



HAL
open science

Sur la forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique

Michel Mizony

► **To cite this version:**

| Michel Mizony. Sur la forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique. 2014. hal-00782038v2

HAL Id: hal-00782038

<https://hal.science/hal-00782038v2>

Preprint submitted on 22 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique

Michel Mizony

Institut Camille Jordan, Umr Cnrs 5208

Vaulx-en-Velin, printemps 2011, version 2014

Résumé

En 1921 Paul Painlevé a établi, sans faire un seul calcul, une métrique solution du champ créé par le soleil dans un univers vide. Nous allons montrer comment cette forme de métrique d'une part fournit des solutions pour tout problème gravitationnel ayant une symétrie sphérique, en particulier pour tout modèle d'univers isotrope, et d'autre part établit le passage entre la théorie de Newton et celle d'Einstein de la gravitation. Pour cela nous donnerons la définition newtonienne d'un Lagrangien de Painlevé, et un lemme que nous appellerons théorème de Painlevé qui justifie la forme générale de métrique de Painlevé pour tout problème à symétrie sphérique. Autrement dit le traitement newtonien en utilisant les équations d'Euler-Lagrange dans lesquelles la variable libre temporelle est identifiée au temps propre du corps en chute libre radiale, est équivalent au traitement einsteinien. Des applications sont données avec, en particulier, des résultats nouveaux concernant les modèles d'univers osculateurs que constitue les nombreux modèles de de Sitter.

Table des matières

1	Deux exemples emblématiques	2
1.1	La métrique de Painlevé proprement dite	2
1.2	Sur les formes de métriques d'univers isotropes	4
2	Forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique	5
2.1	Le tenseur d'Einstein équivariant	5
2.2	Le tenseur impulsion-énergie équivariant	6
2.3	Le passage de Newton-Euler-Lagrange à Einstein	7
3	Le soleil dans l'univers	9
4	Conclusion	10

5	Compléments sur les modèles d'univers	11
6	Annexe 1 : Vers la forme de Birkhoff associée à celle de Painlevé	12
7	Annexe 2 : Le problème de la masse inertielle	12
8	Annexe 3 : Le soleil dans un univers isotrope	14
9	Annexe 4 : Modèles de l'univers, distances et redshift	16
10	Annexe 5 : Une bonne nouvelle, une bouffée d'air pur	20
11	Annexe 6 : Le problème de Cauchy et la complémentarité	20
12	Annexe 7 : Le problème de l'anomalie Pioneer : le dz/dt	22

1 Deux exemples emblématiques

1.1 La métrique de Painlevé proprement dite

Paul Painlevé [1] part de la métrique de la relativité restreinte :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\omega^2, \quad (1)$$

écrite en coordonnées polaires, où $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$.

Puis il considère la vitesse de chute newtonienne $v(r) = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$, où M est la "masse relativiste" du soleil et il met cette vitesse (classique) dans la métrique (1) de Minkowski de la manière suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dr + \sqrt{\frac{2M}{r}} dt \right)^2 - r^2 d\omega^2. \quad (2)$$

Le tour est joué, cette métrique est solution des équations d'Einstein dans le vide, comme on peut le vérifier rapidement. La même année 1921 et indépendamment, Gullstrand établit ce même résultat [2].

Est-ce un hasard ? Où cette forme de métrique cache-t-elle un trésor ?

Notons tout de suite que le temps t dans cette métrique est le *temps propre du corps en chute libre* radialement ; notons également qu'en faisant un changement de la coordonnée temporelle pour éliminer le "terme croisé" en $dt dr$ on obtient évidemment la forme dite de Schwarzschild dont la variable temporelle n'a pas de signification immédiate évidente. Notons encore que ce changement de variable n'est valide que dans le domaine $r > 2M$ et $r > R_o$ où R_o est le "rayon" (mathématiquement le rayon de courbure) de l'objet astral

sphérique considéré (le soleil, une étoile à neutrons, un amas globulaire, un amas de galaxies dans une approximation sphérique, ...).

Considérons maintenant un corps d'épreuve qui à l'instant t_o est à une distance r_o du soleil et est animé d'une vitesse purement radiale d'éloignement v_o (on peut évidemment penser à un satellite comme Pioneer). Une métrique de la forme de celle de Painlevé dont la variable temporelle est celle du temps propre du satellite existe-t-elle? La réponse est non seulement positive mais de plus instructive : la métrique

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{(dr - \sqrt{v_o^2 - \frac{2M}{r_o} + \frac{2M}{r}} dt)^2}{1 + v_o^2 - 2\frac{M}{r_o}} - r^2 d\omega^2. \quad (3)$$

répond à la question en mettant en évidence d'une part la constante du mouvement $v_o^2 - 2\frac{M}{r_o}$ et d'autre part le potentiel $\Phi(r) = M/r$. Posons alors $v(r) = \sqrt{v_o^2 - \frac{2M}{r_o} + \frac{2M}{r}}$ et $K(r) = v(r)^2 - 2\Phi(r)$, cette métrique (3) s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{(dr - v(r)dt)^2}{1 + K(r)} - r^2 d\omega^2. \quad (4)$$

Remarques :

A) - Formes entrante et sortante.

La métrique (3) qui correspondant à $v_o > 0$, généralise la forme de Painlevé dite sortante. Pour $v_o \leq 0$ on pose $v(r) = -\sqrt{v_o^2 - \frac{2M}{r_o} + \frac{2M}{r}}$ ($K(r)$ ne changeant pas), i.e. on introduit le signe de v_o , alors la métrique (4) généralise la forme de Painlevé usuelle, dite entrante.

B) - Forme de Martel et Poisson, conditions initiales à l'infini spatial.

En 2000 K. Martel et E. Poisson [9] donnent une généralisation de la forme de Painlevé entrante, dépendant d'un paramètre noté p . Pour l'obtenir on prend pour $v(r)$ la limite quand r_o tend vers l'infini de $-\sqrt{v_o^2 - \frac{2M}{r_o} + \frac{2M}{r}}$, i.e. $v(r) = -\sqrt{v_o^2 + \frac{2M}{r}}$. On pose alors $p = \frac{1}{(1+v_o^2)}$ et $dT = \sqrt{p}dt$. Ainsi la forme de Martel et Poisson provient des conditions initiales $r_o = \text{infini}$, $v_o \leq 0$.

C) Paramétrage de ces formes généralisées.

Ainsi pour chaque couple de conditions initiales (r_o, v_o) d'un mouvement radial en chute libre, il existe une forme de Painlevé généralisée telle que le temps propre de ce mouvement radial soit le temps de cette métrique. Ce qui fait un énorme nombre (autant que les mouvements radiaux) de formes différentes de la métrique dite de Schwarzschild.

Le point le plus important est de noter que les formes (entrante et sortante) de Painlevé, la forme de Martel et Poisson, et celles données par la formule (3) sortante et la formule similaire entrante avec $v_o \leq 0$) sont toutes de la forme (4).

En résumé, on prend, à partir de conditions initiales v_o et r_o , la "vitesse radiale newtonienne" $v(r)$, le potentiel newtonien puis la constante du mouvement K ; on glisse ces résultats dans la formule (4), il ne reste plus qu'à vérifier les équations d'Einstein.

Cette forme (4) a aussi été obtenue, par une preuve différente, pour un effondrement gravitationnel en 2010, cf. [10].

Il reste alors à comprendre pourquoi ça marche, ce qui est l'objet des § suivants.

1.2 Sur les formes de métriques d'univers isotropes

Soit donc un modèle de Friedmann-Lemaître, avec sa métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)(dx^2 + f_k^2(x) d\omega^2), \quad (5)$$

où $f_k(x) = x$, $\sin(x)$ ou $\sinh(x)$ suivant la courbure spatiale $k = 0, 1$ ou -1 .

Puis avec la forme localement inertielle "ici et aujourd'hui" :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{R^2(t_o)} \left(dy^2 + R^2(t_o) f_k^2\left(\frac{y}{R(t_o)}\right) d\omega^2 \right). \quad (6)$$

Passons maintenant à la forme avec un terme croisé en posant $r = R(t) f_k\left(\frac{y}{R(t_o)}\right)$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{(dr - r H(t) dt)^2}{1 + (1 - \Omega(t))H^2(t)r^2} - r^2 d\omega^2. \quad (7)$$

Important : la forme croisée (7) est localement inertielle tout au long de la ligne d'univers de l'origine. Cette forme croisée qui est du type forme de Painlevé, permet donc, grâce à cette propriété, une interprétation immédiate du tenseur impulsion-énergie.

Le domaine de validité de cette forme est défini pour tout t tel que $H(t) > 0$ par $r < \frac{c}{H(t)\sqrt{\Omega(t)}}$.

Remarquons que cette forme (7), est simple et facilement interprétable en gravitation newtonienne ; $(1 - \Omega(t)) H^2(t) r^2 = H^2(t) r^2 - \Omega(t) H^2(t) r^2$ a une interprétation évidente en terme d'énergie cinétique et énergie potentielle ($1/2 mH^2r^2 - 1/2 mH^2\Omega r^2$, pour une particule d'épreuve).

