HAL
open science

Approche probabiliste des incertitudes de modèles et de données pour la simulation numérique en mécanique

Christian Soize

To cite this version:

Christian Soize. Approche probabiliste des incertitudes de modèles et de données pour la simulation numérique en mécanique. 17ème Congrès Français de Mécanique 2005 pp. 1-5, Troyes, France, 29 Août - 2 Septembre, 2005., AFM, Aug 2005, Troyes, France. pp.Pages : 1-20. hal-00773338

HAL Id: hal-00773338

https://hal.science/hal-00773338v1

Submitted on 13 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche probabiliste des incertitudes de modèles et de données pour la simulation numérique en mécanique

Christian Soize

Université de Marne-la-Vallée
Laboratoire de Mécanique, Institut Navier
5 Bd Descartes 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2
soize@univ-mlv.fr

Résumé :

On présente une approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et de données pour les systèmes dynamiques. On introduit d'abord le concept de l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes induites par les erreurs de modèle et par les erreurs de données. Un court résumé est donné de cette approche non paramétrique qui utilise des ensembles de matrices aléatoires construits avec le principe du maximum d'entropie. On présente un exemple simple qui montre la capacité de l'approche non paramétrique proposée de prendre en compte les incertitudes de modèle. Puis on présente une application relative à la robustesse d'un modèle de simulation numérique par rapport aux incertitudes de modèle et aux incertitudes de données en dynamique d'une structure aérospatiale.

Abstract :

This paper deals with a nonparametric probabilistic approach of model uncertainties and data uncertainties in computational dynamics for linear and nonlinear dynamical systems. First the concept of the nonparametric probabilistic approach of uncertainties due to model errors and data errors are introduced. A short overview of this nonparametric approach based on the use of ensembles of random matrices constructed with the maximum entropy principle is given. A numerical example proving the capability of the nonparametric probabilistic approach to take into account model uncertainties is presented. Finally, we present an exemple relative to the robustness of the numerical simulation model with respect to model and data uncertainties in dynamics of a spatial structure.

Mots clefs :

Mécanique numérique, incertitudes, système dynamique, dynamique des structures

1 Introduction

Le traitement des incertitudes sur les données en mécanique des structures a été très étudié ces trois dernières décennies. Les incertitudes sur les données concernent les paramètres du modèle mathématique-mécanique qui sont les paramètres de géométrie, les constantes des lois de comportement, les conditions aux limites, etc. Ainsi les incertitudes sur les données peuvent clairement être modélisées avec l'approche probabiliste paramétrique. Une telle analyse probabiliste des incertitudes sur les données a été faite en utilisant des modélisations des paramètres incertains par des variables aléatoires pour des systèmes relativement simples [1-15]. L'approche probabiliste paramétrique a été développée pour des données incertaines modélisées par des champs stochastiques et aussi pour les milieux aléatoires conduisant ainsi aux développements des éléments finis stochastiques [16-22]. Plus récemment ces méthodes ont été utilisées pour les incertitudes sur les données et pour les milieux aléatoires en mécanique numérique de systèmes dynamiques complexes [23-31].

Ce papier ne traite pas de l'approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les données ou de la méthode des éléments finis stochastiques pour les milieux aléatoires évoquée ci-dessus, mais présente une approche probabiliste non paramétrique pour les incertitudes de modèle et les incertitudes de données dans le cadre de la simulation numérique en dynamique. Cette approche a été introduite dans [32] et développée ces cinq dernières années. Le principal objectif de ce papier est de présenter une nouvelle validation de l'approche et une application industrielle.

Notation. Dans ce papier, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$ and $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dénotent l'ensemble de toutes les matrices réelles, symétriques et définies positives $(n \times n)$. On a $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^S(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Si $[A]$ appartient à $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\|[A]\|_F = (\text{tr}\{[A]\,[A]^T\})^{1/2}$ est la norme de Frobenius de la matrice $[A]$, où tr est la trace des matrices, det est le déterminant et $[A]^T$ est la matrice transposée de $[A]$. La norme d'opérateur de la matrice $[A] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par $\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \|[A]\,\mathbf{x}\| \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ qui est telle que $\|[A]\,\mathbf{x}\| \leq \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}(b)$ d'un ensemble quelconque $\mathcal{B}$ est telle que $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}(b)$ est égal à 1 si $b \in \mathcal{B}$ et est égal à 0 si $b \notin \mathcal{B}$. Toutes les variables aléatoires sont définies sur l'espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ et E est l'espérance mathématique.

2 Incertitudes de données et incertitudes de modèle dans les modèles numériques de prévision des systèmes réels.

2.1 "Système sur plan"

Le "système sur plan" sera le système mécanique conçu par les concepteurs et analystes. Un "système sur plan" est défini par sa géométrie, par le choix des matériaux et par de nombreux autres paramètres, et peut être un système simple comme une barre élastique ou un système complexe comme un avion.

