



HAL
open science

Filtrage par noyaux de convolution itératif

Yuting Chen, Benoît Bayol, Cédric Loi, Samis Trevezas, Paul-Henry Cournède

► **To cite this version:**

Yuting Chen, Benoît Bayol, Cédric Loi, Samis Trevezas, Paul-Henry Cournède. Filtrage par noyaux de convolution itératif. Les 44 Journées de Statistique, May 2012, Bruxelles, Belgique. pp.CHEN. hal-00776397

HAL Id: hal-00776397

<https://hal.science/hal-00776397v1>

Submitted on 15 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FILTRAGE PAR NOYAUX DE CONVOLUTION ITÉRATIF

Yuting Chen¹, Benoît Bayol², Cédric Loi¹, Samis Trevezas², Paul-Henry Cournède¹

¹ *Ecole Centrale Paris, Laboratoire de Mathématiques Appliquées aux Systèmes*

² *INRIA Saclay-Île de France*

email : yuting.chen@ecp.fr

Résumé. L'estimation paramétrique des modèles dynamiques en biologie est souvent rendue complexe par les fortes interactions entre processus et les non-linéarités qui en découlent, ainsi que par la difficulté de l'observation du système par expérimentation. Dans cet article nous étudions l'application de la méthode de filtrage particulière par convolution, développée pour permettre d'estimer les paramètres et les états cachés simultanément pour des systèmes non-linéaires. Nous proposons une variation de cette méthode mettant en jeu des itérations multiples du filtre particulière par convolution, en tenant compte des informations obtenues lors de l'itération précédente afin d'améliorer l'estimation des paramètres. Une version conditionnelle de l'approche est également proposée dans le cas d'un système dynamique bruité, en réalisant l'estimation paramètres-états en supposant les paramètres du modèle de bruits connus, puis en estimant ces derniers grâce aux états cachés estimés, et en relançant l'algorithme avec ces nouveaux paramètres. La méthode a été implémentée pour un modèle de croissance de betterave avec observations rares, et les résultats apparaissent meilleurs que la méthode de filtrage par convolution sans itération, même réalisée avec un nombre bien plus important de particules. La méthode est par ailleurs générique, robuste et facilement adaptable.

Mots-clés. Modèle de Markov caché, Filtrage non linéaire, Estimation de paramètre, Modèle de croissance de plantes.

Abstract. Parameter estimation for dynamic biological models is often considered to be a complex problem because of the strong interactions between processes, the nonlinearity and the difficulty in obtaining experimental observations. A typical example is plant growth model. In this context, classical parameter estimation techniques are difficult to apply. Nevertheless, Convolution Particle Filtering (CPF) was shown to be an efficient approach, aiming at the joint estimation of parameters and hidden states. In this article, we propose a variation of this method based on multiple iterations of CPF, which takes into account the information obtained by the former iteration in order to improve the precision of the estimates. A conditional version of the method is also derived for stochastic dynamic systems : in the first place, model parameters and hidden states are jointly estimated conditionally on the noise parameters, in the second place, the latter are estimated based on the estimation of the hidden states. Both steps can be repeated until convergence. The implementation is performed with a sugar beet growth model. The results obtained with the proposed method appear to be significantly better than those

obtained with the classical CPF, even if the latter estimation is performed with a much larger number of particles. The iterative version of CPF is easy to adapt to all kinds of dynamic models, and appears robust.

Keywords. Hidden Markov models, Nonlinear filters, Parameter estimation, Plant growth models.

1 Introduction

La méthode de filtrage particulaire par noyaux de convolution se révèle une méthode efficace pour l'estimation conjointe des états cachés et des paramètres pour les modèles de Markov cachés [1], [8]. Elle repose sur l'estimation des densités de probabilité des états cachés conditionnellement aux observations de façon récurrente à l'aide d'un estimateur à noyaux.

Pour les problématiques d'estimation paramétrique, dans un contexte de filtrage conjoint états-paramètres hors-ligne, et quand la connaissance a priori sur les paramètres est faible (cas d'un a priori non-informatif), nous proposons d'itérer le filtrage particulaire à noyaux un grand nombre de fois, c'est à dire en prenant comme population de particules à la k -ème itération du filtrage, la distribution de particules obtenues à la fin de la $(k - 1)$ -ème itération. En particulier, nous montrerons que cette méthode est particulièrement intéressante lorsque les observations du système dynamique sont rares ou irrégulières, comme bien souvent lorsqu'il s'agit de systèmes biologiques, en permettant d'assurer la convergence des estimateurs.

