HAL
open science

Estimation de la diffusion thermique dans les plasmas de Tokamak

Sarah Mechhoud, Emmanuel Witrant, Luc Dugard, Didier Moreau

To cite this version:

Sarah Mechhoud, Emmanuel Witrant, Luc Dugard, Didier Moreau. Estimation de la diffusion thermique dans les plasmas de Tokamak. CIFA 2012 - 7ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jul 2012, Grenoble, France. pp.n/c. hal-00782885

HAL Id: hal-00782885

https://hal.science/hal-00782885v1

Submitted on 30 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation de la diffusion thermique dans les Plasmas de Tokamak ⋆

Sarah MECHHOUD *,** **Emmanuel WITRANT** *
Luc DUGARD * **Didier MOREAU** ***

* *UJF-Grenoble 1/CNRS, Grenoble Image Parole Signal Automatique (GIPSA-lab), UMR 5216, B.P. 46, F-38402 St Martin d'Hères, France*
** *E-mail : sarah.mechhoud@gipsa-lab.fr*
*** *CEA, IRFM, F-13108 Saint Paul-Lez-Durance, France*

Résumé : Ce travail concerne l'étude du profil de transport de la température des électrons du plasma. Une approximation numérique basée sur la méthode de Galerkin est proposée. Le coefficient de diffusion est estimé grâce à la projection spatiale qui réduit le problème à une dimension finie. Le filtre de Kalman étendu est proposé pour cette identification. Le travail est accompagné par un ensemble de simulations et de comparaisons avec des données expérimentales.

Mots clés : Fusion thermonucléaire, formulation variationnelle, méthode de Galerkin, systèmes à paramètres distribués (SPD), identification, filtre de Kalman mixte étendu (FKME)

1. INTRODUCTION

Tout phénomène physique de transport appartient à la classe des systèmes à paramètres distribués (SPD). Pour ces systèmes, les entrées, les sorties et les paramètres peuvent varier aussi bien dans le temps que dans l'espace. Leur description mathématique consiste en un ensemble d'équations aux dérivées partielles (EDP) avec des conditions aux limites, mixtes ou homogènes.
Généralement, les coefficients de l'EDP ne sont pas connus *a priori* et ont besoin d'être estimés. Plusieurs travaux ont été dédiés à ce problème : Jarny (1981), Banks et al. (1985), Point et al. (1996), Isakov et Kindermann (2000), Orlov et Bentsman (2000), ... D'autres études traitent l'identification des systèmes SPD pour les besoins de contrôle : l'objectif n'est plus d'estimer un paramètre mais les modes propres du système, voir Gay et Ray (1995), Zheng et al. (2002),...
Le tokamak (ou fusion thermonucléaire) appartient à la classe des SPD, où différentes variables distribuées et couplées entrent en jeu.
Dans le cadre de ce travail, nous nous concentrons sur l'étude du transport de la température des électrons dans le plasma. Ce phénomène est complexe et ne bénéficie pas encore d'un modèle physique entièrement défini. On le décrit par une EDP parabolique où le terme de diffusion est de dépendance spatio-temporelle. Plusieurs modèles existent pour la description de ce coefficient : Erba et al. (1997), Taroni et al. (1994), Erba et al. (1998), Hoang et al. (1998), chacun suivant son champ d'application (type de tokamak et paramètres de la décharge). Cependant, ce coefficient de diffusion dépend du gradient de la température, du profil de courant, du cisaillement magnétique, du cisaillement de vitesse, etc. Ceci a pour conséquence d'amplifier la complexité du problème en le transformant en une EDP parabolique non linéaire.
Dans Zou et al. (2003) un profil analytique de la température des électrons du plasma a été conçu en supposant les coefficients constants (dans le temps et dans l'espace). L'objectif de cette approche était de fournir une interprétation physique du processus et de prouver la stabilité du modèle résultant par rapport à la méthode utilisant la transformée de Fourier rapide (FFT) et la méthode des équilibres énergétiques.
Toutefois, cette approche est valable uniquement dans les cas où la variation spatiale du coefficient de diffusion peut être supposée faible, ce qui n'est pas le cas général des tokamaks. Une autre méthode, également analytique, mais avec un coefficient évoluant uniquement dans l'espace (une fonction radiale monomiale) a été développée dans Clémençon et al. (2004). Cette étude n'a pas été validée par des données expérimentales.

Dans le présent travail, nous nous intéressons d'abord au problème de transport en négligeant les propriétés intrinsèques du coefficient de diffusion (couplage non linéaire). Ainsi, une approximation numérique du profil de température des électrons du plasma par la méthode de Galerkin modale continue (MGMC) est proposée. La MGMC appartient à la famille des méthodes des éléments finis et fournit des approximations suffisamment lisses (Fairweather (1978), Salsa (2008)). Cette technique se base sur la formulation variationnelle des problèmes différentiels. C'est un classique largement utilisé pour la résolution des EDP (exemple : Brezis (2011)).
D'après Kopriva (2009), la MGMC donne de bonnes performances avec, entre autres, les systèmes à coefficients variables, les systèmes à géométrie cylindrique et pour les applications qui nécessitent une bonne précision.
L'application de la MGMC permet une discrétisation spatiale de l'EDP du transport, le système de dimension infinie est transformé en un système d'état fini. Dans la

⋆. Ce projet bénéficie d'un financement partiel fournit par le Bonus Qualité Recherche de Grenoble-INP.

seconde partie, nous nous intéressons plus au coefficient de diffusion dont l'estimation sera basée sur la séparation des variables par projection spatiale. Grâce à cette technique, le modèle devient un système linéaire à paramètres inconnus. Ainsi, un filtre de Kalman étendu peut lui être appliqué.
L'article est organisé comme suit : la deuxième section traite de la modélisation du transport de chaleur dans le plasma, de l'existence et l'unicité de la solution et du développement de la MGMC. Le problème d'identification du coefficient de diffusion est étudié en troisième section. Les résultats de la MGMC et de l'identification sont comparés à des données expérimentales.

2. ÉQUATIONS DE LA TEMPÉRATURE DES ÉLECTRONS DU PLASMA

Le profil de la température des électrons du plasma est obtenu à partir de la loi de conservation de l'énergie, qui peut s'écrire en coordonnées cylindriques sous certaines hypothèses comme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2}{3}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,\overline{\chi_e}(r,t)\,\frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{1}{\tau}\,T(r,t) + S(r,t) \quad (1)$$

où T est la température des électrons (exprimée en unité énergétique : keV), r est la coordonnée radiale le long de a (rayon mineur du plasma), t la variable temporelle, $\overline{\chi_e}$ le coefficient de diffusion, τ le paramètre d'amortissement modélisant les pertes d'énergie non diffusives (par convection, rayonnement, ...) et S le terme source, donné par :

$$S(r,t) = \frac{2}{3\,n_e}\,P(r,t)$$

où P est la densité de puissance absorbée par le plasma à partir du système de chauffage extérieur (chauffage ohmique, ondes radio-fréquences ou par injection de faisceaux neutres). n_e est la densité des électrons du plasma, supposée constante.
Pour des raisons de simplicité et de symétrie, les conditions aux limites et la condition initiale sont les suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial r}(r=0,t) = 0\ ;\ T(r=a,t) = 0\ ;\ T(r,t=0) = 0 \quad (2)$$

En utilisant la variable normalisée $z = \dfrac{r}{a}$, le système décrit par les équations (1) et (2) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial}{\partial z}\,(\chi_e(z,t)\,z\,\dfrac{\partial T}{\partial z}) - \dfrac{1}{\tau}T(z,t) + S(z,t) \\ \dfrac{\partial T}{\partial z}(z=0,t) = 0\ ; T(z=1,t) = 0\ ; T(z,t=0) = 0 \\ z \in \Omega;\quad t \in [0,t_f] \end{cases} \quad (3)$$

où Ω est l'intervalle ouvert]0,1[, t_f est l'instant final et $\chi_e(z,t)$ est une forme normalisée de $\overline{\chi_e}(r,t)$:
$\chi_e(z,t) = \dfrac{2}{3\ a^2}\ \overline{\chi_e}(r,t)$

Les équations (1) et (2) montrent que la température des électrons à l'intérieur du plasma est définie par une équation parabolique linéaire évoluant dans le temps.

Il est à noter que le paramètre χ_e reste un sujet de discussion dans la communauté de la fusion thermonucléaire. Toutefois, sa dépendance, entre autres, au gradient de la température a été prouvée. La prise en compte de cette propriété transforme l'équation (3) en une équation parabolique non linéaire.
L'objectif de ce travail étant l'estimation de ce coefficient χ_e, on suppose qu'on ne dispose *a priori* d'aucune information le caractérisant.

