



**HAL**  
open science

## Approches paramétrique et non paramétrique pour la modélisation probabiliste des matrices d'impédance

Régis Cottereau, Didier Clouteau, Christian Soize

► **To cite this version:**

Régis Cottereau, Didier Clouteau, Christian Soize. Approches paramétrique et non paramétrique pour la modélisation probabiliste des matrices d'impédance. 8ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA, May 2007, Giens (Var), France. pp.Pages : 1-6. hal-00773358

**HAL Id: hal-00773358**

**<https://hal.science/hal-00773358>**

Submitted on 13 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Approches paramétriques et non-paramétriques pour la modélisation probabiliste des matrices d'impédance

Régis Cottereau\* — Didier Clouteau\* — Christian Soize\*\*

\* *Laboratoire MSSMat, École Centrale Paris  
Grande Voie des Vignes, F-92295 Châtenay-Malabry cedex  
{regis.cottereau,didier.clouteau}@ecp.fr*

\*\* *LaM, Université de Marne-la-Vallée  
5 boulevard Descartes, F-77454 Marne-la-Vallée cedex 2  
soize@univ-mlv.fr*

---

*RÉSUMÉ. On présente ici deux approches pour la modélisation probabiliste de la matrice d'impédance d'une fondation cylindrique rigide enterrée dans une couche de sol reposant sur un substratum rigide: une paramétrique et une non-paramétrique. La comparaison des deux approches semble indiquer une limitation de l'approche paramétrique dans le cas de domaines non-bornés, liée au caractère borné de la zone hétérogène. On indique également une méthode d'identification des paramètres de dispersion de l'approche non-paramétrique.*

*ABSTRACT. Two approaches are presented for the probabilistic modeling of the impedance matrix of a rigid cylindrical embedded foundation in a layer of soil over a rigid bedrock: one parametric and the other nonparametric. The comparison of these two approaches seems to indicate that the parametric one is limited, in the case of unbounded domains, by the necessary boundedness of the heterogeneous zone. We also present an identification method for the dispersion parameters of the nonparametric approach.*

*MOTS-CLÉS : Méthode probabiliste non-paramétrique, Méthode probabiliste paramétrique, Matrice d'impédance, Paramètre de dispersion, Domaine non-borné.*

*KEYWORDS: Nonparametric probabilistic method, Parametric probabilistic method, Impedance matrix, Dispersion parameter, Unbounded domain.*

---

## 1. Introduction

Dans de nombreux domaines d'application, comme en génie civil ou en aéronautique, les ingénieurs sont confrontés à des problèmes de dimensionnement de structures en contact avec un domaine infini. Pour ces problèmes, seule la structure intéresse réellement les ingénieurs, et le domaine extérieur n'a d'importance que par sa raideur équivalente, en statique, ou sa matrice d'impédance, en dynamique.

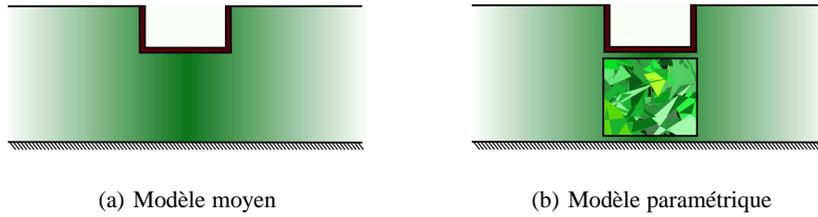
Les domaines infinis considérés dans ces applications sont souvent mal connus ou complexes à modéliser. Ainsi, pour les besoins de la résolution, l'hétérogénéité d'un sol réel est souvent représentée par un modèle de couches horizontales homogènes. Les estimations obtenues à partir d'un tel modèle sont différentes de la réalité, et cette différence est qualifiée d'erreur de modélisation. En outre, une fois le modèle choisi, la simple taille des domaines considérés rend compliquée et coûteuse une éventuelle campagne d'essais pour la caractérisation des paramètres du modèle. Les erreurs induites, par exemple sur l'estimation de la matrice d'impédance, sont alors qualifiées de paramétriques. Pour certains domaines, comme le sol, ces erreurs, de modélisation et paramétriques, peuvent être importantes. On a alors recours à des approches probabilistes pour essayer de les prendre en compte.