2 Méthode bayésienne d'estimation des paramètres par filtrage particulaire à noyaux de convolution

Nous considérons un modèle de Markov caché pour lequel on a défini un état caché augmenté $X_n^a = (X_n, \Theta_n)$, incluant X_n l'état caché au temps n et Θ le vecteur des paramètres à estimer. Si Y_n représente le vecteur d'observations au temps n , le modèle de Markov caché (d'ordre 1) est déterminé par les densités de probabilité de transition $p(x_n^a | x_{n-1}^a)$ (correspondant à l'équation d'évolution), $p(y_n | x_n^a)$ (correspondant à l'équation d'observation) et la densité initiale $p(x_0^a)$.

Le filtre particulaire à noyaux de convolution permet d'estimer conjointement les paramètres et les états cachés du système dynamique en temps réel en s'appuyant sur les données observées. Les particules sont initialisées de façon soit informative (à partir de $p(x_0^a)$) ou non informative (en distribuant uniformément sur l'espace admissible). Le filtrage s'effectue alors de façon récurrente, en deux étapes à chaque pas de temps n [1] :

- **Prédiction** : l'objectif est de fournir un estimateur à noyau de $p(x_{n+1}^a, y_{n+1} | y_{0:n})$ noté $\hat{p}(x_{n+1}^a, y_{n+1} | y_{0:n})$. M particules $\{\tilde{x}_n^{a(i)}, i = 1, \dots, M\}$ sont tirées selon la loi de densité

$\hat{p}(x_n^a | y_{0:n})$. On propage ensuite chacune de ces particules à travers l'équation d'évolution du système pour obtenir $\{\tilde{x}_{n+1}^{a(i)}, i = 1, \dots, M\}$ tirées selon la loi de densité $p(x_{n+1}^a | \tilde{x}_n^{a(i)})$. Enfin, dans le cas où la loi de densité $p(y_{n+1} | \tilde{x}_{n+1}^{a(i)})$ est connue explicitement, l'étape d'échantillonnage $\{\tilde{y}_{n+1}^{(i)}, i = 1, \dots, M\}$ n'est plus nécessaire.

Avec $K_{h_M^X}^X$ un noyau de Parzen-Rosenblatt de fenêtres h_M^X , on en déduit l'estimateur à noyau empirique de la densité de probabilité conditionnelle de (X_{n+1}^a, Y_{n+1}) sachant $Y_{0:n}$:

$$\hat{p}(x_{n+1}^a, y_{n+1} | y_{0:n}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M K_{h_M^X}^X(x_{n+1}^a - \tilde{x}_{n+1}^{a(i)}) p(y_{n+1} | \tilde{x}_{n+1}^{a(i)}). \quad (1)$$

• **Correction** : l'estimateur à noyaux pour $p(x_{n+1}^a | y_{1:n+1})$ est alors donné par :

$$\hat{p}(x_{n+1}^a | y_{1:n+1}) = \frac{\sum_{i=1}^M K_{h_M^X}^X(x_{n+1}^a - \tilde{x}_{n+1}^{a(i)}) p(y_{n+1} | \tilde{x}_{n+1}^{a(i)})}{\sum_{i=1}^M p(y_{n+1} | \tilde{x}_{n+1}^{a(i)})}. \quad (2)$$

La quantité $p(y_{n+1} | \tilde{x}_{n+1}^{a(i)}) / \sum_{i=1}^M p(y_{n+1} | \tilde{x}_{n+1}^{a(i)})$ peut s'interpréter comme le poids normalisé $\tilde{w}_{n+1}^{(i)}$ associé à la particule $\tilde{x}_{n+1}^{a(i)}$.

Notons que la méthode s'adapte sans difficulté si nous sommes dans le cadre d'observations rares. Soient les observations $(y_{n_i})_{1 \leq i \leq P}$, où $(n_i)_{1 \leq i \leq P}$ sont les temps d'observations. L'estimation de $p(x_n^a | y_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ est mise à jour au temps n_{k+1} en propageant les particules par l'équation d'évolution entre n_k et n_{k+1} , et en estimant $p(x_n^a | y_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}})$ par les noyaux de convolution utilisant les nouvelles observations $y_{n_{k+1}}$. Par la suite nous noterons $(n_i)_{1 \leq i \leq P}$ les temps d'observation.