Dans ce qui suit, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution pour le système (3) puis proposons une approximation numérique fondée sur la méthode de Galerkin modale continue (MGMC).

2.1 Existence et unicité de la solution

En premier lieu, on définit les espaces de Hilbert suivants :

$L^2(\Omega) = \{\, f\ :\int_\Omega f^2\ \partial\Omega < \infty\}$

$H^1_{0,\{1\}}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : f|_1 = 0\,,\ \nabla f \in L^2(\Omega)\}$

Soit Xe l'ensemble défini par :

$Xe = \{f \in L^\infty(0\,,t_f\,;H^1_{0,\{1\}}(\Omega)) : f(t,x) > c > 0\,,\quad \forall t \in [0,t_f], \forall x \in \Omega)\}$

L'application de la formulation variationnelle au système (3) donne :

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t}\,v(z)\ dz = -\left[\int_0^1 \chi_e(z,t)\,\frac{\partial T}{\partial z}\ \frac{dv}{dz}dz + \frac{1}{\tau}\int_0^1 T(z,t)\,v(z)\ dz\right] + \int_0^1 S(z,t)\ v(z)\ dz \quad (4)$$

où $v(z)$ est une fonction de test $\in H^1_{0,\,\{1\}}(\Omega)$.
En utilisant le théorème de Lax-Milgram étendu aux équations évoluant dans le temps (voir Fairweather (1978), Salsa (2008)), la condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (4) dans l'espace $L^2(0,t_f;H^1_{0,\{1\}}(\Omega))$ est :

$$\begin{cases} \chi_e(z,t) \in Xe \\ \tau \in \mathbb{R}^*_+ \end{cases} \quad (5)$$

Il est à noter que les conditions définies dans (5) garantissent l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation (4), qui est pour le système initial (3) une solution variationnelle (dite aussi faible). En imposant des conditions de régularité sur la solution faible, on arrive ainsi à démontrer l'existence et l'unicité de la solution classique dans $C^1(0,t_f\,;\,C^2(\Omega))$.
Dans notre cas, il suffit que $S \in C^0(0,t_f\,;\,C^0(\Omega))$ et $\chi_e \in C^0(0,t_f;C^1(\Omega))$. Ces conditions sont conformes aux caractéristiques physiques de la source S et du coefficient de diffusion χ_e.

2.2 Approximation de la solution par la méthode de Galerkin modale continue (MGMC)

Les principales étapes de la MGMC sont les suivantes (Salsa (2008)) :

- Choix d'une suite de fonctions lisses $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ constituant une base orthonormale dans $H^1_{0,\{1\}}(\Omega)$ [1] ;
- Construction d'une suite finie de sous-espaces de la forme :

$$\begin{cases} V_n = span\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \\ V_n \subset V_{n+1} \quad \text{et} \quad \overline{\cup V_n} = H^1_{0,\{1\}}(\Omega) \end{cases}$$

Ainsi, pour un n défini, les projections respectives de $T(z,t)$ et $v(z)$ sur l'espace V_n donnent :

$$\begin{cases} T_n(z,t) = \sum_{k=0}^{n} x_k(t)\omega_k(z) \\ v_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k(z) \end{cases} \tag{6}$$

En remplaçant (6) dans (4), le problème de résolution de l'EDP (3) se ramène à celui d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) qu'on peut écrire sous la forme d'un système linéaire temps variant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)\,X(t) + B(t) \\ X(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Avec $X(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]^T$ ($X \in \mathbb{R}^n$), $A(t)$ est une matrice symétrique définie par :

$$A(t) = -\begin{pmatrix} \int_0^1 \chi_e(z,t)\omega_1'(z)^2 dz + \frac{1}{\tau} & \dots & \int_0^1 \chi_e(z,t)\ \omega_1'(z)\ \omega_n'(z) dz \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \chi_e(z,t)\ \omega_1'(z)\ \omega_n'(z) dz & \dots & \int_0^1 \chi_e(z,t)\ \omega_n'(z)^2 dz + \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

et :

$$B(t) = \begin{pmatrix} \int_0^1 S(z,t)\ \omega_1(z) dz \\ \vdots \\ \int_0^1 S(z,t)\ \omega_n(z) dz \end{pmatrix}$$

