



HAL
open science

Dynamique stochastique non linéaire de deux systèmes dynamiques incertains couplés

Anas Batou, Christian Soize, S. Cambier

► **To cite this version:**

Anas Batou, Christian Soize, S. Cambier. Dynamique stochastique non linéaire de deux systèmes dynamiques incertains couplés. 8ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA, May 2007, Giens (Var), France. pp.Pages : 1-8. hal-00773357

HAL Id: hal-00773357

<https://hal.science/hal-00773357>

Submitted on 13 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique stochastique non linéaire de deux systèmes dynamiques incertains couplés

Anas Batou^{*,**} — Christian Soize^{**} — Simon Cambier^{*}

** EDF R&D, département Analyse Mécanique et Acoustique
1, avenue du général De Gaulle, 92140 CLAMART CEDEX, France
anas.batou@edf.fr*

*** Université de Marne-La-Vallée, Laboratoire de Mécanique
5, Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France*

RÉSUMÉ. Cet article présente une méthode de réduction de modèle de systèmes constitués d'un sous-système linéaire ayant un très grand nombre de modes dans la bande d'analyse et d'un sous-système à comportement non linéaire. Chacun des deux sous-systèmes possède des incertitudes de modélisation et des incertitudes de données. Ces incertitudes sont modélisées par une approche probabiliste mixte paramétrique et non paramétrique. Cette méthodologie sera illustrée par un exemple simple ayant les caractéristiques du système industriel visé par cette étude.

ABSTRACT. This paper deals with a reduction method of models composed of a linear behaviour subsystem which has a high number of eigenmodes in the range of analysis and of a nonlinear behaviour subsystem. Each subsystem has model uncertainties and data uncertainties. Those uncertainties are taken into account using the usual parametric probabilistic approach and the non parametric probabilistic approach. We present a numerical example constituted of a simple system owning all the properties of the systems we are interested in and which validates the proposed methodology.

MOTS-CLÉS: incertitudes aléatoires, modèle non paramétrique, condensation dynamique..

KEYWORDS: random uncertainties, nonparametric model, dynamic condensation.

1. Introduction

On s'intéresse à la prévision de la réponse dynamique non linéaire transitoire de deux sous-systèmes couplés dans une bande fréquentielle d'analyse fixée. Le premier est constitué d'une structure à comportement non linéaire. Le second est constitué d'une structure à un comportement linéaire que l'on veut condenser sur l'interface de couplage des deux sous-systèmes. Ce second sous-système peut avoir un très grand nombre de modes propres dans la bande d'analyse (de l'ordre 10 000, dû par exemple à la présence de très nombreuses quasi-symétries). Ces modes ne peuvent donc pas être utilisés pour réduire le modèle de ce sous-système. De plus, chacun des sous-systèmes a des incertitudes de modélisation et des incertitudes de données. Cette problématique correspond, par exemple, à celle des assemblages combustibles des réacteurs nucléaires. La méthode développée doit satisfaire un certain nombre de contraintes imposées par des spécifications logicielles et des spécifications d'études : schéma temporel explicite, réduction modale du second-système impossible, résolution temporelle empêchant la condensation usuelle du ce second sous-système dans le domaine fréquentiel. Avec ces contraintes, les méthodes classiques (voir par exemple Zienkiewicz, Taylor 2000) ne peuvent pas être utilisées et un développement approprié doit être fait. La stratégie suivie consiste d'une part à construire le modèle moyen du système couplé à partir des modèles moyens des deux sous-systèmes et d'autre part à implémenter un modèle probabiliste des incertitudes dans les deux sous-systèmes à partir de leur modèle moyen.

2. Equation du modèle moyen pour le système couplé

On considère une structure tridimensionnelle faiblement amortie. Elle occupe un domaine borné Ω de ρ^3 décomposée en deux sous domaines, Ω_A correspond au premier sous-système à comportement non linéaire et Ω_B au second sous-système à comportement linéaire. Les deux sous-systèmes sont dynamiquement couplés sur la surface Γ_C .