Posons alors $v(t, r) = H(t)r$, $\Phi(t, r) = \Omega(t) H^2(t) r^2/2$ et $K(t, r) = v(t, r)^2 - 2\Phi(t, r)$, cette métrique (7) s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{(dr - v(t, r)dt)^2}{1 + K(t, r)} - r^2 d\omega^2. \quad (8)$$

Remarque sur l'accélération : dans les deux exemples traités, résumés dans les formes (4) et (8) ci-dessus, posons $\gamma(t, r) = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r}$, qui a le sens de l'accélération à laquelle le corps en chute libre radiale est soumis, accélération calculée dans son temps propre, alors l'équation newtonienne suivante est vérifiée :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{v \partial t}.$$

2 Forme de Painlevé d'une métrique à symétrie sphérique

Définition d'une métrique de Painlevé : Soit la donnée a priori d'une part d'une "vitesse de chute radiale" $v(t, r)$ et d'autre part d'un "potentiel" $\Phi(t, r)$; nous dirons que la forme de métrique

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{(dr - v(t, r)dt)^2}{1 + v(t, r)^2 - 2\Phi(t, r)} - r^2 d\omega^2. \quad (9)$$

est une métrique de Painlevé si $v(t, r)$ et $\Phi(t, r)$ sont compatibles au sens où elles vérifient l'égalité de l'accélération :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{v \partial t}. \quad (10)$$

Nous appellerons alors $K(t, r) = v(t, r)^2 - 2\Phi(t, r)$ la "constante du mouvement".

2.1 Le tenseur d'Einstein équivariant

Afin de comprendre cette forme de métrique de Painlevé, écrivons le tenseur d'Einstein de cette métrique d'une part sans l'hypothèse de compatibilité (10), puis avec cette hypothèse. Les calculs sont "rapides" avec l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Soit donc $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci, R son contracté usuel, $G_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein covariant. Notons encore $G^\mu{}_\nu$ la forme équivariante de ce tenseur et enfin $G^\mu{}_{\nu;\mu}$ les équations dites de conservation, tout cela dans les notations usuelles de la Relativité Générale.

Voici certaines des valeurs du tenseur équivariant :

$$G^0{}_0 = -2 \frac{\Phi(t, r) + r \frac{\partial}{\partial r} \Phi(t, r)}{r^2}$$

$$G^0{}_1 = 2 \frac{-\left(\frac{\partial}{\partial r} \Phi(t, r)\right) v(t, r) - \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, r) + \left(\frac{\partial}{\partial r} v(t, r)\right) (v(t, r))^2 + v(t, r) \frac{\partial}{\partial t} v(t, r)}{r \left(1 + (v(t, r))^2 - 2\Phi(t, r)\right)}$$

$$G^1{}_0 = 2 \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, r)}{r}$$

Les trois autres composantes non nulles $G^1{}_1$, et $G^2{}_2 = G^3{}_3$ sont très compliquées.

On remarquera une propriété importante : l'équation $G^0{}_1 = 0$ est équivalente à l'équation de compatibilité (10) entre la vitesse et le potentiel.

Sous cette hypothèse de compatibilité les éléments non nuls du tenseur deviennent :

$$\begin{aligned}
G^0_0 &= -2 \frac{\Phi + r \frac{\partial}{\partial r} \Phi}{r^2} \\
G^1_0 &= 2 \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Phi}{r} \\
G^1_1 &= -2 \frac{vr \frac{\partial}{\partial r} \Phi + v \Phi + r \frac{\partial}{\partial t} \Phi}{r^2 v} \\
G^2_2 = G^3_3 &= - \frac{2v^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi + r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi \right) v^2 + v \frac{\partial}{\partial t} \Phi + rv \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \Phi - r \left(\frac{\partial}{\partial r} v \right) \frac{\partial}{\partial t} \Phi}{rv^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Ce tenseur d'Einstein particulièrement simple peut alors être identifié au tenseur impulsion énergie T^μ_ν et interprété via l'analogie thermodynamique (cf. Weinberg chap. 2.11) [7].

Un calcul rapide montre que les équations de conservation $G^\mu_{\nu;\mu} = 0$ sont automatiquement vérifiées.

Une autre vérification rapide montre que si $t- > r(t)$ paramètre une géodésique radiale, alors $K(t, r(t))$ est constante le long de celle-ci, d'où son nom de constante du mouvement ; plus précisément $\frac{d}{dt} K(t, r(t)) = 0$ est équivalent à la condition de compatibilité (10).

Résumons les résultats sous la forme d'un lemme que l'on appellera **théorème de Painlevé** :

Lemme : Soit une forme de métrique (9) donnée par $v(t, r)$ et $\Phi(t, r)$ et soit $K(t, r) = v^2 - 2\Phi$; les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) cette métrique est une forme de Painlevé, i.e. v et Φ sont compatibles ;
- ii) $K(t, r(t))$ est constante le long des géodésiques radiales $t- > r(t)$;
- iii) $G^0_1 = 0$;

et en conséquence les équations de conservation sont vérifiées. On remarquera, comme autre conséquence importante, la linéarité en Φ du tenseur équivariant G^μ_ν , ce qui n'est pas le cas du tenseur covariant ; les potentiels peuvent s'ajouter.

2.2 Le tenseur impulsion-énergie équivariant

Interprétation thermodynamique : après avoir étudié les propriétés du tenseur géométrique, le premier membre des équations d'Einstein, passons au deuxième membre des équations $G^\mu_\nu = -\kappa T^\mu_\nu$ où $\kappa = 8\pi G/c^4$ avec G désignant la constante de Newton ; les éléments non nuls s'écrivent :

$$\begin{aligned}
T^0_0 &= \rho \\
T^1_0 &= v(\rho + p_r) \\
T^1_1 &= -p_r \\
T^2_2 = T^3_3 &= -p_t,
\end{aligned} \tag{12}$$

où ρ désigne une densité de matière-énergie, p_r une "pression radiale" et p_t une "pression tangentielle" ; le terme croisé T^1_0 dont l'écriture découle de l'identité $G^1_0 = v(G^0_0 - G^1_1)$,

traduirait une "dissipation ou échange d'énergie" de ce fluide thermodynamique ; la nullité de T_0^1 est équivalente à la constance de l'entropie pour un modèle d'univers, (cf. [7] formule 15.6.13).

Un problème se pose : Faut-il utiliser l'analogie thermodynamique avec le tenseur d'Einstein covariant, équivariant ou contravariant ? Regardons ce que cela donne pour un fluide cosmique (isotrope). Le tenseur équivariant est de loin le plus simple, et si l'on considère les éléments diagonaux des tenseurs covariant et contravariant, ils ne donnent pas directement la densité d'énergie ni la "pression", il y a un parasitage par des grandeurs géométriques. Dans le tenseur équivariant il apparaît une séparation entre d'une part les éléments matriciels thermodynamiques (la diagonale et la partie triangulaire inférieure) et d'autre part les éléments de nature plus géométrique et de cohésion (la partie triangulaire supérieure). Pour les modèles de de Sitter, caractérisés par $q(t) = -\Omega(t)$, c'est particulièrement évident pour les éléments diagonaux ; de plus G_0^1 étant nul, il n'y a pas dissipation d'énergie, ce qui semble raisonnable.

Problème à suivre, car si l'analogie thermodynamique restera toujours un bon guide en relativité générale, dans le cadre de la forme de Painlevé d'une métrique sa pertinence semble vraiment être du côté du tenseur équivariant (11) qui est d'une grande simplicité.

2.3 Le passage de Newton-Euler-Lagrange à Einstein

Soit le mouvement en chute libre radiale d'une particule d'épreuve dans le cadre d'un problème gravitationnel à symétrie sphérique. Supposons que dans le cadre newtonien nous connaissions sa "vitesse" de chute $v(t, r)$ et le potentiel $\Phi(t, r)$ auquel cette particule est soumise. Pour que son accélération soit bien définie, il faut que

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{v \partial t} .$$

Appelons $K(t, r) = v(t, r)^2 - 2\Phi(t, r)$, l'invariant du mouvement lié à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle et prenons le Lagrangien :

$$2L = \frac{(\dot{r} - v(t, r)\dot{t})^2}{1 + v^2(t, r) - 2\Phi(t, r)} + r^2 \dot{\omega}^2 .$$

Notons que $\dot{}$ désigne une dérivation par rapport à une variable abstraite, souvent notée λ (parfois p). Ce Lagrangien vit sur R^3 .

Avant d'appliquer le théorème d'Euler-Lagrange nous avons la liberté de poser deux axiomes ou postulats.

Postulat 1 : la vitesse de la lumière est un invariant fini.

Postulat 2 : le paramètre abstrait λ désigne le temps propre du corps en chute libre.

Dans ce cadre la vitesse c est introduite pour obtenir le "Lagrangien de Minkowski" le long de la ligne d'univers du corps en chute libre radiale. Et en conséquence de ces deux

postulats nous devons compléter le Lagrangien ci-dessus en posant :

$$2L = -c^2\dot{t}^2 + \frac{(\dot{r} - v(t, r)\dot{t})^2}{1 + v^2(t, r) - 2\Phi(t, r)} + r^2\dot{\omega}^2 . \quad (13)$$

Ce Lagrangien vit maintenant sur un ouvert de R^4 , muni d'un Lagrangien (et non pas d'une métrique). Osons appeler ce Lagrangien du nom de Painlevé.

Les équations d'Euler-Lagrange nous fournissent les équations des trajectoires et bien évidemment on retrouve la vitesse de chute radiale v . Les trajectoires solutions s'interprètent comme les chemins les plus *économés* (ou parfois les moins économiques du fait de la nature mathématique des équations d'Euler-Lagrange) car $K(t, r)$ reste constante le long de ces chemins.

Le traitement complet dans ce cadre de Newton-Euler-Lagrange est achevé. Il reste cependant à préciser l'ouvert de R^4 sur lequel le Lagrangien est défini ; cet ouvert dépend du problème considéré, en particulier $1 + K(t, r)$ doit rester strictement positif.

Que reste-t-il à faire sinon à établir la forme covariante de cette théorie ? Rappelons d'abord que l'exigence de covariance est de nature logico-mathématique avant tout, même si elle peut aider à rendre la forme des équations indépendante de l'observateur et donc être pratique pour le physicien.

