



**HAL**  
open science

## Modèle dynamique équivalent de matrices d'impédance de fondation

Régis Cottureau, Didier Clouteau, Christian Soize

► **To cite this version:**

Régis Cottureau, Didier Clouteau, Christian Soize. Modèle dynamique équivalent de matrices d'impédance de fondation. 7-eme Colloque National de L'Association Française du Genie Parasismique, ECP Paris, Jun 2007, Chatenay Malabry, France. pp.Pages: 1-8. hal-00773359

**HAL Id: hal-00773359**

**<https://hal.science/hal-00773359>**

Submitted on 13 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Modèle dynamique équivalent de matrices d'impédance de fondation

Régis Cottureau\* — Didier Clouteau\* — Christian Soize\*\*

\* Laboratoire MSSMat, École Centrale Paris  
Grande Voie des Vignes, F-92295 Châtenay-Malabry cedex  
{regis.cottureau,didier.clouteau}@ecp.fr

\*\* LaM, Université de Marne-la-Vallée  
5 boulevard Descartes, F-77454 Marne-la-Vallée cedex 2  
soize@univ-mlv.fr

---

*RÉSUMÉ.* En génie parasismique, la matrice d'impédance de fondation est une fonction complexe de la fréquence. Elle peut être calculée par des méthodes numériques classiques, mais on utilise souvent des modèles à masses concentrées, comme les modèles à ressort de Winkler ou ceux résultant des travaux de Wolf. On présente ici un modèle plus général, dit à variables cachées, basé sur les propriétés mathématiques des matrices d'impédance, telles la causalité et la stabilité. La méthode d'identification de ces modèles est présentée en détail. Deux applications d'intérêt en génie parasismique sont ensuite décrites.

*ABSTRACT.* In seismic engineering, the soil impedance matrix is a complex function of the frequency. It can be computed using classical numerical methods, but simpler lumped-parameter models are often used. Among these, the most famous are Winkler-spring models and those derived from the works of Wolf. A more general model, called the hidden variables model, is presented in this paper. It is based on the study of the mathematical properties of impedance matrices, such as the causality and the stability. The identification method for this type of models is presented in detail. Two applications, of interest in seismic engineering, are described.

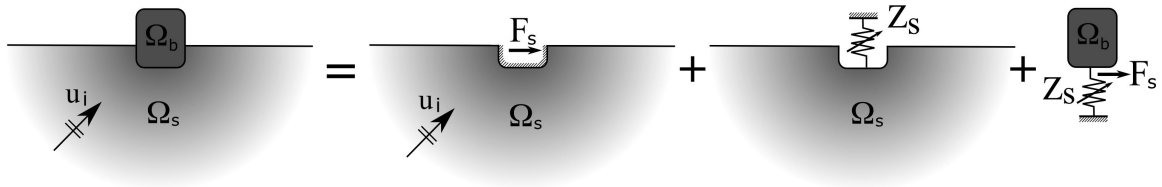
*MOTS-CLÉS :* Matrice d'impédance, modèle à variables cachées, modèle à ressorts de Winkler, modèle de Wolf, Identification modale, domaine non-borné.

*KEYWORDS:* Impedance matrix, lumped-parameter model, Winkler-spring model, Wolf model, modal identification, unbounded domain.

---

## 1. Introduction

En génie parasismique, la matrice d'impédance de sol est une fonction complexe de la fréquence. Elle peut être calculée par des méthodes numériques classiques, notamment par Éléments Finis de Frontière (EFF). Cependant, on préfère souvent utiliser des modèles simplifiés, en particulier pour les coupler à des modèles non-linéaires de



**Figure 1.** La méthode de décomposition de domaines en ISS : le problème global (à gauche) est décomposé en deux problèmes locaux au sol  $\Omega_s$ , définissant les chargements induits  $\mathbf{F}_s(\omega)$  par le champ sismique incident  $\mathbf{u}_i$  et la matrice d'impédance du sol  $\mathbf{Z}_s(\omega)$ , et un problème global posé sur le bâtiment  $\Omega_b$ .

la structure. Les plus connus de ces modèles simplifiés sont les modèles à masses concentrées - avec notamment les travaux de Wolf (Wolf *et al.*, 1986) - et les modèles à ressorts de Winkler. Ces modèles sont limités au cas des fondations rigides, et le couplage entre les différents degrés de liberté (DDLs) de la fondation, ainsi que les phénomènes de résonance interne du sol - comme dans le cas d'une couche sur demi-espace rigide - sont difficiles à mettre en œuvre.

On propose ici un modèle à variables cachées, plus général, basé sur l'existence de DDLs internes, en plus des DDLs de frontière, et la construction de matrices sous-jacentes de masse, rigidité, et amortissement. La signature de ces matrices correspond directement aux propriétés de causalité et de stabilité de l'impédance. Ces modèles à variables cachées ne sont pas soumis aux restrictions des modèles à masses concentrées. En particulier, les couplages dans la matrice d'impédance  $\mathbf{y}$  sont pris en compte de façon naturelle.

La construction et l'identification des modèles à variables cachées sont d'abord présentées, et, par rapport à de précédents travaux (Cottreau *et al.*, 2007), on se concentre sur l'étape d'identification. Notamment, on propose ici une nouvelle contrainte pour assurer la stabilité du polynôme interpolant. Le cas d'une fondation enterrée dans une couche homogène de sol reposant sur un demi-espace rigide est ensuite considéré.

## 2. Définition de la matrice d'impédance de fondation

### 2.1. Méthode de décomposition de domaines

En génie parasismique, le phénomène d'interaction sol-structure (ISS) est souvent pris en compte via la matrice d'impédance du sol (Wolf, 1985). Le problème entier (à gauche sur la figure 1), posé sur l'union des domaines sol  $\Omega_s$  et bâtiment  $\Omega_b$ , est alors séparé en trois sous-problèmes. Le premier sert de support pour la définition des chargements induits  $\mathbf{F}_s(\omega)$  par l'onde sismique incidente, le second pour celle de la matrice d'impédance du sol  $\mathbf{Z}_s(\omega)$ , et le troisième pour le dimensionnement global du bâtiment, en tenant compte de l'action du sol via  $\mathbf{Z}_s(\omega)$  et  $\mathbf{F}_s(\omega)$ .

Dans le cadre du problème représenté par le troisième schéma de la figure 1, on choisit une base  $\{\psi_\ell\}_{1 \leq \ell \leq n}$  de discrétisation des mouvements de la fondation  $\Gamma$ , dans laquelle les éléments de la matrice d'impédance de sol sont définis, à une fréquence  $\omega$ , par

$$Z_{ij}(\omega) = \int_{\Gamma} \sigma_{jk}^s(\mathbf{u}_i^s(\omega)) \psi_j(\omega) n_k dS, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad [1]$$

où  $\mathbf{u}_i^s(\omega)$  est le champ de déplacement induit dans le sol par un déplacement harmonique de forme imposée  $\psi_j$ , à la fréquence  $\omega$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}_i^s(\omega)) = \{\sigma_{jk}^s(\mathbf{u}_i^s(\omega))\}_{1 \leq j, k \leq 3}$  le champ de contraintes correspondant, et  $\mathbf{n} = \{n_j\}_{1 \leq j \leq 3}$  le vecteur normal à l'élément de surface  $dS$ .

## 2.2. Cas des fondations rigides axisymétriques

Dans le cas, classique en ISS, d'une fondation rigide,  $n = 6$ , et les champs  $\{\psi_\ell\}_{1 \leq \ell \leq n}$  représentent les mouvements de corps rigide de la fondation. Si de plus la fondation est axisymétrique, et que l'on choisit une base dont une direction est la verticale, alors de nombreux éléments de la matrice d'impédance s'annulent. De plus, les deux translations horizontales sont équivalentes, de même que les deux rotations autour des axes horizontaux, et l'on choisit de ne pas représenter les éléments redondants de la matrice d'impédance. Celle-ci est alors écrite

$$\mathbf{Z}_s(\omega) = \begin{bmatrix} Z_h(\omega) & 0 & Z_c(\omega) & 0 \\ & Z_v(\omega) & 0 & 0 \\ & & Z_b(\omega) & 0 \\ \text{(sym.)} & & & Z_t(\omega) \end{bmatrix}, \quad [2]$$

où  $Z_h(\omega)$ ,  $Z_v(\omega)$ ,  $Z_b(\omega)$ ,  $Z_t(\omega)$ , et  $Z_c(\omega)$  sont respectivement appelées impédance horizontale, impédance verticale, impédance de balancement, impédance de torsion, et impédance de couplage. Ce choix de représentation sera respecté pour le reste de l'article, et les applications (cf. section 6) seront faites dans ce cadre. Cependant, il faut noter que le modèle à variables cachées (cf. section 4) n'est pas limité à ce contexte et peut s'appliquer au cas général d'une matrice d'impédance de sol pleine, et définie par rapport à une base cinématique flexible.