Le bord Γ_B du domaine Ω_B est constitué de la partie Γ_C , de Γ_{B0} sur laquelle une condition de Dirichlet nulle est appliquée et de Γ_{BL} . Le modèle éléments finis écrit dans le domaine fréquentiel pour la bande d'analyse $B = [-\omega_{\max}; \omega_{\max}]$ pour le système couplé, s'écrit par blocs par rapport aux DDL internes et aux DDL du bord Γ_C

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{pp}^B(\omega) & \underline{A}_{pc}^B(\omega) \\ \underline{A}_{ip}^B(\omega) & \underline{A}_{cc}^B(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_p^B(\omega) \\ \underline{u}_c^B(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p^B(\omega) \\ F_c^B(\omega) + \underline{F}_{coupl}^B(\omega) \end{bmatrix} \quad [1]$$

où la matrice de raideur dynamique $\underline{A}^B(\omega)$ s'exprime classiquement avec les matrices de masse, de dissipation et de raideur qui sont ici définies positives, où F^B représente les efforts extérieurs et où \underline{F}_{coupl}^B représente les efforts exercées par le premier sous-système. La condensation dynamique par rapport aux DDL de couplage donne

$$\underline{F}_{coupl}^B(\omega) = \left[\underline{A}_{cc}^B(\omega) - \underline{A}_{cp}^B(\omega) \left(\underline{A}_{pp}^B(\omega) \right)^{-1} \underline{A}_{pc}^B(\omega) \right] \underline{u}_c^B(\omega) + \underline{A}_{cp}^B(\omega) \left(\underline{A}_{pp}^B(\omega) \right)^{-1} F_p^B(\omega) - F_c^B(\omega). \quad [2]$$

Le passage dans le domaine temporel par transformée de fourrier inverse de l'Eq. (2) et le modèle éléments finis du premier sous-système non linéaire, conduit à l'équation matricielle suivante pour le système dynamique non linéaire couplé,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \underline{M}_{pp}^A & \underline{M}_{pc}^A \\ \underline{M}_{cp}^A & \underline{M}_{cc}^A + \underline{M}_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{u}}_p^A(t) \\ \ddot{\underline{u}}_c^A(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{D}_{pp}^A & \underline{D}_{pc}^A \\ \underline{D}_{cp}^A & \underline{D}_{cc}^A + \underline{D}_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}_p^A(t) \\ \dot{\underline{u}}_c^A(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{pp}^A & \underline{K}_{pc}^A \\ \underline{K}_{cp}^A & \underline{K}_{cc}^A + \underline{K}_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_p^A(t) \\ \underline{u}_c^A(t) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \underline{F}_{-p}^{NL}(t, \underline{u}^A, \dot{\underline{u}}^A, \underline{w}) + F_p^A(t) \\ \underline{F}_c^{NL}(t, \underline{u}^A, \dot{\underline{u}}^A, \underline{w}) + F_c^A(t) + F_c^B(t) + \tilde{F}(t) + \int_0^t \underline{B}_U(\tau) \underline{u}_c^A(t-\tau) d\tau + \int_0^t \underline{B}_{\dot{U}}(\tau) \dot{\underline{u}}_c^A(t-\tau) d\tau + \int_0^t \underline{B}_{\ddot{U}}(\tau) \ddot{\underline{u}}_c^A(t-\tau) d\tau \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [3]$$

avec les conditions initiales, $\underline{u}(0) = \dot{\underline{u}}(0) = 0$, où $\underline{F}^{NL}(t, \underline{u}^A, \dot{\underline{u}}^A, \underline{w})$ représente les forces non linéaires localisées, où \underline{w} est un vecteur de dimension n_p qui contient les paramètres incertains du modèle décrivant ces non-linéarités. Les fonctions \underline{B}_U , $\underline{B}_{\dot{U}}$ et $\underline{B}_{\ddot{U}}$ sont à valeurs dans l'espace des matrices symétriques complexes de dimension (n_c, n_c) où n_c représente le nombre de DDLs de couplage. Il est à noter que le système défini par l'Eq. (3) peut être réduit en utilisant la méthode de Craig-Bampton pour la partie linéaire sous-jacente du premier sous-système.