2.2 Système réel

Le système réel est fabriqué à partir du "système sur plan" (plans d'exécution) et donc, n'est jamais connu exactement (tolérances de fabrication concernant la géométrie, par exemple). Le système réel doit donc être considéré comme un système incertain par rapport au "système sur plan". Les incertitudes par rapport au "système sur plan" portent sur la géométrie du système réel, sur les matériaux, la distribution de masse, les conditions aux limites, etc.

2.3 Le modèle moyen comme modèle de prévision : erreurs et incertitudes

L'objectif du modèle de prévision est de prévoir la "sortie" $\mathbf{v}^{\text{exp}}$ du système réel pour une "entrée" $\mathbf{f}^{\text{exp}}$ donnée. Par exemple, le modèle de prévision sera développé pour prédire le champ de déplacement statique du système statique soumis à des chargements statiques externes, ou le champ de déplacement transitoire du système dynamique soumis à un chargement impulsionnel dû à un choc, etc. Un tel modèle de prévision est construit en développant un modèle mathématique-mécanique à partir du "système sur plan" (voir Figure 1). Dans ces conditions, le modèle moyen a une "entrée" $\underline{\mathbf{f}}$ modélisant $\mathbf{f}^{\text{exp}}$, une "sortie" $\underline{\mathbf{v}}$ modélisant $\mathbf{v}^{\text{exp}}$ et un paramètre vectoriel $\underline{\mathbf{s}}$ pour lesquels une valeur doit être donnée (pratiquement, ce paramètre peut être un

réel, un vecteur, une fonction réelle ou vectorielle, un champ, etc.).

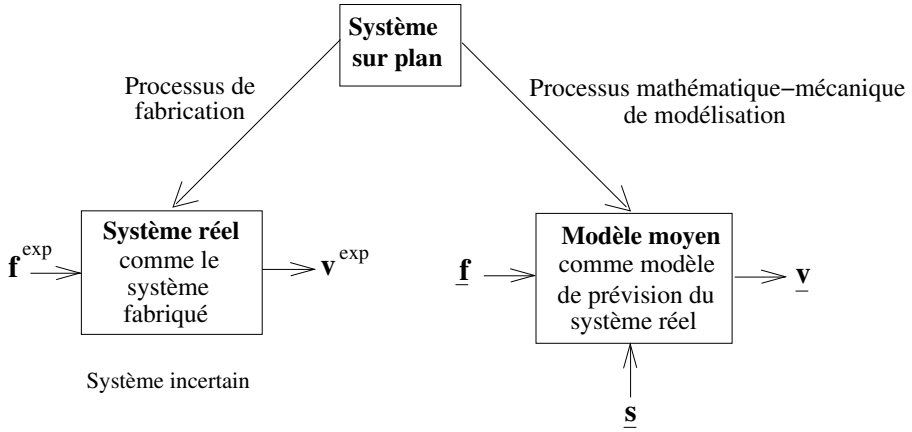

FIG. 1 - "Système sur plan", système réel et modèle moyen comme modèle de prévision du système réel.

(A) Erreurs. Les erreurs sont induites par la construction d'une approximation $\underline{\mathbf{v}}^n$ de la "sortie" $\underline{\mathbf{v}}$ du modèle moyen pour une "entrée" donnée $\underline{\mathbf{f}}$ et pour un paramètre vectoriel $\underline{\mathbf{s}}$ donné. Par exemple, le modèle moyen sera souvent un problème aux limites défini sur un domaine borné, et la méthode des éléments finis sera utilisée pour construire une approximation dans un sous-espace de dimension n finie. Une telle approximation introduit une erreur $\|\underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{v}}^n\|$ liée à la finesse du maillage où $\|\cdot\|$ est une norme appropriée. Si un problème de dynamique est étudié, il y aura de plus le schéma d'intégration temporelle qui introduit une erreur suplémentaire liée au pas de temps. Ces erreurs liées à la construction des approximations des problèmes aux limites doivent être contrôlées et réduites à une précision donnée en utilisant les résultats des mathématiques appliquées et l'analyse numérique. Ces erreurs d'approximation ne sont donc pas, et ne doivent pas, être considérées conmme des incertitudes de modèle ou de données (voir ci-dessous).

(B) Incertitudes. Ci-après, l'"entrée" $\underline{\mathbf{f}}$ et le paramètre vectoriel $\underline{\mathbf{s}}$ du modèle moyen seront appelés les données du modèle moyen. Le processus de modélisation mathématique-mécanique du "système sur plan" introduit deux types fondamentaux d'incertitudes : les incertitudes sur les données et les incertitudes de modèle.

