



**HAL**  
open science

## **Modèle réduit en dynamique vibratoire basse et moyenne fréquence pour des structures mécaniques complexes**

A. Arnoux, Anas Batou, Christian Soize, L. Gagliardini

### ► **To cite this version:**

A. Arnoux, Anas Batou, Christian Soize, L. Gagliardini. Modèle réduit en dynamique vibratoire basse et moyenne fréquence pour des structures mécaniques complexes. 20ème Congrès Français de Mécanique 2011, Université de Besançon, Aug 2011, Besançon, France. pp.1-6. <hal-00773377>

**HAL Id: hal-00773377**

**<https://hal.science/hal-00773377v1>**

Submitted on 13 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Modèle réduit en dynamique d'une structure ayant de nombreux modes locaux en basse fréquence

A. Arnoux<sup>a b</sup>, A. Batou<sup>a</sup>, C. Soize<sup>a</sup>, L. Gagliardini<sup>b</sup>

a. Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle, MSME UMR 8208  
CNRS, 5 Boulevard Descartes, 77454 MARNE-LA-VALLÉE

b. PSA Peugeot Citron, Direction Technique et Industrielle, Centre Technique de Velizy A, Route de  
Gisy, 78943 VELIZY-VILLACOUBLAY Cedex

## Résumé :

*On présente la mise en œuvre d'une nouvelle méthode de réduction de modèle en dynamique pour des structures dans lesquelles cohabitent des modes globaux et des modes locaux. Cette technique de réduction permet de séparer les deux types de modes élastiques en construisant d'abord une base des déplacements globaux, puis en complétant par une base des déplacements locaux. Ces deux bases sont obtenues en s'appuyant sur une partition adéquate de la structure obtenue par la Fast Marching Method. La méthode est appliquée à un modèle numérique complexe de véhicule automobile.*

## Abstract :

*We present the construction of a new method of reduced-model for dynamic structures in which there are global modes and local modes. The reduction technique used to separate the two types of elastic modes in first building a base of global displacements, then complemented by a base of local displacement. Both bases are obtained based on a correct partition of the structure obtained by the Fast Marching Method. The method is applied to a complex numerical model of vehicle.*

**Mots clefs : vibro-acoustique ; modèle réduit ; Fast Marching Method**

## 1 Introduction

Cette recherche est effectuée dans le cadre de l'analyse vibro-acoustique des véhicules automobiles. Un véhicule automobile est constitué de pièces rigides et de composants flexibles. En basses fréquences, ce type de structure est caractérisé par le fait qu'il présente, non seulement les modes élastiques globaux classiques, mais aussi de nombreux modes élastiques locaux dans la même bande de basse fréquence. Le problème est que dans une telle structure complexe et hétérogène, les modes élastiques globaux ne peuvent pas être clairement séparés des modes élastiques locaux parce qu'il y a beaucoup de petites contributions des déformations locales dans les déformations des modes élastiques globaux et inversement. Comme il y a des modes élastiques locaux dans la bande des basses fréquences, une partie de l'énergie mécanique est transférée des modes élastiques globaux vers les modes élastiques locaux qui stockent cette énergie et donc induit un amortissement apparent aux résonances associées aux modes élastiques globaux. Afin de construire un modèle réduit en basse fréquence, qui permet une bonne approximation des déplacements globaux et puis, si nécessaire, de prendre en compte les effets des déplacements locaux dans la réponse totale, une nouvelle approche [1] a récemment été proposée. Cette méthode, qui permet de calculer une base des déplacements globaux et une base des déplacements locaux par la résolution séparée de deux problèmes aux valeurs propres, nécessite de décomposer le modèle de calcul en sous-domaines dont les tailles sont contrôlées. Nous proposons d'utiliser la Fast Marching Method pour la construction de ces sous-domaines. Néanmoins, afin d'expliquer pourquoi une telle construction doit être effectuée, nous rappelons, dans une première partie, la méthode permettant de construire le modèle réduit. Puis, nous présentons la Fast Marching Method (voir [2])

qui permet de propager un front sur un maillage complexe d'un modèle numérique. Nous présentons deux applications, l'une relative à un système dynamique simple et une autre concernant un véhicule automobile.

