



**HAL**  
open science

**Un théorème limite local en environnement aléatoire stationnaire de conductances sur  $Z$ . (A local limit theorem in stationary random environment of conductances on  $Z$ .)**

Jean-Marc Derrien

► **To cite this version:**

Jean-Marc Derrien. Un théorème limite local en environnement aléatoire stationnaire de conductances sur  $Z$ . (A local limit theorem in stationary random environment of conductances on  $Z$ ). 2013. hal-00783770v1

**HAL Id: hal-00783770**

**<https://hal.science/hal-00783770v1>**

Preprint submitted on 1 Feb 2013 (v1), last revised 13 Sep 2014 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN THÉORÈME LIMITE LOCAL  
EN ENVIRONNEMENT ALÉATOIRE STATIONNAIRE DE CONDUCTANCES SUR  $\mathbb{Z}$   
A LOCAL LIMIT THEOREM  
IN STATIONARY RANDOM ENVIRONMENT OF CONDUCTANCES ON  $\mathbb{Z}$

Jean-Marc Derrien \*

*Vendredi 1<sup>er</sup> Février 2013*

**Résumé.** On démontre un théorème limite local pour les marches aléatoires aux plus proches voisins en environnement aléatoire stationnaire de conductances sur  $\mathbb{Z}$  en s'affranchissant simultanément des deux hypothèses classiques d'uniforme ellipticité et d'indépendance sur les conductances. Outre le théorème limite central, on utilise pour cela des inégalités différentielles discrètes du type «inégalités de Nash» associées avec la représentation de Hausdorff des suites complètement décroissantes.

**Abstract.** We prove a local limit theorem for nearest neighbours random walks in stationary random environment of conductances on  $\mathbb{Z}$  without using any of both classic assumptions of uniform ellipticity and independence on the conductances. Besides the central limit theorem, we use discrete differential inequalities of “Nash-type inequalities” associated with the Hausdorff’s representation of the completely decreasing sequences.

*2010 MSC :* 60J10 ; 60K37

*Mots-clés :* Marches aléatoires ; environnement aléatoire stationnaire de conductances ; théorème limite local ; inégalités de Nash ; représentation de Hausdorff des suites complètement décroissantes.

*Keywords :* Random walks ; stationary random environment of conductances ; local limit theorem ; Nash’s inequalities ; Hausdorff’s representation of the completely decreasing sequences.

## 1. Le modèle et la présentation des principaux résultats

Depuis les années 1980, une part importante de l'étude des milieux aléatoires concerne les marches aléatoires aux plus proches voisins en environnement aléatoire stationnaire de conductances sur  $\mathbb{Z}^d$  (dont notamment les marches aléatoires sur l'amas de percolation). Dans ce cadre particulier, les différences entre les modèles considérés s'articulent essentiellement autour des trois modalités suivantes :

- la dimension  $d$ ,
- le domaine des valeurs autorisées pour les conductances,
- considérer une famille de conductances aléatoires stationnaire ergodique (*environnement stationnaire*) vs considérer le cas particulier d'une famille de conductances indépendantes et identiquement distribuées (*environnement i.i.d.*).

Par exemple, l'hypothèse d'uniforme ellipticité, c'est-à-dire du fait que les conductances soient encadrées par deux constantes strictement positives, permet l'utilisation de nombreux outils classiques dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Pour faire un historique succinct des travaux qui ont motivé la présente étude, on peut citer par exemple [8] pour une vue d'ensemble des modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires sur  $\mathbb{Z}^d$  et la systématisation des techniques de martingales et d'«environnement vu de la particule» dans ce

---

\*. Université de Brest, CNRS - UMR 6205, Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique - 6, avenue Le Gorgeu, CS 93837, 29238 BREST cedex 3, France

contexte, [13], [16] et [17] pour l'étude de la récurrence sur l'amas de percolation et en environnement (de conductances) stationnaire non uniformément elliptique en dimension  $d \geq 1$ , [28] pour une étude de la variance asymptotique en environnement stationnaire non uniformément elliptique sur  $\mathbb{Z}$ , [18], [21] et [35] pour un théorème limite central en environnement stationnaire uniformément elliptique en dimension  $d \geq 1$ , [21], [22], [23], [24], [26], [30] et [34] pour des théorèmes limites centraux et des principes d'invariance pour l'amas de percolation et en environnements i.i.d. non uniformément elliptiques en dimension  $d \geq 2$ , [14] pour des inégalités gaussiennes en environnement déterministe uniformément elliptique en dimension  $d \geq 1$ , [15], [20] et [19] pour des inégalités gaussiennes pour l'amas de percolation en dimension  $d \geq 2$ , [25], [31] et [32] pour des comportements singuliers du noyau de la chaleur en environnements i.i.d. non uniformément elliptiques en dimension  $d \geq 4$ , [27] pour un théorème limite local pour l'amas de percolation en dimension  $d \geq 2$ .

Précisons maintenant le modèle dans le cas stationnaire non uniformément elliptique unidimensionnel considéré ici.

On considère en tout premier lieu un système dynamique probabilisé ergodique  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ , c'est-à-dire une mesure de probabilité  $\mu$  sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$  et une transformation  $T$  de  $\Omega$ , inversible, bi-mesurable, préservant la probabilité  $\mu$  et pour laquelle les ensembles invariants sont de mesure égale à 0 ou à 1 (voir [6] par exemple). Alors, étant donnée une application mesurable  $c : \Omega \rightarrow ]0, +\infty[$ , on appelle *conductance* de l'arête (non orientée)  $\{x, x+1\}$  de  $\mathbb{Z}$  dans l'*environnement*  $\omega$  le réel strictement positif  $c(x, x+1)(\omega) := c(T^x \omega)$  (on pose aussi  $c(x+1, x)(\omega) := c(x, x+1)(\omega)$ ). De la sorte, la famille de conductances  $(c(x, x+1))_{x \in \mathbb{Z}}$  constitue une suite de variables aléatoires stationnaire ergodique.