2.3 Résultats de simulation

Tore Supra (TS) est un grand tokamak à aimants supraconducteurs, caractérisé par un rayon majeur $R = 2.4\,m$, un rayon mineur $a = 0.72\,m$, une section circulaire, un champ magnétique toroïdal $B \leq 2.4\,T$ et un courant plasma $I_p \leq 2\,MA$. Dans cette section, nous considérons la décharge TS 35109, avec un chauffage principalement ohmique.
D'après Hoang et al. (1998), dans Tore Supra, si la puissance d'entrée est de valeur moyenne $\overline{P}$ <5MW et si le champ magnétique toroïdal est supérieur à un certain seuil (>1.5T), les modèles de τ et du coefficient de diffusion normalisé sont donnés par les formules de Taroni (voir Taroni et al. (1994)) :

$$\tau = 0.0199\, R^2\, \overline{I}_p^{\,0.98}\, \overline{B}_{\phi_0}^{\,0.2}\, n_e^{0.43}\, \overline{P}^{\,-0.75}.$$

Et :

$$\begin{cases} \chi_e(z,t) = \alpha_B\, \dfrac{T(z,t)}{\overline{B}_{\phi_0}}\, \dfrac{a\,|\nabla p_e(z,t)|}{p_e(z,t)}\, q^2(z,t). \\ \alpha_B = 0.33. \\ p_e(z,t) = n_e\, T(z,t). \end{cases} \tag{8}$$

avec $\overline{B}_{\phi_0}$ la valeur moyenne du champ magnétique toroïdal au centre du plasma, $\overline{I}_p$ la valeur moyenne du courant plasma, p_e la pression du plasma et q le facteur de sécurité. En considérant les hypothèses données par Erba et al. (1997), le modèle (8) de χ_e peut être simplifié par :

$$\begin{cases} \chi_e(z,t) = \alpha_B \dfrac{a}{\overline{B}_{\phi_0}}\, \nabla T(z,t)\, q^2(z,t). \\ \alpha_B = 0.33. \end{cases} \tag{9}$$

Ces formules ont été utilisées pour simuler le profil de la température des électrons du plasma. Le résultat de la simulation est comparé avec celui issu des mesures.
La puissance S absorbée par le plasma est approximée par une distribution gaussienne dont les caractéristiques sont données par des lois d'échelle (voir Witrant et al. (2007)). Les bases de projection choisies sont trigonométriques et tirées de la résolution du problème de Laplace avec comme conditions aux limites celles définies dans (2). Le système (7) est résolu en utilisant la routine RK45 de la fonction *ode15s* de MATLAB. Il apparaît dans la

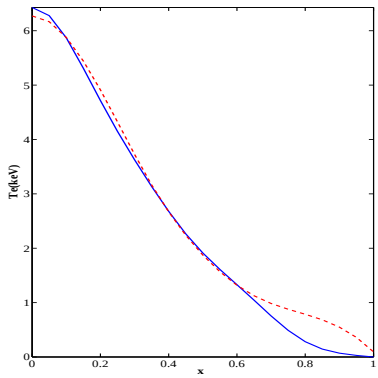


FIGURE 1. Comparaison entre la température expérimentale (pointillés) et celle du modèle physique (trait continu) à t = 19s.

Fig. 1 que la MGMC donne une bonne approximation. Pour $x \in [0.7, 1]$, les phénomènes de bord font intervenir d'autres dynamiques que notre modèle ne prend pas en compte (voir Erba et al. (1997)).

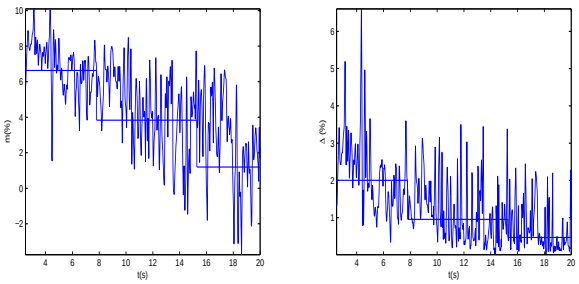
2.4 Analyse statistique

Comme cela est souvent le cas, une étude statistique est toujours plus illustrative qu'une courbe. En suivant Erba et al. (1998), on calcule la déviation entre le profil prédit Te_{gal} et le profil expérimental Te_{exp} en introduisant les grandeurs m et Δ définies par :

1. Par exemple les fonctions propres de l'opérateur de Laplace défini sur l'espace $H^1_{0,\{1\}}(\Omega)$ (Salsa (2008), Al-Gwaiz (2008)).

