



**HAL**  
open science

# Modélisation stochastique en grande dimension et identification en inverse aux travers de problèmes aux limites de champs de tenseurs aléatoires non gaussiens

Christian Soize

► **To cite this version:**

Christian Soize. Modélisation stochastique en grande dimension et identification en inverse aux travers de problèmes aux limites de champs de tenseurs aléatoires non gaussiens. 20ème Congrès Français de Mécanique 2011 - Colloque "Rencontre Mathématiques - Mécanique", Université de Besançon, Aug 2011, Besançon, France. pp.1-10. hal-00773380

**HAL Id: hal-00773380**

**<https://hal.science/hal-00773380>**

Submitted on 13 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation stochastique en grande dimension et identification en inverse aux travers de problèmes aux limites de champs de tenseurs aléatoires non gaussiens

C. SOIZE<sup>a</sup>

a. Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle (MSME UMR 8208 CNRS),  
5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

## Résumé :

*On présente une modélisation probabiliste et l'identification de champs stochastiques non gaussiens à valeurs tensorielles à l'aide de données expérimentales partielles relatives à un vecteur observation de la solution d'un problème aux limites stochastique, ce dernier étant fonction du champ aléatoire à valeurs tensorielles qui doit être identifié. La modélisation stochastique est basée sur l'introduction d'un modèle probabiliste a priori du champ de tenseur non gaussien et de son développement sur les chaos polynomiaux gaussiens avec coefficients aléatoires. La méthodologie d'identification en inverse est basée sur la formulation et la résolution de plusieurs problèmes d'optimisation, le dernier étant celui relatif à la construction du modèle probabiliste a posteriori adaptée à la très grande dimension. La méthodologie est illustrée dans le cadre d'un problème d'élasticité linéaire tridimensionnelle pour de matériaux ayant une microstructure complexe hétérogène.*

## Abstract :

*We present the probabilistic modeling and the identification of non-Gaussian tensor-valued random fields using partial experimental data relative to a partial observation vector of the solution of a stochastic boundary value problem, the latter being a function of the tensor-valued random field which must be identified. Stochastic modeling is based on the introduction of a probabilistic model of a prior non-Gaussian tensor-valued random field and its development on the polynomial Gaussian chaos with random coefficients. The identification methodology is based on several optimization problems, the last being on the construction of a posterior probabilistic model adapted to high dimension. The methodology is illustrated through a three-dimensional linear elasticity problem for materials with a complex heterogeneous microstructure.*

**Mots clefs : 3 maximum : champ aléatoire ; non gaussien ; identification**

## 1 Introduction

Nous présentons les principaux résultats d'une recherche récente publiée dans [20] avec ses extensions soumis dans [22]. Cette recherche est consacrée à l'identification des Coefficients Aléatoires Vectorielles (CAV) du Développement en Chaos Polynomiaux (DCP) en grande dimension d'un champ de tenseur aléatoire non gaussien inconnue, l'identification étant faite à l'aide de données expérimentales partielles et limitées, au travers un Problème Aux Limites (PAL). Les données expérimentales sont liées à un vecteur d'observation qui est la solution du PAL qui dépend du champ de tenseur stochastique à identifier. Une nouvelle méthodologie est proposée pour résoudre ce problème très difficile en grande dimension. Rappelons que la méthodologie pour construire le DCP d'un champ aléatoire a été proposé dans [6] en se basant sur les travaux de Wiener [26]. Depuis de nombreuses méthodologies ont été développées dans ce domaine (voir par exemple [7, 4, 15, 9, 16, 23, 11, 18, 10, 24, 12]). Les méthodes stochastiques inverses et les approches Bayésiennes ont reçues une attention particulière (voir par exemple [25, 8, 27, 13, 14]). L'identification, à l'aide de données expérimentales, des CAV déterministes du DCP d'un champ non-gaussien à valeurs réelles en utilisant le maximum de vraisemblance a été analysée dans [5] et, plus récemment, a été revisitée dans [3]. Dans [2],

les auteurs proposent de construire le modèle stochastique des CAV aléatoires du DCP à l'aide de la distribution d'échantillonnage asymptotique gaussienne construit avec l'information de Fisher. Dans le travail [1], en continuité de [19], l'identification bayésienne des distributions *a posteriori* des CAV aléatoires du DCP est proposée. Néanmoins, cette approche très intéressante n'est pas adaptée aux problèmes en très grande dimension (cas pour lequel plusieurs millions de variables aléatoires devraient être identifiées). C'est la raison pour laquelle nous proposons, dans cette communication, un résumé d'une nouvelle méthodologie pour les problèmes en très grande dimension [20, 21, 22].

## 2 Définition du problème à résoudre

(1) *Problème Aux Limites Stochastiques*. On considère un PAL pour un champ vectoriel  $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \Omega\}$  défini sur un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  de point générique  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Ce PAL dépend d'un champ stochastique non gaussien à valeurs dans les tenseurs du 4ème ordre  $\{\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$  avec  $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{C}_{ijkl}(\mathbf{x})\}_{ijkl}$ , inconnu et à identifier en inverse. Le champ  $\mathbf{u}$  est mesuré seulement sur la partie  $\Gamma_{\text{obs}}$  du bord  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_{\text{obs}} \cup \Gamma$  du domaine  $\Omega$ .

(2) *Approximation par la méthode des Eléments Finis (EF)*. Le PAL stochastique est discrétisé par la méthode des EF. Soit  $\mathcal{I} = \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{N_p}\} \subset \Omega$  la partie finie de  $\Omega$  constituée des points d'intégration des EF utilisés dans le maillage de  $\Omega$ . Pour tout  $\mathbf{x}$  fixé,  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  est représenté par la matrice  $(21 \times 21)$  aléatoire  $[\mathbf{A}(\mathbf{x})]$  telle que  $[\mathbf{A}(\mathbf{x})]_{IJ} = \mathbf{C}_{ijkh}(\mathbf{x})$  avec une correspondance  $I = (i, j)$  et  $J = (k, h)$ . Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}^{\text{obs}}, \mathbf{U}^{\text{nobs}})$  le vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_{\text{obs}}} \times \mathbb{R}^{m_{\text{nobs}}}$ , avec  $m = m_{\text{obs}} + m_{\text{nobs}}$ , constitué de tous les Degrés De Liberté (DDL) de l'approximation EF du champ  $\mathbf{u}$ . Le vecteur aléatoire  $\mathbf{U}^{\text{obs}} = (U_1^{\text{obs}}, \dots, U_{m_{\text{obs}}}^{\text{obs}})$  des observations est constitué des  $m_{\text{obs}}$  DDL observés pour lesquels il y a des mesures. Le vecteur aléatoire  $\mathbf{U}^{\text{nobs}} = (U_1^{\text{nobs}}, \dots, U_{m_{\text{nobs}}}^{\text{nobs}})$  est constitué de tous les autres DDL (surfaciques et volumiques) non observés et seront utilisés pour contrôler la qualité de l'identification. Le vecteur aléatoire  $\mathbf{U}$  est donc une transformation non linéaire des  $N_p$  matrices aléatoires dépendantes  $\{[\mathbf{A}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \mathcal{I}\}$ . Cet ensemble fini de matrices aléatoires est représenté par un vecteur aléatoire  $\mathbb{V} = (V_1, \dots, V_{m_v})$ . Par conséquent, on peut écrire

$$\mathbf{U} = \mathbf{h}(\mathbb{V}) \quad , \quad \mathbf{U}^{\text{obs}} = \mathbf{h}^{\text{obs}}(\mathbb{V}) \quad , \quad \mathbf{U}^{\text{nobs}} = \mathbf{h}^{\text{nobs}}(\mathbb{V}) \quad , \quad (1)$$

avec  $v \mapsto \mathbf{h}(v) = (\mathbf{h}^{\text{obs}}(v), \mathbf{h}^{\text{nobs}}(v))$  une application non linéaire déterministe (mesurable) de  $\mathbb{R}^{m_v}$  dans  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_{\text{obs}}} \times \mathbb{R}^{m_{\text{nobs}}}$  qui peut être construite numériquement "point par point" en résolvant le PAL discrétisé.