3 Filtrage par noyaux de convolution itératif

Si on se place dans le cadre hors-ligne, nous proposons une alternative aux méthodes de lissage (voir par exemple [5]) basée sur l'itération du filtrage particulaire par noyaux de convolution. A la suite du filtrage, nous disposons d'un ensemble de particules $\{\tilde{x}_{n_P}^{a(i)}, i = 1, \dots, M\}$ avec les poids normalisés associés $\{\tilde{w}_{n_P}^{(i)}, i = 1, \dots, M\}$. Nous relançons alors le filtrage en réinitialisant les particules $\{\tilde{x}_0^{a(i)}, i = 1, \dots, M\}$ en choisissant $\{\tilde{x}_0^{a(i)}, i = 1, \dots, M\}$ de la même façon que pour le filtre classique (selon la distribution $p(x_0)$) et en revanche les paramètres $\{\tilde{\Theta}_0^{(i)}, i = 1, \dots, M\}$ sont initialisés avec les $\{\tilde{\Theta}_{n_P}^{(i)}, i = 1, \dots, M\}$. Les poids associés aux nouvelles particules ainsi obtenues $\{\tilde{x}_0^{a(i)}, i = 1, \dots, M\}$ sont $\{\tilde{w}_{n_P}^{(i)}, i = 1, \dots, M\}$.

Si la taille effective de l'échantillon diminue sous un certain seuil, une procédure de ré-échantillonnage est mise en place avant de relancer la procédure de filtrage, afin d'éviter

que les poids des particules ne dégènèrent trop [6]. Un tirage multinomial basé sur les poids des particules est effectué.

Après chaque itération l du filtrage, les estimateurs des paramètres et des états cachés sont donnés par :

$$\hat{\Theta}^{(l)} = \sum_{i=1}^M \tilde{w}_{n_P}^{(i)} \tilde{\Theta}_{n_P}^{(i)} \quad \text{et} \quad \hat{x}_{n_k}^{(l)} = \sum_{i=1}^M \tilde{w}_{n_k}^{(i)} \tilde{x}_{n_k}^{(i)}. \quad (3)$$

La méthode d'estimation ainsi définie étant stochastique, après une période de burn-in de K itérations ($K = 100$ dans nos tests, voir figure 1), nous considérons un estimateur moyenné afin de s'affranchir des fluctuations algorithmiques pour la convergence de l'algorithme [2]. Supposons que le nombre de particules est constant, pour $l > K$:

$$\bar{\Theta}^{(l)} = \frac{1}{l-K} \sum_{j=K+1}^l \hat{\Theta}^{(j)} \quad \text{et} \quad \bar{x}_{n_k}^{(l)} = \frac{1}{l-K} \sum_{j=K+1}^l \hat{x}_{n_k}^{(j)}. \quad (4)$$

Quand le modèle de Markov caché s'écrit sous la forme d'un système déterministe bruité, Θ se décomposant en (Θ_1, Θ_2) avec Θ_1 les paramètres de la partie déterministe du modèle d'évolution et d'observation, et Θ_2 les paramètres de bruits, nous proposons une version conditionnelle de l'algorithme : l'estimation des états cachés et de Θ_1 étant réalisée en supposant Θ_2 connu. En pratique, des paramètres de bruits faibles même relativement différents des paramètres de bruits réels assurent une convergence de l'algorithme vers des estimations satisfaisantes des paramètres de la partie déterministe du modèle et des états cachés. L'initialisation de l'algorithme est ainsi possible, en prenant un Θ_2 correspondant à des bruits faibles (des écarts types de 0.01 dans nos tests). Ainsi, une fois estimé les paramètres Θ_1 et les états cachés, nous pouvons estimer directement les réalisations des bruits de modélisation et d'observation, et donc les paramètres Θ_2 . On relance alors l'algorithme avec la nouvelle valeur de Θ_2 et on itère jusqu'à convergence.

Notons que les itérations successives du filtrage font que la distribution a posteriori des paramètres n'est pas représentative de l'incertitude sur ces paramètres mais bien des incertitudes liées au fait que l'algorithme soit stochastique. Afin de déterminer l'intervalle de confiance sur les paramètres, nous mettons en oeuvre la méthode de bootstrap paramétrique [4]. Ceci est rendu possible car la version conditionnelle de l'algorithme permet une estimation satisfaisante des paramètres Θ_2 (cf. Table 1), et donc de simuler des échantillons de données virtuelles sur lesquelles réaliser nos estimations pour évaluer les distributions des paramètres.