$$\begin{cases} m = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{0.2<x<0.8} (Te - Te_{exp})/Te_{exp} \\ \\ \Delta = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{0.2<x<0.8} [(Te - Te_{exp})/Te_{exp} - m]^2 \end{cases} \tag{10}$$

où N est le nombre des points d'échantillonnage x pris dans l'intervalle $[0.2, 0.8]$.
Les deux courbes présentées Fig. 2, montrent que la valeur maximale de la moyenne de l'erreur relative m ne dépasse pas les 10% et que son écart-type Δ maximal est de 7%. Ces valeurs apparaissent en régime transitoire initial. En régime établi, on remarque pour m et Δ l'existence de trois paliers correspondant à la variation temporelle du terme source (la puissance d'entrée) en trois échelons. Plus la température est importante, plus l'écart entre Te_{gal} et Te_{exp} et donc m est faible. Ceci est dû principalement à l'estimation qualitative du terme source.



(a) Moyenne spatiale de l'erreur relative

(b) Écart-type

FIGURE 2. Déviation entre Te_{gal} et Te_{exp}

3. IDENTIFICATION DU PARAMÈTRE DE DIFFUSION

Étant donné qu'il existe dans $L^2(0, t_f\ , L^2(\Omega))$ un ensemble complet de polynômes orthonormaux (voir Shima et Nakayama (2010)), $\chi_e(z,t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\chi_e(z,t) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k(t)\ p_k(z) = \theta^T(t)\ P(z). \tag{11}$$

Avec :

$$\begin{cases} \theta^T(t) = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_M(t)] \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}^M \\ \\ P(z)^T = [p_1(z), p_2(z), ..., p_M(z)] \end{cases}$$

La matrice $A(t)$ définie dans la section 2.2 devient :

$$A(t) = \theta^T(t) \otimes \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^1 P(x){\omega_1'}^2(x)dx + \frac{1}{\tau} & \cdots & \displaystyle\int_0^1 P(x)\omega_1'(x)\omega_n'(x)dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \displaystyle\int_0^1 P(x)\omega_1'(x)\ \omega_n'(x)dx & \cdots & \displaystyle\int_0^1 P(x){\omega_n'}^2(x)dx + \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \tag{12}$$

On note la matrice qui apparaît dans le deuxième terme de $A(t)$ par PW (formée principalement des polynômes de $\{p_k\}$ et de $\{w_k\}$) . Le symbole $\otimes$ est un opérateur de multiplication spécial utilisé pour compacter l'écriture de $A(t)$, qui peut se mettre alors sous la forme :

$$A(t) = -\ \theta^T(t)\ \otimes\ PW \tag{13}$$

Et le système (7) devient :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(\theta^T(t))\ X(t) + B(t) \\ X(0) = 0 \\ y(t) = X(t) \end{cases} \tag{14}$$

Une approche similaire a été utilisée en premier par Banks et al. (1985) où les coefficients étaient projetés simultanément sur une base spatiale polynomiale (splines cubiques) et une base temporelle. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de l'estimation d'un système de dimension infinie par un système d'EDOs ont été démontrées dans cet article, mais le problème final devenait non linéaire et l'identification se faisait en parallèle dans le temps et dans l'espace. L'avantage de notre approche est d'arriver à un système linéaire temps variant uniquement. L'identification d'un tel système est en effet plus facile que dans le cas des systèmes non linéaires.

La formule d'approximation de $T(z,t)$ donnée dans (6) permet d'obtenir les coefficients expérimentaux $\{y_{k,\ exp}\}_{k=1}^{M}$ de l'expression suivante :

$$y_{k_{exp}}(t) = \int_0^1 T_{exp}(z,t)\ \omega_k(x)\ dx$$

où $T_{exp}(z,t)$ est le profil mesuré de la température et $y_{exp} = [y_{1_{exp}}, y_{2_{exp}}, ..., y_{M_{exp}}]^T$ est la sortie mesurée du système (14).

La formulation du problème d'identification devient ainsi : Étant donné l'entrée $B(t)$, la sortie $y_{exp}(t)$ et le modèle d'état (14), l'objectif est d'estimer le vecteur des paramètres $\theta(t)$ et par conséquent de trouver la loi inverse $\theta = f^{-1}(y)$. Il faut par ailleurs noter que l'état initial $y(0)$ est défini et indépendant de $\theta(t)$.