Deux types d'approches sont possibles : paramétrique, et non-paramétrique. La première propose de construire des modèles probabilistes des paramètres du système mécanique, et d'en déduire les propriétés stochastiques des matrices d'impédance. La méthode la plus représentative de ce type d'approche, et la plus utilisée, est la méthode des Éléments Finis Stochastiques (Ghanem *et al.*, 1991). La méthode non-paramétrique propose de prendre en compte les incertitudes directement au niveau des matrices du système dynamique considéré. Basé sur la méthode originelle de Soize (Soize, 2000, Soize, 2001), construisant un modèle probabiliste pour les matrices généralisées de masse, d'amortissement et de rigidité d'un système dynamique, un modèle probabiliste non-paramétrique des matrices d'impédance a été récemment proposé (Cottreau *et al.*, 2006).

On se propose ici de construire, pour un même problème moyen (*cf.* section 2), un modèle probabiliste de la matrice d'impédance, suivant successivement une approche paramétrique (*cf.* section 3) et non-paramétrique (*cf.* section 4). La comparaison de ces deux modèles (*cf.* section 5) permet alors de discuter les limites de chacune des approches et d'identifier le paramètre de dispersion de l'approche non-paramétrique.

## 2. Modèle moyen de la matrice d'impédance

On étudie ici un problème classique en Interaction Sol-Structure : le calcul de la matrice d'impédance d'une fondation cylindrique, enterrée et rigide sur une couche de sol homogène reposant sur un substratum rigide (figure 1(a)). On choisit des caractéristiques mécaniques normalisées : le rapport de la hauteur de l'enterrement  $D$  au rayon de la fondation  $r$  est  $D/r = 1$ , la hauteur normalisée de la couche est  $H/r = 3$ , la masse volumique est  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ , les coefficients de Lamé sont  $\lambda = 2 \text{ N/m}^2$



**Figure 1.** (a) *Modèle de fondation rigide cylindrique enterrée dans une couche homogène de sol reposant sur un substratum rigide, et (b) modèle correspondant pour l'approche paramétrique, avec une zone bornée de sol hétérogène sous la fondation.*

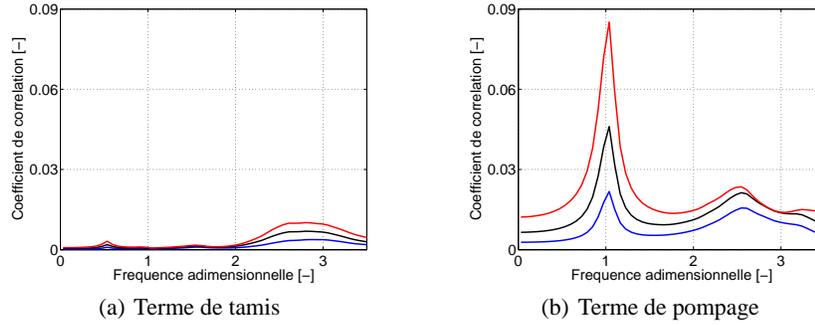
et  $\mu = 1 \text{ N/m}^2$ , et l'amortissement hystérétique est pris égal à 5%. Les impédances sont normalisées par rapport à la rigidité statique et à l'amortissement hystérétique, et les résultats sont présentés en fonction d'une fréquence adimensionnelle valant  $a_0 = \omega r / c_s$ . On trouvera plus de détail sur la procédure exacte de normalisation dans (Cottureau, 2007, Chap. 5).

L'impédance  $[\mathbf{Z}(\omega)]$  de ce système, par rapport aux mouvements de corps rigide de la fondation, est une matrice  $6 \times 6$  dépendant de la fréquence. On la calcule ici à l'aide du logiciel Éléments Finis de Frontière MISS (Clouteau, 2003). Cette matrice, déterministe, constitue notre modèle moyen de l'impédance, et on construit dans les deux prochaines sections des modèles probabilistes correspondant.

### 3. Modèle probabiliste paramétrique de la matrice d'impédance

L'approche utilisée ici (Savin *et al.*, 2002) consiste à coupler le domaine moyen non-borné, modélisé ici par une méthode d'Éléments Finis de Frontière, à un domaine borné modélisé par une méthode d'Éléments Finis Stochastiques. Ce domaine borné est choisi juste sous la fondation (figure 1(b)) et, dans cette zone, la variabilité des paramètres mécaniques est explicitement décrite. L'erreur de modèle consistant à homogénéiser la couche  $y$  est donc prise en compte, contrairement au reste du domaine non-borné. Cette méthode a été codée dans un module du logiciel MISS.