(B.1) Incertitudes sur les données : L'"entrée" $\underline{\mathbf{f}}$ du modèle moyen ne représente pas exactement l'"entrée" $\mathbf{f}^{\text{exp}}$ du système réel et, il y a des incertitudes sur le paramètre vectoriel $\underline{\mathbf{s}}$ du modèle moyen. Ces incertitudes sur les données doivent être prises en compte pour améliorer le niveau de prédiction du modèle moyen. La meilleure approche pour faire cela est l'approche probabiliste paramétrique consistant à modéliser les données du modèle moyen par des grandeurs aléatoires (voir le paragraphe 1).

(B.2) Incertitudes de modèle : Le processus de modélisation mathématique-mécanique utilisé pour construire le modèle moyen induit des incertitudes de modèle par rapport au "système sur plan". Ce type d'incertitudes est principalement dû aux simplifications cinématiques introduites pour diminuer la complexité et la maîtrise du modèle moyen développé : par exemple, un milieu élastique cylindrique élancé modélisé par une poutre (Euler ou Timoshenko), un milieu élastique tridimensionnelle modélisé par une théorie de plaque mince ou épaisse, un assemblage complexe constitué de plusieurs plaques solidarisées par des boulons modélisé par une plaque équivalente homogène orthotrope, etc. Il est clair que l'introduction de tels modèles simplifiés conduit à un modèle moyen dont les variations du paramètre vectoriel $\underline{\mathbf{s}}$ au travers de tout son

espace de définition, ne permet pas d'améliorer le niveau prévisionnel du modèle moyen par rapport aux incertitudes de modèle. Ainsi, l'approche probabiliste paramétrique, si elle permet de bien modéliser les incertitudes sur les données, est, en général, incapable de modéliser les incertitudes de modèle (ce point sera demontré au paragraphe 5). C'est la raison pour laquelle une approche probabiliste non paramétrique est proposée.

(C) Niveau de prédiction du modèle moyen. L'erreur liée aux incertitudes entre la prévison $\underline{\mathbf{v}}^n$ effectuée avec le modèle moyen et la réponse $\mathbf{v}^{\text{exp}}$ du système réel peut être mesurée par $\|\mathbf{v}^{\text{exp}} - \underline{\mathbf{v}}^n\|$. Le modèle moyen sera considéré comme prédictif si cette erreur est suffisamment petite. En général, dues aux incertitudes sur les données et aux incertitudes de modèle, cette erreur n'est pas suffisamment petite et doit donc être maîtrisée par l'introduction de modèles probabilistes des incertitudes sur les données et des incertitudes de modèle.

3 Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes

3.1 Concept de l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes

Dans le but d'expliquer simplement ce concept, on introduit la situation simplifiée suivante. Soit $\mathbf{s} \mapsto A(\mathbf{s})$ l'application linéaire d'un espace $\mathcal{S}$ dans un espace $\mathcal{A}$ d'opérateurs linéaires. L'espace $\mathcal{S}$ représente l'ensemble de toutes les valeurs possibles du paramètre vectoriel $\mathbf{s}$ (par exemple, des paramètres géométriques, des propriétés élastiques, des conditions aux limites, etc.). Pour $\mathbf{s}$ fixé dans $\mathcal{S}$, l'opérateur $A(\mathbf{s})$ représente un des opérateurs du problème aux limites, par exemple, l'opérateur de raideur qui sera un opérateur symétrique défini positif et dans ce cas, $\mathcal{A}$ sera un ensemble d'opérateurs linéaires symétriques et définis positifs. Soit $R_{\text{par}} \subset \mathcal{A}$ l'image de l'application $\mathbf{s} \mapsto A(\mathbf{s})$, c'est-à-dire, le sous-espace de $\mathcal{A}$ engendré par $A(\mathbf{s})$ quand $\mathbf{s}$ parcourt tout $\mathcal{S}$.

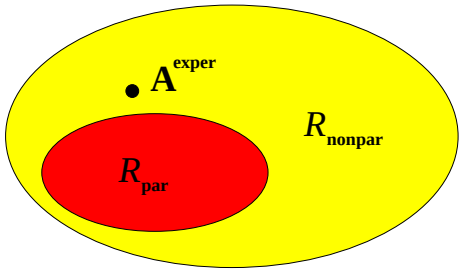

FIG. 2 - Approches probabilistes paramétrique et non paramétrique des incertitudes.

(A) Opérateur du système réel. On suppose que l'opérateur correspondant pour le système réel est l'opérateur $\mathbf{A}^{\text{exp}}$ appartenant à $\mathcal{A}$.

(B) Modèle moyen de l'opérateur. Si $\mathbf{s} = \underline{\mathbf{s}}$ est la valeur nominale, alors $\underline{A} = A(\underline{\mathbf{s}}) \in R_{\text{par}}$ correspondra au modèle moyen (ou, modèle nominal) de l'opérateur considéré.