Le fait que les équations des géodésiques de la métrique canoniquement associée au Lagrangien (13) soient équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange nous donne alors la forme covariante cherchée en l'occurrence la forme de Painlevé d'une métrique (qui existe toujours au moins localement), et on obtient une reformulation dans le cadre de la relativité générale.

Il n'en reste pas moins vrai que la relativité générale apparaît explicitement ici, pour les problèmes gravitationnels à symétrie sphérique, comme une réalisation covariante de la théorie de Newton-Euler-Lagrange, un point c'est tout, même si c'est beau et extraordinaire. Notons que les équations d'Euler-Lagrange sont relativistes, par essence mathématique, du fait de la variable libre λ . Le point important est de postuler que cette variable libre est le temps propre de la pièce mobile (en mécanique Lagrangienne classique), ici du corps en chute libre. C'est la clef du passage de Newton à Einstein (via la trouvaille de Painlevé). Signalons enfin que "les chemins les plus économiques" deviennent "les chemins les plus courts" dans cette reformulation. C'est cet aspect que Painlevé avait bien compris me semble-t-il ; par contre il n'avait pas saisi la nature relativiste des équations d'Euler-Lagrange, ce qui n'a rien d'étonnant car à l'époque les horloges n'étaient pas suffisamment précises pour distinguer la variable temporelle λ ou le temps propre du corps en chute libre, du temps du laboratoire ou de l'observateur. Par contre Poincaré avait bien compris la nature relativiste des équations d'Euler-Lagrange comme en témoigne en 1905 l'avènement de la relativité restreinte ; avec une formulation lagrangienne par Poincaré et une formulation métrique par Einstein.

En résumé on pourrait dire que pour tout problème gravitationnel à symétrie sphérique :
Poincaré et Painlevé \Rightarrow (Newton-Euler-Lagrange \Leftrightarrow Einstein).

3 Le soleil dans l'univers

Considérons maintenant le problème du champ du soleil dans un univers que l'on supposera être dans un premier temps un des univers de de Sitter.

Soit M la masse du soleil et, comme un univers de de Sitter est caractérisé par le fait que $H(t)^2\Omega(t)$ est une constante, notons λ^2 cette constante, suivant l'usage en astrophysique. (Il y a autant de modèles d'univers de de Sitter distincts que de valeurs des paramètres λ et Ω , car si $\Omega < 1$ par exemple, $H(t)^2 - \lambda^2/\sinh(c\lambda t)^2 = \lambda^2 = H_o^2\Omega_o$).

Notons encore r_o le rayon d'attraction du soleil dans cet univers, ce rayon est défini par l'annulation de l'action du potentiel en ce point donc par $M = \lambda^2 r_o^3$; en effet par intégration de l'équation d'Einstein $G^0_0 = -3\lambda^2$ on obtient le potentiel $\Phi = \frac{\lambda^2 r^2}{2} + M/r$.

Il reste alors à trouver la vitesse de chute radiale qui doit être compatible avec le potentiel. Il faut intégrer l'équation de compatibilité (10)

$$\frac{\partial v(t, r)}{\partial t} + v \frac{\partial v(t, r)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{M,U}(r)}{\partial r}.$$

Il est immédiat de vérifier que pour chaque solution v de cette équation, les équations d'Einstein sont valides et donc on aura une forme de Painlevé. Si l'on se restreint à trouver les solutions statiques, alors celle qui s'annule au rayon d'attraction r_o est la vitesse $v = \frac{\lambda(r-r_o)}{r} \sqrt{r(r+2r_o)}$.

Cette forme de Painlevé du soleil dans un univers de de Sitter s'écrit alors simplement :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{(dr - \frac{\lambda(r-r_o)}{r} \sqrt{r(r+2r_o)} dt)^2}{1 - 3\lambda^2 r_o^2} - r^2 d\omega^2 \quad (14)$$

En utilisant le fait que $M = \lambda^2 r_o^3$, cette métrique s'écrit sous la forme plus lisible :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{(dr - \sqrt{2 \frac{M}{r} - 2 \frac{M}{r_o} + \lambda^2(r^2 - r_o^2)} dt)^2}{1 - 2M/r_o - \lambda^2 r_o^2} - r^2 d\omega^2 \quad (15)$$

Cette solution exacte, valable dans l'univers osculateur, qui est un univers de de Sitter, de tout modèle d'univers, est une très bonne approximation de la solution sur ce modèle d'univers (cf. [6]).

Elle permet de réexaminer le problème de la masse d'un amas sphérique de galaxies car r_o est observable, mais aussi le dossier Pioneer à l'aide de cette métrique dans l'univers osculateur. Un signal (électromagnétique) émis radialement par une sonde devrait subir en toute première approximation une accélération cosmologique de $\pm c H$ qu'il faut corriger en tenant compte du rayon d'attraction r_o du soleil qui semble être de l'ordre de une à deux années lumière.

Remarque 1 : La forme de métrique de Painlevé (14) obtenue sur l'univers osculateur possède évidemment comme "forme statique" la fameuse métrique diagonale

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2 r^2) d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2 r^2} - r^2 d\omega^2.$$

Mais la variable temporelle τ ne possède pas de sens évident et aussi pratique que le temps propre t de la forme de Painlevé pour un mouvement radial, ni ne met en évidence le rayon d'attraction aujourd'hui, ni l'invariant $v^2 - 2\Phi$ du mouvement radial.

Remarque 2 : L'obtention de la forme (14) m'a demandé beaucoup de temps et de calculs mathématiques, la rédaction de (15) en découlant immédiatement. Alors pourquoi avoir donné la forme (14) assez illisible ? On peut remarquer que celle-ci ne dépend que de deux paramètres, λ et r_o , alors que (15) dépend de trois paramètres. Le résultat étant acquis, sans doute quelqu'un trouvera un chemin direct pour obtenir (15) sans passer par (14). Ah la non linéarité des équations !

Remarque 3 : Comme le dirait Einstein, la variable r est abstraite, quel est son sens physique ? De manière infinitésimale ou très locale, oui elle a un sens, mais ! Rien ne nous empêche maintenant de dire que $r = f(R)$ avec une nouvelle variable R ayant un sens physique. Faut-il employer la jauge harmonique comme le font Fock ou Weinberg ? Faut-il travailler en géométrie conforme ? Faut-il avoir recours à d'autres domaines de la physique comme par exemple la thermodynamique ? Faut-il viser la complémentarité (et non pas la quantification) avec la mécanique quantique comme le propose W. Heisenberg [16] ? Que de problèmes !

Ainsi cette forme de métrique de Painlevé est non seulement intéressante du point de vue théorique et épistémologique, mais encore performante pour la confrontation aux observations faites par les astronomes sur un quelconque objet astral sphérique considéré dans un environnement non vide mais isotrope. Pour aller plus loin voir les annexes 3 et 7.

4 Conclusion

La forme de métrique de Painlevé est vraiment un guide pour passer de la gravitation newtonienne à la gravitation einsteinienne. Ces deux théories s'éclairent l'une l'autre et ceci permet de saisir pourquoi et comment on peut utiliser clairement des concepts "classiques" dans un contexte relativiste. De plus nous avons deux lectures à notre disposition, mathématiquement et observationnellement équivalentes, mais conceptuellement différentes de phénomènes gravitationnels : l'une en termes de lagrangien (13) avec les équations d'Euler-Lagrange vivant sur un ouvert de R^4 , l'autre avec une métrique Lorentzienne (9) sur une variété avec les équations des géodésiques. Ceci permet de saisir en profondeur ce que voulait dire Poincaré [12] dans son affirmation du pluralisme théorique, pluralisme qui existe forcément pour toute théorie physique reposant sur le principe de moindre action comme c'est le cas de la relativité générale [13]. Notons que ce pluralisme théorique, repris dans un contexte d'une pensée par relations est plus généralement défini et établi par B. Guy [14].

Remerciements : à Ahmad Almajid (qui, lors de sa thèse en mécanique des vibrations que j'ai co-encadré, a laissé échapper cette phrase "tout se passe, dans le langage tensoriel que tu nous apprends, comme si le temps t était le temps propre de la pièce mobile et non pas le temps du laboratoire", ce qui m'a mis sur la voie du postulat 2) ; à Jacques

Fric (qui m'a interrogé sur la métrique de Painlevé et donc m'a forcé à progresser dans sa compréhension) ; à Gilbert Arzac (qui, comme d'habitude, m'a toujours soutenu et aidé en m'aidant à rédiger plus clairement mes résultats) ; à Jean-Marie Vigoureux (qui m'a forcé à réfléchir sur le rôle de la vitesse c , et donc en partie à l'origine du postulat 1) et aussi à d'autres collègues comme Marc Lachièze-Rey et Jean-Marie Souriau [3] qui m'ont aidé à comprendre plus en profondeur cette belle théorie d'Einstein ou encore Georges Paturel qui m'a initié aux difficultés liées à une saine compréhension des études astronomiques.