Seuls les coefficients de Lamé sont modélisés ici par des champs aléatoires. On suppose un modèle de corrélation exponentiel, avec une longueur de corrélation choisie successivement égale à  $L_1 = 0.5r$ ,  $L_2 = r$  et  $L_3 = 2r$ , et on en déduit le développement de Karhunen-Loève des coefficients. On choisit pour ce développement des variables aléatoire uniformes avec un coefficient de corrélation de 60%. On tire des réalisations des variables aléatoires, et on en déduit les réalisations des champs de coefficients de Lamé, puis une estimation du modèle probabiliste paramétrique de la matrice d'impédance  $[\mathbf{Z}_P(\omega)]$ .



**Figure 2.** Estimation du coefficient de corrélation de  $[Z_P(\omega)]$ , à chaque fréquence, pour (a) l'élément de tamis et (b) l'élément de pompage, et pour des longueurs de corrélation  $L_1 = 0.5r$  (en bleu),  $L_2 = r$  (en noir) et  $L_3 = 2r$  (en rouge).

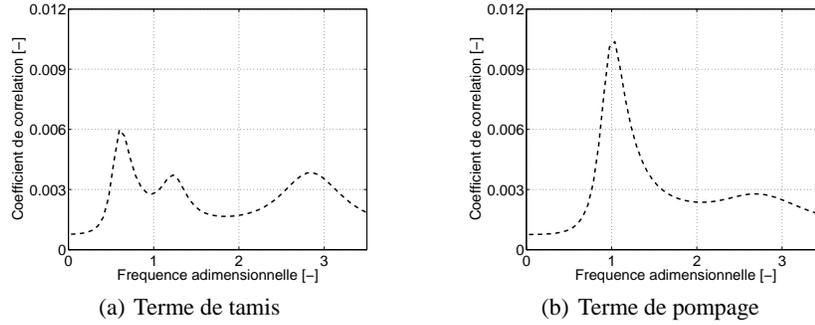
Pour les trois longueurs de corrélation choisies, on calcule 200 réalisations de la matrice d'impédance, et on estime la moyenne, l'écart type et le coefficient de corrélation, élément par élément et fréquence par fréquence. On trace à la figure 2 l'évolution en fonction de la fréquence de cette estimation du coefficient de corrélation pour les éléments de tamis et de pompage.

#### 4. Modèle probabiliste non-paramétrique de la matrice d'impédance

Parallèlement à ce modèle paramétrique de la matrice d'impédance, une approche non-paramétrique est développée. Basée sur l'extension récente des modèles probabilistes de Soize pour les modèles dynamiques réduits en vibration des structures, elle consiste à :

- 1) Identifier un modèle à variables cachés de la matrice d'impédance  $[Z(\omega)]$ , en termes de matrices  $[K]$ ,  $[C]$  et  $[M]$  ;
- 2) Construire les modèles probabilistes  $[K]$ ,  $[C]$  et  $[M]$  de ces matrices ;
- 3) En déduire, par une méthode de Monte-Carlo, le modèle probabiliste non-paramétrique de la matrice d'impédance  $[Z_{NP}(\omega)]$ .

Cette approche nécessite le choix de paramètres de dispersion  $\delta_K$ ,  $\delta_C$  et  $\delta_M$  pour les matrices aléatoires  $[K]$ ,  $[C]$  et  $[M]$ . On choisit ici  $\delta_K = \delta_C = \delta_M = 0.1$ , et ce choix est ensuite discuté dans la prochaine section. Les estimations des coefficients de corrélation sont calculés pour 1000 réalisations des matrices  $[K]$ ,  $[C]$  et  $[M]$ . Ils sont tracés à la figure 3, pour chaque fréquence, et pour les éléments de tamis et de pompage de  $[Z_{NP}(\omega)]$ .



**Figure 3.** Estimation du coefficient de corrélation de  $[Z_{NP}(\omega)]$ , à chaque fréquence, pour (a) l'élément de tamis et (b) l'élément de pompage ( $\delta_K = \delta_C = \delta_M = 0.1$ ).