3. Prise en compte des incertitudes

On suppose ici qu'il n'y a pas d'incertitudes dans le second sous-système linéaire condensé sur l'interface de couplage. La stratégie adoptée pour la prise en compte des incertitudes de modèle et des incertitudes de données dans le premier sous-système non linéaire est une approche mixte paramétrique et non paramétrique. L'approche probabiliste paramétrique est utilisée pour prendre en compte les incertitudes sur les données relatives au modèle des non-linéarités. Elle consiste à modéliser \underline{w} par une variable aléatoire \underline{W} à valeurs dans ρ^{n_p} . L'approche probabiliste non paramétrique permet de prendre en compte les incertitudes de modélisation et de données sur la partie linéaire du premier sous-système non linéaire. Elle consiste à modéliser par des matrices aléatoires les matrices de masse, d'amortissement et de raideur de la partie linéaire du premier sous-système dans les coordonnées physiques ou dans les coordonnées liées à la réduction de Craig-Bampton. Le vecteur des déplacements $\underline{u}^A(t)$ du premier sous-système est alors modélisé par un processus stochastique du second ordre $U^A(t)$ à valeurs

vectérielles qui est la solution de l'équation différentielle non linéaire stochastique suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{pp}^A & M_{pc}^A \\ M_{cp}^A & M_{cc}^A + M_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_p^A(t) \\ \ddot{U}_c^A(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{pp}^A & D_{pc}^A \\ D_{cp}^A & D_{cc}^A + D_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_p^A(t) \\ \dot{U}_c^A(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp}^A & K_{pc}^A \\ K_{cp}^A & K_{cc}^A + K_{cc}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_p^A(t) \\ U_c^A(t) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} F_p^{NL}(t, U^A, \dot{U}^A, W) + F_p^A(t) \\ F_c^{NL}(t, U^A, \dot{U}^A, W) + F_c^A(t) + F_c^B(t) + \tilde{F}(t) + \int_0^t B_{\dot{U}}(\tau) U_c^A(t-\tau) d\tau + \int_0^t B_{\dot{U}}(\tau) \dot{U}_c^A(t-\tau) d\tau + \int_0^t B_{\ddot{U}}(\tau) \ddot{U}_c^A(t-\tau) d\tau \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [4]$$

avec les conditions initiales, $U(0) = \dot{U}(0) = 0$ presque-sûrement. La densité de probabilité de la variable aléatoire \mathbf{W} est construite en utilisant le principe du maximum d'entropie en tenant compte de l'information disponible et la densité de probabilité de chacune des matrices aléatoires de masse, amortissement et raideur est construite en utilisant (Soize 2005). Le niveau de dispersion de chacune de ces matrices est contrôlée par un paramètre de dispersion noté respectivement δ_M , δ_D , δ_K , pour la masse, la dissipation et la raideur.

4. Application de validation

Le modèle moyen est constitué d'une poutre d'Euler encastrée à ses deux extrémités. Cette poutre a une section circulaire avec un rayon de 0.5 m, une épaisseur de 0.2 m et une longueur de 20 m. Sa masse volumique est 500 Kg/m³ et son module d'Young vaut 450 MPa. Le taux d'amortissement modal est 0.02. Ce système est décomposé en deux sous-systèmes. Le premier sous-système non linéaire est la poutre A (voir figure I) de 12 m de longueur, libre à son extrémité gauche (interface de couplage) et encastrée à son extrémité droite. Le second sous-système linéaire et condensé sur l'interface de couplage est la poutre B de longueur 8 m encastrée à son extrémité gauche et libre à son extrémité droite. La poutre A a une butée de choc élastique située à 8m du bord encastré, a un jeu de 10⁻⁵ m et la raideur de choc est de 10⁸ N/m. On s'intéresse à la réponse temporelle du système couplé non linéaire soumis à deux forces ponctuelles $F^A(t)$ et $F^B(t)$ localisées à 4 m des encastremets et dont les transformées de Fourier ont pour support la bande [-150, 150] Hz et dont les modules sont constants sur la bande et égaux à 1 N/Hz.

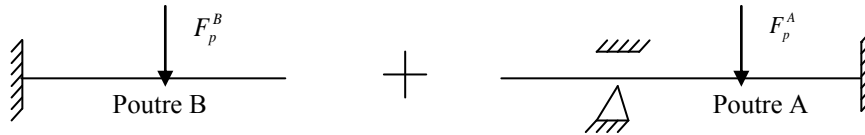


Figure I. Description des deux sous-systèmes

La figure II valide l'approche proposée vis-à-vis de la méthode de condensation. Elle compare, pour le déplacement transversal au point d'excitation du premier sous-système (poutre A), dans le domaine fréquentiel (module de la transformée de Fourier de la réponse transitoire du système couplé non linéaire), la réponse de référence obtenue par résolution directe sans condensation du second sous-système (poutre B) sur l'interface de couplage, avec la réponse obtenue avec la condensation.