4 Application à l'estimation des paramètres d'un modèle de croissance de plantes

Comme bien souvent pour les systèmes biologiques, la paramétrisation des modèles fonctionnels de croissance de plantes est délicate : les modèles sont non-linéaires, souvent

surparamétrés, avec des données expérimentales difficiles à acquérir [3]. Un problème important reste l'évaluation de l'incertitude sur les paramètres. L'application de la méthode de filtrage par noyaux de convolution itératif semble apporter une solution robuste et générique au type de problèmes rencontrés pour ces modèles.

4.1 Modèle stochastique de croissance

Nous présentons un modèle de croissance de la betterave pour illustrer les performances de la méthode, à l'échelle de temps journalière. Deux compartiments d'organes sont considérés, le feuillage et la racine. Ces équations peuvent être généralisées à bien d'autres plantes sans difficulté.

Production de biomasse : $Q(t)$ est la production de biomasse au jour t obtenue par la loi de Beer-Lambert [7] :

$$Q(t) = (\mu \cdot PAR(t) (1 - e^{-\lambda Q_g(t)})) \cdot (1 + \eta_Q(t)) \quad (5)$$

avec Q_g masse foliaire verte (active pour la photosynthèse), PAR le rayonnement photosynthétiquement actif, et le bruit de modélisation $\eta_Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Q^2)$.

Allocation entre les deux compartiments feuilles et racine :

$$Q_f(t+1) = Q_f(t) + \gamma(t) \cdot Q(t) \quad (6)$$

$$Q_r(t+1) = Q_r(t) + (1 - \gamma(t)) \cdot Q(t) \quad (7)$$

La fonction γ est définie par :

$$\gamma(t) = \gamma(\tau(t)) = (\gamma_0 + (\gamma_f - \gamma_0) \cdot G_a(\tau)) \cdot (1 + \eta_\gamma(t)) \quad (8)$$

avec $\tau(t)$ le temps thermique (correspondant à la température journalière cumulée, depuis le semis), G_a la distribution cumulée de la loi log-normale, de paramètres μ_a, s_a , et le bruit de modélisation $\eta_\gamma(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\gamma^2)$.

Sénescence : La masse foliaire sénescente Q_s (non active pour la photosynthèse) est une proportion de la masse foliaire accumulée déterminée également par la distribution cumulée d'une loi log-normale de paramètres μ_s, s_s :

$$Q_s(t) = G_s(\tau(t))Q_f(t) \quad (9)$$

On en déduit alors simplement la masse foliaire verte Q_g :

$$Q_g(t) = Q_f(t) - Q_s(t) \quad (10)$$

Observations expérimentales :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Q_g(t) \cdot (1 + \epsilon_g(t)) \\ Q_s(t) \cdot (1 + \epsilon_s(t)) \\ Q_r(t) \cdot (1 + \epsilon_r(t)) \end{pmatrix} \quad (11)$$

avec des bruits d'observation $\epsilon_g(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_g^2)$, $\epsilon_s(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2)$ et $\epsilon_r(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_r^2)$.

4.2 Estimation des paramètres par filtrage à noyaux de convolution itératif

Par simulation du modèle stochastique, nous générons un vecteur d'observations Y^{exp} avec des observations tous les 5 jours, jusqu'au jour 140 (soit 28 dates d'observations), et nous estimons $\Theta_1 = (\mu, \mu_a, \mu_s)$ et $\Theta_2 = (\sigma_Q, \sigma_\gamma, \sigma_g, \sigma_s, \sigma_r)$ par la version conditionnelle du filtrage itératif (en considérant Θ_2 connu, en l'estimant à partir des états cachés, puis en répétant l'opération avec la nouvelle valeur de Θ_2). Nous utilisons 10000 particules, 300 itérations du filtrage et 3 répétitions de la version conditionnelle avec mise à jour de Θ_2 .

Dans la figure 1, nous illustrons la convergence de l'estimation des paramètres (moyennée, cf. Équation (4)) après la période de burn-in avec un grand nombre d'itérations largement suffisant. La figure 2 illustre elle l'estimation des états cachés Q_r et Q_g . Celle-ci se révèle très bonne malgré les bruits d'observation relativement importants.