(C) Modélisation probabiliste paramétrique de l'opérateur. L'approche probabiliste paramétrique de l'opérateur consiste à modéliser le paramètre vectoriel $\mathbf{s}$ par la variable aléatoire vectorielle $\mathbf{S}$ dont la loi de probabilité $P_{\mathbf{S}}(d\mathbf{s})$ a pour support l'ensemble $\mathcal{S}$. Alors l'opérateur $\underline{A}$ du modèle moyen est remplacé par l'opérateur aléatoire $\mathbf{A}_{\text{par}}$ tel que $\mathbf{A}_{\text{par}} = A(\mathbf{S})$. La loi de probabilité $P_{\mathbf{A}_{\text{par}}}$ de l'opérateur aléatoire $\mathbf{A}_{\text{par}}$ est telle que $P_{\mathbf{A}_{\text{par}}} = A(P_{\mathbf{S}})$ et le support de $P_{\mathbf{A}_{\text{par}}}$ est l'ensemble $R_{\text{par}} \subset \mathcal{A}$ (voir Figure 2). Clairement, la loi de probabilité $P_{\mathbf{A}_{\text{par}}}$ sur R_{par} permet de prendre en compte les incertitudes sur les données, mais $\mathbf{A}^{\text{exp}}$ peut très bien ne pas appartenir à l'ensemble R_{par} de par la présence des incertitudes de modèle.

(D) Modèle probabiliste non paramétrique de l'opérateur. L'approche probabiliste non paramétrique de l'opérateur consiste à remplacer l'opérateur $\underline{A}$ du modèle moyen par l'opérateur aléatoire $\mathbf{A}_{\text{nonpar}}$ dont la loi de probabilité $P_{\mathbf{A}_{\text{nonpar}}}$ a pour support R_{nonpar} qui est tel que $R_{\text{nonpar}} = \mathcal{A}$. Comme $\mathbf{A}^{\text{exp}}$ appartient à $\mathcal{A}$ et comme le support de $P_{\mathbf{A}_{\text{nonpar}}}$ est aussi $\mathcal{A}$, les incertitudes de modèle peuvent être prises en compte par l'approche non paramétrique (voir Figure 2). Naturellement, la loi de probabilité $P_{\mathbf{A}_{\text{nonpar}}}$ avec son support R_{nonpar} ne peut pas être choisie arbitrairement mais doit être construite en utilisant toute l'information utilisable. Une telle approche a été développée [32-35] en utilisant le principe du maximum d'entropie [36,37] correspondant à la maximisation de l'incertitude sous les contraintes définies par l'information utilisable.

3.2 Historique du dévéloppement de l'approche non paramétrique

Les aspects fondamentaux de cette approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et le développement du premier ensemble de matrices aléatoires adaptées à la modélisation des incertitudes pour les systèmes dynamiques linéaires ont été introduits dans [32,33]. La fermeture algébrique du modèle proposé et l'analyse de la convergence lorsque la dimension tend vers l'infini sont données dans [34,38] dans le contexte de l'élastodynamique linéaire transitoire de systèmes incertains. D'autres ensembles de matrices aléatoires adaptées à la modélisation des incertitudes pour les systèmes couplés fluides-structures, tels que des systèmes vibroacoustiques, sont introduits dans [35]. L'extension de la théorie au cas des incertitudes non homogènes dans les systèmes dynamiques complexes (en utilisant des formulations par sous-structuration dynamique) et les premières validations expérimentales de la théorie peuvent être trouvées dans [39,40]. Une méthodologie d'identification expérimentale des paramètres du modèle probabiliste non paramétrique est proposée dans [41,35] et une identification expérimentale sur des panneaux composites est faite dans [42]. L'application de la théorie aux systèmes dynamiques linéaires dans le domaine des moyennes fréquences est faite dans [43]. L'étude des valeurs propres aléatoires des systèmes dynamiques linéaires avec modélisation probabiliste des incertitudes par l'approche non paramétrique et l'étude de la non adaptation de l'ensemble de matrices aléatoires du GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) pour la dynamique basse et moyenne fréquence sont donnéee dans [44]. L'utilisation de cette approche non paramétrique au cas de systèmes dynamiques non linéaires a été faite dans [45] avec application à la dynamique transitoire non linéaire de structures multi-supportées dans [46]. Le désaccordage dynamique des structures ayant une géométrie cyclique induit par les incertitudes de modèle a été étudié dans [47,48]. Des éléments supplémentaires de validation de la théorie proposée concernant la capacité de l'approche probabiliste non paramétrique de représenter les incertitudes de modèle sont donnés dans [41,49]. Finalement, une application au cas de la vibroacoustique interne est faite dans [50].

4 Méthodologie de la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes

La méthodologie de modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes en dynamique des systèmes est la suivante : (1) Développement d'un modèle mathématique-mécanique et de sa discrétisation (en général par la méthode des éléments finis pour la mécanique des solides et pour la vibroacoustique), appelé "modèle moyen" (ou modèle nominal). (2) Construction d'un modèle moyen réduit à partir du modèle moyen. (3) Construction du modèle stochastique réduit à partir du modèle moyen réduit et de l'approche probabiliste non paramétrique pour laquelle les lois de probabilité des matrices généralisées aléatoires sont déterminées en utilisant le principe du maximum d'entropie. (4) Construction et convergence de la solution stochastique.