5 Compléments sur les modèles d'univers

Pour un modèle d'univers isotrope on a $v(t, r) = H(t) r$ et $\Phi(t, r) = \frac{H^2(t)\Omega(t)r^2}{2}$; d'où l'énergie est : $v(t, r)^2 - 2\Phi(t, r) = (1 - \Omega(t))H^2(t)r^2$; et on a la métrique (7). Nous avons aussi : $\frac{d}{dt}H(t) = -(q(t) + 1)(H(t))^2$ où $q(t)$ est le paramètre de décélération usuel et le théorème de Painlevé nous donne également $\frac{d}{dt}\Omega(t) = 2H(t)q(t)(\Omega(t) - 1)$, ce qui nous permet d'en déduire $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, r) = -(H(t))^3 r^2 (\Omega(t) + q(t))$. Avec tous ces éléments les coefficients non nuls du tenseur d'Einstein équivariant s'écrivent :

$$\begin{aligned} G^0_0 &= -3 (H(t))^2 \Omega(t) \\ G^1_0 &= (H(t))^3 r (\Omega(t) + q(t)) \\ G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 &= -(H(t))^2 (\Omega(t) - 2q(t)) \end{aligned} \tag{16}$$

On notera que ce tenseur ne s'exprime qu'avec les 3 paramètres astrophysiques fondamentaux, celui de Hubble H , celui de densité Ω et le paramètre de décélération q . Or comme les nombreux modèles de de Sitter correspondent à $q = -\Omega$, on comprend mieux le fait que tout modèle d'univers admet un de ces modèles de de Sitter comme variété osculatrice, cf. [6], modèle qui permet d'examiner les phénomènes astrophysiques locaux. En effet ces variétés osculatrices ont la propriété de donner des formules exactes pour les distances luminosité et angulaire et non pas des développements limités de celles-ci en z qui perdent toute précision (erreur théorique non évaluable) dès un redshift de l'ordre de $z=1$. Pour ces modèles osculateurs, la distance angulaire reste toujours croissante ce qui n'est pas le cas pour le modèle standard du type Λ CDM.

Pourquoi tant prendre de précautions au sujet des modèles d'univers possibles ? Tout simplement parce que une question comme "quel est le champ gravitationnel émis par un astre en rotation (voir en effondrement) dans un univers vide" est un non-sens, l'astre tourne par rapport à quoi, à qui ? Par contre se poser la question : "quel est le champ gravitationnel émis par une astre en rotation dans un univers non vide dont on va négliger l'influence" a du sens car de l'intérêt. Les équations sont simplifiées, mathématiquement on va résoudre des difficultés ; mais ceci étant fait les résultats vont rester très provisoires, mais c'est une étape indispensable pour pouvoir affronter le problème d'un astre qui tourne (ou en effondrement) dans un univers non vide. D'où l'intérêt d'y voir clair à propos de

l'analogie thermodynamique pour interpréter le tenseur d'Einstein. Du fait du principe de l'égalité entre masse inertielle et masse gravitationnelle, c'est le problème de la compréhension de l'inertie qui est posé. Cette inertie vient-elle du principe de Mach qui s'appuie sur les expériences du pendule de Foucault comme le dit V. Fock [8], ou vient-elle de la multitude de bosons dit de Higgs ? Mais qu'est-ce qui donne de la masse à cette distribution inconnue de bosons de Higgs, comme le dit Novello [17] ? Mon choix est fait, car comme toute théorie physique ne permet que de prévoir (ou rétro-prévoir), mais jamais d'expliquer, cela donne raison à Mach. A nous de mieux mettre en oeuvre son principe. Oui la physique teste des relations, des principes, c'est cela la réelle et profonde beauté de cette discipline.

6 Annexe 1 : Vers la forme de Birkhoff associée à celle de Painlevé

Partons de la forme de métrique de Painlevé, cf. la formule (9), comment obtenir très rapidement la forme de Birkhoff (locale) associée ? le plus rapide est de partir de la formule (14) de Kobe and Srivastava [18] qui dit que le passage de la théorie de Newton à celle d'Einstein se fait simplement à partir de l'équation de Poisson, modifiée par exigence de covariance, en disant que $h_{00} = g_{00} - 1$ est le potentiel gravitationnel. D'où cette conséquence, obtenue par de très simples calculs :

Corollaire : Une forme diagonale de la forme de Painlevé (9) est :

$$ds^2 = c^2(1 - 2\Phi(t(\tau, r), r))d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - 2\Phi(t(\tau, r), r)} - r^2d\omega^2, \quad (17)$$

obtenue par le changement de variable :

$$cd\tau = \frac{cdt}{\sqrt{1 + v(t, r)^2 - 2\Phi(t, r)}} + \frac{v(t, r)dr}{\sqrt{1 + v(t, r)^2 - 2\Phi(t, r)}(1 - 2\Phi(t, r))}. \quad (18)$$

Evidemment c'est la forme de Birkhoff si Φ , le potentiel, ne dépend pas du temps t . Par exemple pour un modèle d'univers comme $\Phi(t, r) = H(t)^2\Omega(t)r^2/2$, on n'obtient la forme de Birkhoff que si $H(t)^2\Omega(t)$ est une constante ce qui caractérise les modèles de de Sitter.

Mais quel appauvrissement de la forme de métrique lorsque l'on passe de la forme de Painlevé à la forme de Birkhoff dans le cas où le potentiel ne dépend pas du temps !

$G^0_1 = 0$, i.e. l'accélération est bien définie, est fondamental, indépendamment de la forme choisie a priori.

7 Annexe 2 : Le problème de la masse inertielle

L'égalité entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle d'un corps pose un problème. En effet cette égalité est une conséquence de la gravitation de Newton et un principe

de base de la gravitation d'Einstein, et comme le souligne Ernst Cassirer en 1921 dans son livre *La théorie de la relativité d'Einstein* [15] qui a été relu par A. Einstein avant sa parution, sur quoi peut-on fonder, physiquement parlant, cette masse inertielle ?

Historiquement il y a les expériences de Foucault avec le pendule, en 1851, puis le gyroscope qu'il a inventé l'année suivante. Ces expériences montrent que la direction du pendule (du gyroscope) reste fixe par rapport au soleil, mais en dévie un peu et reste fixe par rapport à notre galaxie ; puis si le pendule continue son mouvement assez longtemps il dévie encore pour rester fixe par rapport aux galaxies lointaines. Ainsi cela a amené au principe de Mach qui postule que c'est la répartition des masses de tout l'univers qui donne la masse inertielle à tous les corps. Quand Einstein a étudié des modèles d'univers, il voulait qu'ils soient machiens. Mais si l'on suppose l'isotropie des modèles d'univers il y a un gros problème, très peu de modèles vérifient cette propriété, en particulier les modèles en vogue aujourd'hui ; ainsi il est difficile de comprendre les expériences de Foucault et d'où vient la masse inertielle. Et pourtant. L'univers formant un tout, il n'y a pas d'extérieur à la variété sur laquelle est donnée une métrique d'univers et donc pas de dissipation d'énergie. Si le fluide cosmique est comobile pour la forme de métrique inertielle, celle de Painlevé, alors il n'y a pas d'échanges d'énergie (l'entropie reste constante). Cela se traduit par la nullité de G^1_0 , c'est à dire par le fait que le potentiel Φ ne dépend pas du temps. Cela conduit à l'équation (locale) $\frac{d\Phi(t)}{dt} = 0$, donc à $\Phi(t) = \lambda^2 r^2/2$ ce qui nous donne le tenseur impulsion-énergie des espaces $(\mathcal{H})_\lambda$ de de Sitter. Il nous reste à déterminer les fonctions $H(t)$ solutions de l'équation $G^0_1 = 0$ qui se réduit à :

$$\frac{dH(t)}{dt} + H(t)^2 = \text{constante} := \lambda^2,$$

les solutions sont nombreuses (localement) ; en particulier on a les solutions

$$H(t) = \pm \lambda \coth(\pm \lambda (t - t_o)), \pm \lambda \tanh(\lambda (t - t_o)), \pm \lambda.$$

Il existe beaucoup d'autres solutions, mais il faut que ces solutions existent globalement (i.e. sur toute une sous-variété de $(\mathcal{H})_\lambda$ qui soit causalement complètes). Les contraintes de courbure conduisent au fait que les seules solutions globales possibles correspondent aux trois solutions définies ci-dessus et avec le signe + si l'on veut un modèle traduisant l'expansion. Cette famille de modèles d'univers paramétrée par $(H(t_o), \lambda)$ vérifie le principe de Mach. C'est ce phénomène du passage du local au global qui m'a mené à m'interroger sur la pertinence du théorème local de Birkhoff, employé trop souvent globalement, en effet à λ fixé tous ces modèles, physiquement différents, ont localement la même forme de Birkhoff !

Ainsi, le principe de l'égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle est appuyé physiquement par l'expérience du pendule (cf. V. Fock), et conduit avec le principe de Mach à l'intérêt des modèles machiens, en particulier à la multitude des modèles de sitteriens qui permettent d'utiliser correctement un autre principe de base de la relativité générale, celui des coordonnées localement inertielles, pour interpréter le tenseur impulsion-énergie. En outre ces modèles disent qu'il existe une pression radiale négative pour un fluide

cosmique comobile de matière sans interactions (de poussières) rendant compte aisément des observations sur les supernovae. Autrement dit il n'y a ni énergie noire, ni réalité d'une expansion de l'espace (qui ne peut exister en soi comme l'ont dit aussi bien Kant, Poincaré et Cassirer) et la fin du mystère de la constante cosmologique qui apparaît comme un simple cas particulier du tenseur impulsion énergie de la matière comobile. Merci Foucault.

8 Annexe 3 : Le soleil dans un univers isotrope

Soit donc le soleil de masse M dans un univers de paramètres $(H(t), q(t), \Omega(t))$. L'intégration de G^0_0 nous donne la forme la plus générale du potentiel :

$$\Phi(t, r) = 1/2 H(t)^2 \Omega(t) r^2 + \frac{M(t)}{r}, \quad (19)$$

comme somme du potentiel lié au modèle d'univers et du potentiel, éventuellement dépendant du temps, créé par la surdensité associée au soleil de masse $M(t)$. Nous allons généraliser la formule (15) pour la vitesse $v(t, r)$ pour conserver l'équation de compatibilité $G^0_1 = 0$.