## 2 Description de la méthode

Dans cette section, nous résumons la méthode introduite dans [1]. Cette méthode permet de construire une base des déplacements globaux et une base des déplacements locaux en résolvant séparément deux problèmes aux valeurs propres. Il convient de noter que ces deux bases ne sont pas constituées des modes élastiques. La méthode est basée sur la construction d'un opérateur de projection pour réduire l'énergie cinétique, en revanche l'énergie élastique reste exacte. Cette méthode est appliquée à la structure du système vibroacoustique considéré.

### 2.1 Modèle réduit de référence

Nous nous intéressons aux fonctions de réponse en fréquence d'une structure vibroacoustique amortie occupant un domaine borné  $\Omega$ , dans la bande de fréquence  $\mathcal{B} = [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  avec  $0 < \omega_{\min}$ . Soit  $\mathbb{U}(\omega)$ , le vecteur déplacement de la structure du modèle vibroacoustique à  $m$  DDL construit par la méthode des Éléments Finis (EF). Soit  $[\mathbb{M}]$  et  $[\mathbb{K}]$  les matrices de masse et de raideur qui sont symétriques définies positives. Les valeurs propres  $\lambda$  et les modes élastiques  $\boldsymbol{\varphi}$  dans  $\mathbb{R}^m$  de la structure sont les solutions du problème aux valeurs propres généralisé  $[\mathbb{K}] \boldsymbol{\varphi} = \lambda [\mathbb{M}] \boldsymbol{\varphi}$ .

L'approximation  $\mathbb{U}_n(\omega)$  à l'ordre  $n$  de  $\mathbb{U}(\omega)$  s'écrit  $\mathbb{U}_n(\omega) = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha}(\omega) \boldsymbol{\varphi}_{\alpha} = [\Phi] \mathbf{q}(\omega)$ , avec  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , le vecteur complexe des  $n$  coordonnées généralisées et où  $[\Phi] = [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_n]$  est la matrice  $(m \times n)$  réelle des modes élastiques associée aux  $n$  premières valeurs propres.

### 2.2 Décomposition de la matrice de masse

Dans cette section, nous présentons une décomposition de la matrice de masse qui sera utile pour la construction d'une base des déplacements globaux. Les détails de la méthode sont présentés dans [1].

#### 2.2.1 Décomposition du domaine $\Omega$

Le domaine  $\Omega$  est décomposé en  $n_j$  sous-domaines  $\Omega_j^{\epsilon}$  tels que, pour  $j$  et  $k$  dans  $\{1, \dots, n_j\}$ ,  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n_j} \Omega_j^{\epsilon}$ ,  $\Omega_j^{\epsilon} \cap \Omega_k^{\epsilon} = \emptyset$ . Le paramètre  $\epsilon$  est la longueur caractéristique des sous-domaines. Le choix de  $\epsilon$  est liée à la plus petite "longueur d'onde" des éléments de la base des déplacements globaux que nous voulons construire. La construction des sous-domaines est présentée dans le paragraphe 3.

#### 2.2.2 L'opérateur de projection

Soit  $\mathbf{u} \mapsto h_{\epsilon}^r(\mathbf{u})$  l'opérateur linéaire défini par

$$\{h_{\epsilon}^r(\mathbf{u})\}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_j} \Omega_j^{\epsilon}(\mathbf{x}) \frac{1}{m_j} \int_{\Omega_j^{\epsilon}} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1)$$