4.1 Modèle moyen du système dynamique

La présentation est limitée au cas des systèmes dynamiques non linéaires constitués d'une partie linéaire et de non-linéarités localisées, et s'étend sans difficulté de principe aux cas d'autres systèmes tels que les systèmes vibroacoustiques [50]. De plus pour simplifier l'exposé on considère le milieu continu discrétisé (pour les aspects continus, voir [34]). Le modèle moyen (modèle par élements finis) est décrit (les quantités soulignées sont relatives au modèle moyen) par l'équation différentielle non linéaire sur $\mathbb{R}^m$ suivante,

$$[\,\underline{\mathbb{M}}\,]\,\underline{\ddot{\mathbf{y}}}(t) + [\,\underline{\mathbb{D}}\,]\,\underline{\dot{\mathbf{y}}}(t) + [\,\underline{\mathbb{K}}\,]\,\underline{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{f}_{\text{NL}}(\underline{\mathbf{y}}(t), \underline{\dot{\mathbf{y}}}(t)) = \mathbf{f}(t) \quad , \tag{1}$$

où $\underline{\mathbf{y}} = (\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_m)$ est le vecteur des m degrés de liberté (DDL) (déplacements et/ou rotations), avec $\underline{\dot{\mathbf{y}}}$ et $\underline{\ddot{\mathbf{y}}}$ la vitesse et l'accélération, où $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))$ est le vecteur des forces externes appliquées et où $[\,\underline{\mathbb{M}}\,]$, $[\,\underline{\mathbb{D}}\,]$ et $[\,\underline{\mathbb{K}}\,]$ sont des matrices réelles $(m{\times}m)$ symétriques définies positives de masse, d'amortissement et de raideur (on suppose ici, pour simplifier, qu'il n'y a pas de déplacement de corps rigide). Enfin $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mapsto \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ est une application non linéaire de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ modélisant les forces non linéaires telles que $\mathbf{f}_{\text{NL}}(0, 0) = 0$. Le cas linéaire se déduit de l'Eq. (1) en faisant $\mathbf{f}_{\text{NL}} = 0$.

4.2 Modèle moyen réduit

Soit $\{\underline{\boldsymbol{\varphi}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_m\}$ une base algébrique de $\mathbb{R}^m$. Le modèle moyen réduit est obtenu en projetant l'Eq. (1) sur le sous-espace V_n de $\mathbb{R}^m$ engendré par $\{\underline{\boldsymbol{\varphi}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n\}$ avec $n \ll m$. La construction d'une telle base algébrique dépend des situations à traiter. Par exemple, on peut utiliser (1) les modes élastiques du système linéaire sous-jacent si la réponse est limitée au domaine des basses fréquences; (2)les vecteurs propres de l'opérateur d'énergie mécanique pour les systèmes dynamiques linéaires dans le domaine des moyennes fréquences [51-53,43,54,55]; (3) des "modes non linéaires" adaptés pour les systèmes dynamiques non linéaires avec non-linéarités distribuées.

Soit $[\,\underline{\Phi}_n]$ la matrice réelle $(m \times n)$ dont les colonnes sont les vecteurs $\{\underline{\boldsymbol{\varphi}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_n\}$. Le vecteur des forces généralisées $\mathbf{F}^n(t)$ appartient à $\mathbb{R}^n$ et est tel que $\mathbf{F}^n(t) = [\,\underline{\Phi}_n]^T\,\mathbf{f}(t)$. Les matrices de masse, d'amortissement et de raideur généralisées $[\,\underline{M}_n]$, $[\,\underline{D}_n]$ et $[\,\underline{K}_n]$ sont des matrices réelles $(n \times n)$ symétriques définies positives telles que $[\,\underline{M}_n] = [\,\underline{\Phi}_n]^T[\,\underline{\mathbb{M}}][\,\underline{\Phi}_n]$, $[\,\underline{D}_n] = [\,\underline{\Phi}_n]^T[\,\underline{\mathbb{D}}][\,\underline{\Phi}_n]$, et $[\,\underline{K}_n] = [\,\underline{\Phi}_n]^T[\,\underline{\mathbb{K}}][\,\underline{\Phi}_n]$ qui, en général, sont des matrices pleines. Dans ces conditions, le modèle moyen réduit du système dynamique non linéaire est obtenu comme la projection $\underline{\mathbf{y}}^n$ de $\underline{\mathbf{y}}$ sur V_n et s'écrit,

$$\underline{\mathbf{y}}^n(t) = [\,\underline{\Phi}_n]\,\underline{\mathbf{q}}^n(t) \quad , \tag{2}$$

où $\underline{\mathbf{q}}^n(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coordonnées généralisées qui vérifie