(3) *Données expérimentales*. On suppose que l'on dispose de  $\nu_{\text{exp}}$  données expérimentales  $\mathbf{u}^{\text{exp},1}, \dots, \mathbf{u}^{\text{exp},\nu_{\text{exp}}}$  dans  $\mathbb{R}^m$  pour le vecteur observation  $\mathbf{U}^{\text{obs}}$  avec  $\nu_{\text{exp}}$  relativement petit (données expérimentales partielles et limitées). Ces données sont considérées comme  $\nu_{\text{exp}}$  réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{U}^{\text{exp}}$  défini sur l'espace probabilisé  $(\Theta^{\text{exp}}, \mathcal{T}^{\text{exp}}, \mathcal{P}^{\text{exp}})$  et correspondant au vecteur aléatoire des observations  $\mathbf{U}^{\text{obs}}$  (les vecteurs aléatoires  $\mathbf{U}^{\text{exp}}$  et  $\mathbf{U}^{\text{obs}}$  ne sont pas définis sur le même espace probabilisé).

(4) *Problème stochastique inverse à résoudre*. Le problème à résoudre est l'identification du vecteur aléatoire non gaussien  $\mathbb{V}$  qui représente la discrétisation du champ stochastique  $\{\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$ , en utilisant les données expérimentales partielles et limitées  $\mathbf{u}^{\text{exp},1}, \dots, \mathbf{u}^{\text{exp},\nu_{\text{exp}}}$  relatives au vecteur aléatoire des observations  $\mathbf{U}^{\text{obs}}$  tel que  $\mathbf{U}^{\text{obs}} = \mathbf{h}^{\text{obs}}(\mathbb{V})$  avec  $\mathbf{h}^{\text{obs}}$  une application non linéaire déterministe et connue.

## 3 Méthodologie d'identification du DCP en grande dimension avec des données expérimentales partielles et limitées

La méthodologie proposée pour l'identification des coefficients aléatoires, en grande dimension, du développement en chaos polynômiaux de la discrétisation du champ stochastique à valeurs tensorielles à l'aide de données expérimentales partielles et limitées est constituée de 6 étapes.

**Etape 1.** *Introduction d'une famille de Modèles Algébriques Stochastiques (MAS) a priori pour le vecteur aléatoire  $\mathbb{V}$* . Par hypothèse, les données expérimentales partielles ne sont pas suffisantes pour estimer la matrice

de covariance  $[C_V]$  qui doit être connue si l'on veut pouvoir construire une représentation statistique réduite à l'aide d'une analyse en composante principale de  $\mathbb{V}$  (ce qui correspond à un développement de Karhunen-Loeve tronqué du champ stochastique  $\{[\mathbf{A}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \Omega\}$ ). De plus on veut que la représentation statistique réduite ait la capacité de vérifier les propriétés mathématiques de la famille de matrices aléatoires  $\{[\mathbf{A}(\mathbf{x}^1)], \dots, [\mathbf{A}(\mathbf{x}^{N_p})]\}$  (par exemple des propriétés de positivité). Pour contourner ces deux difficultés, on propose d'introduire une famille  $\{[\mathbf{A}^{\text{MAS}}(\mathbf{x}; \mathbf{w})], \mathbf{x} \in \Omega\}_{\mathbf{w}}$  de Modèles Algébriques Stochastiques (MAS) *a priori* du champ stochastique  $\{[\mathbf{A}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \Omega\}$  à valeurs matricielles. On en déduit une famille  $\{\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w})\}_{\mathbf{w}}$  du MAS de  $\mathbb{V}$ . Cette famille est définie sur  $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$  et dépend d'un paramètre vectoriel  $\mathbf{w}$  appartenant à un ensemble admissible  $\mathcal{C}_{\text{ad}}$ . Cela signifie que la famille  $\{P_{\mathbb{V}}^{\text{MAS}}(dv; \mathbf{w}), \mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\text{ad}}\}$  de mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}^{m_v}$  de la famille de vecteurs aléatoires  $\{\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\text{ad}}\}$  est parfaitement déterminée. De plus on suppose qu'un générateur est construit pour calculer  $\nu_{\text{KL}}$  réalisations indépendantes  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\theta_1; \mathbf{w}), \dots, \mathbb{V}^{\text{MAS}}(\theta_{\nu_{\text{KL}}}; \mathbf{w})$  pour  $\theta_1, \dots, \theta_{\nu_{\text{KL}}}$  dans  $\Theta$ . En pratique, le vecteur  $\mathbf{w}$  doit être choisi de petite dimension. Par exemple les composantes de  $\mathbf{w}$  seront la valeur moyenne  $[\underline{A}]$ , les longueurs de corrélation spatiale et des paramètres qui permettent de contrôler le niveau de fluctuations statistiques du champ  $\{[\mathbf{A}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \Omega\}$ .

**Etape 2. Identification du modèle algébrique stochastique optimale à l'aide des données expérimentales.** On utilise les données expérimentales  $\{\mathbf{u}^{\text{exp},1}, \dots, \mathbf{u}^{\text{exp},\nu_{\text{exp}}}\}$  pour identifier la valeur optimale  $\mathbf{w}^{\text{opt}}$  de  $\mathbf{w}$ . En utilisant le modèle numérique (voir l'Eq. (1)) et la famille  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w})$  de MAS pour  $\mathbb{V}$ , on construit la famille  $\{\mathbf{U}^{\text{obs},\text{MAS}}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\text{ad}}\}$  des vecteurs aléatoires des observations, telle que  $\mathbf{U}^{\text{obs},\text{MAS}}(\mathbf{w}) = \mathbf{h}^{\text{obs}}(\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w}))$  pour  $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\text{ad}}$ . Le MAS optimal est obtenu en résolvant un problème d'optimisation qui permet d'obtenir la valeur optimale  $\mathbf{w}^{\text{opt}}$  de  $\mathbf{w}$ . On peut utiliser pour cela une méthode des moindres carrés (pondérée ou non) qui minimise la distance de la famille  $\{\mathbf{U}^{\text{obs},\text{MAS}}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \in \mathcal{C}_{\text{ad}}\}$  à la famille expérimentale  $\{\mathbf{u}^{\text{exp},1}, \dots, \mathbf{u}^{\text{exp},\nu_{\text{exp}}}\}$  ou encore, la méthode du maximum de vraisemblance. On obtient alors le MAS optimal  $\mathbb{V}^{\text{MAS}} = \mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w}^{\text{opt}})$ .