avec  $\mathbf{x} \mapsto \Omega_j^{\epsilon}(\mathbf{x}) = 1$  si  $\mathbf{x}$  est dans  $\Omega_j^{\epsilon}$  et égal à 0 sinon. La masse locale  $m_j$  est définie, pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, n_j\}$ , par  $m_j = \int_{\Omega_j^{\epsilon}} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , où  $\mathbf{x} \mapsto \rho(\mathbf{x})$  est la masse volumique. Soit  $\mathbf{u} \mapsto h_{\epsilon}^c(\mathbf{u})$  l'opérateur linéaire défini par  $h_{\epsilon}^c(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - h_{\epsilon}^r(\mathbf{u})$ . La fonction  $h_{\epsilon}^r(\mathbf{u})$  sera également désignée par  $\mathbf{u}^r$  et la fonction  $h_{\epsilon}^c(\mathbf{u})$  par  $\mathbf{u}^c$ . Nous avons alors  $\mathbf{u} = h_{\epsilon}^r(\mathbf{u}) + h_{\epsilon}^c(\mathbf{u})$  c'est-à-dire,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^r + \mathbf{u}^c$ . Soit  $[H_{\epsilon}^r]$  la matrice  $(m \times m)$  relative à la discrétisation EF de l'opérateur de projection  $h_{\epsilon}^r$  défini par Eq. (1). Par conséquent, la discrétisation par éléments finis  $\mathbb{U}$  de  $\mathbf{u}$  peut être écrite comme  $\mathbb{U} = \mathbb{U}^r + \mathbb{U}^c$ , dans laquelle  $\mathbb{U}^r = [H_{\epsilon}^r] \mathbb{U}$  et  $\mathbb{U}^c = [H_{\epsilon}^c] \mathbb{U} = \mathbb{U} - \mathbb{U}^r$ , ce qui montre que  $[H_{\epsilon}^c] = [I_m] - [H_{\epsilon}^r]$ . Puis, la matrice  $(m \times m)$  de masse réduite  $[\mathbb{M}^r]$  et la matrice  $(m \times m)$  de masse complémentaire  $[\mathbb{M}^c]$  sont respectivement définies par  $[\mathbb{M}^r] = [H_{\epsilon}^r]^T [\mathbb{M}] [H_{\epsilon}^r]$  et  $[\mathbb{M}^c] = [H_{\epsilon}^c]^T [\mathbb{M}] [H_{\epsilon}^c]$ . En utilisant les propriétés de l'opérateur de projection défini par l'Eq. (1), il est démontré dans [1] que  $[\mathbb{M}^c] = [\mathbb{M}] - [\mathbb{M}^r]$ .

## 2.3 Les bases des déplacements globaux et locaux

Comme proposé dans [1], deux méthodes sont proposées pour calculer la base des déplacements globaux et la base des déplacements locaux qui seront utilisées pour réduire l'équation matricielle.

### 2.3.1 Méthode directe

Dans cette méthode, la base des déplacements globaux et la base des déplacements locaux sont directement calculées en utilisant la décomposition de la matrice de masse  $[\mathbb{M}]$ . Les vecteurs propres des déplacements globaux  $\phi^g$  et les vecteurs propres des déplacements locaux  $\phi^\ell$  dans  $\mathbb{R}^m$  sont solutions des problèmes aux valeurs propres généralisés  $[\mathbb{K}]\phi^g = \lambda^g[\mathbb{M}^r]\phi^g$  et  $[\mathbb{K}]\phi^\ell = \lambda^\ell[\mathbb{M}^c]\phi^\ell$ .