## 2.3. Normalisation de la matrice d'impédance

Afin de comparer plus aisément différents problèmes d'ISS, et éventuellement de fournir des formules simplifiées valables pour des ensembles de cas, il est courant d'écrire la matrice d'impédance du sol

$$\mathbf{Z}_s(\omega) = \mathbf{K}_0^{1/2} (\mathbf{K}_s(a_0) + i\mathbf{C}_s(a_0)) \mathbf{K}_0^{T/2}, \quad [3]$$

où  $\mathbf{K}_0$  est une matrice de normalisation, réelle et diagonale, qui vaut approximativement la matrice d'impédance en statique, et  $\mathbf{K}_s(a_0)$  et  $\mathbf{C}_s(a_0)$  sont des matrices réelles, appelées respectivement coefficient de rigidité dynamique et coefficient d'amortissement dynamique. Ces deux matrices héritent de la structure de  $\mathbf{Z}_s(\omega)$ , donc on utilisera les mêmes conventions pour les indices  $\{s, h, v, b, t, c\}$  que pour celle-ci.  $\mathbf{K}_0$  dépend du problème considéré (fondation superficielle, enterrée, filante) et des caractéristiques géométriques et mécaniques du sol, et sa valeur est donnée par exemple dans (Sieffert *et al.*, 1992).  $a_0$  est une fréquence adimensionnelle qui vaut

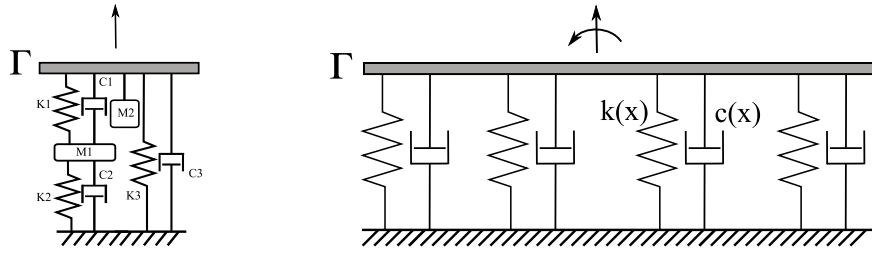
$$a_0 = \frac{\omega r}{c_s}, \quad [4]$$

où  $r$  est le rayon de la fondation et  $c_s$  la vitesse de cisaillement de la couche superficielle du sol.

## 3. Modèles à masses concentrées de la matrice d'impédance

La construction des modèles à masses concentrées répond au besoin des ingénieurs en génie parasismique à disposer de formules simples pour calculer l'influence du sol sur les bâtiments lors des tremblements de terre. Le principe consiste à remplacer le sol réel par un système de masses, ressorts, et amortisseurs, dont la structure dépend du type de problème considéré (fondation superficielle ou enterrée, sol homogène ou couche sur rocher, par exemple) et les valeurs sont données dans des tables fonction à la fois du type de problème et des paramètres du sol. Ces valeurs sont identifiées par rapport à des résultats de calcul plus complexes, par exemple par des méthodes d'EFF. Les deux types de modèles à masses concentrées les plus souvent rencontrés dans la littérature sont les modèles issus des travaux de Wolf, et les modèles à ressort de Winkler (figure 2).

Les principaux défauts de ces approches sont les suivants :



**Figure 2.** Modèles à masses concentrées : exemple de modèle de Wolf (à gauche) et de modèle de Winkler (à droite).

– *Spécification a priori de la structure du modèle*, ce qui limite la précision que l'on peut obtenir par l'identification.

– *Identification indépendante de chaque élément de la matrice d'impédance*. Des tentatives de modélisation du couplage ont été faites pour les modèles de Wolf (Wolf *et al.*, 1986), mais restent relativement complexes, et ne peuvent pas être généralisées à des fondations flexibles. Le couplage peut être pris en compte dans certains cas pour les modèles de Winkler, par la continuité du champ de ressorts, mais ce n'est pas le cas en général, et notamment pour le terme de couplage  $Z_c(\omega)$  dans le cas important d'une fondation superficielle.

– *Identification de paramètres non-physiques*. Les paramètres des modèles de Wolf et de Winkler ne sont pas analysables directement en termes de paramètres géométriques ou mécaniques du sol, ce qui amène parfois à identifier des valeurs négatives des masses, ressorts, ou amortisseurs.

Le modèle que nous proposons à la suite reprend l'intérêt des modèles à masses concentrées par l'utilisation de matrices de masse, rigidité et amortissement, en gommant les inconvénients majeurs. En particulier, nous verrons que la structure de ce modèle peut s'analyser de façon systématique, que la modélisation des couplages se fait alors de façon naturelle et que la positivité des matrices de masse, rigidité, et amortissement est liée à des propriétés de la matrice d'impédance.

#### 4. Modèles à variables cachées de la matrice d'impédance

Un cadre général pour la construction de modèles simplifiés de matrices d'impédance de frontière, assurant la vérification de leurs principales propriétés mathématiques et physiques, notamment la causalité et la stabilité, a été décrit dans (Chabas *et al.*, 1987) pour le cas d'impédance monodimensionnelles. Dans (Cottureau *et al.*, 2007), ce cadre a été généralisé au cas multidimensionnel, notamment par la résolution des problèmes d'identification associés.

La construction du modèle à variables cachées pour une matrice d'impédance de fondation donnée  $\mathbf{Z}_s(\omega)$  consiste à postuler l'existence, en plus des  $n_\Gamma$  DDLs associés à la cinématique de la fondation, de  $n_h$  DDLs, *cachés*, associés de façon heuristique à des modes internes au sol. On suppose ensuite que l'on peut construire les matrices de masse  $\mathbf{M}$ , rigidité  $\mathbf{K}$ , et amortissement  $\mathbf{C}$ , associés à cette cinématique. Ces matrices sont de taille  $n \times n$ , avec  $n = n_\Gamma + n_h$ , définies positives, et on peut les écrire par blocs :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\Gamma & \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_c^T & \mathbf{M}_h \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\Gamma & \mathbf{K}_c \\ \mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_h \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\Gamma & \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c^T & \mathbf{C}_h \end{bmatrix}, \quad [5]$$

où  $\mathbf{M}_\Gamma$ ,  $\mathbf{K}_\Gamma$ , et  $\mathbf{C}_\Gamma$  sont des matrices  $n_\Gamma \times n_\Gamma$  définies positives,  $\mathbf{M}_h$ ,  $\mathbf{K}_h$ , et  $\mathbf{C}_h$  sont des matrices  $n_h \times n_h$  définies positives, et  $\mathbf{M}_c$ ,  $\mathbf{K}_c$ , et  $\mathbf{C}_c$  sont des matrices  $n_\Gamma \times n_h$  *a priori* sans signature. Avec ce modèle, de forme très générale, on obtient, par condensation dynamique, une matrice d'impédance de fondation sous la forme :

$$\mathbf{Z}_s(\omega) = -\omega^2 \mathbf{M}_\Gamma + i\omega \mathbf{C}_\Gamma + \mathbf{K}_\Gamma - (-\omega^2 \mathbf{M}_c + i\omega \mathbf{C}_c + \mathbf{K}_c)(-\omega^2 \mathbf{M}_h + i\omega \mathbf{C}_h + \mathbf{K}_h)^{-1}(-\omega^2 \mathbf{M}_c + i\omega \mathbf{C}_c + \mathbf{K}_c)^T \quad [6]$$

On observe que ce modèle est beaucoup plus général que les précédents. En particulier, la structure du modèle n'est pas contraignante, et seule le nombre de variables cachées,  $n_h$  doit être choisi en fonction du problème. Nous verrons que ce nombre est directement lié au degré d'approximation que l'on choisit pour l'identification. Par ailleurs, le caractère multidimensionnel de la matrice d'impédance est pris en compte de façon naturelle, et les modes internes sont globaux, dans le sens où ils ne sont pas attachés à un seul DDL de la fondation. Enfin, on peut noter que des valeurs négatives des éléments des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ , et  $\mathbf{C}$  sont possibles, tant que les matrices elles-mêmes restent définies positives.

## 5. Méthode d'identification des modèles à variables cachées

Le modèle à variables cachées est à la fois simple et très général, mais la méthode d'identification de ses paramètres, c'est à dire la valeur des éléments des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ , et  $\mathbf{C}$ , doit être décrite en détail, pour que ce modèle puisse être utilisable. On part donc d'une matrice d'impédance  $\tilde{\mathbf{Z}}_s(\omega)$ , évaluée, par exemple à l'aide d'une méthode EFF, en un ensemble de points de fréquence  $\{\omega_\ell\}_{1 \leq \ell \leq L}$ . La méthode proposée dans (Cottureau *et al.*, 2007) est d'abord rappelée. Elle consiste à séparer l'identification en deux étapes indépendantes :

- Interpolation de  $\tilde{\mathbf{Z}}_s(\omega)$  par  $\mathbf{P}/\mathbf{Q}$
- Identification de  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  à partir de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$

Cette séparation a l'avantage d'ouvrir le choix de la méthode utilisée à la première étape, qui est très générale. En revanche, elle empêche *a priori* d'assurer la stabilité de l'impédance identifiée, puisque l'on définit ici ces propriétés en termes de signature des matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ , et  $\mathbf{C}$ . On présente donc à la suite une amélioration qui assure, au niveau de l'interpolation de  $\tilde{\mathbf{Z}}_s(\omega)$  par  $\mathbf{P}/\mathbf{Q}$  la stabilité du modèle à variables cachées identifié.

### 5.1. Interpolation de $\tilde{\mathbf{Z}}_s(\omega)$ par $\mathbf{P}/\mathbf{Q}$

Un polynôme à coefficients matriciels réels,  $\mathbf{P}(i\omega)$ , et un polynôme à coefficients scalaires réels,  $\mathbf{Q}(i\omega)$ , sont d'abord identifiés, tels que

$$(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \arg \min \sum_{\ell=1}^L w(\omega_\ell)^2 \|\mathbf{P}(i\omega_\ell) - \mathbf{Q}(i\omega_\ell) \tilde{\mathbf{Z}}_s(\omega_\ell)\|_F^2. \quad [7]$$

Cette étape correspond à une interpolation classique par une fonction coût aux moindres carrés, où  $w(\omega)$  est une fonction permettant d'accorder plus de poids à certaines fréquences, selon les applications. De nombreuses méthodes (Guillaume *et al.*, 1996) permettent d'obtenir un tel résultat, et le choix d'une méthode particulière n'enlève rien à la généralité de la méthode proposée, ni à l'applicabilité de la seconde étape de l'identification.

La méthode choisie pour les applications (van Barel *et al.*, 1993, Pintelon *et al.*, 2004) consiste à définir un espace de vecteurs de polynômes, dont les composantes des éléments  $\mathcal{P}$  reprennent, en les empilant, les composantes de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$ , et un produit scalaire associé, fonction de la matrice à identifier. On peut construire, par la méthode de Gram-Schmidt (Golub *et al.*, 1983), une base  $\{\mathcal{P}_j\}_{1 \leq j \leq m_h}$ , orthonormale pour cet espace, où

$m_h = 2n_h(n_h^2 + n_h + 1)$ . Dans cette base, le problème de minimisation [7] est alors transformé en un problème simple

$$\begin{cases} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \equiv \mathcal{P} \equiv \arg \min \sum_{j=1}^{m_h} \alpha_j^2 \\ \alpha_{m_h} = \mathcal{P}_{m_h}^{(n_h^2+1, 2n_h)} \end{cases}, \quad [8]$$

où  $\mathcal{P}(i\omega) = \sum_{j=1}^{m_h} \alpha_j \mathcal{P}_j(i\omega)$ , et  $\mathcal{P}_{m_h}^{(n_h^2+1, 2n_h)}$  est le coefficient de degré  $2n_h$  de la  $(n_h^2 + 1)$ -ième composante du  $m_h$ -ième vecteur de polynômes de la base  $\{\mathcal{P}_j\}_{1 \leq j \leq m_h}$ . La contrainte assure que le polynôme  $\mathbf{Q}$  est monique. Le coût numérique de cette méthode est entièrement reporté sur la partie d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