Conclusion :
Le problème initial qui consistait à identifier un paramètre distribué d'un système de dimension infinie est converti, grâce à la méthode de Galerkin et de la projection sur des bases appropriées, en un problème d'identification paramétrique ordinaire (système d'état linéaire à paramètres inconnus). Ainsi, l'application des techniques d'identification des systèmes décrits par des EDOs devient possible.

Une fois le problème formulé, l'objectif est d'estimer θ et par conséquent le coefficient de diffusion χ_e. Une des techniques les plus robustes d'identification des systèmes linéaires est le filtre de Kalman.

3.1 Identification par le filtre de Kalman mixte étendu (FKME)

Lorsque les mesures sont bruitées, estimer θ directement à partir de ces données pose problème. Le filtre de Kalman mixte étendu est dédié à cette problématique. Il permet

d'estimer aussi bien les états que les paramètres, à partir des entrées et sorties du système. Un filtre de Kalman est un observateur d'état basé sur l'ajustement stochastique des gains de correction (Kalman (1960)). C'est un filtre récursif qui convient bien aux applications temps réel (Wan et Nelson (2001)). Les conditions de convergence du filtre de Kalman étendu sont données dans Ljung (1979).
Le système (7) est discrétisé dans le temps par la méthode d'Euler, puis étendu pour inclure les paramètres :

$$x_{ext}(k+1) = \begin{pmatrix} X(k+1) \\ \theta(k+1) \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système (7) discrétisé étendu devient :

$$\begin{cases} x_{ext}(k+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} (I - dt * \theta^T \otimes PW)\, X(k) + dt * B(k) \\ \theta(k) \end{pmatrix}}_{f(x(k),\theta(k),B(k))} + \begin{pmatrix} r(k) \\ 0 \end{pmatrix} \\ y(k) = [I \quad 0]\; x_{ext}(k) + v(k) = g(x(k), \theta(k), v(k)) \end{cases}$$

où dt est le pas d'échantillonnage, $r(k)$ et $v(k)$ sont respectivement le bruit d'état et le bruit d'observation (supposés blancs gaussiens). Leurs matrices de covariance sont R et V (respectivement).

Les étapes du FKME données dans Wan et Nelson (2001) appliquées au système (7) sont les suivantes :

- Initialisation : $\hat{X}(0);\ \hat{\theta}(0);\ Z(0);$
- Prédiction :

$$\begin{cases} \hat{x}^-_{ext}(k+1) = f(\hat{X}(k),\ \hat{\theta^T}(k),\ B(k)) \\ Z^-(k+1) = E\ Z(k) E^T + R \end{cases}$$

- Estimation :

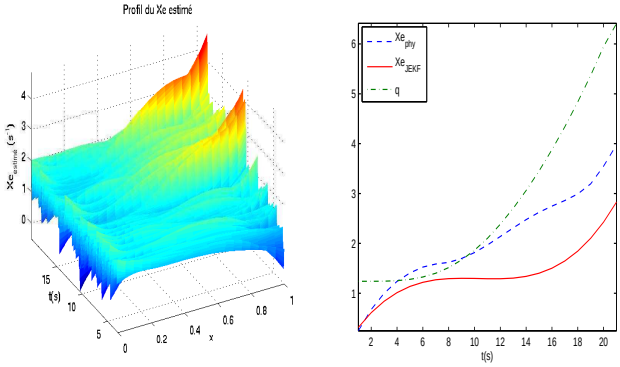
$$\begin{cases} K(k+1) = Z^-(k+1) C^T [C Z^-(k+1) C^T + V]^{-1} \\ \hat{x}_{ext}(k+1) = \hat{x}^-_{ext}(k+1) + K(k+1)[y_{exp}(k+1) - C\ \hat{x}^-_{ext}(k+1)] \\ Z(k+1) = (I - K(k+1)C) Z^-(k+1) \end{cases}$$

où $\hat{x}_{ext}(k)$ et $\hat{x}^-_{ext}(k)$ sont respectivement l'état étendu estimé et prédit à l'instant k, K est le gain de correction, Z et Z^- sont les matrices de covariance de l'erreur de prédiction et de l'erreur d'estimation. E et C sont les matrices d'état du système étendu et des observations. Elles sont données par :

$$\begin{cases} E = \dfrac{\partial f}{\partial x_{ext}}|_{x_{ext}} \\ C = \dfrac{\partial g}{\partial x_{ext}}|_{x_{ext}} \end{cases}$$