Un environnement  $\omega$  dans  $\Omega$  étant fixé, on s'intéresse au comportement de la chaîne de Markov  $(S_n)_{n \geq 0}$  sur  $\mathbb{Z}$  partant de  $x_0 \in \mathbb{Z}$  dont les probabilités de transition sont données par :

$$\mathbb{P}_{x_0}^\omega [S_{n+1} = x+1 \mid S_n = x] = \frac{c(x, x+1)(\omega)}{\bar{c}(x)(\omega)} =: p(x, x+1)(\omega)$$

et

$$\mathbb{P}_{x_0}^\omega [S_{n+1} = x-1 \mid S_n = x] = \frac{c(x, x-1)(\omega)}{\bar{c}(x)(\omega)} =: p(x, x-1)(\omega),$$

où l'on a posé  $\bar{c}(x)(\omega) := c(x-1, x)(\omega) + c(x, x+1)(\omega)$ , ceci pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}$  ( $\mathbb{P}_{x_0}^\omega$  est la probabilité sous laquelle évolue, dans l'environnement  $\omega$ , la chaîne de Markov  $(S_n)_{n \geq 0}$  partant de  $x_0$ ). Notons que la chaîne de Markov  $(S_n)_{n \geq 0}$  est réversible sur  $\mathbb{Z}$  au sens où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\mathbb{P}_x^\omega [S_n = y]}{\bar{c}(y)} = \frac{\mathbb{P}_y^\omega [S_n = x]}{\bar{c}(x)}.$$

L'objet de cet article est de démontrer les trois résultats suivants qui prolongent le travail commencé dans [29]. Ceux-ci donnent l'ordre de grandeur de la probabilité pour la marche partant de 0 d'être au temps  $n$  en 0 pour le premier théorème, en un point quelconque  $x_0$  de  $\mathbb{Z}$  pour le troisième.

**Théorème 1.1** On a, pour presque tout  $\omega$  dans  $\Omega$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n} \mathbb{P}_0^\omega [S_{2n} = 0] = \begin{cases} \frac{\bar{c}(0)(\omega)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int \frac{1}{c} d\mu} & \text{si } \bar{c} \text{ et } 1/c \text{ sont intégrables} \\ 0 & \text{si } 1/c \text{ est intégrable et si } \int \bar{c} d\mu = +\infty \\ +\infty & \text{si } \int \frac{1}{c} d\mu = +\infty \text{ et si } \bar{c} \text{ est intégrable} \end{cases}.$$

**Théorème 1.2** Si  $1/c$  est intégrable alors, pour presque tout  $\omega$  dans  $\Omega$ , la suite

$$\left( \sqrt{2n} \max_{x \in B(0, \sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{P}_0^\omega[S_{2n} = x]}{\bar{c}(x)} \right)_{n \geq 0}$$

est bornée.

Si, de plus,  $\int \bar{c} d\mu = +\infty$  alors, pour presque tout  $\omega$  dans  $\Omega$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n} \max_{x \in B(0, \sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}} \left( \frac{\mathbb{P}_0^\omega[S_{2n} = x]}{\bar{c}(x)} \right) = 0 .$$

**Théorème 1.3** Si  $1/c$  et  $\bar{c}$  sont intégrables alors on a, pour presque tout  $\omega$  dans  $\Omega$ , pour tout  $x_0$  dans  $2\mathbb{Z}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n} \mathbb{P}_0^\omega[S_{2n} = x_0] = \frac{\bar{c}(x_0)(\omega)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\int \frac{1}{c} d\mu}{\int \bar{c} d\mu}} \exp\left(-\frac{\int \bar{c} d\mu \int \frac{1}{c} d\mu}{4} x_0^2\right) .$$

*Remarques*

- A posteriori (car cela n'apparaît pas explicitement dans les preuves), le théorème 1.1 doit pouvoir s'interpréter de la façon suivante : les grandes valeurs prises par  $\bar{c}$  constituent des «pièges» pour la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  qui la «retiennent loin de 0» tandis que les grandes valeurs prises par  $1/c$  sont des «barrières» qui, au contraire, la «confinent» dans des voisinages de 0.
- Dans le théorème 1.1, le cas où  $1/c$  et  $\bar{c}$  sont intégrables est un cas particulier du théorème 1.3 ; le cas où  $1/c$  est intégrable mais  $\bar{c}$  ne l'est pas est un cas particulier du théorème 1.2.
- Ces théorèmes constituent des «localisations» du théorème limite central pour la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$ . Sauf pour le cas où  $1/c$  n'est pas intégrable, on les démontre à partir d'estimations du noyau de la chaleur associé à la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  qui résultent elles-mêmes d'inégalités différentielles discrètes du type «inégalités de Nash» et de la représentation de Hausdorff des suites complètement décroissantes (voir la propriété 2.2 ci-dessous pour une définition des suites complètement décroissantes). L'utilisation des idées de Nash ([3]) pour obtenir des estimations sur les probabilités de transition des processus de Markov réversibles est maintenant très classique (voir [9] et [12] par exemple). La représentation de Hausdorff des suites complètement décroissantes comme suites de moments de lois sur  $[0, 1]$  (cf aussi le «problème des moments») est exposée dans [5] chapitre VII. Le théorème limite central pour la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  est rappelé ci-dessous.