## 5.2. Identification de $\mathbf{M}$ , $\mathbf{K}$ , $\mathbf{C}$ à partir de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$

À partir d'une étude des triplets équivalents de matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$ , c'est à dire les différents triplets correspondant à une seule et même matrice d'impédance  $\mathbf{Z}_s(\omega)$ , il est possible de restreindre l'espace des paramètres à identifier (Cottreau *et al.*, 2007). On montre que, sans restreindre la généralité du modèle à variables cachées ou de l'identification, on peut procéder à l'identification des matrices sous la forme

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\Gamma & \mathbf{K}_c \\ \mathbf{K}_c^T & \mathbf{k}_h \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\Gamma & \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c^T & \mathbf{c}_h \end{bmatrix}, \quad [9]$$

où  $\mathbf{k}_h$  et  $\mathbf{c}_h$  sont diagonales,  $\mathbf{I}$  est la matrice identité, et  $\mathbf{0}$  est la matrice nulle. Dans ce cas  $\mathbf{Z}_s(\omega)$  vaut

$$\mathbf{Z}_s(\omega) = -\omega^2 \mathbf{M}_\Gamma + i\omega \mathbf{C}_\Gamma + \mathbf{K}_\Gamma - \sum_{\ell=1}^{n_h} \frac{(i\omega \mathbf{C}_c^\ell + \mathbf{K}_c^\ell)(i\omega \mathbf{C}_c^\ell + \mathbf{K}_c^\ell)^T}{-\omega^2 + i\omega c_h^\ell + k_h^\ell}, \quad [10]$$

où  $\{\mathbf{K}_c^\ell\}_{1 \leq \ell \leq n_h}$  et  $\{\mathbf{C}_c^\ell\}_{1 \leq \ell \leq n_h}$  sont les vecteurs colonne des matrices  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{C}_c$ , et  $\{\mathbf{k}_h^\ell\}_{1 \leq \ell \leq n_h}$  et  $\{\mathbf{c}_h^\ell\}_{1 \leq \ell \leq n_h}$  les éléments de la diagonale des matrices  $\mathbf{k}_h$  et  $\mathbf{c}_h$ . Par ailleurs, le développement en éléments simples du quotient des polynômes  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  identifiés à l'étape précédente donne

$$\frac{\mathbf{P}(i\omega)}{\mathbf{Q}(i\omega)} = -\omega^2 \mathbf{R}_{-2} + i\omega \mathbf{R}_{-1} + \mathbf{R}_0 + \sum_{\ell=1}^{2n_h} \frac{\mathbf{R}_\ell}{i\omega - p_\ell}, \quad [11]$$

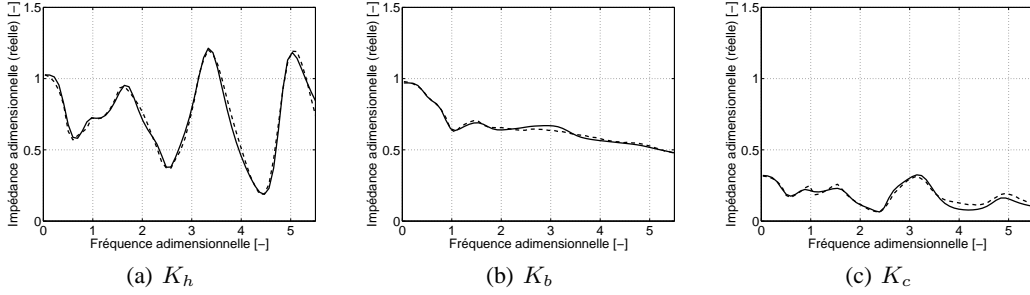
où chaque paire pôle-résidu  $(p_\ell, \mathbf{R}_\ell)$  est associée à une paire conjuguée  $(\bar{p}_\ell, \bar{\mathbf{R}}_\ell)$ . L'identification se fait alors, dans l'ordre, par

$$\begin{cases} \mathbf{M}_\Gamma = \mathbf{R}_{-2} \\ \mathbf{C}_\Gamma = \mathbf{R}_{-1} \\ c_h^\ell = -2\Re\{p_\ell\}, & 1 \leq \ell \leq n_h \\ k_h^\ell = \|p_\ell\|^2, & 1 \leq \ell \leq n_h, \\ \mathbf{K}_c^\ell = \Im\{p_\ell\} \Re\{\mathbf{L}_\ell\} - \Re\{p_\ell\} \Im\{\mathbf{L}_\ell\}, & 1 \leq \ell \leq n_h \\ \mathbf{C}_c^\ell = \Im\{\mathbf{L}_\ell\}, & 1 \leq \ell \leq n_h \\ \mathbf{K}_\Gamma = \mathbf{R}_0 + \sum_{\ell=1}^{n_h} \mathbf{C}_c^\ell \mathbf{C}_c^{\ell T} \end{cases} \quad [12]$$

où  $\Re\{\cdot\}$  et  $\Im\{\cdot\}$  représentent les parties réelle et imaginaire des nombres complexes, et,  $\{\mathbf{L}_\ell\}_{1 \leq \ell \leq n_h}$  est calculé par factorisation de Takagi (Takagi, 1925), de

$$\mathbf{L}_\ell \mathbf{L}_\ell^T = -2i \frac{\mathbf{R}_\ell}{\Im\{p_\ell\}}, \quad 1 \leq \ell \leq n_h \quad [13]$$

Cette étape d'identification, contrairement à l'interpolation de la partie précédente, n'introduit pas d'approximation, et peut toujours se faire, à la seule condition que  $\mathbf{Q}$  soit stable, c'est à dire que ses pôles soient à partie réelle négative.



**Figure 3.** Coefficients de rigidité dynamique de la matrice d'impédance de fondation, calculée par une méthode EFF (ligne continue), et approximation par un modèle à 6 variables cachées (ligne discontinue).

### 5.3. Stabilité et causalité de la matrice interpolée P/Q

Or, tel qu'indiqué précédemment, la stabilité de Q n'est pas imposée pendant l'étape d'interpolation. Cela signifie que l'identification peut éventuellement ne pas se faire. On complète donc le problème de minimisation [8] avec la contrainte suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{[m_h-2n_h, m_h]}^{(n_h^2+1, [1, 2n_h])} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad [14]$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité, ici de taille  $2n_H \times 2n_h$ ,  $\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{[m_h-2n_h, m_h]}^{(n_h^2+1, [1, 2n_h])} \end{bmatrix}$  est la matrice des coefficients, d'ordre inférieur à  $2n_h$ , de la  $(n_h^2 + 1)$ -ième composante des  $2n_h$  derniers vecteurs de la base  $\{\mathcal{P}_j\}_{1 \leq j \leq m_h}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j\}_{m_h-2n_h \leq j \leq m_h}$  est le vecteur des  $2n_h$  dernières coordonnées de  $\mathcal{P}$  dans cette base, et  $[\bar{\mathbf{a}}^T \ \mathbf{a}^T]^T$  est un vecteur de constantes qu'il faut choisir telles que les quatre polynômes de Kharitonov associés (Rantzer, 1992) soient stables. Numériquement, la stabilité d'un polynôme se vérifie aisément, par exemple à l'aide du critère de Routh-Hurwitz (Chappellat *et al.*, 1990), et la contrainte supplémentaire [14] complique peu le problème de minimisation [8].

## 6. Application

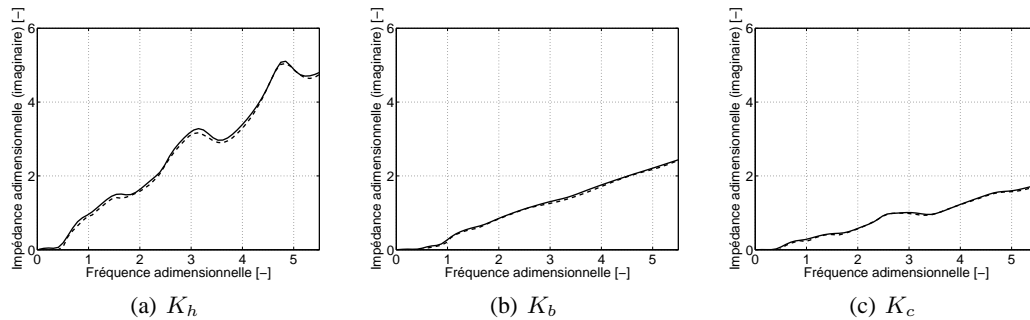
On présente ici la construction du modèle à variables cachées correspondant à une fondation enterrée dans une couche de sol, reposant sur un demi-espace rigide. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont adimensionnées, et telles que les fréquences de résonance de la couche sont à  $a_0 = 0.5$  et  $a_0 = 1$ , respectivement pour la compression et le cisaillement. Le modèle à variables cachées est construit par identification sur le résultat d'un calcul par la méthode des EFF.

Le modèle à variables cachées est construit avec  $n_h = 6$ . Les courbes d'impédance calculées à partir de ce modèle sont tracées sur les figures 3 et 4, et comparées avec le modèle EFF initial. Les fréquences de résonance valent

$$\{\sqrt{k_h^\ell}\}_{1 \leq \ell \leq n_h} = \{0.5, 0.9, 1.7, 2.5, 3.3, 4.8\}, \quad [15]$$

et l'on y retrouve bien les fréquences de couche. De façon générale, l'adéquation du modèle à variables cachées avec le modèle EFF est excellent. C'est également le cas pour  $Z_v(\omega)$  et  $Z_t(\omega)$ , qui ne peuvent être montrées, faute de place.





**Figure 4.** Coefficients d'amortissement dynamique de la matrice d'impédance de fondation, calculée par une méthode EEF (ligne continue), et approximation par un modèle à 6 variables cachées (ligne discontinue).

## 7. Conclusion et perspectives

On a présenté dans cet article la construction d'un modèle à variables cachées des matrices d'impédance de fondation, qui reprend les avantages des modèles à masses concentrées, tout en les généralisant. Les résultats obtenus pour le cas d'une fondation enterrée dans une couche de sol sur substrat rigide sont excellents. Une piste est également donnée pour permettre d'améliorer éventuellement les résultats quand la stabilité de l'impédance interpolée pose problème.

## 8. Bibliographie

- Chabas F., Soize C., « Modeling mechanical subsystems by boundary impedance in the finite element method », *La Recherche Aérospatiale (english edition)*, vol. 5, p. 59-75, 1987.
- Chappellat H., Mansour M., Bhattacharyya S. P., « Elementary proofs of some classical stability criteria », *IEEE Transactions on Education*, vol. 33, n° 3, p. 232-239, August, 1990.
- Cottureau R., Clouteau D., Soize C., « Construction of a probabilistic model for impedance matrices », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, p. 2252-2268, 2007.
- Golub G. H., van Loan C. F., *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press, 1983.
- Guillaume P., Pintelon R., Schoukens J., « Parametric identification of multivariable systems in the frequency domain - a survey », *Proceedings of the 21st International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*, Leuven, Belgium, p. 1069-1082, 1996.
- Pintelon R., Rolain Y., Bultheel A., van Barel M., « Frequency domain identification of multivariable systems using vector orthogonal polynomials », *Proceedings of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Leuven (Belgium), July, 2004.
- Rantzer A., « Stability conditions for polytopes of polynomials », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, n° 1, p. 79-89, January, 1992.
- Sieffert J.-G., Cevaer F., *Manuel des fonctions d'impédance*, Ouest Éditions, 1992.
- Takagi T., « On an algebraic problem related to an analytic theorem of Caratheodory and Fejer and on an allied theorem of Landau », *Japanese Journal of Mathematics*, vol. 1, p. 83-93, 1925.
- van Barel M., Bultheel A., Discrete least squares approximation with polynomial vectors, Technical Report n° TW190, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven (Belgium), 1993.
- Wolf J. P., *Dynamic soil-structure interaction*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.
- Wolf J. P., Somaini D. R., « Approximate dynamic model of embedded foundation in time domain », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 14, n° 5, p. 683-703, September-October, 1986.