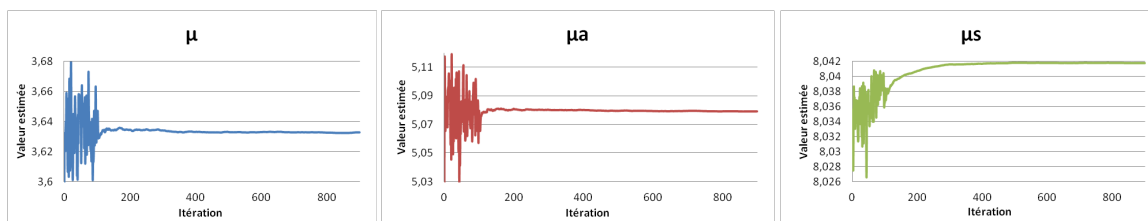


FIGURE 1 – Évolution de l'estimation moyennée (cf. Équation (4)) des paramètres μ , μ_{alloc} , μ_{sen} en fonction du nombre d'itérations du filtre et après une période de burn-in de 100 itérations

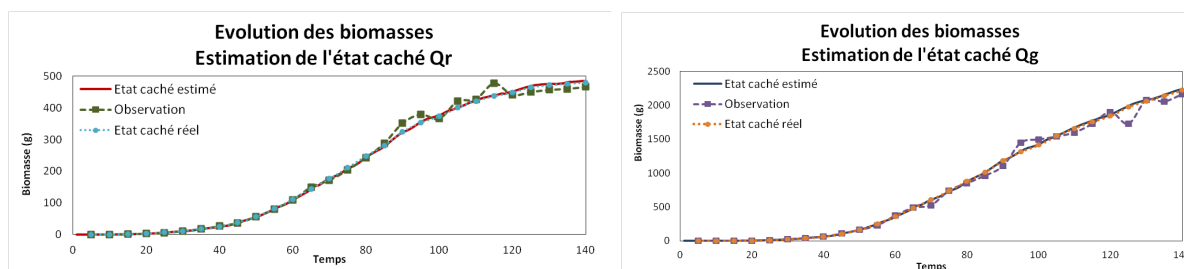


FIGURE 2 – Comparaison des états cachés estimés, des états cachés réels et des observations pour la masse racinaire Q_r et la masse foliaire Q_g

Afin d'étudier le biais d'estimation de l'algorithme, pour les paramètres Θ_1 et Θ_2 , nous répétons l'algorithme pour 100 jeux d'observations générés pour Y^{exp} (avec les vraies valeurs de Θ_2) et présentons les résultats dans la Table 1. Notons que dans un cas d'estimation réelle, la même procédure serait réalisée pour le bootstrap paramétrique, en prenant la valeur de Θ_2 estimée.

Estimation des paramètres	μ		μ_a		μ_s	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
Vraie valeur	3,67		5,04		8,034	
Moyenne	3,6672	$\pm 0,0312$	5,0390	$\pm 0,0254$	8,0355	$\pm 0,0069$
Estimation des bruits de modélisation	η_Q		η_γ			
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type		
σ_Q, σ_γ (vraie valeur 0.02)	0,0253	$\pm 0,0071$	0,0236	$\pm 0,0039$		
Estimation des bruit d'observations	ϵ_g		ϵ_s		ϵ_r	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
$\sigma_g, \sigma_s, \sigma_r$ (vraie valeur 0.05)	0,0537	$\pm 0,0073$	0,0580	$\pm 0,0142$	0,0548	$\pm 0,0087$

TABLE 1 – Estimation des paramètres du modèle de croissance avec la méthode du filtrage itératif dans sa version conditionnelle pour l'estimation des bruits (moyennes et écarts-types basées sur 100 tests).

La méthode d'estimation se révèle non biaisée pour les paramètres fonctionnels du modèle (Θ_1), et avec un léger biais pour les paramètres du modèle de bruit (Θ_2). Ce biais peut s'expliquer par le nombre relativement faible d'observations (28) qui sont utilisées pour l'estimation de (Θ_2) à partir des états cachés. Le biais diminue si le nombre d'observations augmente. Cette estimation satisfaisante des bruits est intéressante car elle permet dans les cas réels de lancer une procédure de bootstrap paramétrique [4] pour évaluer l'incertitude sur les paramètres.

4.3 Résultats avec et sans itération du filtrage

Avec le même modèle, dans le même cas d'observations rares, en considérant les paramètres de bruit connus, nous comparons les performances du filtrage avec et sans itération. Pour différents nombres de particules M , nous estimons μ , μ_a , σ_a et σ_s pour 700 jeux de données dans le cas sans itération et 200 dans le cas itératif générés à partir du même vecteur de paramètres. Au bout d'un moment, l'augmentation du nombre de particules ne permet plus d'améliorer la qualité de l'estimation pour le filtre sans itération, qui se révèle moins bon que le filtre itératif ici.