Considérons au moment t_o le rayon d'attraction du soleil $ra(t_o)$ noté r_o dans la suite, les valeurs des paramètres de l'univers H_o, Ω_o et q_o ; la solution $v(t, r)$ qui s'annule au moment t_o en r_o est donnée par l'annulation du champ $\frac{d\Phi(t_o, r)}{dr} = 0$. On obtient :

$$M_o = M(t_o) = H_o^2 \Omega_o r_o^3.$$

Posons :

$$v(t, r) = \epsilon \sqrt{H^2(t) \Omega(t) r^2 - H_o^2 \Omega_o r_o^2 + \frac{2M(t)}{r} - \frac{2M(t_o)}{r_o} + v_o^2} \quad (20)$$

où $\epsilon = \pm 1$ suivant la nature entrante ou sortante de cette vitesse radiale.

La constante du mouvement doit être $K := v^2 - 2\Phi$; elle vaut donc :

$$K = (v^2 - 2\Phi)(t_o, r_o) = -3 H_o^2 \Omega_o r_o^2 + v_o^2 = -H_o^2 \Omega_o r_o^2 - 2 \frac{M_o}{r_o} + v_o^2.$$

Ces valeurs sont en adéquation avec celles obtenues sur l'espace de de Sitter osculateur.

On a donc finalement la famille de forme de métriques de Painlevé (généralisées), paramétrée par t_o et v_o , solutions du problème d'une surdensité sphérique de masse variable $M(t)$ dans un univers isotrope $(H(t), q(t), \Omega(t))$:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{(dr - \epsilon \sqrt{H^2(t) \Omega(t) r^2 - H_o^2 \Omega_o r_o^2 + \frac{2M(t)}{r} - \frac{2M_o}{r_o} + v_o^2} dt)^2}{1 + K} - r^2 d\omega^2. \quad (21)$$

Mais du fait de la forme du tenseur d'Einstein G^μ_ν en fonction de $v(t, r)$, ce tenseur n'est pas égal à celui associé au modèle d'univers $(H(t), q(t), \Omega(t))$, sauf si ce dernier tenseur

ne dépend pas du temps, i.e. $q(t) = -\Omega(t)$ et si M est constante, voir (11). En particulier $G^1_1 \neq G^2_2$, les pressions radiales et tangentielles sont différentes :

$$G^1_1 = 2 \frac{H^3(t) r (q(t) + \Omega(t))}{v(t, r)} - 3 H^2(t) \Omega(t)$$

$$G^2_2 = - \frac{r (q(t) + \Omega(t)) \left(-3 v(t, r) + \left(\frac{\partial}{\partial r} v(t, r) \right) r \right) H^3(t)}{(v(t, r))^2} - 3 H^2(t) \Omega(t) .$$

Alors se pose le problème de savoir si les solutions formelles (21) sont pertinentes et ont un sens, si les modifications apportées au tenseur d'Einstein sont légitimes. Au début de cette annexe nous avons implicitement supposé que par l'addition pure et simple de potentiels, il n'y avait pas de potentiel traduisant l'interaction inévitable entre le soleil (plus précisément une unique sur-densité ou sous-densité) et l'univers isotrope dans lequel il a pris naissance. Le problème posé est épineux et laisse place à des tas d'incompréhensions ou non-sens. Si l'on veut conserver le tenseur d'Einstein de l'univers, la nécessité de la prise en compte d'une interaction, si $q(t) \ll -\Omega(t)$, découle directement du lemme suivant :

Considérons le cas rempli par n'importe quel modèle d'univers homogène et isotrope qui vérifie automatiquement, sous le théorème de Painlevé, l'égalité entre "pression radiale" et "pression tangentielle", i.e. $G^1_1 = G^2_2$; est-ce le cas également d'une surdensité (ou une sousdensité comme un vide) sphérique dans un modèle d'univers isotrope? Il est en fait assez rapide de montrer :

Lemme : i) Si une métrique de Painlevé vérifie $G^1_1 = G^2_2$, alors la vitesse $v(t, r)$ dérive du potentiel $\Phi(t, r)$ et d'une fonction arbitraire $F(t)$ selon la formule :

$$v(t, r) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, r) \left(\int - \frac{-2 \Phi(t, r) + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi(t, r) \right) r^2}{r^3} dr + F(t) \right)^{-1} r^{-1} . \quad (22)$$

Il est alors évident de vérifier que s'il n'existe pas un potentiel supplémentaire, ou autre chose, traduisant l'interaction, il n'existe pas de "vitesse" $v(t, r)$ pouvant approximer la vitesse de chute usuelle près du soleil lorsque $H(t)$ tend vers 0 (avec $q(t) \ll -\Omega(t)$).

Comme par ailleurs il est facile de montrer que si G^1_0 et G^0_0 sont conservés alors ce potentiel supplémentaire est nul, nous sommes conduits à accepter une évolution des équations d'Einstein en fonction de v et donc de $M=M(t)$.

Le problème initial semble cependant presque entier car si la forme (21) est simple et intéressante et à ma connaissance inconnue dans la littérature, traduit-elle le problème initial sans dire plus sur l'interaction entre le soleil et l'univers qui devra se traduire sur G^μ_ν ? Oui, nous avons vu que l'exigence d'un univers machien se traduit par une influence de l'observateur inertiel choisi sur les termes de pression du tenseur d'Einstein (11) dans lesquels "v" intervient; or cet observateur en chute libre dépend de la "vitesse" choisie parmi la multitude de "vitesses" possibles compatibles avec un potentiel fixé. Ainsi l'interaction

est traduite en termes de "pression", interaction dont l'écriture dépend donc de l'observateur choisi a priori. Aussi l'interaction gravitationnelle devient un problème inertiel. On a le principe de base covariant sur l'égalité entre masse inertielle et masse gravitationnelle, mais pour les "pressions inertielles" rien ne reste "covariant" tout dépend de l'observateur. Ah ces belles équations d'Einstein qui nous mettent la pression sur l'importance des conditions aux limites sans lesquelles on ne peut y voir clair sur l'interaction entre deux potentiels.

Il reste à calculer l'évolution du rayon d'attraction $t \rightarrow ra(t)$ en fonction de la boule de masse $M(t)$ dans un univers de paramètres $(H(t), q(t), \Omega(t))$. Puis il restera le problème du raccordement de la forme de métrique intérieure à la boule à celle extérieure ; faudrait-il employer la jauge harmonique ou une autre jauge plus adaptée aux modèles d'univers machien (de Sitterien) ?

Epistémologie : Certains des résultats que je donne dans cette annexe ont été parfois obtenus assez difficilement, car il a fallu me défaire d'habitudes de pensées ; les éléments de preuves peuvent parfois paraître elliptiques mais ils sont là ; le plus simple est de vérifier (ce que l'on doit toujours faire avec l'utilisation d'un calcul formel). Si l'on pense à l'anomalie Pioneer comme première application concrète (qui pour moi est facilement explicable sans ce cadre), l'amas de Virgo me semble fortement intéressant, ne serait-ce que pour mieux estimer son rayon d'attraction et la dynamique locale de l'univers, mais pour cela il reste à étayer la pertinence des solutions (21) si l'on ne se contente pas des solutions sur l'univers osculateur (cf §3 ci-dessus). Ce qui me surprend le plus est l'aspect épistémologique qui consiste en le fait d'avoir été obligé de recourir à la théorie de Newton-Euler-Lagrange pour résoudre, en grande partie, ce problème de relativité générale. N'oublions pas un autre aspect épistémologique mis en évidence, celui de l'analogie thermodynamique qui ne peut s'exprimer clairement que dans le cadre de ces métriques de Painlevé. Georges Lemaître, en 1931 [11], avait déjà trouvé un type de forme de Painlevé pour des modèles d'univers, mais c'est semble-t-il "en passant" ou comme une astuce de calcul (?), sans y attacher d'importance. Merci donc à Painlevé et Gullstrand. Un autre aspect épistémologique est posé par le fait que la non linéarité des équations d'Einstein est mise vraiment en évidence par ce simple problème du soleil dans un univers car il n'est pas possible de le résoudre sans tenir compte des rétroactions de chacun de ces deux problèmes élémentaires l'un sur l'autre, rétroactions qui influencent les équations d'Einstein et qui se calculent à partir de l'équation de compatibilité (10).

9 Annexe 4 : Modèles de l'univers, distances et redshift

Considérons les derniers articles concernant les SN1a (supernovae de type 1a) et plus précisément l'étude de la fonction redshift \rightarrow magnitude ($0.01 < z < 1.5$ environ), qui étaient le modèle "standard" Λ CDM actuel :

$$M = M_o + 5 \log_{10}(z + z^2(1 - q_o)/2), \quad (23)$$

en première approximation. (Ici M et M_o désignent des magnitudes).

Le calcul du paramètre H_o à l'aide de ces supernovae mènent les auteurs à privilégier $H_o \approx 67$ et non pas $H_o \approx 72$ comme auparavant (du team Riess et autres), en particulier avec le modèle Λ CDM.

Pour un modèle de de Sitter (et donc sur la variété osculatrice d'un univers) on obtient une formule exacte pour la magnitude (cf. [5] chap. 9, ou [22] formule 237) :

$$\begin{aligned} M &= M_o + 5 \log_{10}((1+z)u(z)) \\ \text{avec} & \\ u(z) &= \frac{1+z - \sqrt{1+z(2+z)(1+q_o)}}{-q_o}. \end{aligned} \quad (24)$$

Cela s'obtient assez rapidement à l'aide de la métrique d'un modèle d'univers Λ CDM ; la formule est assez compliquée, car comportant une intégrale, mais, pour un modèle de de Sitter, la distance luminosité d_L est plus simple et s'écrit :

$$d_L(z) = (1+z) \frac{1}{-H_o q_o} \left((1+z) - \sqrt{1 + (1+q_o)z(2+z)} \right).$$

Si pour z très petit cela ne change pas l'estimation de H_o (les auteurs trouvent $62 \leq H_o \leq 65 \text{ km/s/Mpc}$), mais pour $-0.6 < q_o < -0.3$, et pour $z=1$, il y a une différence en magnitude assez importante entre les formules (23) et (24), de 0.07 à 0.09, ce qui introduit une sous-estimation de $-q_o$ assez grande : par exemple la plage $0.3 < -q_o < 0.6$ devient $0.3 + 0.12 < -q_o < 0.6 + 0.15$, ce qui semble très important, à moins que les incertitudes des mesures de magnitude à $z=1$ soit de l'ordre de 0.08, auquel cas ce calcul perd toute pertinence (sauf pour l'obtention de la valeur de $H_o \approx 65$).