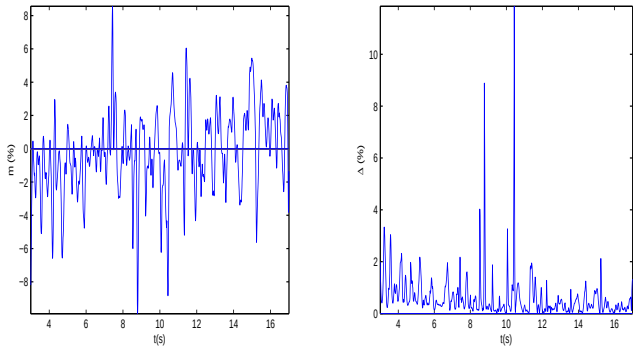
3.2 Résultats de l'identification par le FKME

Le choix d'une base de Legendre pour la projection de χ_e et l'application de l'algorithme du FKME au système (14) donne des estimations satisfaisantes pour les objectifs de commande.
Le profil de $\chi_{e\ ,estim}$ présenté dans la Fig. 3 est compatible avec une forme de Bohm (voir Erba et al. (1998)) vérifiée par la croissance monotone au bord (effet de q).
Pour quantifier la qualité de l'estimation de χ_e et Te, on utilise les mêmes variables m et Δ définies dans la section 2.4. Pour χ_e, la valeur maximale de la moyenne de l'erreur relative entre le $\chi_{e,\,estim}$ et le χ_e du modèle (9) pour $t \in [9\,s, 17\,s]$ est de 8% alors que l'écart-type en moyenne se situe autour de 2% (voir Fig. 4). La Fig. 5 montre que pour l'estimation de Te, m est de 0.01% alors que Δ ne dépasse pas les 0.02%.
L'apport de l'application du FKME est visible, on améliore nettement l'approximation de Te_{exp}. Toutefois, sur la Fig. 3b et la Fig. 4a, on voit bien que l'erreur sur l'estimation de χ_e n'est pas compatible avec celle sur l'estimation de T. Ceci prouve que ce problème d'identification n'admet pas de solution unique.



(a) Profil spatio-temporel de χ_{estim} (b) Comparaison à t=19 s entre le $\chi_{e,\,modèle}$ et le $\chi_{e,\,estim}$.

FIGURE 3. Profil de l'estimation du coefficient de diffusion

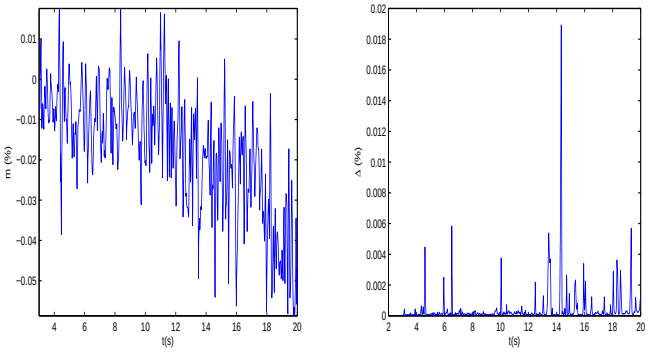


(a) Moyenne spatiale de l'erreur relative (b) Écart-type

FIGURE 4. Comparaison entre le profil de χ_e estimé par le FKME et le χ_e donné par la loi physique (9)

4. CONCLUSION

Dans ce travail, une méthode d'approximation de l'EDP de transport de la chaleur dans les tokamaks a été présentée. Cette approximation est effectuée avec la méthode de Galerkin qui donne une précision satisfaisante. L'absence de lois spécifiques pour le coefficient de diffusion χ_e et pour la puissance absorbée ont motivé à développer par identification une solution possible à ce problème. Cette étude est focalisée sur l'estimation du paramètre de diffusion,



(a) Moyenne spatiale de l'erreur relative

(b) Écart-type

FIGURE 5. Comparaison entre la température expérimentale et celle estimée par le FKME

en supposant qu'une approximation du terme source est disponible. La méthode des projections, combinée avec le filtre de Kalman mixte étendu a permis la reconstruction du profil de χ_e tout en estimant la température. Les recherches futures viseront l'estimation conjointe du terme source S, du coefficient de diffusion χ_e et du paramètre d'amortissement τ, en régularisant le critère du FKME afin de formuler un problème bien posé (pour garantir l'unicité de la solution).