### 2.3.2 La méthode de double projection

Cette méthode est moins intrusive à l'égard des logiciels commerciaux et moins coûteuse en temps de calcul que la méthode directe. Les problèmes aux valeurs propres généralisés définis dans la section (2.3.1) sont réécrits, pour  $n$  suffisamment grand,

$$[\tilde{K}]\tilde{\phi}^g = \lambda^g[\tilde{M}^r]\tilde{\phi}^g \quad \text{et} \quad [\tilde{K}]\tilde{\phi}^\ell = \lambda^\ell[\tilde{M}^c]\tilde{\phi}^\ell, \quad (2)$$

où  $[\tilde{M}^r] = [\Phi_\epsilon^r]^T[\mathbb{M}][\Phi_\epsilon^r]$ ,  $[\tilde{M}^c] = [\Phi_\epsilon^c]^T[\mathbb{M}][\Phi_\epsilon^c]$  et  $[\tilde{K}] = [\Phi]^T[\mathbb{K}][\Phi]$ , où les matrices  $(m \times n)$  réelles  $[\Phi_\epsilon^r]$  et  $[\Phi_\epsilon^c]$  sont telles que  $[\Phi_\epsilon^r] = [H_\epsilon^r][\Phi]$  et  $[\Phi_\epsilon^c] = [H_\epsilon^c][\Phi] = [\Phi] - [\Phi_\epsilon^r]$ .

## 2.4 Modèle réduit moyen

Il est démontré dans [1] que la famille  $\{\phi_1^g, \dots, \phi_{3n_J}^g, \phi_1^\ell, \dots, \phi_{m-3n_J}^\ell\}$  est une base de  $\mathbb{R}^m$ . Le modèle réduit moyen est obtenu par la projection de  $\mathbb{U}(\omega)$  sur la famille  $\{\phi_1^g, \dots, \phi_{n_g}^g, \phi_1^\ell, \dots, \phi_{n_\ell}^\ell\}$ . Alors, l'approximation  $\mathbb{U}_{n_g, n_\ell}(\omega)$  de  $\mathbb{U}(\omega)$  à l'ordre  $(n_g, n_\ell)$  s'écrit

$$\mathbb{U}_{n_g, n_\ell}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n_g} q_\alpha^g(\omega) \phi_\alpha^g + \sum_{\beta=1}^{n_\ell} q_\beta^\ell(\omega) \phi_\beta^\ell. \quad (3)$$

## 3 Construction des sous-domaines

Pour un modèle numérique d'une structure aussi complexe qu'un véhicule automobile, la décomposition du domaine n'est pas facile à réaliser. La méthode que nous proposons est basée sur le "Fast Marching Method" (FMM) présentée dans [2] qui explique comment propager un front (la notion de front sera définie ci-dessous) sur une géométrie à partir d'un point de départ. Dans cette section, la FMM est résumée et ensuite nous expliquons comment construire des sous-domaines en utilisant la FMM.

### 3.1 Présentation de la Fast Marching Method (FMM)

La Fast Marching Method est une méthode numérique permettant de faire propager un front sur une géométrie complexe depuis un point de départ noté  $\mathbf{x}_0$ . La FMM permet de calculer la distance géodésique  $U$  entre le front et le point  $\mathbf{x}_0$  en utilisant un maillage de cette géométrie. L'algorithme FMM est expliqué dans [2]. L'algorithme de la FMM introduit trois groupes de noeuds. (1) Les noeuds *alive* pour lesquels la valeur de  $U$  est fixée et ne change pas. (2) Les noeuds *trial* pour lesquels la valeur de  $U$  est donnée mais doit être mise à jour jusqu'à ce qu'ils deviennent *alive* et ces noeuds constituent la Narrow Band (NB). (3) Les noeuds *far* qui n'ont pas été atteints par le front et, par conséquent sont tels que  $U = +\infty$ .

Pour les maillages triangulaires, l'algorithme doit être adapté. Cette correction est développée dans [2] et [3].

### 3.2 Construction des sous-domaines

Les sous-domaines  $\Omega_j^\epsilon$  de  $\Omega$  sont construits en utilisant la FMM. Cette construction est réalisée en deux étapes. La première consiste à trouver les centres des sous-domaines. La seconde étape consiste à générer les sous-domaines en utilisant ces centres comme points de départ.

(i) *Calcul des centres des sous-domaines*

L'algorithme est le suivant :

*Initialisation* : (1) Choisir une valeur pour le paramètre  $\epsilon$ . (2) Choisir un premier centre  $\mathbf{x}_0^1$ .

*Boucle* : (1) Prendre  $\mathbf{x}_0^j$  comme point de départ de la FMM. Propager le front. (2) Stopper le front quand la valeur de  $U$  du dernier noeud *alive* est supérieure à  $\epsilon$ . (3) Le centre suivant  $\mathbf{x}_0^{j+1}$  est le dernier noeud *alive*. Tous les noeuds *alive* deviennent inéligible pour être des centres.

Cet algorithme permet de construire une répartition homogène des centres des sous-domaines.

(ii) *Calcul des sous-domaines*

Pour construire les sous-domaines  $\Omega_j^\epsilon$  en utilisant les centres  $\mathbf{x}_0^j$ , nous propageons simultanément un front partant de chaque centre jusqu'à ce que tous les noeuds deviennent des noeuds *alive* par rapport à un front. Les frontières des sous-domaines correspondent alors aux lignes d'intersection des fronts.

## 4 Application

Dans ce paragraphe, nous présentons deux applications de la méthodologie présentée dans les sections précédentes. La première est une structure simple qui a déjà été présentée dans [1] et la seconde est relative à un véritable modèle de véhicule automobile.

### 4.1 Première application

Le système est composé de 12 panneaux souples et une structure rigide (voir Fig. 1). Pour les parties souples, tous les panneaux sont de forme rectangulaire de  $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ , homogène, isotrope, avec une épaisseur constante  $0.002\text{ m}$ , la masse volumique est égale à  $7.8\text{ kg/m}^3$  et le coefficient de Poisson est égale à  $0.29$ . En outre, le module d'Young est différent pour tous les panneaux. La structure rigide est homogène, isotrope, avec une épaisseur constante de  $0.17\text{ m}$  et une masse volumique de  $9.8\text{ kg/m}^3$ , un coefficient de Poisson de  $0.29$  et un module d'Young de  $2.1 \times 10^{12}\text{ N/m}^2$ . La bande de fréquence d'analyse est  $B = ]0, 11]\text{ Hz}$ . Le modèle EF de la structure a 13 014 DDL.

#### 4.1.1 Décomposition du domaine

La FMM présentée dans le paragraphe 3 est appliquée au maillage de la structure avec  $\epsilon = 3.5\text{ m}$ . Les centres des sous-domaines ainsi que les sous-domaines sont représentés la Fig. 1.

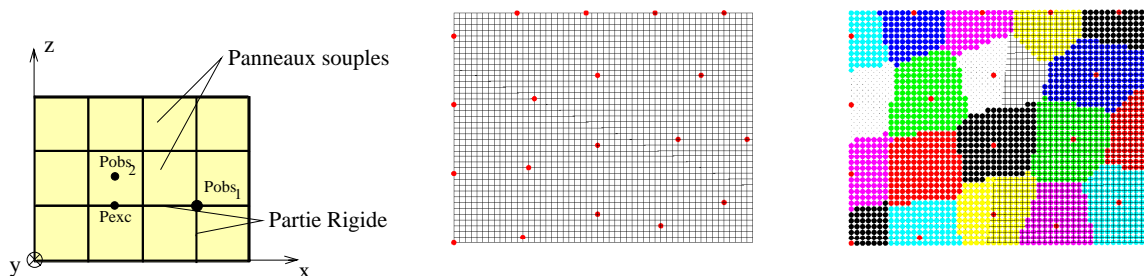


FIGURE 1 – Schéma de la structure (à gauche), centres des sous-domaines (au centre) et sous-domaines (à droite)

#### 4.1.2 Les modes élastiques, les vecteurs propres des déplacements locaux et globaux

Dans un premier temps, les modes élastiques sont calculés avec le modèle EF. Il y a 86 fréquences propres dans la bande  $B$  et  $n = 120$  fréquences propres dans la bande de fréquence  $]0, 13.2]\text{ Hz}$ .

Le premier mode élastique  $\phi_1$  et le second mode élastique  $\phi_2$  sont représentés dans la Fig. 2. On peut voir que  $\phi_1$  est un mode élastique local alors que  $\phi_2$  est un mode élastique global avec un déplacement local important. Dans une deuxième étape, les vecteurs propres locaux et globaux des

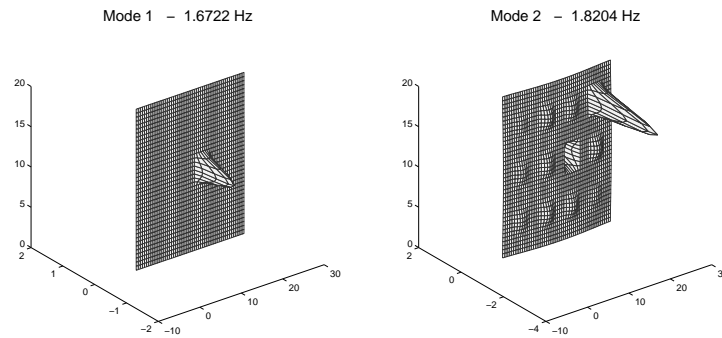


FIGURE 2 – Premier mode elastic (à droite) et second mode élastique (à gauche)

déplacements sont construits en utilisant la méthode de double projection. Dans la bande de fréquence  $]0, 13.2] Hz$ , il existe  $n_g = 8$  vecteurs propres des déplacements globaux et  $n_\ell = 112$  vecteurs propres des déplacements locaux. Les deux premiers vecteurs propres des déplacements globaux  $\phi_1^g, \phi_2^g$  et les deux premiers vecteurs propres des déplacements locaux  $\phi_1^l$  et  $\phi_2^l$  sont présentés dans la Fig. 3.

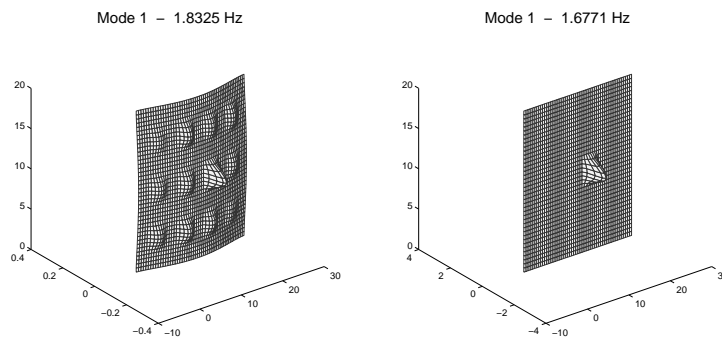


FIGURE 3 – Premier vecteur propre des déplacements globaux (à gauche) et premier vecteur propre des déplacements locaux (à droite)

## 4.2 Fonction de réponse en fréquence

Pour tout  $\omega \in B$ , la structure est soumise à une charge ponctuelle extérieure égale à  $1 N$  appliquée au nœud Pexc de coordonnées  $(10, 0, 7)$  et situé dans la partie rigide. La matrice d'amortissement moyenne est construite en utilisant un amortissement modale avec un taux d'amortissement  $\xi = 0,04$ . La réponse est calculée pour deux points d'observation, le point Pobs<sub>1</sub> situé dans la partie raide au niveau du nœud  $(19, 0, 7)$  et le point Pobs<sub>2</sub> situé dans la partie souple au niveau du nœud  $(10, 0, 10)$  (voir Fig. 1). La réponse est calculée pour différentes projections associées avec les différentes bases : pour les modes élastiques ( $n = 120$ ), pour les vecteurs propres des déplacements globaux ( $n_g = 8$  et  $n_\ell = 0$ ), pour les vecteurs propres des déplacements locaux ( $n_g = 0$  et  $n_\ell = 112$ ) et enfin, pour les vecteurs propres des déplacements locaux et globaux ( $n_g = 8$  et  $n_\ell = 112$ ). Les modules en échelle logarithmique des réponses sont représentés sur la Fig. 4. On peut constater que les réponses calculées à l'aide des vecteurs propres des déplacements globaux et locaux sont exactement les mêmes que la réponse calculée en utilisant les modes élastiques. Pour le point Pobs<sub>1</sub> situé sur la partie raide, la contribution des vecteurs propres des déplacements globaux est prépondérante dans la bande des très basse fréquence,