**Etape 3. Représentation stochastique réduite du MAS optimal.** Soient  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\theta_1), \dots, \mathbb{V}^{\text{MAS}}(\theta_{\nu_{\text{KL}}})$  les  $\nu_{\text{KL}}$  réalisations indépendantes de  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}$ . Le vecteur moyen  $\underline{\mathbb{V}} = E\{\mathbb{V}^{\text{MAS}}\}$  et la matrice de covariance  $[C_{\mathbb{V}^{\text{MAS}}}] = E\{(\mathbb{V}^{\text{MAS}} - \underline{\mathbb{V}})(\mathbb{V}^{\text{MAS}} - \underline{\mathbb{V}})^T\}$  sont estimés en utilisant les estimateurs statistiques usuelles et les réalisations indépendantes  $\{\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\theta_\ell), \ell = 1, \dots, \nu_{\text{KL}}\}$ . Soit  $[\mathbb{W}] = [\mathbb{W}^1 \dots \mathbb{W}^n]$  la matrice des  $n$  vecteurs propres de  $[C_{\mathbb{V}^{\text{MAS}}}]$  associés aux  $n$  plus grandes valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ . La représentation stochastique réduite du MAS optimal s'écrit alors

$$\mathbb{V}^{\text{MAS}} \simeq \underline{\mathbb{V}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \eta_j^{\text{MAS}} \mathbb{W}^j \quad , \quad (2)$$

avec  $\boldsymbol{\eta}^{\text{MAS}} = (\eta_1^{\text{MAS}}, \dots, \eta_n^{\text{MAS}})$  une variable aléatoire du second ordre, à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que

$$E\{\boldsymbol{\eta}^{\text{MAS}}\} = \mathbf{0} \quad , \quad E\{\boldsymbol{\eta}^{\text{MAS}} (\boldsymbol{\eta}^{\text{MAS}})^T\} = [I_n] \quad . \quad (3)$$

La convergence en moyenne d'ordre deux du membre de droite de l'Eq. (2) par rapport à  $n$  est étudiée en construisant la fonction d'erreur  $n \mapsto \text{err}(n) = 1 - (\sum_{j=1}^n \lambda_j) / \text{tr}[C_{\mathbb{V}^{\text{MAS}}}]$  qui est une fonction monotone décroissante. Les  $\nu_{\text{KL}}$  réalisations indépendantes  $\boldsymbol{\eta}^{\text{MAS}}(\theta_1), \dots, \boldsymbol{\eta}^{\text{MAS}}(\theta_{\nu_{\text{KL}}})$  sont calculées par la relation  $\eta_j^{\text{MAS}}(\theta_\ell) = \lambda_j^{-1/2} (\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\theta_\ell) - \underline{\mathbb{V}})^T \mathbb{W}^j$ .

**Etape 4. Développement en chaos polynomiaux (DCP) avec des coefficients à valeurs vectorielles (CAV) déterministes de la représentation stochastique réduite du MAS optimal.** Cette étape consiste à construire la représentation suivante

$$\boldsymbol{\eta}^{\text{MAS}} \simeq \boldsymbol{\eta}^{\text{chaos}}(N) \quad , \quad \boldsymbol{\eta}^{\text{chaos}}(N) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{y}^\alpha \Psi_\alpha(\boldsymbol{\Xi}) \quad , \quad (4)$$

dans laquelle les variables aléatoires réelles  $\Psi_1(\boldsymbol{\Xi}), \dots, \Psi_N(\boldsymbol{\Xi})$  sont les polynômes d'Hermite normalisés, renumérotés, du vecteur aléatoire Gaussien normalisé  $\boldsymbol{\Xi} = (\Xi_1, \dots, \Xi_{N_g})$  (donc  $E\{\boldsymbol{\Xi}\} = \mathbf{0}$  et  $E\{\boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\Xi}^T\} =$

$[I_{N_g}]$ ) et défini sur  $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ , tels que, pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\{1, \dots, N\}$ ,

$$E\{\Psi_\alpha(\Xi)\} = 0 \quad , \quad E\{\Psi_\alpha(\Xi) \Psi_\beta(\Xi)\} = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (5)$$

où  $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbol de Kronecker. Le polynôme constant qui correspond à l'indice  $\alpha = 0$  n'est pas inclus dans l'Eq. (4). Soit  $N_d$  le degré maximum des polynômes d'hermite utilisés dans le développement. Alors le nombre  $N$  de chaos dans l'Eq. (4) est

$$N = f(N_g, N_d) = (N_d + N_g)! / (N_d! N_g!) - 1 \quad . \quad (6)$$

Dans l'Eq. (4)), le symbole " $\simeq$ " signifie que la convergence est en moyenne d'ordre deux pour  $N$  suffisamment grand. Les CAV déterministes sont les  $N$  vecteurs  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui vérifient, compte tenu des Eqs. (3) et (5),

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{y}^\alpha \mathbf{y}^{\alpha T} = [I_n] \quad . \quad (7)$$

Soit  $e \mapsto p_{\eta_j^{\text{MAS}}}(e)$  la fonction de densité de probabilité (f.d.p) de  $\eta_j^{\text{MAS}}$ . Pour tout  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N$  fixé dans  $\mathbb{R}^n$  et satisfaisant l'Eq. (7)), soit  $e \mapsto p_{\eta_j^{\text{chaos}}(N)}(e; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N)$  la f.d.p de  $\eta_j^{\text{chaos}}(N)$ . La convergence de la suite de vecteurs aléatoires  $\{\eta^{\text{chaos}}(N)\}_N$  vers  $\eta^{\text{MAS}}$  est contrôlée avec la fonction d'erreur suivante,

$$\text{err}_j(N_g, N_d) = \int_{\text{BI}_j} |\log_{10} p_{\eta_j^{\text{MAS}}}(e) - \log_{10} p_{\eta_j^{\text{chaos}}(N)}(e; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N)| de \quad , \quad (8)$$

où  $\text{BI}_j$  est un interval borné de  $\mathbb{R}$ , adapté au problème (voir [20]). L'estimation de  $p_{\eta_j^{\text{MAS}}}(e)$  est faite par la méthode des noyaux gaussiens en utilisant les réalisations indépendantes  $\eta_j^{\text{MAS}}(\theta_1), \dots, \eta_j^{\text{MAS}}(\theta_{\nu_{\text{KL}}})$  calculées à l'étape 3. De même, pour des valeurs fixées des vecteurs  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N$ , l'estimation de  $p_{\eta_j^{\text{chaos}}(N)}(e; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N)$  est faite en utilisant l'Eq. (4) et les  $\nu$  réalisations indépendantes  $\Xi(\theta_1), \dots, \Xi(\theta_\nu)$  du vecteur gaussien  $\Xi$  avec  $\theta_1, \dots, \theta_\nu$  in  $\Theta$ . Pour le vecteur aléatoire  $\eta^{\text{chaos}}(N)$ , l'erreur  $\text{err}(N_g, N_d)$  est définie par

$$\text{err}(N_g, N_d) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{err}_j(N_g, N_d) \quad . \quad (9)$$

Il est à noter que les Eqs. (8) et (9) ne sont pas utilisées pour identifier  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N$ , mais seulement pour évaluer, pour chaque valeur de  $N$  et pour des valeurs fixées de  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N$ , la qualité de l'approximation  $\eta^{\text{MAS}} \simeq \eta^{\text{chaos}}(N)$ . Pour  $N$  fixé, l'identifications de  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N$  est faite par le maximum de vraisemblance comme proposé dans [5] puis réutilisé par [2, 20]. Comme les variables aléatoires  $\eta_1^{\text{MAS}}, \dots, \eta_n^{\text{MAS}}$  sont dépendantes mais non corrélées, on utilise l'approximation suivante du log de la fonction de vraisemblance,

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{\nu_{\text{KL}}} \log_{10} p_{\eta_j^{\text{chaos}}(N)}(\eta_j^{\text{MAS}}(\theta_\ell); \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N) \quad . \quad (10)$$