RÉFÉRENCES

Banks, H., Kareiva, P., et Lamm, P. (1985). Modeling insect dispersal and estimating parameters when mark-release techniques may cause initial disturbances. *Journal of Mathematical Biology*, 22, 259–277.

Taroni, A., Erba, M., Springmann, E., et Tibone, F. (1994). Global and local energy confinement properties of simple transport coefficients of the Bohm type. *Plasma physics and controlled fusion*, 36, 1629–1646.

Gay, D.H. et Ray, W.H. (1995). Identification and control of distributed parameter systems by means of singular value decomposition. *Chemical Engineering Science*, 50, 1519–1539.

Point, N., Wouwer, A.V., et Remy, M. (1996). Practical issues in distributed parameter estimation : Gradient computation and optimal experiment design. *Control Engineering Practise*, 04(11), 1553–1562.

Erba, M., Cherubini, A., Parail, V.V., Springmann, E., et Taroni, A. (1997). Developpement of a non-local model for tokamak heat transport in L-mode, H-mode and transient regimes. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 39, 261–276.

Hoang, G., Saoutic, B., Guiziou, L., Basiuk, V., Bécoulet, A., Budny, B.V., Clairet, F., Colas, L., Devynck, P., Gil, C., Joffrin, E., Litaudon, X., Ségui, J.L., Voitseknovitch, I., et Zou, X.L. (1998). Magnetic shear effects on confinement and electron heat transport in Tore Supra discharges with electron heating. *Nuclear Fusion*, 38(1), 117–132.

Erba, M., Aniel, T., Basiuk, V., Becoulet, A., et Litaudon, X. (1998). Validation of a new mixed Bohm/Gyro-Bohm model for electron and ion heat transport against the ITER, Tore Supra and Start database discharges. *Nuclear Fusion*, 38, 1013–1028.

Orlov, Y. et Bentsman, J. (2000). Adaptive distributed parameter systems identification with enforceable identifiability conditions and reduced-order spatial differentiation. *IEEE Transaction On Automatic Control*, 45(02), 203–216.

Isakov, V. et Kindermann, S. (2000). Identification of the diffusion coefficient in a one-dimensional parabolic equation. *Inverse Problems*, 16, 665–680.

Wan, E.A. et Nelson, A.T. (2001). *Random Analysis and Kalman Filtering*, chapter Dual Extended Kalman Filter Methods, 123–175. John Wiley & Sons, Inc.

Zheng, D., Hoo, A., et Piovoso, M.J. (2002). Low-order model identification of distributed parameter systems by a combination of singular value decomposition and the Karhunen-Loève expansion. *Industrial and Engineering Chimestry Research*, 41, 1545–1556.

Zou, X.L., Giruzzi, G., Artaud, J.F., Bouquey, F., Clémoçon, A., Darbos, C., Dumont, R.J., Guivarch, C., Lennholm, M., Magne, R., et Ségui, J.L. (2003). Electron heat transport and ECRH modulation experiments in Tore Supra tokamak. *Nuclear Fusion*, 43, 1411–1420.

Clémençon, A., Guivarch, C., Eury, S., Zou, X., et Giruzzi, G. (2004). Analytical solution of the diffusion equation in a cylindrical medium with step-like diffusivity. *Physics of Plasmas*, 11(11), 4998–5009.

Witrant, E., Joffrin, E., Brémond, S., Giruzzi, G., Mazon, D., Barana, O., et Moreau, P. (2007). A control-oriented model of current profile in Tokamak plasma. *Plasmas Physics and Controlled Fusion*, 49, 1075–1105.

Shima, H. et Nakayama, T. (2010). *Higher Mathematics for Physics and Engineering*. Springer-Verlag.

Al-Gwaiz, M. (2008). *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer- Verlag.

Brezis, H. (2011). *Functional Analysis , Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag.

Fairweather, G. (1978). *Finite element Galerkin methods for differential equations*, volume 34. Lecture notes in pure and applied mathematics, CRC Press.

Jarny, Y. (1981). Identification of spatially varying parameters for a distributed system- application to thermal process. *Mathematics and Computers in Simulation XXIII*, 23(2), 170–179.

Kalman, R.E. (1960). A new approch to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82, 35–45.

Kopriva, D.A. (2009). *Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag.

Ljung, L. (1979). Asymptotique behavior of extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems. *IEEE Transaction On Automatic Control*, AC-24(1), 36–50.

Salsa, S. (2008). *Partial Differential Equations in Action, From Modelling to Theory*. Springer-Verlag.