**Théorème 1.4** (*Théorème limite central ([8], [28], [33])*)

(1) Si  $\bar{c}$  et  $1/c$  sont intégrables alors, pour presque tout  $\omega$  dans  $\Omega$ , pour tous  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0^\omega \left[ a < \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b \right] = \int_a^b k_\sigma(z) dz ,$$

avec

$$k_\sigma(z) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{et} \quad \sigma^2 := \frac{2}{\int \bar{c} d\mu \int \frac{1}{c} d\mu} .$$

(2) Si  $\int \bar{c} d\mu = +\infty$  ou si  $\int \frac{1}{c} d\mu = +\infty$  alors, pour presque tout  $\omega$  dans  $\Omega$ , pour tous  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  avec  $a$  et  $b$  non nuls, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0^\omega \left[ a < \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in ]a, b[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

### Quelques remarques et notations supplémentaires

- Pour tout  $x_0$  dans  $\mathbb{Z}$  et pour tout réel  $r > 0$ , on note  $B(x_0, r)$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $\mathbb{Z}$  tels que  $|x - x_0| < r$ .
- On désigne par  $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{Z}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et à support fini.
- Dans la suite (sauf dans le paragraphe 2 où il n'y a pas d'aléa), tous les raisonnements sont faits presque sûrement en  $\omega$  dans  $\Omega$ . On omet systématiquement de mentionner les « $\omega$ ».
- Pour toute partie finie  $A$  de  $\mathbb{Z}$ , on désigne par  $\bar{c}(A)$  le *volume de  $A$*  défini par :

$$\bar{c}(A) := \sum_{x \in A} \bar{c}(x) .$$

- L'opérateur de transition  $P$  sur  $\mathbb{Z}$  de la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  est donné par :

$$Pf(x) = f(x-1)p(x, x-1) + f(x+1)p(x, x+1) , \quad x \in \mathbb{Z} , \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}) .$$

Il préserve l'ensemble  $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$ .

- On munit  $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$  d'un produit scalaire et de la norme associée en posant pour  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$  :

$$(f, g) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x)g(x)\bar{c}(x) \quad \text{et} \quad \|f\|^2 := (f, f) .$$

La réversibilité de la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  s'exprime alors de manière fonctionnelle comme suit :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}) , \quad (f, Pg) = (Pf, g) .$$

En particulier,  $(\bar{c}(x))_{x \in \mathbb{Z}}$  est une mesure sur  $\mathbb{Z}$  invariante sous l'action de  $P$ .

*Plan de l'article* Dans le paragraphe suivant, on étudie l'équation de la chaleur discrète associée à une chaîne de Markov réversible et on remarque en particulier la «complète décroissance» au cours du temps de l'«énergie» de la solution d'une telle équation. La représentation de Hausdorff des suites complètement décroissantes nous permet alors de majorer la différence entre deux valeurs successives de cette «énergie». Cette majoration est exploitée dans les paragraphes 3 et 4. Deux inégalités gaussiennes ainsi que les cas dégénérés du théorème 1.1 sont obtenus dans le paragraphe 3. Les théorèmes 1.2 et 1.3 sont démontrés dans le paragraphe 4 à la suite d'une étude de la régularité du noyau de la chaleur associé à  $(S_n)_{n \geq 0}$ . On termine par quelques remarques sur les cas multidimensionnels.

## 2. Sur l'équation de la chaleur associée à une chaîne de Markov réversible

Dans ce paragraphe, on considère une probabilité de transition  $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$  sur un espace d'états dénombrable  $\mathcal{S}$  et une mesure positive  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathcal{S}}$  sur  $\mathcal{S}$  que l'on suppose réversible pour  $Q$ . On a donc :

$$\forall i, j \in \mathcal{S} , \quad \lambda_i q_{ij} = \lambda_j q_{ji} .$$

On munit l'ensemble  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$  des fonctions définies sur  $\mathcal{S}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et à support fini, d'un produit scalaire et d'une norme en posant :

$$(f, g) := \sum_{i \in \mathcal{S}} f(i)g(i)\lambda_i \quad \text{et} \quad \|f\|^2 := (f, f) .$$

Pour simplifier la rédaction et compte tenu des applications en vue, **on suppose pour la suite que, pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ ,  $Qf$  est encore élément de  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ .**

Un calcul élémentaire utilisant la réversibilité de  $\lambda$  pour  $Q$  montre que :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}), \quad (f, Qg) = (Qf, g).$$

La forme de Dirichlet associée à  $Q^2$  et  $\lambda$  est définie par :

$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{S}} (f(i) - f(j)) (g(i) - g(j)) q_{ij}^{(2)} \lambda_i, \quad f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{S}),$$

où l'on a noté  $q_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} q_{ik} q_{kj}$  le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $Q^2$ .

Le lemme suivant est l'analogie de la première formule de Green pour le laplacien discret  $I - Q^2$ .

**Lemme 2.1 :** Pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ , on a :

$$\mathcal{E}(f, f) = (f, (I - Q^2)f) = \|f\|^2 - \|Qf\|^2.$$

En particulier, pour tout entier  $k \geq 0$ , on a :

$$(f, (I - Q^2)^k f) \geq 0.$$

*Preuve* L'argument est calculatoire. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, f) &= \frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{S}} (f(i) - f(j))^2 q_{ij}^{(2)} \lambda_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}} f(i)^2 \left( \sum_{j \in \mathcal{S}} q_{ij}^{(2)} \right) \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{S}} f(j)^2 \left( \sum_{i \in \mathcal{S}} q_{ij}^{(2)} \lambda_i \right) - \sum_{i, j \in \mathcal{S}} f(i)f(j) q_{ij}^{(2)} \lambda_i \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}} f(i)^2 \lambda_i - \sum_{i, j \in \mathcal{S}} f(i)f(j) q_{ij}^{(2)} \lambda_i \end{aligned}$$

en utilisant la réversibilité de  $\lambda$  pour  $Q^2$ . En utilisant la réversibilité de  $\lambda$  pour  $Q$ , on obtient donc :

$$\mathcal{E}(f, f) = \sum_{i \in \mathcal{S}} f(i) \left( f(i) - \sum_{j \in \mathcal{S}} f(j) q_{ij}^{(2)} \right) \lambda_i = (f, (I - Q^2)f) = \|f\|^2 - \|Qf\|^2.$$

Ainsi, toujours par réversibilité de  $\lambda$ , il vient, pour  $k = 2l$  pair,

$$(f, (I - Q^2)^k f) = ((I - Q^2)^l f, (I - Q^2)^l f) \geq 0$$

et, pour  $k = 2l + 1$  impair,

$$(f, (I - Q^2)^k f) = ((I - Q^2)^l f, (I - Q^2)((I - Q^2)^l f)) \geq 0.$$

•

Etant donné  $f$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ , on considère à présent la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$  solution de l'équation de la chaleur discrète (associée à  $Q$  et  $f$ ) :

$$\begin{cases} f_0 = f, \\ f_n - f_{n+1} = (I - Q)f_n, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

On a donc, pour tout  $n \geq 0$ ,  $f_n = Q^n f$ .