La valeur optimale  $(\underline{\mathbf{y}}^1, \dots, \underline{\mathbf{y}}^N)$  de  $(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N)$  est alors donnée par

$$(\underline{\mathbf{y}}^1, \dots, \underline{\mathbf{y}}^N) = \arg \max_{(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N) \in \mathcal{C}_{\text{ad}}^N} \mathcal{L}(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N) \quad , \quad (11)$$

avec  $\mathcal{C}_{\text{ad}}^N = \{(\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N) \in (\mathbb{R}^n)^N, \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{y}^\alpha \mathbf{y}^{\alpha T} = [I_n]\}$ . Pour la grande dimension, c'est-à-dire pour  $n \times N$  très grand (plusieurs millions), le problème d'optimisation défini par l'Eq. (11) est très difficile et n'a été résolu dans la décade passée que pour des petites valeurs de  $n$  et  $N$ . Ce problème a pu être résolu dans [20, 21] que grâce à l'introduction de deux nouveaux algorithmes. Le vecteur aléatoire  $\mathbf{U}^{\text{MAS}} = (\mathbf{U}^{\text{obs}, \text{MAS}}, \mathbf{U}^{\text{noobs}, \text{MAS}})$  construit avec le modèle numérique stochastique correspondant au MAS optimal représenté par le DCP, est donné par  $\mathbf{U}^{\text{MAS}} = \mathbf{h}(\nabla^{\text{MAS}})$  avec  $\nabla^{\text{MAS}} \simeq \underline{\mathbb{V}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \eta_j^{\text{MAS}} \mathbb{W}^j$  avec  $\eta^{\text{MAS}} \simeq \sum_{\alpha=1}^N \underline{\mathbf{y}}^\alpha \Psi_\alpha(\Xi)$ . Les réalisations indépendantes  $\{\mathbf{U}^{\text{MAS}}(\theta_\ell), \ell = 1, \dots, \nu\}$  de  $\mathbf{U}^{\text{MAS}}$  peuvent alors être calculées. Pour  $1 \leq k \leq m_{\text{obs}}$ ,



on en déduit les réalisations indépendantes de chaque composante  $U_k^{\text{MAS}}$  du vecteur aléatoire des observations  $\mathbf{U}^{\text{obs},\text{MAS}}$ , et pour  $m_{\text{obs}} + 1 \leq k \leq m$ , de chaque composante  $U_k^{\text{MAS}}$  de  $\mathbf{U}^{\text{nobs},\text{MAS}}$ . La f.d.p  $u_k \mapsto p_{U_k^{\text{MAS}}}(u_k)$  on  $\mathbb{R}$  de  $U_k^{\text{MAS}}$  peut alors être estimée avec ces réalisations indépendantes et la méthode des noyaux gaussiens.

**Etape 5. Modèle stochastique a priori des coefficients aléatoires à valeurs vectorielles.** On introduit le modèle stochastique a priori  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}$  de  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}$ , défini sur  $(\Theta' \times \Theta, \mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}, \mathcal{P}' \otimes \mathcal{P})$ , tel que

$$\mathbb{Y}^{\text{prior}} = \underline{\mathbb{Y}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \eta_j^{\text{prior}} \mathbb{W}^j \quad , \quad (12)$$

avec  $\boldsymbol{\eta}^{\text{prior}} = (\eta_1^{\text{prior}}, \dots, \eta_n^{\text{prior}})$ , défini sur  $(\Theta' \times \Theta, \mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}, \mathcal{P}' \otimes \mathcal{P})$ , tel que

$$\boldsymbol{\eta}^{\text{prior}} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{Y}^{\alpha,\text{prior}} \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\Xi}) \quad , \quad (13)$$

où  $\mathbb{Y}^{\text{prior}} = (\mathbf{Y}^{1,\text{prior}}, \dots, \mathbf{Y}^{N,\text{prior}})$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{nN} = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ , est défini sur  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$ . Pour tout  $(\theta', \theta)$  dans  $\Theta' \times \Theta$ , la réalisation  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}(\theta', \theta)$  de  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}$  s'écrit  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}(\theta', \theta) = \underline{\mathbb{Y}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \eta_j^{\text{prior}}(\theta', \theta) \mathbb{W}^j$  avec  $\boldsymbol{\eta}^{\text{prior}}(\theta', \theta) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{Y}^{\alpha,\text{prior}}(\theta') \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\Xi}(\theta))$  et  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}(\theta') = (\mathbf{Y}^{1,\text{prior}}(\theta'), \dots, \mathbf{Y}^{N,\text{prior}}(\theta'))$ .

Soit  $\varepsilon \geq 0$ . La f.d.p a priori  $\mathbf{y} \mapsto p_{\mathbb{Y}^{\text{prior}}}^{\text{prior}}(\mathbf{y})$  sur  $\mathbb{R}^{nN}$  du vecteur aléatoire  $\mathbb{Y}^{\text{prior}} = (\mathbf{Y}^{1,\text{prior}}, \dots, \mathbf{Y}^{N,\text{prior}})$  est construite comme suit. Les vecteurs aléatoires  $\mathbf{Y}^{1,\text{prior}}, \dots, \mathbf{Y}^{N,\text{prior}}$  sont pris indépendants dans leur ensemble et chaque vecteur aléatoire est écrit  $\mathbf{Y}^{\alpha,\text{prior}} = 2\varepsilon |\underline{\mathbf{y}}^{\alpha}| \mathbb{U}_{\alpha} + \underline{\mathbf{y}}^{\alpha} - \varepsilon |\underline{\mathbf{y}}^{\alpha}|$  avec  $|\underline{\mathbf{y}}^{\alpha}| = (|y_1^{\alpha}|, \dots, |y_n^{\alpha}|)$  les  $N$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  calculés à l'étape 4. Dans cette équation,  $\{\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_N\}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur  $[0, 1]$ , définies sur  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$ . Par conséquent, la composante  $Y_j^{\alpha,\text{prior}}$  de  $\mathbf{Y}^{\alpha,\text{prior}}$  est une variable aléatoire uniforme centrée en  $\underline{y}_j^{\alpha}$  et dont le support de sa loi de probabilité est  $s_j^{\alpha} = [y_j^{\alpha} - \varepsilon |y_j^{\alpha}|, y_j^{\alpha} + \varepsilon |y_j^{\alpha}|]$ . On en déduit que  $E\{\boldsymbol{\eta}^{\text{prior}}\} = 0$  et que  $E\{\mathbf{Y}^{\alpha,\text{prior}}\} = \underline{\mathbf{y}}^{\alpha}$  pour  $\alpha = 1, \dots, N$ . Les fluctuations statistiques de  $\mathbf{Y}^{\alpha,\text{prior}}$  autour de  $\underline{\mathbf{y}}^{\alpha}$  sont contrôlées par  $\varepsilon$ . Si  $\varepsilon = 0$ , alors  $\mathbf{Y}^{\alpha,\text{prior}} = \underline{\mathbf{y}}^{\alpha}$  p.s.

Soit  $\{[\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^1)], \dots, [\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^{N_p})]\}$  la famille des  $N_p$  matrices aléatoires associées au modèle a priori  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}$ . Cette famille doit vérifier une propriété notée  $\mathcal{P}_{\text{rop}}$  (par exemple, pour tout  $k$  in  $\{1, \dots, N_p\}$ ,  $[\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^k)]$  doit être définie positive p.s.). Par construction, pour  $\varepsilon = 0$ , cette propriété  $\mathcal{P}_{\text{rop}}$  est vérifiée. Cependant, pour  $\varepsilon > 0$ , cette propriété peut ne pas être vérifiée pour certaines réalisations. La méthode de réjection est alors utilisée pour construire le sous ensemble des réalisations indépendantes pour lesquelles  $\mathcal{P}_{\text{rop}}$  est satisfaite. Soit  $\varepsilon > 0$ . Soient  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}(\theta'_1), \dots, \mathbb{Y}^{\text{prior}}(\theta'_{\nu'})$  les  $\nu'$  réalisations indépendantes de  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}$ . Soient  $\boldsymbol{\Xi}(\theta_1), \dots, \boldsymbol{\Xi}(\theta_{\nu})$  les  $\nu$  réalisations indépendantes de  $\boldsymbol{\Xi}$ . Pour  $\theta'_{\ell'}$  et  $\theta_{\ell}$  fixés, soit  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}(\theta'_{\ell'}, \theta_{\ell})$  la réalisation de  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}$  et soit  $[\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^1; \theta'_{\ell'}, \theta_{\ell})], \dots, [\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^{N_p}; \theta'_{\ell'}, \theta_{\ell})]$  les réalisations correspondantes de  $[\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^1)], \dots, [\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^{N_p})]$ . Si la famille  $\{[\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^1; \theta'_{\ell'}, \theta_{\ell})], \dots, [\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^{N_p}; \theta'_{\ell'}, \theta_{\ell})]\}$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}_{\text{rop}}$ , alors la réalisation  $(\theta'_{\ell'}, \theta_{\ell})$  est gardée et, si non, elle est rejetée. Pour  $\theta'_{\ell'}$  fixé, on introduit le sous ensemble  $\{\theta_{\ell_1}, \dots, \theta_{\ell_{\tilde{\nu}(\ell')}}}\}$  de  $\{\theta_1, \dots, \theta_{\nu}\}$ , avec  $\tilde{\nu}(\ell') \leq \nu$ , pour lequel la propriété  $\mathcal{P}_{\text{rop}}$  est vérifiée.

Pour tout  $\ell'$  fixé dans  $\{1, \dots, \nu'\}$ , les réalisations  $\mathbf{U}^{\text{prior}}(\theta'_{\ell'}, \theta_{\ell_j})$  pour  $j = 1, \dots, \tilde{\nu}(\ell')$  de  $\mathbf{U}^{\text{prior}} = (\mathbf{U}^{\text{obs},\text{prior}}, \mathbf{U}^{\text{nobs},\text{prior}}) = \mathbf{h}(\mathbb{Y}^{\text{prior}})$  sont calculées avec le modèle numérique stochastique construit avec le modèle a priori  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}$  de  $\mathbb{Y}$ . Pour  $1 \leq k \leq m$ , la f.d.p  $u_k \mapsto p_{U_k^{\text{prior}}}(u_k)$  sur  $\mathbb{R}$  de  $U_k^{\text{prior}}$  est estimée avec ces réalisations indépendantes et la méthode des noyaux gaussiens.

**Etape 6. Modèle stochastique a posteriori des coefficients aléatoires à valeurs vectorielles.**

La méthode de Bayes est utilisée pour construire le modèle a posteriori  $\mathbb{Y}^{\text{post}}$  de  $\mathbb{Y}^{\text{prior}}$ . Pour  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N)$  fixé dans  $\mathbb{R}^{nN} = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ , soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}^{\text{obs}}, \mathbf{U}^{\text{nobs}})$  tel que  $\mathbf{U} = \mathbf{h}(\mathbb{V})$  avec  $\mathbb{V}$  le vecteur aléatoire à valeurs

$\mathbb{R}^{mv}$  tel que  $\mathbb{V} = \underline{\mathbb{V}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \eta_j \mathbb{W}^j$  (voir Eq. (12)) et  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  tel que  $\boldsymbol{\eta} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{y}^\alpha \Psi_\alpha(\boldsymbol{\Xi})$  (voir Eq. (13)). Soit  $\mathbf{u}^{\text{obs}} \mapsto p_{\mathbf{U}^{\text{obs}}|\mathbb{Y}}(\mathbf{u}^{\text{obs}}|\mathbb{y})$  la f.d.p conditionnelle sur  $\mathbb{R}^{m_{\text{obs}}}$  de  $\mathbf{U}^{\text{obs}}$  si  $\mathbb{Y} = (\mathbf{Y}^1, \dots, \mathbf{Y}^N)$  est égal à  $\mathbb{y} = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N)$  in  $\mathbb{R}^{nN}$ . Le modèle numérique stochastique permet donc de calculer les f.d.p conditionnelles  $\mathbf{u}^{\text{obs}} \mapsto p_{\mathbf{U}^{\text{obs}}|\mathbb{Y}}(\mathbf{u}^{\text{obs}}|\mathbb{y})$  et  $u_k^{\text{obs}} \mapsto p_{U_k^{\text{obs}}|\mathbb{Y}}(u_k^{\text{obs}}|\mathbb{y})$ . Le modèle *a posteriori*  $\mathbf{U}^{\text{post}} = (\mathbf{U}^{\text{obs,post}}, \mathbf{U}^{\text{noobs,post}})$  s'écrit  $\mathbf{U}^{\text{post}} = \mathbf{h}(\mathbb{V}^{\text{post}})$ ,  $\mathbf{U}^{\text{obs,post}} = \mathbf{h}^{\text{obs}}(\mathbb{V}^{\text{post}})$  et  $\mathbf{U}^{\text{noobs,post}} = \mathbf{h}^{\text{noobs}}(\mathbb{V}^{\text{post}})$  avec  $\mathbb{V}^{\text{post}}$  le modèle *a posteriori* de  $\mathbb{V}^{\text{prior}}$  qui s'écrit, compte tenu des Eqs. (12) et (13),

$$\mathbb{V}^{\text{post}} = \underline{\mathbb{V}} + \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \eta_j^{\text{post}} \mathbb{W}^j \quad , \quad (14)$$

avec  $\boldsymbol{\eta}^{\text{post}} = (\eta_1^{\text{post}}, \dots, \eta_n^{\text{post}})$  le vecteur aléatoire défini sur  $(\Theta' \times \Theta, \mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}, \mathcal{P}' \otimes \mathcal{P})$ , tel que

$$\boldsymbol{\eta}^{\text{post}} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{Y}^{\alpha,\text{post}} \Psi_\alpha(\boldsymbol{\Xi}) \quad , \quad (15)$$

et où  $\mathbb{Y}^{\text{post}} = (\mathbf{Y}^{1,\text{post}}, \dots, \mathbf{Y}^{N,\text{post}})$  défini sur  $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$  dont la f.d.p sur  $\mathbb{R}^{nN}$ , à estimer par Bayes, est notée  $\mathbb{y} \mapsto p_{\mathbb{Y}^{\text{post}}}^{\text{post}}(\mathbb{y})$ . La méthode de Bayes permet alors de calculer  $p_{\mathbb{Y}^{\text{post}}}^{\text{post}}$  par

$$p_{\mathbb{Y}^{\text{post}}}^{\text{post}}(\mathbb{y}) = L^{\text{bayes}}(\mathbb{y}) p_{\mathbb{Y}^{\text{post}}}^{\text{prior}}(\mathbb{y}) \quad , \quad (16)$$

avec  $\mathbb{y} \mapsto L^{\text{bayes}}(\mathbb{y})$  la fonction de vraisemblance définie sur  $\mathbb{R}^{nN}$  par

$$L^{\text{bayes}}(\mathbb{y}) = \frac{\prod_{\ell=1}^{\nu_{\text{exp}}} p_{\mathbf{U}^{\text{obs}}|\mathbb{Y}}(\mathbf{u}^{\text{exp},\ell}|\mathbb{y})}{E\{\prod_{\ell=1}^{\nu_{\text{exp}}} p_{\mathbf{U}^{\text{obs}}|\mathbb{Y}}(\mathbf{u}^{\text{exp},\ell}|\mathbb{Y}^{\text{prior}})\}} \quad . \quad (17)$$

La f.d.p  $u_k \mapsto p_{U_k^{\text{post}}}(u_k)$  sur  $\mathbb{R}$  de  $U_k^{\text{post}}$  est alors donné par  $p_{U_k^{\text{post}}}(u_k) = E\{L^{\text{bayes}}(\mathbb{Y}^{\text{prior}}) p_{U_k|\mathbb{Y}}(u_k|\mathbb{Y}^{\text{prior}})\}$  avec  $p_{U_k|\mathbb{Y}}(u_k|\mathbb{y})$  la f.d.p conditionnelle de  $U_k$  si  $\mathbb{Y} = \mathbb{y}$ . Cette approche usuelle peut se révéler peu efficace en très grande dimension avec des données partielles et limitées. Une variante de la méthode présentée ci-dessus été développée dans [22] et est utilisée dans l'application présentée dans le paragraphe 4.

## 4 Application

On considère une microstructure représentée par le domaine  $\Omega = (]0, 1])^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont le bord est  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_{\text{obs}} \cup \Gamma$  et qui est occupé par un matériau hétérogène linéaire élastique anisotrope dont le champ du tenseur d'élasticité, à l'échelle mésoscopique, est modélisé par le champ stochastique non gaussien à valeurs dans les tenseurs du 4ème ordre  $\{\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$  avec  $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{C}_{ijkl}(\mathbf{x})\}_{ijkl}$ . Soit  $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in \Omega\}$  le champ de déplacement à l'échelle mésoscopique. La loi de comportement du matériau s'écrit donc  $\mathbf{s}_{jk}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_{jklm}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{lm}(\mathbf{x})$ , avec  $\mathbf{s}$  le tenseur des contraintes et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des déformations tel que  $\boldsymbol{\varepsilon}_{lm}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}(\partial u_l(\mathbf{x})/\partial x_m + \partial u_m(\mathbf{x})/\partial x_l)$ . Le problème aux limites considéré s'écrit,

$$\begin{aligned} -\text{div } \mathbf{s} &= 0 & \text{in } & \Omega \quad , \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} & \text{on } & \Gamma_0 \quad , \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}^\Gamma(\mathbf{x}) & \text{on } & \Gamma \quad \text{and} \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{on } & \Gamma_{\text{obs}} \quad , \end{aligned} \quad (18)$$

où  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}), n_3(\mathbf{x}))$  est la normale unitaire à  $\partial\Omega$  extérieure à  $\Omega$ .

**Etape 1.** On introduit la famille  $\{\mathbf{C}^{\text{MAS}}(\mathbf{x}; \mathbf{w}), \mathbf{x} \in \Omega\}_{\mathbf{w}}$  de MAS, définie dans [16, 17]. Pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega$ ,  $\mathbf{C}^{\text{MAS}}(\mathbf{x}; \mathbf{w})$  est représenté par la matrice symétrique  $(6 \times 6)$  définie positive  $[\mathbf{A}^{\text{MAS}}(\mathbf{x}; \mathbf{w})]$  et qui dépend du paramètre vectoriel  $\mathbf{w} = (\delta, L_c) \in \mathcal{C}_{\text{ad}}$  et de la valeur moyenne  $\{[\underline{\mathbf{A}}]_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq 6\}$  du champ qui est fixée à une matrice définie positive donnée et indépendante de  $\mathbf{x}$ . Le paramètre  $\delta > 0$  contrôle le niveau des fluctuations statistiques et  $L_c > 0$  est une longueur de corrélation qui contrôle les longueurs de corrélation spatiale du champ. Le cube  $(]0, 1])^3$  est maillé avec  $6 \times 6 \times 6 = 216$  éléments finis à 8 noeuds et à 8 points d'intégration par

EF. On a donc  $N_p = 1\,728$  points d'intégration. La dimension du vecteur  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w})$  qui discrétise  $[\mathbf{A}^{\text{MAS}}(\cdot; \mathbf{w})]$  est alors  $m_{\mathbb{V}} = 21 \times N_p = 36\,288$ . Les 4 noeuds d'angle de la face  $x_1 = 1$  sont bloqués. Une force de composantes  $(0, 1, 0)$  est appliquée au noeud de coordonnées  $(0, 0, 1)$ . Les DDL observés sont les déplacements suivants  $x_2$  et  $x_3$  de tous les noeuds à l'intérieur de la face du cube  $x_1 = 0$ . Comme il y a 49 noeuds sur chaque face du cube dont 25 noeuds à l'intérieur de chaque face, on a  $m_{\text{obs}} = 2 \times 25 = 50$  DDL observés. Le nombre de DDL non observés est donc  $m_{\text{nobs}} = 967$  pour un total de  $m = 1\,017$  DDL. On dispose de  $\nu_{\text{exp}} = 200$  ensemble de données expérimentales (voir [22]).

**Etape 2.** Le problème d'optimisation pour identifier le MAS optimal est formulé avec la fonction coût  $\mathbf{w} \mapsto J(\mathbf{w})$  défini dans [20] et est estimée, pour chaque  $\mathbf{w}$ , avec le modèle stochastique  $\mathbf{U}^{\text{obs}, \text{MAS}}(\mathbf{w}) = \mathbf{h}^{\text{obs}}(\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w}))$  qui est résolu par la méthode de Monte Carlo avec 1 000 réalisations indépendantes de  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w})$ . La valeur optimale  $\mathbf{w}^{\text{opt}} = (\delta^{\text{opt}}, L_c^{\text{opt}})$  qui correspond au minimum de la fonction coût, est obtenue pour  $\delta^{\text{opt}} = 0.42$  et  $L_c^{\text{opt}} = 0.34$ . La Fig. 1 de gauche montre le graphe de la fonction  $(\delta, L_c) \mapsto J(\delta, L_c)$ .

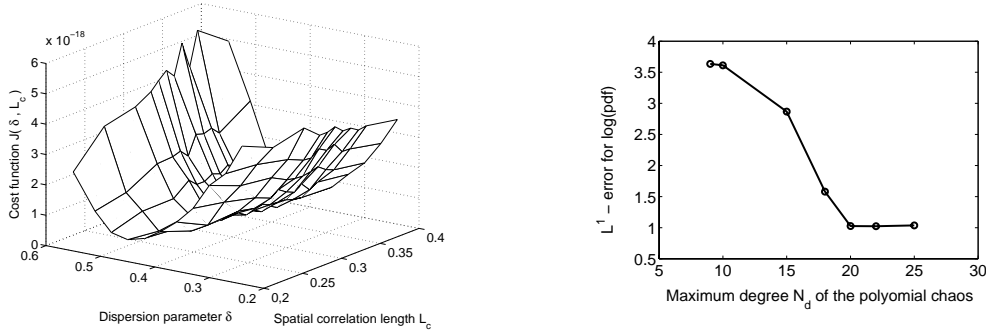


FIG. 1 – GAUCHE : Fonction coût  $(\delta, L_c) \mapsto J(\delta, L_c)$  pour l'identification du MAS optimal en utilisant les données expérimentales partielles.

DROITE : Fonction d'erreur  $N_d \mapsto \text{err}(N_g, N_d)$  pour  $\eta^{\text{chaos}}(N)$  avec  $N = f(N_g, N_d)$  et  $N_g = 4$ .

**Etape 3.** Le MAS optimal  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w}^{\text{opt}})$  est simplement noté  $\mathbb{V}^{\text{MAS}}$ . Sa valeur moyenne  $\underline{\mathbb{V}} = E\{\mathbb{V}^{\text{MAS}}(\mathbf{w}^{\text{opt}})\}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^{36\,288}$  et sa matrice de covariance  $[C_{\mathbb{V}^{\text{MAS}}}]$  est une matrice  $(36\,288 \times 36\,288)$ . Ces deux moments sont estimés avec le MAS optimal et  $\nu_{\text{KL}} = 1\,000$  réalisations indépendantes. Le sous espace propre dominant du problème au valeur propre  $[C_{\mathbb{V}^{\text{MAS}}}] \mathbb{W}^j = \lambda_j \mathbb{W}^j$  est construit par la méthode d'itération dans les sous espaces. La convergence de la représentation réduite pour une tolérance relative de 0.05 est obtenue pour  $n = 550$ .

**Etape 4.** Les calculs sont menés pour  $n = 550$ ,  $\nu_{\text{KL}} = 1\,000$  et  $\nu = 11\,000$ . La convergence est obtenue pour  $N_g = 4$  et la Fig. 1 de droite montre le graphe de la fonction d'erreur (pour  $N_g = 4$ ). Une convergence raisonnable est obtenue pour  $N_d = 20$ . A la convergence ( $N_g = 4$  et  $N_d = 20$ ), il y a  $N = 10\,625$  CAV déterministes dans le DCP de  $\eta^{\text{chaos}}(N)$ , c'est-à-dire qu'il y a  $5\,843\,750 = 10\,625 \times 550$  coefficients réels qui ont été identifiés. La Fig. 2 est relative à l'analyse de la convergence en fonction du nombre  $N = f(N_g, N_d)$  de chaos pour deux coordonnées,  $j = 1$  et  $j = 550$ , pour  $N_g = 4$  et pour  $N_d = 9$  ( $N = 714$ ),  $N_d = 20$  ( $N = 10\,625$ ) et pour  $N_d = 22$  ( $N = 14\,949$ ). Chaque figure montre la comparaison du graphe de  $e \mapsto \log_{10}(p_{\eta_j^{\text{MAS}}}(e))$  pour le MAS optimal avec le graphe de  $e \mapsto \log_{10}(p_{\eta_j^{\text{chaos}}(N)}(e; \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N))$  pour le DCP avec  $N = f(N_g, N_d)$  chaos. La qualité de la convergence est similaire pour les 548 autres coordonnées.

**Etapes 5 and 6.** Les calculs sont faits avec  $n = 550$ ,  $N = 10\,625$ ,  $\varepsilon = 1.2$ ,  $\nu' = 10\,000$  et  $\nu = 3\,000$ . Chaque matrice de la famille  $\{[\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^1; \theta_{\ell'}^1, \theta_{\ell})], \dots, [\mathbf{A}^{\text{prior}}(\mathbf{x}^{N_p}; \theta_{\ell'}^{N_p}, \theta_{\ell})]\}$  doit être définie positive (propriété  $\mathcal{P}_{\text{rop}}$ ). Pour  $\theta_{\ell'}$  fixé, le sous ensemble  $\{\theta_{\ell_1}, \dots, \theta_{\ell_{\nu}(\ell')}\}$  de  $\{\theta_1, \dots, \theta_{\nu}\}$  a été déterminé avec le modèle numérique stochastique pour que  $\mathcal{P}_{\text{rop}}$  soit vérifiée. Le nombre total de réalisations dans  $\Theta' \times \Theta$  est  $\sum_{\ell'=1}^{\nu'} \tilde{\nu}(\ell') = 3\,439\,684$ .



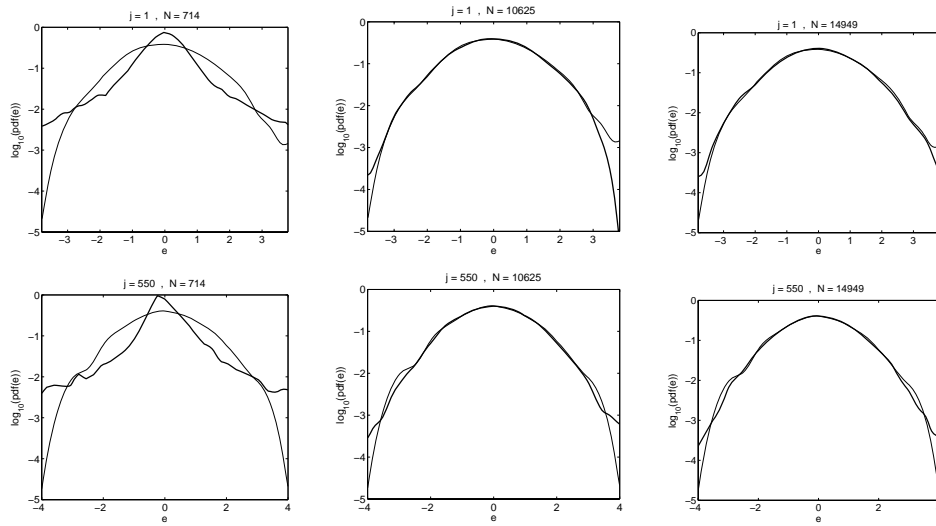


FIG. 2 – Analyse de convergence par rapport au nombre  $N$  de chaos. Comparaisons des graphes  $e \mapsto p_{\eta_j^{\text{MAS}}}(e)$  (trait mince) avec les graphes de  $e \mapsto p_{\eta_j^{\text{chaos}}}(e)$  estimés en utilisant le DCP avec  $N$  chaos (trait épais), pour différentes valeurs de  $N$  et pour les coordonnées  $j = 1$  et  $j = 550$ . Axe vertical :  $\log_{10}$  de la f.d.p Axe horizontal : valeur  $e$  de  $\eta_j$ .

Les Figs. 3 et 4 comparent les f.d.p des données expérimentales  $U_k^{\text{exp}}$  avec les f.d.p les réponses aléatoires  $U_k^{\text{prior}}$  et  $U_k^{\text{post}}$ , associées à  $\mathbb{V}^{\text{prior}}$  et  $\mathbb{V}^{\text{post}}$ . La Fig. 3 est relative aux DDL observés  $k$  qui correspondent au déplacement  $x_2$  des noeuds 17 et 37 (parmi les 25 noeuds à l’intérieur de la face  $x_1 = 0$  du cube). La Fig. 4 permet de voir la qualité de l’identification en examinant les DDL non observés  $k$  qui correspondent au déplacement  $x_2$  des noeuds 74 et 174 à l’intérieur du cube, pour lesquels, les coordonnées sont  $(0.1667, 0.500, 0.500)$  et  $(0.500, 0.500, 0.8333)$ .

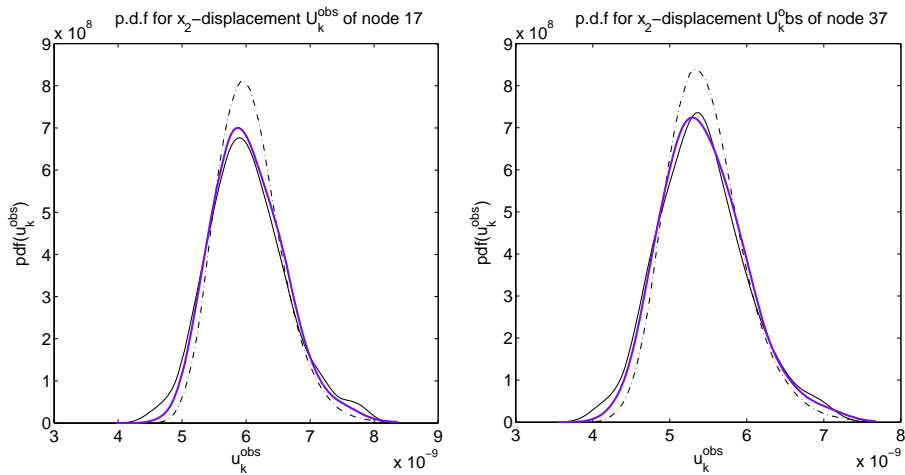


FIG. 3 – Pour les DDL  $k$  observés correspondant aux déplacements  $x_2$  des noeuds 17 et 37, graphes de  $u_k^{\text{obs}} \mapsto \hat{p}_{U_k^{\text{exp}}}(u_k^{\text{obs}})$  (trait continu mince),  $u_k^{\text{obs}} \mapsto p_{U_k^{\text{obs,prior}}}(u_k^{\text{obs}})$  (trait pointillé-tirété),  $u_k^{\text{obs}} \mapsto p_{U_k^{\text{obs,post}}}(u_k^{\text{obs}})$  (trait épais).

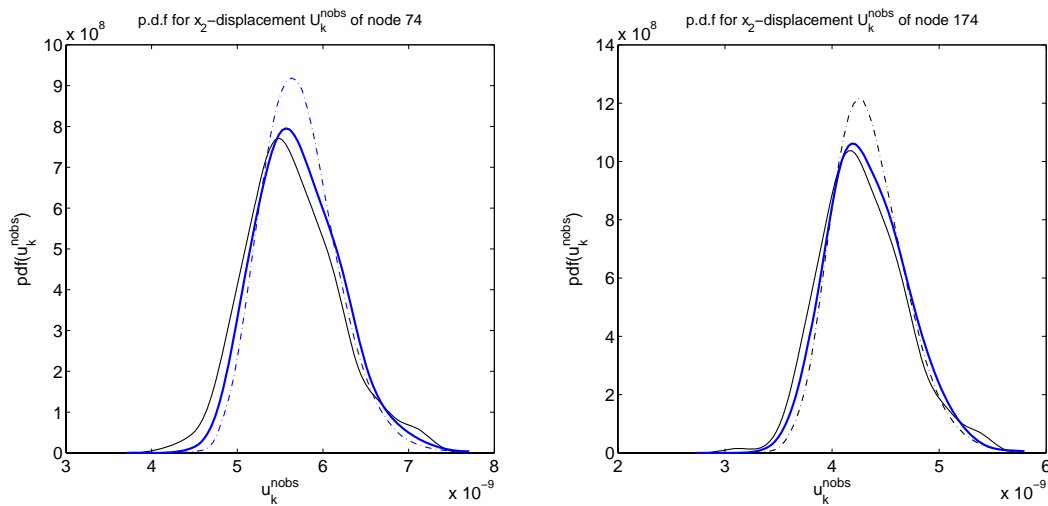


FIG. 4 – Pour les DDL  $k$  non observés correspondant aux déplacements  $x_2$  des noeuds 74 et 174, graphes de  $u_k^{\text{noobs}} \mapsto \hat{p}_{U_k^{\text{exp}}}(u_k^{\text{noobs}})$  (trait continu mince),  $u_k^{\text{noobs}} \mapsto p_{U_k^{\text{noobs,prior}}}(u_k^{\text{noobs}})$  (trait pointillé-tiré),  $u_k^{\text{noobs}} \mapsto p_{U_k^{\text{noobs,post}}}(u_k^{\text{noobs}})$  (trait épais).

## 5 Conclusions

Nous avons présenté une méthodologie pour identifier le développement en chaos polynômiaux en grande dimension d'un champ de tenseur non gaussien qui est inconnu, à l'aide de données expérimentales partielles et limitées, au travers d'un problème aux limites stochastique. Nous avons validé une méthodologie permettant de résoudre ce problème difficile.

## Acknowledgement

Cette recherche a été menée dans le cadre du contrat TYCHE, ANR-2010-BLAN-0904 de l'Agence Nationale de la Recherche.

## Références

- [1] M. Arnst, R. Ghanem, C. Soize, Identification of Bayesian posteriors for coefficients of chaos expansion, *Journal of Computational Physics*, 229(9) (2010) 3134-3154.
- [2] S. Das, R. Ghanem, J. Spall, Asymptotic sampling distribution for polynomial chaos representation of data : A maximum-entropy and fisher information approach, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(5) (2008) 2207-2234.
- [3] S. Das, R. Ghanem, S. Finette, Polynomial chaos representation of spatio-temporal random field from experimental measurements, *Journal of Computational Physics*, 228 (2009) 8726-8751.
- [4] B.J. Debuschere, H.N. Najm, P.P. Pebay, *et al.*, Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2) (2004) 698-719.
- [5] C. Desceliers, R. Ghanem, C. Soize, Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(6) (2006) 978-1001.
- [6] Ghanem, R., Spanos, P.D. 1991 *Stochastic Finite Elements : A spectral Approach*. Springer-verlag, New-York (revised edition, Dover Publications, New York, 2003).
- [7] R. Ghanem R., S. Dham, Stochastic finite element analysis for multiphase flow in heterogeneous porous media, *Transp. Porous Media* 32 (1998) 239-262.
- [8] R. Ghanem, R. Doostan, Characterization of stochastic system parameters from experimental data : A bayesian inference approach, *Journal of Computational Physics*, 217(1) (2006) 63-81.

- [9] O.M. Knio, O.P. Le Maitre, Uncertainty propagation in CFD using polynomial chaos decomposition, *Fluid Dynamics Research* 38(9) (2006) 616-640.
- [10] H.N. Najm, Uncertainty quantification and polynomial chaos techniques in computational fluid dynamics, *Journal Review of Fluid Mechanics* 41 (2009) 35-52.
- [11] A. Nouy, Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : Invariant subspace problem and dedicated algorithms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52) (2008) 4718-4736.
- [12] O.P. LeMaitre, O.M. Knio, *Spectral Methods for Uncertainty Quantification with Applications to Computational Fluid Dynamics*, Springer, Heidelberg, 2010.
- [13] X. Ma, N. Zabarar, An efficient Bayesian inference approach to inverse problems based on an adaptive sparse grid collocation method, *Inverse Problems*, 25(3) (2009) Article Number : 035013.
- [14] Y.M. Marzouk, H.N. Najm, Dimensionality reduction and polynomial chaos acceleration of Bayesian inference in inverse problems, *Journal of Computational Physics*, 228(6) (2009) 1862-1902.
- [15] C. Soize, R. Ghanem, Physical systems with random uncertainties : Chaos representation with arbitrary probability measure, *SIAM Journal on Scientific Computing* 26(2) (2004) 395-410.
- [16] C. Soize, Non Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006), 26-64.
- [17] C. Soize, Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size, *Probabilistic Engineering Mechanics* 23 (2008) 307-323.
- [18] C. Soize, Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle. Applications to stochastic processes, random fields and random matrices, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76(10) (2008) 1583-1611.
- [19] C. Soize, R. Ghanem, Reduced chaos decomposition with random coefficients of vector-valued random variables and random fields, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26) (2009), 1926-1934.
- [20] Soize, C. 2010 Identification of high-dimension polynomial chaos expansions with random coefficients for non-Gaussian tensor-valued random fields using partial and limited experimental data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **199** (33-36) 2150-2164.
- [21] C. Soize, C. Desceliers, Computational aspects for constructing realizations of polynomial chaos in high dimension, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5) (2010) 2820-2831.
- [22] Soize, C. 2011 A computational inverse method for identification of non-Gaussian random fields using the Bayesian approach in very high dimension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (Submitted in January 2, 2011).
- [23] X.L. Wan, G.E. Karniadakis, Multi-element generalized polynomial chaos for arbitrary probability measures, *SIAM Journal on Scientific Computing* 28(3) (2006) 901-928.
- [24] X.L. Wan, G.E. Karniadakis, Solving elliptic problems with non-Gaussian spatially-dependent random coefficients, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26) (2009) 1985-1995
- [25] J.B. Wang, N. Zabarar, Hierarchical Bayesian models for inverse problems in heat conduction, *Inverse Problems*, 21(1) (2005) 183-206.
- [26] Wiener, N. 1938 The Homogeneous Chaos. *American Journal of Mathematics* **60**(1) 897-936.
- [27] N. Zabarar, B. Ganapathysubramanian, A scalable framework for the solution of stochastic inverse problems using a sparse grid collocation approach, *Journal of Computational Physics*, 227(9) (2008) 4697-4735.