons ensuite que le noyau d'un morphisme de faisceaux localement libres sur $\mathbb{P}(V^*)$ est aussi localement libre. Donc $\ker(\tau_F)$ est un fibré de rang 1. Pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}(V)$, sauf peut-être une, $F_{|\ell}$ est de type $(1, 0, \dots, 0, -1)$ et $f_{|l}$ est génériquement injectif. Donc f induit un isomorphisme entre les sous-fibrés de $F_{|\ell}$ et $E_{|\ell}$ isomorphes à $\mathcal{O}_\ell(1)$. On en déduit que le morphisme de fibrés induit par f, $\ker(\tau_F) \to \ker(\tau_E)$ est un isomorphisme partout sauf peut-être en un point de $\mathbb{P}(V^*)$. Comme c'est un morphisme de fibrés en droites, c'est un isomorphisme partout. Si on pose $c_1(E) = 2k+1$, on a $\ker(\tau_E) \simeq \mathcal{O}(-k-1)$, donc $\ker(\tau_F) \simeq \mathcal{O}(-k-1)$.

Le morphisme $\ker(\tau_F) \simeq \mathcal{O}(-k-1) \to \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(F(-2))$ provient d'une application linéaire $S^k V^* \to H^1(F(-2))$, tandis que le morphisme
$\ker(\tau_E) \simeq \mathcal{O}(-k-1) \to \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(E(-2))$ provient d'une application linéaire
$S^k V^* \to H^1(E(-2))$, qui est surjective, comme on l'a vu dans la démonstration de la proposition 12. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S^k V^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(F(-2)) \arrow[d, "H^1(f(-2))"] \\ S^k V^* \arrow[r, two heads] & H^1(E(-2)) \end{tikzcd}$$

ce qui prouve que $H^1(f(-2))$ est surjective. On note H son noyau.

On a $h^0(F) = h^0(F^*(-1)) = 0$; l'égalité $h^0(F) = 0$ découle du fait que f est un morphisme injectif de faisceaux et que $h^0(E) = 0$. Il est immédiat que s'il existe une section non nulle de $F^*(-1)$, le morphisme de fibrés $\mathcal{O} \to F^*(-1)$ associé est injectif. Son conoyau G_0 est un fibré de type de décomposition générique $(-1, \dots, -1, -2)$. De f on déduit un morphisme de fibrés

$G_0^*(-1) \to E$ qui est génériquement injectif. Or, on a montré que c'est impossible car $G_0^*(-1)$ est de type de décomposition générique $(1, 0, \ldots, 0)$. On a donc bien $h^0(F) = h^0(F^*(-1)) = 0$.

On en déduit par le théorème de Riemann-Roch que $h^1(F(-2)) = h^1(F(-1))$.

L'application $H^1(f(-1))$ est surjective: en effet, puisque $H^1(f(-2))$ l'est, $\mathrm{im}(H^1(f(-1)))$ contient tous les $\mathrm{im}(\tau_E(z))$, avec z dans V^*, qui engendrent $H^1(E(-1))$.

On note L le noyau de $H^1(f(-1))$. Alors on a $\tau_F(\mathcal{O}(-1) \otimes H) \subset \mathcal{O} \otimes L$. Soit $\tau' : \mathcal{O}(-1)\otimes \to \mathcal{O} \otimes L$ la restriction de τ_F. Alors τ' est injectif sauf peut-être en un point. Mais puisque $\dim(H) = \dim(L)$, ceci n'est possible que si $H = L = \{0\}$. Alors τ_F est isomorphe à τ_E, donc $\mathrm{rg}(F) \geq rg(E)$, ce qui est absurde.

Le cas où F est de type $1, 0, \ldots, 0, -1)$ ne peut donc pas se produire.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Références

[1] Elencwajg, G. *Les fibrés uniformes de rang 3 sur $\mathbb{P}_2$ sont homogènes.* Math. Ann., 231 (1978), 217-227.

[2] Elencwajg, G. *Des fibrés uniformes non homogènes.* Math. Ann., 239 (1979), 185-192.

[3] Elencwajg, G. *Concernant les fibrés uniformes de rang 4 sur $\mathbb{P}_2$.* Thése (1979).

[4] Elencwajg, G. *Fibrés uniformes de rang élevé sur $\mathbb{P}_2$.* Ann. Inst. Fourier 31, 4 (1981), 89-114.

[5] Grothendieck, A. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann.* Amer. J. Math., 79 (1957), 121-138.

[6] Hulek, K. *On the classification of stable rank-r vector bundles on the projective plane.* Vector bundles and differential equations (Proc. Conf., Nice, 1979), Progr. Math., 7, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.113-144.

[7] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H. *Vector bundles on complex projective spaces.* Corrected reprint of the 1988 edition. With an appendix by S. I. Gelfand. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[8] Van de Ven, A. *On uniform vector bundles.* Math. Ann., 195 (1972), 245-248.

Note : Ce texte reproduit l'article

Fibrés uniformes de type $(1, 0, \ldots, 0, -1)$ *sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Inst. Fourier 31,1 (1981), 99-134,

avec quelques améliorations dans la rédaction et la bibliographie.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr