



**HAL**  
open science

## Identification du modèle probabiliste de l'os cortical en utilisant des mesures expérimentales ultrasonique in vivo

Christophe Desceliers, Christian Soize, S. Naili

### ► To cite this version:

Christophe Desceliers, Christian Soize, S. Naili. Identification du modèle probabiliste de l'os cortical en utilisant des mesures expérimentales ultrasonique in vivo. 20ème Congrès Français de Mécanique 2011, Université de Besançon, Aug 2011, Besançon, France. pp.1-6. hal-00773378

**HAL Id: hal-00773378**

**<https://hal.science/hal-00773378v1>**

Submitted on 13 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Identification du modèle probabiliste de l'os cortical en utilisant des mesures expérimentales ultrasoniques in vivo

C. Desceliers<sup>a</sup>, C. Soize<sup>a</sup>, N. Naili<sup>a</sup>

a. Université Paris-Est, Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME UMR8208 CNRS  
5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée

## Résumé :

*Cette communication présente une méthode permettant d'identifier, à partir de mesures ultrasoniques in vivo, le modèle probabiliste du tenseur d'élasticité de l'os cortical. La macrostructure même de l'os cortical est complexe et aléatoire en présence de pathologies telles que l'ostéoporose. De tels matériaux sortent du cadre des hypothèses des théories classiques des matériaux poreux. La réponse transitoire ultrasonique de l'os est simulée avec un modèle simplifié pour lequel le tenseur d'élasticité est modélisé par un champ stochastique construit en utilisant le principe du maximum d'entropie.*

## Abstract :

*This paper presents a method to identify, with in vivo ultrasonic measurements, the probabilistic model for the elasticity tensor of cortical bone. The macrostructure of a cortical bone is complex and uncertain in case of osteoporosis. Such materials are outside the scope of the classical theories of porous materials. The transient response of ultrasonic bone is simulated with a simplified model for which the elasticity tensor is modeled by a stochastic field constructed using the maximum entropy principle.*

**Mots clefs :** Problème inverse stochastique ; mesures expérimentales ; os cortical

## 1 Introduction

Les matériaux biomécaniques sont parmi les systèmes mécaniques les plus complexes. La difficulté principale pour la modélisation de ces milieux est due à l'importante complexité de leur microstructure. Tel est le cas de l'os cortical qui est le matériau sur lequel porte cette communication. Celui-ci présente la particularité que sa micro-structure peut subir d'importantes altérations à proximité de son interface avec la moelle (ostéoporose). On observe alors un gradient de porosité dans l'épaisseur, mais, dans ce cas, il est tel que les théories classiques des matériaux poreux ne peuvent s'y appliquer. Pour ces raisons, il n'y a souvent pas d'autres alternatives que de modéliser ces systèmes en introduisant un modèle mécanique simplifié qui correspond à une approximation relativement grossière du système réel. Néanmoins, la prévision fournie par ces modèles simplifiés peut être améliorée en tenant compte des incertitudes dues aux erreurs de modélisation, conséquences des approximations introduites. Ces incertitudes sont prises en compte en modélisant le tenseur d'élasticité du milieu "poreux" par un champ aléatoire non homogène. Le modèle probabiliste proposé est adapté à l'identification expérimentale de ses paramètres.

## 2 Model simplifié

Un modèle mécanique simplifié a été développé pour modéliser un système biomécanique constitué d'un gel de couplage, de la peau, de l'os cortical et de la moelle [3]. Ce modèle simplifié est composé d'une couche semi-infinie d'un solide élastique comprise entre deux autres couches semi-infinies de fluide acoustique (voir fig. 1). Soit  $\mathbf{R}(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  le référentiel Cartésien où  $O$  est l'origine de l'espace

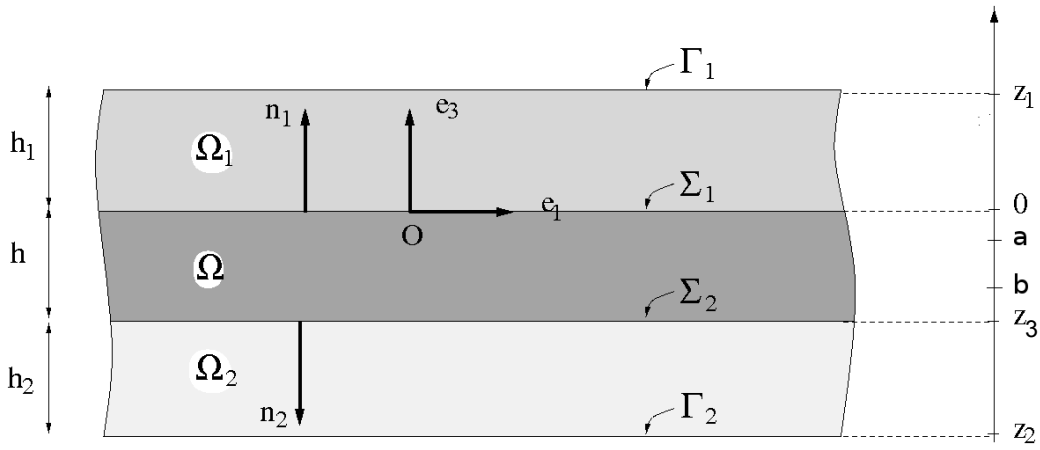


FIG. 1 – Géométrie du système multicouche

et  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est une base orthonormée. Les coordonnées d'un point  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^3$  sont notées  $(x_1, x_2, z)$ . Les épaisseurs des différentes couches sont  $h_1$ ,  $h$  et  $h_2$ . Un premier fluide acoustique occupe le domaine  $\Omega_1$ , un second fluide acoustique occupe le domaine  $\Omega_2$  et un solide élastique occupe le domaine  $\Omega$ . Soit  $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Sigma_1$ ,  $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  et  $\partial\Omega_2 = \Sigma_2 \cup \Gamma_2$  (voir Fig. 1) les bords respectifs de  $\Omega_1$ ,  $\Omega$  and  $\Omega_2$  où  $\Gamma_1, \Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Gamma_2$  sont les surfaces planes définies par

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}, z = z_1\} \quad , \quad \Sigma_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}, z = 0\} \\ \Sigma_2 &= \{x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}, z = z_3\} \quad , \quad \Gamma_2 = \{x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}, z = z_2\} \end{aligned}$$

avec  $z_1 = h_1$ ,  $z_3 = -h$  and  $z_2 = -(h + h_2)$ . Par conséquent, les domaines  $\Omega_1$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_2$  sont non bornés dans la direction longitudinale et ils sont bornés dans la direction transverse selon  $\mathbf{e}_3$ . Le domaine  $\Omega_1$  est soumis à une impulsion acoustique le long d'une ligne telle que

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \rho_1 F(t) \delta_0(x_1 - x_1^S) \delta_0(z - z^S) \quad ,$$

avec  $F(t) = F_1 \sin(2\pi f_c t) e^{-4(t f_c - 1)^2}$  où  $f_c = 1$  MHz est la fréquence centrale et  $F_1 = 100$  N ;  $\rho_1$  la masse volumique du domaine  $\Omega_1$  ;  $\delta_0$  est la fonction de Dirac à l'origine et,  $x_1^S$  et  $z^S$  sont les coordonnées où l'impulsion est appliquée. A l'instant initiale  $t = 0$ , le système mécanique est au repos. Soient  $\rho(z)$  et  $[C(z)]$ , la masse volumique équivalente et le tenseur d'élasticité équivalent de la couche élastique au point  $z$  dans  $\Omega_1$ . Pour tout champ donné de matrice d'élasticité équivalente  $[C(\cdot)]$ , le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  de la couche élastique  $\Omega$  ainsi que les champs de pression  $p_1$  and  $p_2$  des deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement, sont calculés en utilisant un solveur efficace, rapide et hybride présenté dans [2].

### 3 Modèle simplifié pour le matériau poreux

Il est établi que les os sont constitués de matériaux poreux. En ce qui concerne l'os cortical humain, les tailles des pores ne sont pas négligeables par rapport à l'épaisseur de la couche d'os cortical. De plus, on observe que les tailles des pores augmentent globalement le long de la direction transverse  $z$ . En ce qui concerne l'ostéoporose, la couche d'os cortical comporte des gradients de porosité qui sont tels que, proche de la surface  $\Sigma_2$ , l'os cortical est principalement rempli de fluide. La théorie classique des matériaux poreux [1] n'est alors plus adaptée à la modélisation de tels milieux poreux. On propose donc un modèle de matrice d'élasticité équivalente  $[C(z)]$  permettant de prendre en compte de tels gradients sur les propriétés mécaniques. Pour tout  $z$  dans  $[a, 0]$ , le matériau de la couche cortical est supposé être localement isotrope transverse et pour  $z$  dans  $[z_3, b]$ , la loi de comportement du milieu poreux est dégradée en une loi de comportement de fluide acoustique. Ainsi, (1) pour tout  $z$  dans  $[0, a]$ , on a  $[C(z)] = [C^S]$  et  $\rho(z) = \rho^S$  ; (2) pour tout  $z$  dans  $[z_3, b]$  on a  $[C(z)] = [C^F]$  et  $\rho(z) = \rho_2$  ;

$[C^S]$  est une matrice d'élasticité équivalente représentant un milieu homogène transverse isotrope,  $[C^F]$  une matrice d'élasticité "dégradée" dont le matériau est un fluide acoustique,  $\rho^S$  est la masse volumique de l'os cortical en absence de porosité et  $\rho_2$  est la masse volumique du domaine  $\Omega_2$ . Toutes les composantes de  $[C^S]$  sont nulles, à l'exception des suivantes

$$\begin{aligned} [C^S]_{11} &= \frac{e_L^2(1-\nu_T)}{(e_L - e_L\nu_T - 2e_T\nu_L^2)} \quad , \quad [C^S]_{22} = \frac{e_T(e_L - e_T\nu_L^2)}{(1+\nu_T)(e_L - e_L\nu_T - 2e_T\nu_L^2)} \quad , \\ [C^S]_{12} &= \frac{e_T e_L \nu_L}{(e_L - e_L\nu_T - 2e_T\nu_L^2)} \quad , \quad [C^S]_{23} = \frac{e_T(e_L\nu_T + e_T\nu_L^2)}{(1+\nu_T)(e_L - e_L\nu_T - 2e_T\nu_L^2)} \quad , \\ [C^S]_{44} &= g_T \quad , \quad [C^S]_{55} = g_L \quad , \end{aligned}$$

avec  $[C^S]_{22} = [C^S]_{33}$ ,  $[C^S]_{12} = [C^S]_{13} = [C^S]_{21} = [C^S]_{31}$ ,  $[C^S]_{23} = [C^S]_{32}$  et  $[C^S]_{55} = [C^S]_{66}$  et où  $e_L$  et  $e_T$  sont les modules d'Young longitudinaux et transverses,  $g_L$  and  $g_T$  sont les modules de cisaillement longitudinaux et transverses et,  $\nu_L$  et  $\nu_T$  sont les coefficients de Poisson longitudinaux et transverses tels que  $g_T = e_T/2(1+\nu_T)$ . Toutes les composantes de  $[C^F]$  sont nulles à l'exception de  $[C^F]_{11}$ ,  $[C^F]_{12}$ ,  $[C^F]_{13}$ ,  $[C^F]_{21}$ ,  $[C^F]_{22}$ ,  $[C^F]_{23}$ ,  $[C^F]_{31}$ ,  $[C^F]_{32}$ ,  $[C^F]_{33}$  qui sont toutes égales à  $\rho_2 c_2^2$ . On a

$$[C(z)] = (1 - f(z)) [C^S] + f(z) [C^F] \quad , \quad \rho(z) = (1 - f(z)) \rho^S + f(z) \rho_2 \quad ,$$

où  $f(z) = 1$  si  $z < b$ ,  $f(z) = 0$  si  $z > a$  et  $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$  si  $b \leq z \leq a$  avec  $c_0 = a^2(a-3b)/(a-b)^3$ ,  $c_1 = 6ab/(a-b)^3$ ,  $c_2 = -3(a+b)/(a-b)^3$  et  $c_3 = 2/(a-b)^3$ . Ce modèle est construit de sorte que, pour  $z = a$  ou  $z = b$ ,

$$\frac{\partial[C(z)]}{\partial z} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial\rho(z)}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$[C^F] = \begin{pmatrix} \rho_2 c_2^2 & \rho_2 c_2^2 & \rho_2 c_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_2 c_2^2 & \rho_2 c_2^2 & \rho_2 c_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_2 c_2^2 & \rho_2 c_2^2 & \rho_2 c_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

#### 4 Modèle probabiliste de l'épaisseur et du champ de matrice d'élasticité équivalente de l'os cortical

La modélisation de ces systèmes biomécaniques est rendue extrêmement délicate à cause de la complexité de sa micro-structure qui relève de la modélisation des milieux hétérogènes aléatoires. Dans les deux paragraphes précédents, un modèle simplifié a été présenté lequel introduit donc des incertitudes due aux erreurs de modélisations. Néanmoins, la prévisibilité de ce modèle peut-être amélioré en prenant en compte ces incertitudes. Dans ce paragraphes, un modèle probabiliste du champ de matrice d'élasticité équivalente est construit en remplaçant  $z \mapsto [C(z)]$  par un champ stochastique de matrices  $z \mapsto [\mathbf{C}(z)]$  dont le modèle probabiliste a été développé dans [7, 8] en utilisant le principe du maximum d'entropie [4, 5, 6] de sorte que (1) la matrice  $[\mathbf{C}(z)]$  est une variable aléatoire du second ordre à valeur dans l'ensemble des matrices définies-positives, symétriques réelles de taille  $(6 \times 6)$ ; (2) la moyenne de la matrice aléatoire  $[\mathbf{C}(z)]$  est égale à la matrice d'élasticité équivalente  $[C(z)]$  du modèle simplifié déterministe; (3) la norme de l'inverse de la matrice  $[\mathbf{C}(z)]$  est une variable aléatoire du second-ordre. Dans ces conditions, il a été montré que (voir [7, 8]), pour tout  $b < z < 0$ ,  $[\mathbf{C}(z)] = [L(z)]^T [\mathbf{G}(z)] [L(z)]$  et puisque pour  $z < b$  le milieu n'est plus aléatoire (les propriétés mécaniques y sont celles d'un fluide déterministe) alors, pour tout  $z < b$ ,  $\mathbf{C}(z) = [C(z)]$ . La matrice  $[L(z)]$  est une matrice  $(6 \times 6)$  triangulaire supérieure issue de la factorisation de Cholesky  $[C(z)] = [L(z)]^T [L(z)]$ . Le modèle probabiliste du champ de matrices aléatoires  $z \mapsto [\mathbf{G}(z)]$  est algébriquement défini par une transformation non-linéaire de 21 champs stochastiques  $U_{j,j'}(z)$  avec  $1 \leq j \leq j' \leq 6$  lesquels sont Gaussiens, homogènes,

centrés et du second ordre. Une expression explicite de cette transformation est donnée dans [2, 3]. Les fonctions d'autocorrélation  $R_{U_{jj'}}(\tau) = E\{U_{jj'}(z + \tau)U_{jj'}(z)\}$  des germes aléatoires  $U_{jj'}(z)$  sont  $R_{U_{jj'}}(\tau) = (2\ell/\pi\tau)^2 \sin^2(\pi\tau/2\ell)$ . La longueur de la corrélation spatiale  $\ell$  est donc un paramètre du modèle probabiliste du champ aléatoire  $z \mapsto [\mathbf{C}(z)]$ . Le champ aléatoire  $z \mapsto [\mathbf{G}(z)]$  dépend aussi d'un paramètre supplémentaire  $0 < \delta < (7/11)^{1/2}$  qui est, dans notre cas, indépendant de  $z$ . Ce paramètre contrôle les fluctuations statistiques de  $[\mathbf{G}(z)]$  et  $[\mathbf{C}(z)]$ . En Effet, on a

$$E\{\|[\mathbf{G}(z)]\|_F^2\} = 6(\delta^2 + 1) \quad , \quad \delta_C(z) = \frac{\delta}{\sqrt{7}} \left(1 + \frac{(\text{tr}[C(z)])^2}{\text{tr}[C(z)]^2}\right)^{1/2} \quad , \quad (1)$$

où  $\delta_C(z)^2 = E\{\|[\mathbf{C}(z)] - [C(z)]\|_F^2\} / \| [C(z)] \|_F^2$  et où  $\|\cdot\|$  est la norme de Frobenius. Finalement, la longueur de corrélation spatiale  $\ell_C$  du champ aléatoire  $z \mapsto [C(z)]$  s'écrit

$$\ell_C = \int_0^{+\infty} |r_c(\tau)| d\tau \quad \text{où} \quad r_c(\tau) = \frac{\text{tr} E\{([\mathbf{C}(z + \tau)] - [C(z)])([\mathbf{C}(z)] - [C(z)])\}}{E\{\|[\mathbf{C}(z)] - [C(z)]\|_F^2\}} \quad ,$$

Ainsi, le champs de déplacement de la couche solide élastique et les champs de pressions des deux fluides acoustiques doivent être aussi modélisés par champs stochastiques notés  $\mathbf{U}$ ,  $P_1$  and  $P_2$ .

## 5 Application

Dans un article récent [3], les composantes de la matrice  $[C^S]$  ont été identifiées en utilisant une base de données constituée de mesures expérimentales et construite en utilisant la méthode de la transmission axiale ultrasonique. La configuration expérimentale est décrite sur Fig. 2. Une sonde faite de  $n_R = 11$  récepteurs et 2 émetteurs a été spécialement conçue. Un gel de couplage est appliqué entre la peau d'un patient et la sonde. Chaque émetteur produit une impulsion acoustique ultrasonique qui se propage dans le gel de couplage, la peau, les muscles, l'os cortical et la moelle. La méthode de transmission

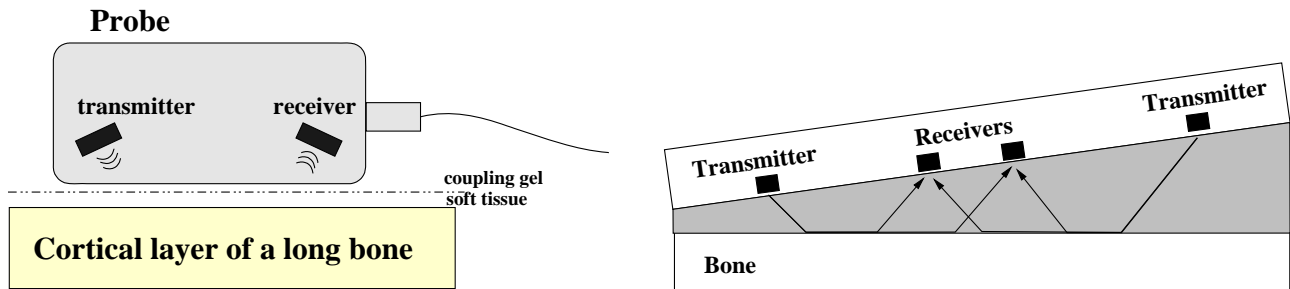


FIG. 2 – Configuration expérimentale

axiale consiste à enregistrer les signaux acoustiques reçus par les  $n_R = 11$  récepteurs de la sonde. La contribution sur le premier signal enregistré est due à une onde guidée le long de l'interface entre la peau et l'os cortical. La vitesse de cette onde guidée dépend donc des propriétés mécaniques dans un voisinage situé de part et d'autre de cette interface. Par traitement du signal, la vitesse de cette onde est calculée expérimentalement. La base de données expérimentales ainsi construite permet d'identifier les composantes de la matrice  $[C^S]$  (voir [3]) et il fut obtenu que  $\rho^S = 1598.8 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $e_L = 17.717 \text{ GPa}$ ,  $\nu_L = 0.3816$ ,  $g_L = 4.7950 \text{ GPa}$ ,  $e_T = 9.8254 \text{ GPa}$ ,  $\nu_T = 0.4495$  et  $\delta_C(0) = 0.1029$ . En utilisant l'Eq. (1) on obtient  $\delta = 0.0575$ . Dans cette communication, on s'intéresse à la propagation des incertitudes dans le domaine  $\Omega_1$ , qui est quantifiée en introduisant une variable aléatoire  $Q$  définie par

$$Q = \int_0^T \sum_k^{n_R} |P^{mod}(t, x_1^k)|^2 dt \quad ,$$

où  $T$  est la durée du signal expérimental et  $x_1^k$ , avec  $k = 1, \dots, n_R$  sont les positions des récepteurs selon la direction  $\mathbf{e}_1$ . Soit  $p_Q(a, b, \ell; q)$ , la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $Q$ .

Sur Fig. 3, le graphe de  $z \mapsto \delta_C(z)$ , avec  $a = 0, b = -z_3$  (trait fin) et  $a = z_3/2, b = -z_3$  (trait épais) et  $a = 0, b = z_3/2$  (tirets fins) montre que le coefficient de dispersion  $\delta_C(z)$  de la matrice aléatoire  $[\mathbf{C}(z)]$  décroît lorsque la loi de comportement du matériau élastique de  $\Omega$  progressivement est dégradée en la loi de comportement du fluide contenu dans le domaine  $\Omega_2$ , laquelle est déterministe. Sur Fig. 4, le

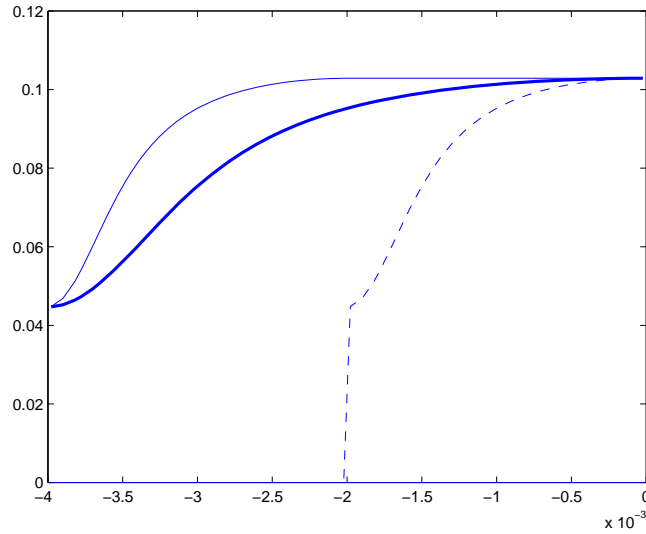


FIG. 3 – Graphe de  $z \mapsto \delta_C(z)$  avec  $a = 0, b = -z_3$  (trait fin) et  $a = z_3/2, b = -z_3$  (trait épais) et  $a = 0, b = z_3/2$  (tirets fins)

graphe de  $q \mapsto p_Q(a, b, \ell; q)$  en échelle logarithmique avec  $a = 0, b = z_3, \ell = h/10$  (trait épais), avec  $a = z_3/2, b = z_3, \ell = h/10$  (trait fin), avec  $a = 0, b = z_3, \ell = h/20$  (tirets épais), et avec  $a = z_3/2, b = z_3, \ell = h/20$  (tirets fins) montre que  $q \mapsto p_Q(a, b, \ell; q)$  est sensible au paramètre d'épaisseur  $a$  et à la longueur de corrélation spatiale  $\ell$ .

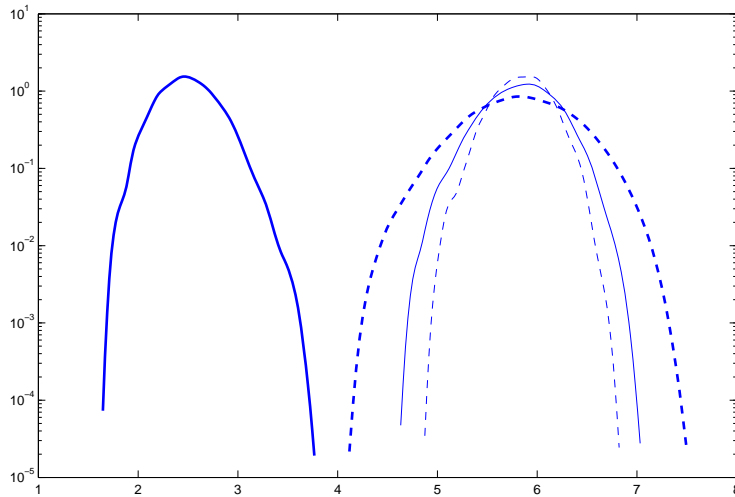


FIG. 4 – Graphe de  $q \mapsto p_Q(a, b, \ell; q)$  en échelle logarithmique avec  $a = 0, b = z_3, \ell = h/10$  (trait épais), avec  $a = z_3/2, b = z_3, \ell = h/10$  (trait fin), avec  $a = z_3/2, b = z_3, \ell = h/20$  (tirets fins) et avec  $a = z_3/2, b = z_3, \ell = h$  (tirets épais).

## 6 Conclusion

Nous avons construit un modèle simplifié pour simuler la réponse transitoire dynamique d'un système multicouches soumis à une impulsion acoustique ultrasonique. Ce modèle a été utilisé pour un matériau biologique complexe : l'os cortical humain. Ce type de système biomécanique est réellement difficile à modéliser en raison de sa micro-structure complexe et aléatoire. Pour un tel système, la micro-structure peut elle-même être endommagée dans le voisinage de l'interface entre l'os cortical et la moelle (ostéoporose). Un gradient de la porosité est alors observé dans l'épaisseur, mais, dans ce cas, aucune théorie classique des matériaux poreux ne peut être appliquée. C'est la raison pour laquelle nous avons proposé de modéliser les gradients des propriétés mécaniques en utilisant un modèle de champ de tenseur d'élasticité équivalent. A l'intérieur de la couche solide élastique, le tenseur d'élasticité correspondant à la loi de comportement d'un solide élastique tend vers un tenseur d'élasticité "dégradé" lequel correspond à la loi de comportement d'un fluide acoustique. Afin d'améliorer la prévisibilité de ce modèle, les incertitudes dues aux erreurs de modélisations introduites sont prises en compte avec une approche probabiliste des incertitudes. Pour cela, le champ tenseur d'élasticité équivalent du modèle simplifié déterministe est remplacé par un champ de tenseur d'élasticité stochastique. Ce modèle probabiliste permet d'étudier la propagation des incertitudes concernant le champ de tenseur d'élasticité de la couche cortical sur le champ de pression à l'intérieur du premier fluide acoustique (la peau et le gel de couplage). Ce modèle probabiliste montre que l'énergie totale du champ de pression aléatoire est très sensible aux gradients sur la moyenne et sur la longueur de corrélation spatiale du tenseur d'élasticité aléatoire de l'os cortical. Par conséquent, des mesures expérimentales utilisant la technique de la transmission axiale ultrasonique peut être utilisée afin d'identifier les paramètres du modèle probabiliste proposé.

## Références

- [1] Biot, M. A., 1956. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid .1. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America* 28 (2), 168–178.
- [2] Desceliers, C., Soize, C., Grimal, Q., Haiat, G., Naili, S., 2008. A time-domain method to solve transient elastic wave propagation in a multilayer medium with a hybrid spectral-finite element space approximation. *Wave Motion* 45 (4), 383 – 399.
- [3] Desceliers, C., Soize, C., Grimal, Q., Talmant, M., Naili, S., 2009. Determination of the random anisotropic elasticity layer using transient wave propagation in a fluid-solid multilayer : Model and experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America* 125 (4, Part 1), 2027–2034.
- [4] Jaynes, E. T., 1957a. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.* 106 (4), 620–630.
- [5] Jaynes, E. T., 1957b. Information theory and statistical mechanics. ii. *Phys. Rev.* 108 (2), 171–190.
- [6] Shannon, C. E., 1948. A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.* (27), 379–423, 623–659.
- [7] Soize, C., 2006. Non-gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (1-3), 26 – 64.
- [8] Soize, C., 2008. Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size. *Probabilistic Engineering Mechanics* 23 (2-3), 307 – 323.