Le développement limité (23) de (24) devient une grossière approximation lorsque $z \geq 1$. En effet mathématiquement parlant le rayon de convergence de la série des développements limités en z de ces distances est $z=1$, ce qui veut dire que l'on ne peut utiliser que des formules exactes, comme c'est le cas pour les modèles Λ CDM (à l'aide d'intégrales elliptiques) et tous les modèles de de Sitter (avec une formule analytique), sinon on peut faire dire n'importe quoi aux observations des supernovae de type 1a. Merci à l'équipe de Planck qui n'a confronté ses observations qu'aux modèles de courbure nulle, ce qui est bien d'un côté car il n'y a pas de faute théorique, mais ce qui limite les conclusions car il n'y a pas de confrontation avec des modèles de courbure espace non nulle. Aussi le $z \cong 0.7$ avancé dans beaucoup d'articles concernant les modèles Λ CDM (par rapport à la phase de transition décélération-accélération), pose problème.

Remarque : pour les modèles de de Sitter modifiés en tenant compte du rayonnement, il existe aussi une formule analytique pour la distance $d_L(z)$: si le paramètre de densité de matière aujourd'hui $\Omega_o < 1$, on prend pour fonction $u(z)$:

$$u(z) = \frac{1+z + \frac{B}{2Aa^2} - \left(1 + \frac{B}{2Aa^2}\right) \sqrt{1+z(2+z)(1-\Omega_o) - \Omega_o B/A z(1+z)}}{\Omega_o \left(1 - \frac{B^2}{4A^2 a^2}\right)}, \quad (25)$$

où A est la densité de matière aujourd'hui, B la densité de rayonnement aujourd'hui et $a = \sqrt{\frac{1}{\Omega_o} - 1 - \frac{B}{A}}$.

Remarque sur la distance angulaire d_A . Comme celle-ci vérifie $d_A = d_L/(1+z)^2$, tout développement limité devient encore plus vite divergeant et même un non-sens, dès que $z > 1$. Pour éviter cette difficulté il faut avoir recours à une formule exacte de la distance luminosité. Il existe certes une formule théorique (cf. par exemple la formule (79) page 68 du cours http://www-cosmosaf.iap.fr/SAF_CoursCosmo_2010_3.pdf), mais je ne connais que deux cas où cette formule théorique en donne une simple et utilisable : le cas d'un univers dont la partie espace est plate et le cas d'un univers de de Sitter (éventuellement modifié pour tenir compte du rayonnement). On comprend alors pourquoi les auteurs voulant étayer le modèle Λ CDM le supposent toujours plat dès qu'il utilisent cette distance angulaire (sinon on arrive sans formule exacte rapidement à une distance angulaire négative!). Mais même avec une formule exacte pour un modèle Λ CDM plat on arrive à une absurdité avec une distance angulaire qui décroît (à partir de z de l'ordre de 1 à 2), voir l'annexe 7.

Notons que le modèle de de Sitter osculateur (à un des modèles étudié répondant aux premières contraintes observationnelles) a toujours un âge de 17 à 23 milliards d'années : en particulier pour $H_o \approx 65 \text{ km/s/Mpc}$ pour $0.4 < -q_o < 0.7$, ce qui laisse de la place pour naître puis exister aux amas globulaires les plus vieux et aux vieilles étoiles géantes rouges, contrairement au modèle Λ CDM. Par ailleurs au niveau théorique avec la forme de métrique de Painlevé, la densité de matière varie comme r^3 et donc celle correspondante avec la forme comobile usuelle est constante ! Ainsi les modèles de de Sitter correspondent à de la matière pure comobile (et non pas à une quelconque énergie du vide), avec une entropie constante ($T_0^1 = 0$). L'étude des supernovae privilégie cette interprétation.

Faut-il conserver le modèle standard Λ CDM ou définitivement revenir aux modèles de de Sitter ?

Rappelons brièvement quelques avantages de ces modèles ([5], chap. 7, 8 et 9).

- Un âge de l'univers plus grand que celui des plus vieux objets qu'il contient, et ce quelque soit la valeur du paramètre de Hubble (entre 50 et 80 km/s/Mpc).
- L'isotropie du rayonnement de fond cosmologique autrement dit pas de problème d'horizon cosmologique.
- Les fluctuations du rayonnement de fond proviennent des fluctuations primordiales, et ce sans recourir à une période inflationnaire.
- Une distance angulaire toujours croissante avec le redshift.
- Le non-mystère de la constante cosmologique qui traduit simplement la Codensité de matière.
- Des formules théoriques applicables facilement à tous les redshift.
- La stabilité des modèles par rapport aux conditions initiales. (Nul recours à un principe anthropique est nécessaire!).
- L'existence d'une pression purement gravitationnelle (négative) qui permet de définir le concept de rayon d'attraction d'une surdensité locale. Les problèmes de masse manquante se posent de manière complètement nouvelle, et sont alors plus facilement

explicables.

- La nature machienne de ces univers, l'inertie provenant de la répartition des masses dans l'univers comme le montre l'expérience de Foucault.

En bref et autrement dit : plus de mystère au sujet de la constante cosmologique.

Que de problèmes réglés et ce, sans cette hypothétique et étrange énergie du vide (comme si le vide existait en soi). Mais il reste beaucoup d'autres problèmes comme, par exemple, ceux liés à des problèmes de masse manquante qui se posent de manière différente, ou encore aux résultats de WMAP et à ceux liés à l'effet Sunyaev-Zel'dovich (dépendants de la distance angulaire comme encore l'effet BAO) qu'il faut reformuler dans ce contexte des univers de de Sitter, etc. Faut-il insister sur le problème théorique présumé par WMAP ? Comme on doit utiliser la distance angulaire, il faut utiliser une formule exacte et, ce qui est fait pour cela, est de présumer (très souvent implicitement) que la partie spatiale du modèle est plate ; ainsi rien d'étonnant de retrouver dans les résultats cette platitude (à des incertitudes près !) puisque l'on teste entre eux que des modèles plats.

Comme références on pourra se reporter à : M. Hicken and all [19] (2009) ; F. Farley [20] (2010) ; A. Sandage, B Reindl et G. Tammann, [21] (2010) ; et P. Mannheim [22] (2005). Cette dernière référence est un pavé dont j'en recommande la lecture ; l'auteur arrive aux mêmes équations (utiles en astrophysique) que moi, aussi bien pour les courbes de rotations de galaxies que pour les distances de luminosité, à une différence importante près, son raisonnement de physicien s'appuie sur l'existence du boson de Higgs et sur la géométrie conforme (cet aspect me paraît important), alors que je m'appuie que sur un bon traitement des mathématiques : non utilisation d'un théorème de Gauss dans un cas où il ne peut pas être utilisé, non confusion entre coordonnées comobiles et coordonnées localement inertielles et non utilisation d'un développement limité divergent : i.e. je n'ai pas besoin du boson de Higgs, peu importe qu'il existe ou non, pour justifier les mêmes résultats ; plus précisément je pense que le boson de Higgs est un artefact mathématique (comment le Cern va-t-il réussir à masquer sa non trouvaille et dire simplement qu'il a mis la main sur une nouvelle particule éphémère qu'il faut étudier ?), mais en tant qu'objet purement mathématique, ce boson, je le respecte (ah ce fameux "tout se passe comme si..." de Poincaré, aspect épistémologique massacré aujourd'hui).

Au niveau mathématique, faut-il rappeler que ce n'est pas parce qu'un tenseur covariant est symétrique que le tenseur équivalent associé le soit. Sur les exemples traités nous avons vu que G^0_1 est nul pour traduire le concept d'accélération et que G^1_0 est non nul pour traduire de l'échange, de la dissipation d'énergie, ... , bref de l'évolution du champ gravitationnel. Il est très riche ce tenseur a-dimensionnel G^μ_ν , non symétrique. D'un point de vue calculatoire, je n'aurai jamais trouvé ces résultats sans l'emploi d'un calcul formel, en effet calculer à la main G^μ_ν demande des jours, ce que j'ai fait au siècle dernier, alors que maintenant le résultat tombe instantanément sur ordinateur, encore faut-il vérifier la fiabilité des résultats donnés puis rédiger des preuves, ce qui demande du temps.

10 Annexe 5 : Une bonne nouvelle, une bouffée d'air pur

Fin 2013 Donald H. Kobe and Ankit Srivastava publient un article [18] : "From Newton's Universal Gravitation to Einstein's Geometric Theory of Gravity". Voici un passage :

Einstein realized that since inertial mass and gravitational mass are equal for gravity (the equivalence principle) it could be described by a geometrical theory. In the general theory of relativity gravity is described by the purely geometrical effect of motion in curved spacetime. The motion of a free particle in the curved spacetime is determined from the principle of stationary proper time which states that along the world line of a free particle the proper time is stationary. With our choice of sign convention the stationary proper time is maximum for the true trajectory compared to the proper time for all other trajectories.