$$[\,\underline{M}_n]\,\underline{\ddot{\mathbf{q}}}^n(t) + [\,\underline{D}_n]\,\underline{\dot{\mathbf{q}}}^n(t) + [\,\underline{K}_n]\,\underline{\mathbf{q}}^n(t) + \mathbf{F}^n_{\text{NL}}(\underline{\mathbf{q}}^n(t), \underline{\dot{\mathbf{q}}}^n(t)) = \mathbf{F}^n(t) \ , \ \forall t \geq 0 \ , \tag{3}$$

avec, pour tout $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ dans$\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{F}^n_{\text{NL}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [\,\underline{\Phi}_n]^T\,\mathbf{f}_{\text{NL}}([\,\underline{\Phi}_n]\,\mathbf{q}, [\,\underline{\Phi}_n]\,\mathbf{p}) \quad . \tag{4}$$

4.3 Réponse stochastique du système dynamique non linéaire avec modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes

Le principe de construction du modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes pour le système dynamique dont le modèle moyen réduit est défini par l'Eq. (3), consiste à substituer les matrices généralisées de l'Eq. (3) par des matrices aléatoires $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ et $[\mathbf{K}_n]$ pleines dont les lois de probabilité vont être construites directement. Si il y a des incertitudes dans la modélisation des forces non lineaires, l'approche probabiliste paramétrique classique peut être utilisée conduisant ainsi à une approche probabiliste mixte non paramétrique et paramétrique (voir [45,46]). La réponse stochastique du système dynamique non linéaire avec modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes, dont le modèle moyen réduit est défini par les Eqs. (2)-(4), est le processus stochastique $\mathbf{Y}^n(t)$, indexé sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, tel que

$$\mathbf{Y}^n(t) = [\,\underline{\Phi}_n]\,\mathbf{Q}^n(t) \quad , \tag{5}$$

où le processus stochastique $\mathbf{Q}^n(t)$, indexé par $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est tel que

$$[\mathbf{M}_n]\,\ddot{\mathbf{Q}}^n(t) + [\mathbf{D}_n]\,\dot{\mathbf{Q}}^n(t) + [\mathbf{K}_n]\,\mathbf{Q}^n(t) + \mathbf{F}^n_{\mathrm{NL}}(\mathbf{Q}^n(t), \dot{\mathbf{Q}}^n(t)) = \mathbf{F}^n(t)\ ,\ \forall t \geq 0\ , \tag{6}$$

avec les conditions initiales $\mathbf{Q}^n(0) = 0$ et $\dot{\mathbf{Q}}^n(0) = 0$.

4.4 Construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires $[\mathbf{M}_n], [\mathbf{D}_n], [\mathbf{K}_n]$

La définition et la construction de l'ensemble SE^+ de matrices aléatoires sont données dans [32-34,45]. La construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ and $[\mathbf{K}_n]$ consiste à prendre ces matrices dans l'ensemble SE^+ dont la construction et les propriétés sont rappelées ci-après pour faciliter la lecture.
(1) Le matrices aléatoires $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ et $[\mathbf{K}_n]$ sont définies sur l'espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$, à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$.
(2) Les valeurs moyennes de ces matrices aléatoires sont telles que $E\{[\mathbf{M}_n]\} = [\,\underline{M}_n]$, $E\{[\mathbf{D}_n]\} = [\,\underline{D}_n]$ et $E\{[\mathbf{K}_n]\} = [\,\underline{K}_n]$.
(3) Ces matrices aléatoires doivent vérifier les inégalités suivantes pour que l'Eq. (6) ait une solution qui soit du second ordre (voir [34,45]) $E\big\{\|[\mathbf{M}_n]^{-1}\|_F^2\big\} < +\infty$, $E\big\{\|[\mathbf{D}_n]^{-1}\|_F^2\big\} < +\infty$ et $E\big\{\|[\mathbf{K}_n]^{-1}\|_F^2\big\} < +\infty$.
(4) Les matrices aléatoires $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ et $[\mathbf{K}_n]$ sont indépendantes car il est supposé qu'il n'y a pas d'information utilisable sur les tenseurs de corrélation entre les différentes matrices aléatoires [32-35].
(5) On introduit la normalisation suivante par rapport aux valeurs moyennes,

$$[\mathbf{M}_n] = [\underline{L}_{M_n}]^T\,[\mathbf{G}_{M_n}]\,[\underline{L}_{M_n}] \quad , \tag{7}$$

$$[\mathbf{D}_n] = [\underline{L}_{D_n}]^T\,[\mathbf{G}_{D_n}]\,[\underline{L}_{D_n}] \quad , \tag{8}$$

$$[\mathbf{K}_n] = [\underline{L}_{K_n}]^T\,[\mathbf{G}_{K_n}]\,[\underline{L}_{K_n}] \quad , \tag{9}$$

où $[\underline{L}_{M_n}]$, $[\underline{L}_{D_n}]$ et $[\underline{L}_{K_n}]$ sont des matrices réelles triangulaires supérieures dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $[\underline{M}_n] = [\underline{L}_{M_n}]^T\,[\underline{L}_{M_n}]$, $[\underline{D}_n] = [\underline{L}_{D_n}]^T\,[\underline{L}_{D_n}]$ et $[\underline{K}_n] = [\underline{L}_{K_n}]^T\,[\underline{L}_{K_n}]$. Les matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{M_n}]$, $[\mathbf{G}_{D_n}]$ et $[\mathbf{G}_{K_n}]$ sont dans SG^+ qui est défini au paragraphe 4.5.