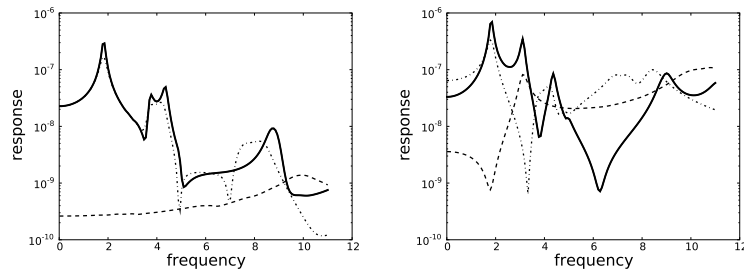


FIGURE 4 – Modules en échelle logarithmique des fonctions de réponse de Pobs<sub>1</sub> (à gauche) et Pobs<sub>2</sub> (à droite). Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais), vecteurs propres des déplacements globaux seulement (trait mixte), vecteurs propres des déplacements locaux seulement (trait en pointillé), vecteurs propres des déplacements globaux et locaux (trait mince continu superposé au trait épais)

mais la contribution des vecteurs propres des déplacements locaux devient non négligeable en plus haute fréquence. Pour le point Pobs<sub>2</sub> situé sur la partie flexible, la contribution des vecteurs propres des déplacements locaux est importante, sauf pour la première résonance correspondant au premier vecteurs propres des déplacements globaux.

### 4.3 Application de la FMM sur un modèle de véhicule automobile

La FMM est réalisée en utilisant le modèle numérique EF de la structure d'un véhicule automobile. Un tel modèle a 250 000 nœuds et contient des éléments volumiques, surfaciques et des éléments de poutre. Les sous-domaines obtenus en utilisant la FMM sont représentés sur la Fig. 5.

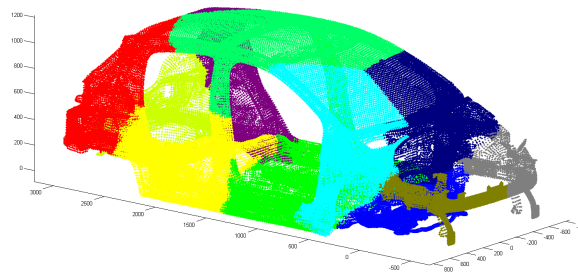


FIGURE 5 – 12 sous-domaines correspondant à 12 points de départ pour une voiture avec  $\epsilon = 1.2 m$

## 5 Conclusion

Dans cet travail, nous avons présenté l'utilisation de la Fast Marching Method adaptée à une géométrie complexe afin de construire les sous-domaines du modèle numérique qui sont nécessaires à la mise en œuvre d'une nouvelle méthodologie permettant de construire un modèle dynamique réduit dans le domaine des basses fréquences lorsqu'il y a, dans ce domaine des basses fréquences, à la fois des modes globaux et des modes locaux qui ne peuvent pas être facilement séparés par les méthodes usuelles.

## Références

- [1] C. Soize, A. Batou. accepté en juin 2010. Stochastic reduced-order model in low frequency dynamics in presence of numerous local elastic modes. *Journal of Applied Mechanics*.
- [2] J.A. Sethian. 1996. A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 93. 4.
- [3] J.A. Sethian, R. Kimmel. 1998. Computing Geodesic Paths on Manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 95. 8431-8435.