	Filtre sans itération, $M =$		100		1000		10000		100000	
	vraie valeur	moyenne	IC95%	moyenne	IC95%	moyenne	IC95%	moyenne	IC95%	
μ	3,67	3,119	[3,016 ; 3,216 [3,593	[3,526 ; 3,667 [3,642	[3,591 ; 3,689 [3,648	[3,592 ; 3,676 [
μ_a	5,04	4,521	[4,354 ; 4,689 [4,985	[4,861 ; 5,180 [5,134	[5,026 ; 5,198 [5,140	[5,051 ; 5,177 [
s_a	0,931	1,404	[0,935 ; 1,583 [1,228	[0,705 ; 1,450 [0,803	[0,697 ; 1,047 [0,782	[0,701 ; 0,979 [
μ_s	8,034	8,581	[7,942 ; 9,431 [8,080	[7,948 ; 8,999 [8,054	[8,020 ; 8,086 [8,053	[8,027 ; 8,074 [
	Filtre itératif (1400 itér.), $M =$		1000		10000					
	vraie valeur		moyenne	IC95%	moyenne	IC95%				
μ	3,67		3,669	[3,609 ; 3,740 [3,674	[3,616 ; 3,721 [
μ_a	5,04		5,049	[4,919 ; 5,155 [5,033	[4,952 ; 5,124 [
s_a	0,931		0,915	[0,816 ; 1,022 [0,935	[0,873 ; 0,993 [
μ_s	8,034		8,039	[8,023 ; 8,053 [8,036	[8,025 ; 8,047 [

TABLE 2 – Comparaison du filtrage avec et sans itération pour différents nombres de particules M

5 Conclusion

Cet article introduit la méthode de filtrage particulaire itératif à noyaux de convolution pour les modèles de Markov cachés, et sa version conditionnelle pour l'estimation des paramètres de bruits dans le cadre de système dynamique stochastique. Les résultats présentés pour un modèle de croissance de plantes, à observations rares sont excellents pour l'estimation des paramètres fonctionnels (partie déterministe du modèle), et satisfaisants en ce qui concerne l'estimation des états cachés et l'estimation des paramètres de bruits, ce qui permet par bootstrap paramétrique d'évaluer l'incertitude d'estimation des paramètres, problématique toujours importante pour les modèles biologiques.

D'autres tests ont pu être accomplis sur différents modèles conduisant aux mêmes résultats. La méthode est robuste et très générique. Des comparaisons ont été faites avec la méthode de filtrage à noyaux de convolution classique [1] et ont démontré l'intérêt de la méthode itérative quand le nombre d'observations est limité, même en prenant des nombres de particules bien plus grands pour la méthode classique. Il serait intéressant de comparer la méthode itérative avec les méthodes de lissage [5]. Une difficulté de la méthode est son temps de calcul important. Des tests sont en cours pour comprendre la convergence, en particulier l'équilibre entre nombre de particules et nombre d'itérations.

Références

- [1] F. Campillo and V. Rossi. Convolution Particle Filter for Parameter Estimation in General State-Space Models. *IEEE Transactions in Aerospace and Electronics.*, 45(3) :1063–1072, 2009.
- [2] O. Cappé, E. Moulines, and T. Rydén. *Inference in Hidden Markov Models*. Springer, New York, 2005.
- [3] P.-H. Cournède, V. Letort, A. Mathieu, M.-Z. Kang, S. Lemaire, S. Trevezas, F. Houllier, and P. de Reffye. Some parameter estimation issues in functional-structural plant modelling. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 6(2) :133–159, 2011.
- [4] B. Efron and R.J. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics and Applied Probability, 1994.
- [5] G. Kitagawa. Monte carlo filter and smoother for non-gaussian nonlinear state space models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(1) :1–25, 1996.
- [6] A. Kong, J. Liu, and W.H. Wong. Sequential Imputations and Bayesian Missing Data Problems. *Journal of the American Statistical Association*, 89(425) :278–288, 1994.
- [7] T. Nilson. A theoretical analysis of the frequency of gaps in plant stands. *Agricultural and Forest Meteorology*, 8 :25–38, 1971.
- [8] V. Rossi. *Filtrage non linéaire par noyaux de convolution - Application à un procédé de dépollution biologique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure Agronomique de Montpellier, 2004.