Intéressons-nous plus particulièrement à la suite des «énergies»  $(\|Q^n f\|^2)_{n \geq 0}$  d'une telle solution et, pour cela, introduisons la famille des suites de ses «différences successives» en notant, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\Delta_n^{(k+1)}(f) := \Delta_n^{(k)}(f) - \Delta_{n+1}^{(k)}(f), \quad n \geq 0,$$

où l'on a posé  $\Delta_n^{(0)}(f) := \|Q^n f\|^2$ ,  $n \geq 0$ .

La propriété suivante est élémentaire mais elle joue un rôle déterminant dans la suite.

**Propriété 2.2** Pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ , la suite  $(\|Q^n f\|^2)_{n \geq 0}$  est *complètement décroissante* au sens où :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_n^{(k)}(f) \geq 0.$$

*Preuve* C'est une conséquence du lemme 2.1 une fois vérifié par récurrence sur  $k$  et en utilisant la réversibilité de  $\lambda$  que

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_n^{(k)}(f) = (Q^n f, (I - Q^2)^k Q^n f).$$

•

**Corollaire 2.3** Pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ , il existe une mesure de probabilité borélienne  $\nu_f$  sur  $[0, 1]$  telle que :

$$\forall n \geq 0, \quad \|Q^n f\|^2 = \|f\|^2 \int_{[0,1]} x^n d\nu_f(x).$$

*Preuve* C'est une application directe du théorème de Hausdorff de représentation des suites complètement décroissantes (voir par exemple [5] chapitre VII).

•

*Remarques*

- Si la quantité  $\|f\|^2$  est non nulle alors la mesure de probabilité  $\nu_f$  est unique.
- Le théorème de Hausdorff de représentation des suites complètement décroissantes ([2]) est à rapprocher du théorème d'Herglotz de représentation des suites de type positif ([1]); la première représentation est donnée par la suite des moments d'une loi sur  $[0,1]$ , la seconde par la transformée de Fourier d'une telle loi.
- La théorie spectrale des opérateurs symétriques dans les espaces de Hilbert permet d'obtenir cette même représentation de la suite  $(\|Q^n f\|^2)$  mais de manière moins élémentaire (voir [10] par exemple).

**Corollaire 2.4** Pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ , pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :

$$\|Q^{2n} f\|^2 - \|Q^{2n+1} f\|^2 \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \|Q^n f\|^2.$$

*Preuve* En utilisant la représentation de Hausdorff précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \|Q^{2n}f\|^2 - \|Q^{2n+1}f\|^2 &= \|f\|^2 \int_{[0,1]} x^{2n}(1-x) d\nu_f(x) \\ &\leq \max_{x \in [0,1]} (x^n(1-x)) \left( \|f\|^2 \int_{[0,1]} x^n d\nu_f(x) \right) \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \|Q^n f\|^2. \end{aligned}$$

•

On suppose à présent que, pour tout  $i$  dans  $\mathcal{S}$ ,  $\lambda_i$  est strictement positif. De plus, on particularise un élément  $o$  de  $\mathcal{S}$ .

On définit le *noyau de la chaleur*  $(h_n)_{n \geq 0}$  («basé en  $o$ ») et associé à la probabilité de transition  $Q$  comme étant la solution de l'équation de la chaleur discrète associée à  $Q$  et à la fonction  $h_0$  donnée par :

$$h_0(i) = \frac{1}{\lambda_o} \mathbb{I}_{\{o\}}(i) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_o} & \text{si } i = o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad i \in \mathcal{S}.$$

Il vient, pour tout entier  $n \geq 0$  et pour tout  $i$  dans  $\mathcal{S}$ ,

$$h_n(i) = Q^n h_0(i) = \frac{\mathbb{P}_i[X_n = o]}{\lambda_o} = \frac{\mathbb{P}_o[X_n = i]}{\lambda_i},$$

où  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne la chaîne de Markov sur  $\mathcal{S}$  de probabilité de transition  $Q$  partant de  $o$  (et évoluant sous la probabilité  $\mathbb{P}_o$ ).

Le lemme suivant est très classique. Il permet notamment de reformuler le théorème 1.1 en terme d'«énergie» du noyau de la chaleur.