Cet article est important : voici la présentation :

We begin with Poisson's equation and use a natural step-by-step process of generalization. In the next section we review Newtonian gravity and Poisson's equation for the gravitational potential. In Sec. 3 Newton's gravitational potential is shown to be related to the 00-component of the metric tensor by equating then nonrelativistic result of the principle of stationary proper time to the classical Lagrangian for a particle in a gravitational potential. Poisson's equation for the potential can then be written in terms of the second derivative of the 00-component of the metric. In Sec. 4 we generalize this equation by using a cyclic linear combination of second derivatives of the metric tensor to obtain the curvature of a four-dimensional spacetime. The resultant is the 00-component of the Ricci tensor in local coordinates. In Sec. 5 the mass density in the Poisson equation is related to the 00-component of the energy-momentum stress tensor and its trace. Using the principle of general covariance in Sec. 6, the single component of the tensor equation in local coordinates is generalized to obtain all components of the Einstein's gravitational field equation.

Cet article est complémentaire au travail ci-dessus : en effet il montre qu'en partant de l'équation de Poisson de la théorie de Newton, alors la forme covariante de cette équation est l'équation d'Einstein. C'est un résultat existentiel important. Ci-dessus nous avons établi comment on passe constructivement, pour les problèmes à symétrie sphérique, de la gravitation de Newton à celle d'Einstein en s'appuyant sur le fait que les équations d'Euler-Lagrange sont relativistes du fait du temps propre. Le point commun très solide entre nos deux approches est de respecter ce qu'est un repère inertiel le long de la ligne d'univers d'un observateur (the principle of stationary proper time). Pourquoi ce principe est trop souvent oublié ?

11 Annexe 6 : Le problème de Cauchy et la complémentarité

Les équations d'Einstein étant un système d'équations non linéaires aux dérivées partielles, ce problème de Cauchy pose la question de savoir quelles sont les conditions initiales

et aux limites qu'il faut poser pour espérer une existence globale et une unicité de solution. Problème redoutable car il exige de préciser, a priori, sur quelle variété mathématique on travaille. Pour la relativité générale ce problème fut bien étudié par A. Lichnérowicz puis développé par Y. Choquet-Bruhat (voir un récent historique sur ce problème [23]).

Pour une variété il peut être abordé "simplement" si l'on dispose d'une carte partout dense. Il s'avère que la carte de Birkhoff est souvent toute petite, donc il est impossible de poser ce problème de Cauchy dans ce cadre, par contre la carte de Painlevé est partout dense pour les problèmes à symétrie sphérique.

C'est donc impossible de travailler avec une telle forme locale de Birkhoff pour aborder ce problème de Cauchy, même si par ailleurs cette carte peut être utile.

On sait que si la variété est R^4 alors le problème de Cauchy est bien posé si l'on utilise la jauge harmonique, cf. Lichnérowicz [24], Fock, Weinberg, etc., et dans ce cadre les conditions aux limites vont dépendre d'autres théories physiques, la thermodynamique, l'électromagnétisme, etc.

Constantes d'intégration et complémentarité. Les constantes d'intégration (des équations d'Einstein se partagent en deux groupes, celles qui sont covariantes, et celles qui ne le sont pas comme par exemple certaines conditions aux limites pour le problème de Cauchy qui peuvent dépendre d'un autre théorie physique comme la thermodynamique. Ces dernières disparaissent dans certains changements de cartes (forme locale de Birkhoff). Ainsi il faut parler de complémentarité entre gravitation et thermodynamique par exemple.

Maintenant que dans le cadre des problèmes à symétrie sphérique, la méthode de Painlevé est fructueuse et que son domaine de validité est un ouvert partout dense, il reste à avancer vers des solutions concrètes pour ce problème de Cauchy qui forcément fera appel à d'autres théories physiques pour décider de valeurs aux limites pour des constantes d'intégration.

Considérons maintenant l'espace tangent de la variété sur lequel agit le groupe de Poincaré; du fait que les inégalités de Fourier proviennent de ce groupe on en déduit les inégalités d'Heisenberg, ainsi pour une particule en chute libre on ne peut plus parler de la géodésique suivie si la position et l'impulsion ne respectent pas ces inégalités, communes à la relativité et à la mécanique quantique et donc ces deux théories sont complémentaires, et non pas incompatibles comme cela est trop souvent écrit. Est-ce à dire que la métrique n'est pas définie sur toute la variété? Non ce sont uniquement les trajectoires sur les géodésiques des corps d'épreuves qui ont chacune un domaine restreint par l'application des inégalités, et ces trajectoires sont définies et épaissies à la précision donnée par la constante de Planck. Si le corps d'épreuve est la Lune ou Mercure dans le système solaire cela n'a pas d'incidence, on peut identifier géodésique mathématique et trajectoire effective (même dans le cas où l'on veut traiter du problème des 3 corps dont on sait que la trajectoire sera chaotique sur le très très long terme).

12 Annexe 7 : Le problème de l'anomalie Pioneer : le dz/dt

Soit donc un des modèles de de Sitter représenté par sa forme FLRW ou par sa forme croisée de Painlevé ; la variable temporelle t est la même, c'est le temps cosmologique. Les observations astronomiques se basent très souvent sur le redshift z des photons envoyés à l'instant t et reçu aujourd'hui au temps t_o ; dans le cas de l'anomalie Pioneer ce qui est mesuré est $\frac{dz(t)}{dt}$, d'où l'intérêt de connaître les fonctions $t(z)$ et $\frac{dz}{dt}$, aussi bien pour les petits redshift que pour les grands redshift associés aux amas de galaxies lointains (z pouvant atteindre 6). Pour tout modèle d'univers on a des formules approchées, mais le domaine de validité ne dépasse pas $z=1$. Pour les modèles de de Sitter, variétés osculatrices, on a une formule exacte donnant $t(z)$ pour tout z , la voici :

Lemme : Soit donc $(t_o, H_o, q_o = -\Omega_o)$ les paramètres usuels caractérisant un de ces modèles de de Sitter de courbure $\lambda = H_o \sqrt{-q_o}$. Alors si $\Omega_o < 1$ (l'espace est de courbure négative) ou $\Omega_o = 1$ (l'espace est plat) on a :

1-Le moment de l'émission du photon en chute radiale arrivant en t_o avec un redshift de z :

$$t(z) = \frac{1}{H_o \sqrt{-q_o}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{-q_o}}{\sqrt{1+q_o}(1+z)}\right) \quad (26)$$

2- La dérivée $\frac{dz}{dt}$ correspondante :

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{q_o z^2 + 2 q_o z + z^2 + 2 z + 1}(1+z)H_o \quad (27)$$

3- Un lien simple entre cette dérivée $\frac{dz}{dt}$ et la distance-luminosité $d_L(z)$ précisée dans l'annexe 4 :

$$\frac{dz}{dt} = d_L(z)\lambda^2 - (1+z)^2 H_o \quad (28)$$

4- Enfin la "constante" de Hubble $z \rightarrow H(z)$ s'exprime simplement :

$$H(z) = H_o \sqrt{q_o z^2 + 2 q_o z + z^2 + 2 z + 1} \quad (29)$$

Pour la preuve seule la formule (26) est à démontrer car les formules (27), (28) et (29), utiles pour les observations, en découlent simplement. Il faut partir pour $\Omega_o < 1$ du fait que $R(t) = \frac{\sinh(\lambda t)}{\lambda}$ qui permet d'obtenir, via $H_o, \lambda t_o = \operatorname{arctanh}(\sqrt{-q_o})$; on utilise alors le redshift : $1+z = \frac{R(t_o)}{R(t)}$ et un peu de calculs de trigonométrie hyperbolique après on obtient (26).

Pour $\Omega_o > 1$ (espace compact), on a des résultats similaires en utilisant $R(t) = \frac{\cosh(\lambda t)}{\lambda}$.

Conséquences : 1- l'effet Pioneer est parfaitement expliqué dans le cadre des modèles de de Sitter ; en effet le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{dz}{dt}$ est

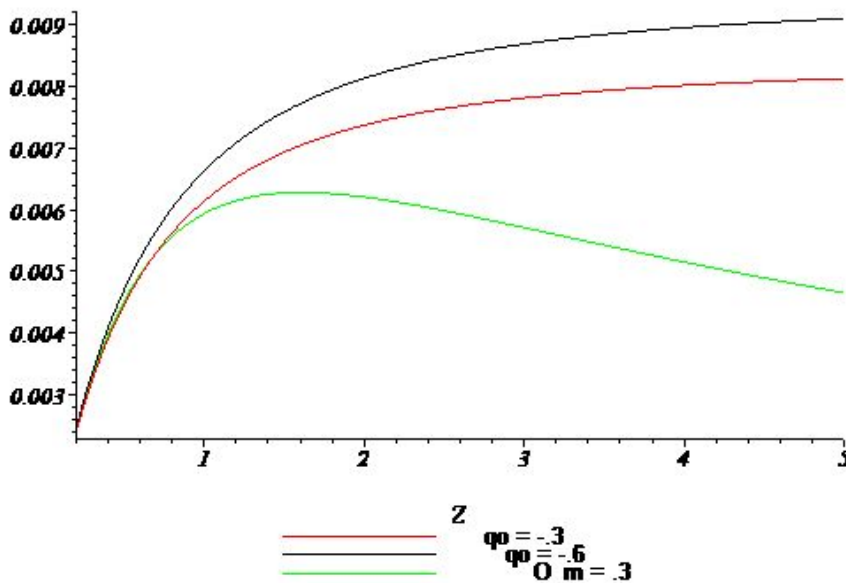
$$\frac{dz}{dt} = -H_o - H_o (q_o + 2) z + \frac{H_o (1 + q_o) (q_o - 2)}{2} z^2 + O(z^3)$$

et donc l'approximation $dz/dt = -H_o$ pour l'effet Pioneer est valide pour tout modèle d'univers isotrope en expansion. On peut dire que l'anomalie Pioneer est d'origine cosmologique et constitue une confirmation de la relativité générale.