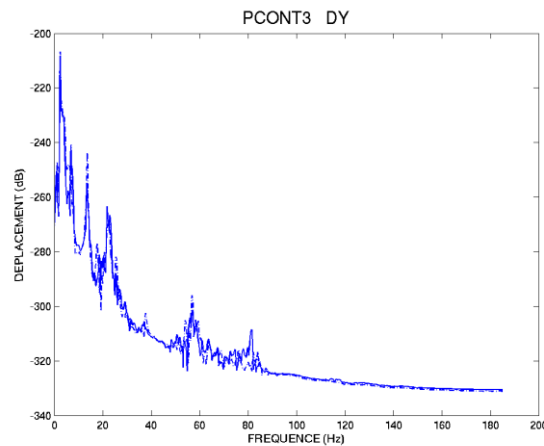


Figure II. Comparaison de la réponse de référence au point d'excitation de la poutre A (trait mixte) avec la réponse obtenue par condensation (trait plein)

Les figures III et IV sont relatives à l'analyse du système couplé non linéaire avec la modélisation probabiliste mixte « paramétrique » – « non paramétrique » des incertitudes. La variable aléatoire W est scalaire et représente le jeu. Sa dispersion est $\delta_w = 0.1$. Les dispersions des matrices aléatoires de masse, de dissipation et de raideur du premier sous-système sont $\delta_M = 0.1$, $\delta_D = 0.1$, $\delta_K = 0.1$. La figure III montre le graphe de la convergence de la solution stochastique vis-à-vis du nombre de simulation numérique avec le solveur de Monte Carlo. La figure IV est relative au déplacement transversal au point d'excitation du premier sous-système (poutre A) dans le domaine fréquentielle. On peut y lire la réponse du système couplé moyen non linéaire, la moyenne stochastique de la réponse pour le système stochastique couplé non linéaire et le domaine de confiance correspondant à un niveau de probabilité de 0.95.

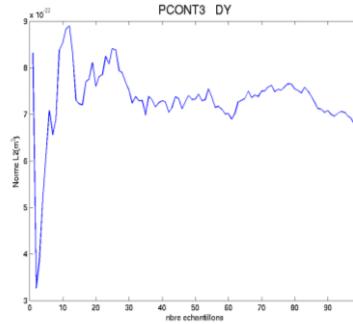


Figure III. Convergence de la réponse vis-à-vis du nombre de simulations

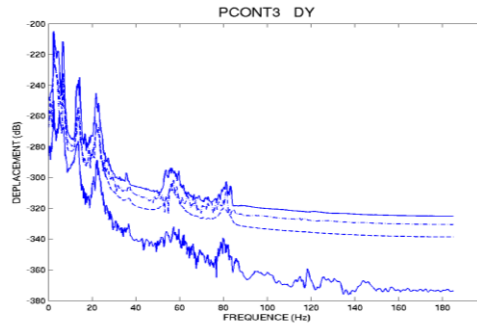


Figure IV. Domaine de confiance de la réponse du point d'excitation (trait plein); moyenne (trait pointillé) et réponse du modèle moyen (trait mixte)

4. Conclusions

Nous avons proposé une méthode de réduction de modèle de systèmes constitués d'un sous-système linéaire ayant un très grand nombre de modes dans la bande d'analyse avec un sous-système à comportement non linéaire sachant que les méthodes existantes sont peu adaptées à cette situation. Nous avons présenté une validation sur un exemple simple. L'objectif est d'utiliser ce type de modèle pour identifier en inverse, à partir de données expérimentales, les forces extérieures appliquées à de tels systèmes (par exemple les forces induites par un écoulement turbulent). Il est donc nécessaire de se placer dans le cadre d'une identification robuste par rapport aux incertitudes du modèle servant à l'identification des forces par mesures des réponses. Le développement a donc été mené pour pouvoir implémenter un modèle probabiliste paramétrique et non paramétrique des incertitudes. Nous avons présenté sur l'exemple la première phase correspondant à la réponse stochastique du système couplé non linéaire avec incertitudes.

O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, Cinquième Edition, Volume 1, 2, 3, Butterworth-Heinemann, 2000

C. Soize, « Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 (2005) 1333-1366

C.Descelier, C.Soize, S.Cambier , « Nonparametric parametric model for random uncertainties in nonlinear structural dynamics. Application to earthquake engineering », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33(3), 315-327 (2004)