**Lemme 2.5** Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :

$$\|h_n\|^2 = \frac{\mathbb{P}_o[X_{2n} = o]}{\lambda_o} = h_{2n}(o).$$

*Preuve* On a :

$$\|h_n\|^2 = \sum_{i \in \mathcal{S}} \left( \frac{\mathbb{P}_o[X_n = i]}{\lambda_i} \right)^2 \lambda_i = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_o[X_n = i] \frac{\mathbb{P}_o[X_n = i]}{\lambda_i}.$$

Soit, en utilisant la réversibilité de  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \|h_n\|^2 &= \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_o[X_n = i] \frac{\mathbb{P}_i[X_n = o]}{\lambda_o} \\ &= \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_o[X_n = i] \mathbb{P}_o[X_{2n} = o \mid X_n = i]}{\lambda_o} = \frac{\mathbb{P}_o[X_{2n} = o]}{\lambda_o}. \end{aligned}$$

•

### 3. Des inégalités gaussiennes et les cas dégénérés

On revient à présent à la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  du paragraphe 1 (à environnement fixé). Les résultats du paragraphe précédent s'appliquent à l'opérateur  $P$  et à la mesure réversible  $(\bar{\tau}(x))_{x \in \mathbb{Z}}$ . Dans ce

contexte, la forme de Dirichlet associée à  $P^2$  est donnée, pour tout  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$ , par :

$$\mathcal{E}(f, g) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} (f(x-1) - f(x+1)) (g(x-1) - g(x+1)) \frac{c(x-1, x) c(x, x+1)}{\bar{c}(x)}.$$

(La quantité

$$\frac{c(x-1, x) c(x, x+1)}{\bar{c}(x)} = \frac{1}{\frac{1}{c(x-1, x)} + \frac{1}{c(x, x+1)}}$$

est égale, comme il se doit, à la conductance d'un circuit électrique constitué de deux conductances  $c(x-1, x)$  et  $c(x, x+1)$  disposées en série.)

On note encore  $(h_n)_{n \geq 0}$  le noyau de la chaleur associé à  $(S_n)_{n \geq 0}$  partant de 0 :

$$\forall n \geq 0, \quad h_n = P^n \left( \frac{1}{\bar{c}(0)} \mathbb{I}_{\{0\}} \right).$$

Commençons par constater la convergence vers 0 de la suite  $(\|h_n\|^2)_{n \geq 0}$ .

**Proposition 3.1** La marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov récurrente nulle.

On a donc en particulier la convergence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}_0[S_{2n} = 0]}{\bar{c}(0)} = 0.$$

*Preuve* Pour tout  $K$  dans  $\mathbb{N}^*$ , la probabilité pour  $(S_n)_{n \geq 0}$  d'atteindre  $\{-K, K\}$  avant de revenir en 0 est donnée par la *conductance effective* entre 0 et  $\{-K, K\}$  divisée par  $\bar{c}(0)$  :

$$\frac{1}{\bar{c}(0)} \left( \frac{1}{\sum_{x=-K}^{-1} \frac{1}{c(x, x+1)}} + \frac{1}{\sum_{x=0}^{K-1} \frac{1}{c(x, x+1)}} \right)$$

([7]). Or, le théorème de récurrence de Poincaré (voir [6] par exemple) garantit les deux divergences :

$$\sum_{x=-\infty}^{-1} \frac{1}{c(x, x+1)} = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{c(x, x+1)} = +\infty.$$

On en déduit la récurrence de  $(S_n)_{n \geq 0}$ . La récurrence nulle de  $(S_n)_{n \geq 0}$  résulte alors de ce que  $(\bar{c}(x))_{x \in \mathbb{Z}}$  est une mesure sur  $\mathbb{Z}$   $P$ -invariante de masse totale infinie (toujours d'après le théorème de récurrence de Poincaré).

La convergence de la suite  $(\mathbb{P}_0[S_{2n} = 0])_{n \geq 0}$  vers 0 est une conséquence de cette récurrence nulle comme il est exposé par exemple dans [11] p. 214. •

Le théorème suivant donne un minorant (asymptotique) de la suite  $(\sqrt{n} \|h_n\|^2)_{n \geq 0}$ .

**Théorème 3.2** Si  $\bar{c}$  est intégrable alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 \geq \frac{1}{13} \sqrt{\frac{\int \frac{1}{\bar{c}} d\mu}{\int \bar{c} d\mu}}.$$

En particulier, si  $\bar{c}$  est intégrable et si  $\int \frac{1}{\bar{c}} d\mu = +\infty$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 = +\infty.$$

*Preuve* On exploite le fait que, typiquement, jusqu'à l'instant  $n$ , la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  «évolue» dans un voisinage de 0 de longueur d'ordre  $\sqrt{n}$ .

Pour tout  $\delta > 0$  et pour tout entier  $n \geq 1$ , on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{x \in B(0, \delta \sqrt{n})} \mathbb{P}_0[S_n = x] \right)^2 &\leq \bar{c}(B(0, \delta \sqrt{n})) \sum_{x \in B(0, \delta \sqrt{n})} \frac{\mathbb{P}_0[S_n = x]^2}{\bar{c}(x)} \\ &= \bar{c}(B(0, \delta \sqrt{n})) \sum_{x \in B(0, \delta \sqrt{n})} h_n^2(x) \bar{c}(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \|h_n\|^2 &\geq \sqrt{n} \sum_{x \in B(0, \delta \sqrt{n})} h_n^2(x) \bar{c}(x) \\ &\geq \frac{1}{2\delta} \frac{2\delta \sqrt{n}}{\bar{c}(B(0, \delta \sqrt{n}))} \left( \sum_{x \in B(0, \delta \sqrt{n})} \mathbb{P}_0[S_n = x] \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\delta} \frac{2\delta \sqrt{n}}{\bar{c}(B(0, \delta \sqrt{n}))} \mathbb{P}_0 \left[ \left| \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right| < \delta \right]^2. \end{aligned}$$

On applique à présent le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff à  $\bar{c}$  (voir [6] par exemple) et le théorème limite central (théorème 1.4 ci-dessus) en distinguant selon que  $1/c$  est intégrable ou non.