4.5 Ensemble SG^+ de matrices aléatoires

(A) Définition de l'ensemble SG^+. Cet ensemble est défini et construit [32-34] comme l'ensemble des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_n]$, définies sur l'espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, dont la loi de probabilité est construite en utilisant le principe du maximum d'entropie [36,37] avec les contraintes définies par l'information utilisable suivante,
(1) La matrice aléatoire $[\mathbf{G}_n]$ est une matrice réelle symétrique définie positive, c'est-à-dire,

$$[\mathbf{G}_n] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{a.s} \quad . \tag{10}$$

(2) La matrice aléatoire $[\mathbf{G}_n]$ est du second ordre : $E\{\|[\mathbf{G}_n]\|^2\} \leq E\{\|[\mathbf{G}_n]\|_F^2\} < +\infty$, et sa valeur moyenne $[\underline{G}_n]$ est la matrice $(n \times n)$ unité $[I_n]$,

$$E\{[\mathbf{G}_n]\} = [\underline{G}_n] = [I_n] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad . \tag{11}$$

(3) La matrice aléatoire $[\mathbf{G}_n]$ est telle que

$$E\{\ln(\det[\mathbf{G}_n])\} = v \quad \text{with} \quad |v| < +\infty \quad . \tag{12}$$

La contrainte définie par l'Eq. (12) donne la propriété suivante pour les matrices aléatoires dans l'ensemble SG^+,

$$E\big\{\|[\mathbf{G}_n]^{-1}\|_F^2\big\} < +\infty \quad . \tag{13}$$

(B) Paramètre de dispersion d'une matrice aléatoire de l'ensemble SG^+. Soit δ le paramètre réel défini par

$$\delta = \left\{ \frac{E\{\| [\mathbf{G}_n] - [\underline{G}_n] \|_F^2\}}{\| [\underline{G}_n] \|_F^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{n} E\{\| [\mathbf{G}_n] - [I_n] \|_F^2\} \right\}^{1/2} \quad , \tag{14}$$

qui permet de fixer le niveau de dispersion de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_n]$, qui est indépendant de la dimension n et qui doit être tel que

$$0 < \delta < \sqrt{(n+1)(n+5)^{-1}} \quad . \tag{15}$$

(C) Loi de probabilité d'une matrice aléatoire dans SG^+. La loi $P_{[\mathbf{G}_n]}$ de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_n]$ est définie par une densité de probabilité $[G_n] \mapsto p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n])$ de $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+ = [0\,, +\infty[$, par rapport à la mesure $\widetilde{d}G_n$ sur l'ensemble $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$, telle que

$$\widetilde{d}G_n = 2^{n(n-1)/4}\, \Pi_{1 \leq i \leq j \leq n}\, d[G_n]_{ij} \quad . \tag{16}$$

On a alors

$$P_{[\mathbf{G}_n]} = p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n])\ \widetilde{d}G_n \quad , \tag{17}$$

avec la condition de normalisation

$$\int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n])\ \widetilde{d}G_n = 1 \quad . \tag{18}$$

La densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n])$ s'écrit alors

$$p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G_n]) \times C_{\mathbf{G}_n} \times \big(\det[G_n]\big)^{(n+1)\frac{(1-\delta^2)}{2\delta^2}} \times \exp\left\{-\frac{(n+1)}{2\delta^2}\,\mathrm{tr}\,[G_n]\right\} \quad , \tag{19}$$

où $C_{\mathbf{G}_n}$ est la constante positive de normalisation qui s'écrit

$$C_{\mathbf{G}_n} = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4}\,\left(\frac{n+1}{2\delta^2}\right)^{n(n+1)(2\delta^2)^{-1}}}{\left\{\Pi_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2}+\frac{1-j}{2}\right)\right\}} \quad , \tag{20}$$

avec $\Gamma(z)$ est la fonction gamma définie pour tout $z > 0$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$. L'équation (19) montre que $\{[G_n]_{jk}, 1 \leq j \leq k \leq n\}$ sont des variables aléatoires dépendantes.