2- La distance angulaire $d_A(z) = d_L(z)/(1+z)^2$, ou encore à $d_A(z) = -\frac{1}{H_o q_o} + \frac{H(z)}{H_o^2(1+z)q_o}$, est toujours croissante en fonction de z , ce qui n'est pas le cas pour les modèles Λ CDM. C'est la formule exacte (28) qu'il faut employer pour les grands z et sûrement pas un développement limité dont on ne peut évaluer l'erreur théorique dès que $z > 1$. Pour le modèle standard il existe une formule intégrale pour la distance angulaire qui permet de calculer numériquement la distance angulaire ; alors voici une comparaison graphique entre ces distances angulaires. Cette formule intégrale pour le modèle Λ CDM plat est :

$$dA_{\Lambda CDM} = \frac{1}{(1+z)H_o} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_m(1+x)^3 + 1 - \Omega_m}} dx .$$

Distance angulaire, pour $H_o=65$, pour de Sitter avec $q_o = -0.3$ et -0.6 et standard plat avec $\Omega_m=0.3$



On remarquera que pour le modèle de de Sitter avec $\Omega_o = -q_o = 0.3$ et pour le modèle Λ CDM avec $\Omega_m = 0.3$ les courbes sont indiscernables pour $z < 0.7$, mais elles divergent considérablement pour $z > 1.5$. L'étude des amas lointains de galaxies doit pouvoir départager les deux modèles, mais pas l'étude des supernovae, cf. ([22]). Et comment connaître Ω_m sans se donner le facteur d'échelle $R(t)$?

Un problème épistémologique est posé : Pourquoi une telle différence ? Dans l'approche Λ CDM générale, dans laquelle on tient compte et de la radiation et d'une éventuelle courbure non nulle, le point de départ est la thermodynamique classique, avec une superposition "d'équations d'état" (du type $p_i = w_i \rho_i$), bref on fait confiance, a priori, à la thermodynamique classique. Pourquoi pas, d'autant plus que cela a permis de déblayer un peu le terrain après un tsunami, celui de la découverte de l'expansion accélérée vers

1998. Mais il y a un problème de courbure qui se pose (par exemple comment mesurer le triplet (q_o, H_o, Ω_o) ?). Dans l'autre approche, il y a un scrupule à respecter le principe d'Einstein des corps en chute libre ; en le faisant on évite des pièges liés à la courbure mais on arrive à des "équations d'état" différentes et il nous faut les interpréter dans l'analogie thermodynamique (quel sens donner aux w_i ?). Il est sûr que ces deux approches sont différentes ainsi que les prévisions qui en découlent.

Il faut tenir compte de la courbure, c'est impératif ; quand on voit bon nombre de publications disant "on supposera que le facteur d'échelle aujourd'hui $R(t_o)$ vaut 1", les auteurs se rendent-ils compte qu'ils présupposent implicitement que la courbure spatiale est nulle ? (Aucune référence à de tels auteurs n'a été faite dans ce document).

Une erreur plus subtile : des résultats valables localement sont extrapolés et utilisés globalement (i.e. sur toute une variété qui n'est souvent pas précisée) comme c'est le cas du théorème de Birkhoff. De même la confusion entre repère comobile et repère localement inertiel est subtile : la forme de la métrique d'un modèle d'univers est la forme FLRW dans un cas et la forme de Painlevé dans l'autre ; avec laquelle des deux formes faut-il interpréter le tenseur impulsion-énergie ? Erreurs subtiles car elles ne pouvaient pas être clairement identifiées avant l'arrivée de la théorie des variétés différentiables connues vers 1950. Mais aujourd'hui, en 2015, ce type d'erreur est incompréhensible. Enfin dans l'exemple donné ci-dessus avec la distance angulaire, comment comprendre cette décroissance de $dA_{\Lambda CDM}$?

3- La forme de Painlevé de la métrique de de Sitter avec le redshift z ; signalons pour finir cette troisième conséquence du lemme. D'abord à partir de la formule (29) de $z \rightarrow H(z)$, on obtient l'évolution du paramètre de décélération $z \rightarrow q(z)$:

$$q(z) = \frac{q_o}{q_o z^2 + 2 q_o z + z^2 + 2 z + 1}.$$

Enfin, à partir des formules du lemme, on a cette forme de Painlevé adaptée aux observations astronomiques :

$$ds^2 = \frac{dz^2}{(1+z)^2 H(z)^2} - \frac{1}{1+r^2 H_o^2 (1+q_o)(1+z)^2} \left(dr + \frac{r dz}{1+z} \right)^2 - r^2 d\omega^2, \quad (30)$$

où $H(z) = H_o \sqrt{q_o z^2 + 2 q_o z + z^2 + 2 z + 1}$, $-1 < q_o \leq 0$ et $0 \leq r < 1/(H_o \sqrt{-q_o})$.

Cette carte sur l'hyperboloïde de de Sitter $SO(1,4)/SO(1,3)$ semble inconnue dans la littérature ; en tout cas elle ne figure pas dans la magnifique et précise recension faite récemment par G. Pascu ([25]) qui comporte plus de 50 cartes différentes sur cette riche variété. Par ailleurs, comme signalé dans l'annexe 4, la confrontation aux observations, faite par les équipes d'astronomes, donne une équivalence entre ce modèle de sitterien avec le modèle Λ CDM pour les redshift de $0 < z < 0.7$, un avantage pour les redshift de 0.7 à 5 et pour les redshift plus grands il faudra tenir compte de la composante "radiation" ; il reste beaucoup de travail aussi bien au niveau théorique qu'observationnel.

Références

- [1] P. Painlevé, *La mécanique classique et la théorie de la relativité*, C.R.A.S. (Paris) **173** 677-680 (Octobre 1921) et *La gravitation dans la Mécanique de Newton et dans la Mécanique d'Einstein* C.R.A.S **173** 873-887 (Novembre 1921).
- [2] A. Gullstrand, *Allgemeine lösung des statischen einkörper-problems in der Einsteinschen gravitations theorie*, Arkiv. Mat. Astron. Fys. **16(8)** 1–15 (1922).
- [3] J.-M. Souriau *Géométrie et Thermodynamique en cosmologie*, in “Géométrie symplectique et Physique mathématique” CNRS Paris (1975).
- [4] M. Lachièze-Rey 2001, The Friedmann-Lemaître models in perspective, A.& A. 364, 894-900 (astro-ph/0010163)
- [5] M. Mizony 2003, *La relativité générale aujourd'hui ou l'observateur oublié*, ed ALEAS, Lyon, 2003
- [6] M. Mizony et M. Lachièze-Rey, *Cosmological effects in the local static frame*, A.& A. Vol. 434, n°1, Avril 2005 ; (gr-qc/0412084).
- [7] S. Weinberg *Gravitation and cosmology*, John Wiley, New-York 1972.
- [8] V. Fock *The theory of Space, Time and Gravitation*, 2nd Revised Edition, Pergamon Press, 1966.
- [9] Martel K. et Poisson E. *Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes*, Am. J. Phys. 69, 476-480 (2001) ; (gr-qc/0001069).
- [10] Yuki Kanai, Masaru Siino, and Akio Hosoya *Gravitational collapse in Painlevé-Gullstrand coordinates*, <http://arxiv.org/abs/1008.0470v1> (gr-qc, 4 Août 2010).
- [11] Lemaître G. *L'univers en expansion*, Publications du laboratoire d'astronomie et de géodésie de l'université de Louvain. Vol IX (N°85 et 86) p. 171-205, 1932.
- [12] H. Poincaré *La science et l'hypothèse*, Flammarion (1902), édition 1968.
- [13] M. Mizony *Sur le pluralisme théorique : de Kant à Poincaré* dans Ateliers sur la contradiction, édité par Guy Bernard, Paris : Presses des Mines, 2010, 93-100.
- [14] B. Guy *Penser ensemble le temps et l'espace*, Philosophia Scientiae, 15 (3), 2011, 91-113.
- [15] Ernst Cassirer : "La théorie de la relativité d'Einstein - Eléments pour une théorie de la connaissance", paru en allemand en 1921 ; parution en français : les éditions du Cerf, Paris, (2000).
- [16] Werner Heisenberg : "Le manuscrit de 1942", publié en allemand en 1989, traduction en français, éditions du Seuil, 1998.
- [17] M. Novello, E. Bittencourt : "What is the origin of the mass of the Higgs boson?", <http://arxiv.org/abs/1209.4871> ; 2012.
- [18] Donald H. Kobe and Ankit Srivastava : "From Newton's Universal Gravitation to Einstein's Geometric Theory of Gravity" ; arXiv :1309.4789v1 [gr-qc], 17 Sep 2013.

- [19] M. Hicken and all "Improved Dark Energy Constraints from 100 New CfA Supernova Type Ia Light Curves" The Astrophysical Journal, Volume 700, Issue 2, pp. 1097-1140 (2009).
- [20] F. Farley "Does gravity operate between galaxies? Observational evidence re-examined" May 2010 in Proc.Roy.Soc.A .
- [21] A. Sandage, B Reindl et G. Tammann, "The Linearity of the Cosmic Expansion Field from 300 to 30, 000 km/s and the Bulk Motion of the Local Supercluster with Respect to the CMB", 2010, ApJ 714, 1441.
- [22] P. Mannheim "Alternatives to dark matter and dark energy", 2005, arXiv :astro-ph/0505266v2.
- [23] Y. Choquet-Bruhat : "Beginnings of the Cauchy problem" arXiv :1410.3490v1 [gr-qc] (2014).
- [24] A. Lichnérowicz "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme" Masson, (1955).
- [25] G. Pascu "Atlas of Coordinate Charts on the de Sitter Spacetime" arXiv :1211.2363v1 [gr-qc] (2012).

C'est dans la série : "Je crois que la relativité générale (équivalente à la théorie de Newton via Euler-Lagrange) est une bonne représentation (humaine) prédictive des effets gravitationnels ; alors respectons la". Merci Painlevé.