- Si  $\int \frac{1}{c} d\mu = +\infty$  alors, pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 \geq \frac{1}{2\delta \int \bar{c} d\mu};$$

ce qui donne, en passant à la limite  $\delta \rightarrow 0^+$ , la convergence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 = +\infty.$$

- Si  $1/c$  est intégrable alors il vient, pour tout  $\delta > 0$  et avec les notations du théorème 1.4,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 \geq \frac{1}{2\delta} \frac{1}{\int \bar{c} d\mu} \left( \int_{-\delta}^{\delta} k_{\sigma}(z) dz \right)^2.$$

Soit encore :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 \geq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sigma \int \bar{c} d\mu} \frac{\sigma}{\delta} \left( \int_{-\delta/\sigma}^{\delta/\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right)^2.$$

En prenant par exemple  $\delta = \sigma$ , on obtient par une minoration grossière :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 \geq \frac{1}{\pi e \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\int \frac{1}{c} d\mu}{\int \bar{c} d\mu}} \geq \frac{1}{13} \sqrt{\frac{\int \frac{1}{c} d\mu}{\int \bar{c} d\mu}}.$$

•

On s'intéresse à présent à la majoration de la suite  $(\sqrt{n} \|h_n\|^2)_{n \geq 0}$ .

**Théorème 3.3** Si  $1/c$  est intégrable alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 \leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\int \frac{1}{c} d\mu}{\int \bar{c} d\mu}}.$$

En particulier, si  $1/c$  est intégrable et si  $\int \bar{c} d\mu = +\infty$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \|h_n\|^2 = 0.$$

*Preuve* Pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $K \geq 1$ , on considère un élément  $x_0$  dans  $B(0, K) \cap 2\mathbb{Z}$  tel que

$$h_{2n}(x_0) = \min\{h_{2n}(x) \mid x \in B(0, K) \cap 2\mathbb{Z}\}.$$

Il vient :

$$h_{2n}(x_0) \leq \frac{1}{\sum_{x \in B(0, K) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x)} \sum_{x \in B(0, K) \cap 2\mathbb{Z}} h_{2n}(x) \bar{c}(x) \leq \frac{1}{\sum_{x \in B(0, K) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x)}.$$

Ainsi, on obtient, avec par exemple  $x_0 = 2l_0 + 2$  et  $l_0 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \|h_n\|^2 - \frac{1}{\sum_{x \in B(0, K) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x)} \\ & \leq h_{2n}(0) - h_{2n}(x_0) \\ & \leq \sum_{l=0}^{l_0} |h_{2n}(2l) - h_{2n}(2l+2)| \\ & \leq \sqrt{\sum_{l=0}^{l_0} (h_{2n}(2l) - h_{2n}(2l+2))^2 \frac{c(2l, 2l+1) c(2l+1, 2l+2)}{\bar{c}(2l+1)}} \\ & \quad \times \sqrt{\sum_{l=0}^{l_0} \frac{1}{c(2l, 2l+1)} + \frac{1}{c(2l+1, 2l+2)}}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, compte tenu de l'expression de la forme de Dirichlet associée à  $P^2$  et du lemme 2.1, il vient :

$$\begin{aligned} & \|h_n\|^2 - \frac{1}{\sum_{x \in B(0, K) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x)} \\ & \leq \sqrt{\mathcal{E}(h_{2n}, h_{2n})} \left( \sum_{x=-K}^{K-1} \frac{1}{c(x, x+1)} \right)^{1/2} \\ & = \sqrt{\|h_{2n}\|^2 - \|h_{2n+1}\|^2} \left( \sum_{x=-K}^{K-1} \frac{1}{c(x, x+1)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Le corollaire 2.4 assure alors que

$$\|h_n\|^2 - \frac{1}{\sum_{x \in B(0, K) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x)} \leq \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \|h_n\| \left( \sum_{x=-K}^{K-1} \frac{1}{c(x, x+1)} \right)^{1/2} \quad (1)$$

Pour tout entier  $n$  assez grand, on définit à présent  $K(n) \geq 1$  par la relation

$$\sum_{x \in B(0, K(n)-1) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x) \leq \frac{3}{\|h_n\|^2} < \sum_{x \in B(0, K(n)) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x) \quad (2)$$

Remarquons que la proposition 3.1 garantit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K(n) = +\infty$ .

Il vient d'après (1) et la seconde inégalité de (2) :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \|h_n\| \\ & \geq \frac{2}{3} \|h_n\|^2 \left( \sum_{x=-K(n)}^{K(n)-1} \frac{1}{c(x, x+1)} \right)^{-1/2} \\ & = \frac{\sqrt{2}}{3} \|h_n\|^2 \left( \frac{1}{2K(n)} \sum_{x=-K(n)}^{K(n)-1} \frac{1}{c(x, x+1)} \right)^{-1/2} \\ & \quad \times \left( \frac{\sum_{x \in B(0, K(n)-1) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x)}{K(n)} \right)^{1/2} \left( \sum_{x \in B(0, K(n)-1) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x) \right)^{-1/2} ; \end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant cette fois la première inégalité de (2) :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \|h_n\| \\ & \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \|h_n\|^2 \left( \frac{1}{2K(n)} \sum_{x=-K(n)}^{K(n)-1} \frac{1}{c(x, x+1)} \right)^{-1/2} \left( \frac{\sum_{x \in B(0, K(n)-1) \cap 2\mathbb{Z}} \bar{c}(x)}{K(n)} \right)^{1/2} \left( \frac{\|h_n\|^2}{3} \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

On achève la preuve du théorème 3.3 en divisant par  $\|h_n\|/\sqrt{n}$  et en appliquant à  $1/c$  et à  $\bar{c}$  le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff. •

#### 4. Un théorème limite local non dégénéré

On commence par étudier la régularité du noyau de la chaleur.

**Théorème 4.1** Si  $1/c$  est intégrable alors, pour tout  $x_0$  dans  $\mathbb{Z}$ , il existe un réel  $C > 0$  (fonction de l'environnement et de  $x_0$ ) tel que, pour tout  $\delta > 0$ , pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\max_{x \in B(x_0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}} |h_{2n}(x) - h_{2n}(x_0)| \leq C \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{n}} .$$

De plus, si  $\int \bar{c} d\mu = +\infty$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n} \max_{x \in B(x_0, \sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}} |h_{2n}(x) - h_{2n}(x_0)| = 0 .$$

*Preuve* Compte tenu de la stationnarité de l'environnement, il suffit de considérer le cas  $x_0 = 0$ , ce que l'on fait dans la suite.