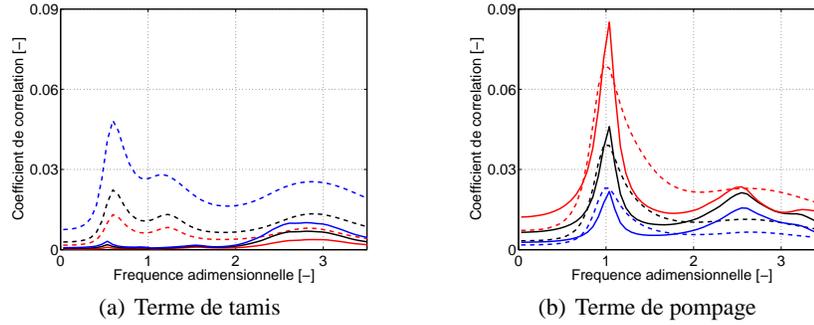
## 5. Comparaison des deux approches

### 5.1. Influence de la localisation spatiale de l'hétérogénéité

On constate à la figure 2 que le coefficient de corrélation est largement supérieur pour le pompage que pour le tamis, alors qu'il est comparable pour les deux éléments à la figure 3. Cela est dû à la localisation, dans l'approche paramétrique, de l'hétérogénéité sous la fondation. En effet, l'influence de la masse de sol située à cet endroit est très importante pour les mouvements verticaux. Les mouvements horizontaux sont plus influencés par la masse de sol située autour de la fondation enterrée, qui est, dans l'approche paramétrique, considérée homogène. L'erreur de modèle consistant à considérer homogène la couche de sol est donc, dans l'approche paramétrique, bien prise en compte pour le pompage et moins pour le tamis. Cette distinction n'a pas nécessairement dans l'approche non-paramétrique, car l'hétérogénéité du sol y est non-localisée.

### 5.2. Identification du paramètre de dispersion

L'erreur de modèle décrite ci-dessus est donc prise en compte explicitement dans l'approche paramétrique, uniquement pour l'élément de pompage, et elle est également prise en compte implicitement dans l'approche non-paramétrique. Cette remarque, ainsi que la comparaison des différentes courbes de la figure 2(b) et de la figure 3(b), qui révèle des formes similaires, nous laisse imaginer une méthode d'identification des paramètres de dispersion du modèle non-paramétrique à partir du terme de pompage du modèle paramétrique. On choisit donc  $\delta_K$ ,  $\delta_C$  et  $\delta_M$  tels que la différence soit minimisée, sur la plage de fréquence considérée, entre les coefficients de corrélation pour le terme de pompage de  $[Z_P(\omega)]$  et  $[Z_{NP}(\omega)]$ . On présente à la figure 4 des résultats obtenus pour les différentes longueurs de corrélation décrites



**Figure 4.** Comparaison de l'estimation du coefficient de corrélation, à chaque fréquence, de  $[\mathbf{Z}_P(\omega)]$ , pour des longueurs de corrélation  $L_1 = 0.5r$  (ligne continue bleue),  $L_2 = r$  (ligne continue noire), et  $L_3 = 2r$  (ligne continue rouge) et de  $[\mathbf{Z}_{NP}(\omega)]$ , pour  $\delta_K = \delta_C = \delta_M = 0.15$  (ligne discontinue bleue),  $\delta_K = \delta_C = \delta_M = 0.2$  (ligne discontinue noire), et  $\delta_K = \delta_C = \delta_M = 0.3$  (ligne discontinue rouge).

précédemment. On pourra également considérer des paramètres de dispersion  $\delta_K$ ,  $\delta_C$  et  $\delta_M$  différents, avec notamment la capacité de contrôler directement le coefficient de corrélation statique avec  $\delta_K$ .

## 6. Bibliographie

- Clouteau D., *Miss 6.3 : Manuel Utilisateur : version 2.2*, École Centrale Paris, Châtenay-Malabry, France. 2003, in french.
- Cottareau R., Probabilistic models of impedance matrices. Application to dynamic soil-structure interaction, PhD thesis, École Centrale Paris, Châtenay-Malabry, France, January, 2007.
- Cottareau R., Clouteau D., Soize C., « Construction of a probabilistic model for impedance matrices », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006. Accepted for publication.
- Ghanem R. G., Spanos P. D., *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Springer-Verlag, 1991.
- Savin É., Clouteau D., « Elastic wave propagation in a 3D unbounded random heterogeneous medium coupled with a bounded medium. Applications to seismic soil-structure interaction. », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, n. 4, p. 607-630, 2002.
- Soize C., « A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics », *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 15, p. 277-294, 2000.
- Soize C., « Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics », *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, n. 5, p. 1979-1996, May, 2001.