Pour tout  $\delta > 0$ , pour tout entier  $n \geq 1$ , pour tout  $x$  dans  $B(0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}$ , on a, en procédant comme dans la preuve du théorème 3.3,

$$|h_{2n}(x) - h_{2n}(0)| \leq \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \|h_n\| \left( \sum_{z \in B(0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}} \frac{1}{c(z, z+1)} \right)^{1/2}.$$

Le théorème 3.3 et le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff appliqué à  $1/c$  permettent donc de conclure. •

*Remarques*

- Dans l'approche classique de Moser ([4]), un tel résultat de régularité se déduit d'inégalités du type «inégalités de Harnack paraboliques» (voir [14] et [27] pour des applications de cette méthode dans le cas d'espaces discrets). En utilisant les inégalités gaussiennes du paragraphe précédent, on est ici plus proche des idées de Nash ([3]).

- Le théorème 1.2 est maintenant une conséquence facile des théorème 3.3 et 4.1 compte tenu de l'inégalité triangulaire :

$$h_{2n}(x) \leq |h_{2n}(x) - h_{2n}(0)| + h_{2n}(0) = |h_{2n}(x) - h_{2n}(0)| + \|h_n\|^2.$$

**Preuve du théorème 1.3** On procède comme dans [27].

Pour tout  $\delta > 0$ , pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} & \sqrt{2n} \frac{\mathbb{P}_0[S_{2n} = x_0]}{\bar{c}(x_0)} \int \bar{c} d\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int \frac{1}{c} d\mu} \int \bar{c} d\mu \exp\left(-\frac{\int \bar{c} d\mu \int \frac{1}{c} d\mu}{4} x_0^2\right) \\ = & \sqrt{2n} h_{2n}(x_0) \int \bar{c} d\mu - \frac{\bar{c}(B(x_0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z})}{\delta} h_{2n}(x_0) \\ & + \frac{1}{\delta} \sum_{x \in B(x_0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}} h_{2n}(x_0) \bar{c}(x) - \frac{1}{\delta} \sum_{x \in B(x_0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}} h_{2n}(x) \bar{c}(x) \\ & + \frac{1}{\delta} \mathbb{P}_0[S_{2n} \in B(x_0, \delta\sqrt{2n})] - \frac{1}{\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} k_\sigma(z) dz \\ & + \frac{1}{\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} k_\sigma(z) dz - 2k_\sigma(x_0), \end{aligned}$$

où l'on a repris les notations du théorème 1.4.

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{2n} \frac{\mathbb{P}_0[S_{2n} = x_0]}{\bar{c}(x_0)} \int \bar{c} d\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int \frac{1}{c} d\mu} \int \bar{c} d\mu \exp\left(-\frac{\int \bar{c} d\mu \int \frac{1}{c} d\mu}{4} x_0^2\right) \right| \\ \leq & \sqrt{2n} h_{2n}(x_0) \left| \int \bar{c} d\mu - \frac{\bar{c}(B(x_0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z})}{\delta \sqrt{2n}} \right| \\ & + \frac{1}{\delta} \max_{x \in B(x_0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}} (|h_{2n}(x_0) - h_{2n}(x)|) \bar{c}(B(x_0, \delta\sqrt{2n}) \cap 2\mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\delta} \left| \mathbb{P}_0 \left[ \frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} \in B(x_0, \delta) \right] - \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} k_\sigma(z) dz \right| \\
& + 2 \left( \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |k_\sigma(z) - k_\sigma(x_0)| dz \right). \tag{4}
\end{aligned}$$

Un réel  $\varepsilon > 0$  étant donné, on peut fixer  $\delta > 0$  assez petit de manière à majorer les expressions (3) et (4) par  $\varepsilon$ . Pour cela, on utilise le théorème 4.1, le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff appliqué à  $\bar{c}$  et la continuité de  $z \mapsto k_\sigma(z)$  en  $x_0$ . On conclut alors en passant à la limite supérieure en  $n$  et en utilisant à nouveau le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff appliqué à  $\bar{c}$ , le théorème 3.3 et la stationnarité de l'environnement (pour justifier que la suite  $(\sqrt{2n} h_{2n}(x_0))_{n \geq 0}$  est bornée), et le théorème limite central. •

### Quelques remarques concernant les dimensions supérieures

Compte tenu de la preuve du théorème 1.3, on voit que pour en obtenir une version  $d$ -dimensionnelle avec, pour simplifier,  $x_0 = 0$ , il suffit que les trois propriétés suivantes soient satisfaites :

- (i) La marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  satisfait un théorème limite central avec matrice de covariance non dégénérée.
- (ii) La suite  $(n^{d/2} \mathbb{P}_0[S_{2n} = 0])_{n \geq 0}$  est bornée.
- (iii) On a

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \max_{n \geq 0} \left( n^{d/2} \sum_{x \in \tilde{B}(\delta\sqrt{2n})} |h_{2n}(0) - h_{2n}(x)| \bar{c}(x) \right) = 0$$

avec

$$\tilde{B}(\delta\sqrt{2n}) := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \sum_{i=1}^d x_i^2 < 2n\delta^2 \text{ et } \sum_{i=1}^d x_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Ces trois conditions sont vérifiées dans le cas d'un environnement stationnaire uniformément elliptique de conductances en dimension  $d \geq 1$  ([14], [18], [21], [35]) et pour l'amas de percolation en dimension  $d \geq 2$  ([27]). En environnement i.i.d. non uniformément elliptique en dimension  $d \geq 2$ , la condition (i) est satisfaite, tout au moins en temps continu, lorsque les conductances sont intégrables et que la probabilité pour une conductance d'être strictement positive dépasse strictement le seuil critique de percolation ([34]). En environnement i.i.d. et même dans le cas de conductances uniformément majorées, la condition (ii) ci-dessus peut ne pas être satisfaite en dimension  $d \geq 4$  ([25]).

**Remerciements** – L'auteur tient à remercier Jérôme Depauw et Yves Derriennic pour leurs remarques qui ont considérablement amélioré la rédaction de cet article.

## Références

- [1] G. Herglotz (1911) Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis, *Leipziger Berichte* **63** 501–511.
- [2] F. Hausdorff (1921) Summationsmethoden und Momentfolgen. I & II, *Mathematische Zeitschrift* **9** 74–109 & 280–299.

- [3] J. Nash (1958) Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *American Journal of Mathematics* **80** No. 4, 931–954.
- [4] J. Moser (1964) A Harnack inequality for parabolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **17**, 101–134. Correction in **20** (1967), 231–236.
- [5] W. Feller (1971) *An introduction to probability theory and its applications*. Vol II. 2nd ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York etc. : John Wiley and Sons, Inc. XXIV.
- [6] K. Petersen (1983) *Ergodic theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2. Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] P. Doyle, J. L. Snell (1984) *Random walks and electrical networks*, The Carus Mathematical Monographs, 22 The Mathematical Association of America. John Wiley & Sons, New York.
- [8] S. M. Kozlov (1985). The method of averaging and walks in inhomogeneous environments, *Russ. Math. Surv.* **40**, 73–145 ; translation from *Usp. Mat. Nauk* **40**, 61–120.
- [9] E. A. Carlen, S. Kusuoka, D. W. Stroock (1987) Upper bounds for symmetric Markov transition functions, *Ann. Inst. H. Poincaré, proba. stat.* **2**, 245–287.
- [10] W. Rudin (1991) *Functional analysis*. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York.
- [11] G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker (1992) *Probability and random processes*. Second edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.
- [12] T. Coulhon, L. Saloff-Coste (1993) Isométrie pour les groupes et les variétés, *Revista Matemática Iberoamericana* **9** No. 2, 293–314.
- [13] G. R. Grimmett, H. Kesten, Y. Zhang (1993) Random walk on the infinite cluster of the percolation model, *Probab. Theory Related Fields* **96** No. 1, 33–44.
- [14] T. Delmotte (1999) Parabolic Harnack inequality and estimates of Markov chains on graphs, *Revista Matemática Iberoamericana* **15**, 181–232.
- [15] P. Mathieu, E. Rémy (2001) *Décroissance du noyau de la chaleur et isopérimétrie sur un amas de percolation*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332**, 927–931.
- [16] N. Berger (2002) Transience, recurrence and critical behavior for long-range percolation, *Commun. Math. Phys.* **226** No. 3, 531–558.
- [17] D. Boivin, J.-M. Derrien (2002) Geodesics and recurrence of random walks in disordered systems, *Elect. Commun. Proba.* **7**, 101–115.
- [18] D. Boivin, J. Depauw (2003) Spectral homogenization for reversible random walks on  $\mathbb{Z}^d$  in a random environment, *Stochastic Processes Applications* **104** No. 1, 29–56.
- [19] M. T. Barlow (2004) Random walks on supercritical percolation clusters, *Ann. Probab.* **32**, 3024–3084.
- [20] P. Mathieu, E. Rémy (2004) Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters, *Ann. Probab.* **32**, 100–128.
- [21] V. Sidoravicius, A.-S. Sznitman (2004) Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances, *Probab. Theory Related Fields* **129** No. 2, 219–244.
- [22] N. Berger, M. Biskup (2007) Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters, *Probab. Theory Related Fields* **137** No. 1-2, 83–120.
- [23] M. Biskup, T. M. Prescott (2007) Functional CLT for random walk among bounded random conductances, *Elect. Journal Probab.* **12**, 1323–1348.
- [24] P. Mathieu, A. Piatnitski (2007) Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters, *Proceedings A of the Royal Society* **463**, 2287–2307.
- [25] N. Berger, M. Biskup, C. E. Hoffman, G. Kozma (2008) Anomalous heat-kernel decay for random walk among bounded random conductances, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **44** No. 2, 374–392.
- [26] P. Mathieu (2008) Quenched invariance principles for random walks with random conductances, *Journal of Statistical Physics* **130** No. 5, 1025–1046.
- [27] M. T. Barlow and B. M. Hambly (2009) Parabolic Harnack inequality and local limit theorem for percolation clusters, *Elect. Journal Probab.* **14**, 1–26.
- [28] J. Depauw, J.-M. Derrien (2009). Variance limite d’une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **347**, 401–406.
- [29] J.-M. Derrien (2009). Majoration du noyau de la chaleur en environnement stationnaire de conductances, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **347**, 85–88.

- [30] M. T. Barlow, J.-D. Deuschel (2010) Invariance principle for the random conductance model with unbounded conductances, *Ann. Probab.* **38**, 234–276.
- [31] O. Boukhadra (2010) Heat-kernel estimates for random walk among random conductances with heavy tail, *Stochastic Processes Applications* **120** No. 2, 182–194.
- [32] M. Biskup, O. Boukhadra (2012) Subdiffusive heat-kernel decay in four-dimensional i.i.d. random conductance models, *J. Lond. Math. Soc.* **86** No. 2, 455–481.
- [33] H. C. Lam (2012) *Les théorèmes limites pour des processus stationnaires*, Thèse de doctorat de l'Université de Tours.
- [34] S. Andres, M. T. Barlow, J.-D. Deuschel, B. M. Hambly (*prépublication*) Invariance principle for the random conductance model, à paraître dans *Probab. Theory Related Fields*.
- [35] J. Depauw (*prépublication*) Théorème ergodique pour cocycle harmonique, applications au milieu aléatoire.