(D) Représentation algébrique d'une matrice aléatoire de l'ensemble SG^+. La représentation suivante de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_n]$ permet de construire des réalisations pour la méthode de simulation numérique de Monte Carlo. On a

$$[\mathbf{G}_n] = [\mathbf{L}_n]^T\,[\mathbf{L}_n] \quad , \tag{21}$$

avec $[\mathbf{L}_n]$ une matrice aléatoire triangulaire supérieure à valeurs dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

(1) Les varaibales aléatoires $\{[\mathbf{L}_n]_{jj'}, j \leq j'\}$ sont indépendantes.

(2) Pour $j < j'$, la variable aléatoire réelle $[\mathbf{L}_n]_{jj'}$ s'écrit $[\mathbf{L}_n]_{jj'} = \sigma_n U_{jj'}$ avec $\sigma_n = \delta(n+1)^{-1/2}$ et où $U_{jj'}$ est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance unité.

(3) Pour $j = j'$, la variable aléatoire à valeurs positives $[\mathbf{L}_n]_{jj}$ s'écrit $[\mathbf{L}_n]_{jj} = \sigma_n\sqrt{2V_j}$ avec σ_n défini ci-dessus et où V_j est une variable aléatoire gamma à valeurs positives dont la densité de probabilité $p_{V_j}(v)$ par rapport à dv s'écrit

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2}+\frac{1-j}{2}\right)}\;v^{\frac{n+1}{2\delta^2}-\frac{1+j}{2}}\;e^{-v} \quad . \tag{22}$$

(E) Propriété de convergence d'une matrice aléatoire dans SG^+ **lorsque la dimension tend vers l'infini**. On a [34] la propriété fondamentale suivante,

$$\forall n \geq 2 \quad , \quad E\{\|[\mathbf{G}_n]^{-1}\|^2\} \leq C_\delta < +\infty \quad , \tag{23}$$

avec C_δ une constante positive finie indépendante de n mais qui dépend de δ. L'équation (23) signifie que $n \mapsto E\{\|[\mathbf{G}_n]^{-1}\|^2\}$ est une fonction bornée de $\{n \geq 2\}$ dans $\mathbb{R}^+$.

4.6 Autres ensembles de matrices aléatoires

Cinq ensembles de matrices aléatoires ont été développés pour couvrir plusieurs situations de modélisation des incertitudes en mécanique numérique. Ces ensembles diffèrent des ensembles connus de matrices aléatoires [56].

(1) Le premier ensemble est l'ensemble SG^+ défini au paragraphe 4.5 et est appelé ici l'*ensemble normalisé défini positif*. Une matrice aléatoire dans cet ensemble est définie positive presque sûrement, sa valeur moyenne est la matrice unité et la norme de son inverse est du second ordre.

Cet ensemble constitue l'ensemble central pour la construction des quatre autres ensembles. L'ensemble SG^+ diffère [44] de l'ensemble GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble).

(2) Le second ensemble SE^+, appelé ici l'*ensemble défini positif*, est construit au paragraphe 4.4. Une matrice aléatoire de SE^+ est définie positive presque sûrement, sa valeur moyenne est une matrice définie positive et la norme de son inverse est du second ordre. Par exemple, cet ensemble est utilisé pour construire le modèle probabiliste des opérateurs définis positifs de masse, d'amortissement et de raideur.

(3) Le troisième ensemble SE^{+0} introduit dans [32] est similaire à SE^+, mais une matrice dans SE^{+0} est seulement positive (et non pas définie positive) presque sûrement. Par exemple, un tel ensemble est utile pour la modélisation probabiliste de l'opérateur de raideur lorsque les déplacements de corps rigide sont autorisés.

(4) Le quatrième ensemble [35] est le sous-ensemble SE^+_{lf} de SE^+ pour lequel une forme linéaire est donnée sur SE^+. Un cas particulier est l'ensemble SE^+_{tr} tel que la trace de la matrice aléatoire est donnée (déterministe). Par exemple, un tel ensemble est utile pour la modélisation probabiliste de l'opérateur de masse d'un système dynamique pour lequel la masse totale est connue mais pour lequel la distribution spatiale est incertaine.

(5) Le cinquième ensemble SE_{inv} , ici appelé l'*ensemble pseudo-inverse* est constitué [35] des matrices aléatoires réelles rectangulaires ayant un pseudo-inverse en moyenne d'ordre deux. Par exemple, cet ensemble de matrices aléatoires est utile pour la modélisation probabiliste de l'opérateur de couplage entre une structure et une cavité acoustique pour les problèmes de vibroacoustique.

4.7 Construction and convergence de la solution stochastique

(A) Solution stochastique. Pour tout $T > 0$, et pour des hypothèses raisonnables sur la non-linéarité, il est montré [34,45] que, si $\int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt < +\infty$, alors pour tout t dans $[0\,,T]$, on a $E\{\|\mathbf{Y}^n(t)\|^2\} \leq C_1 < +\infty$ et $E\{\|\dot{\mathbf{Y}}^n(t)\|^2\} \leq C_2 < +\infty$ avec C_1 et C_2 des constantes positives indépendantes de n et t.

(B) Construction de la solution stochastique. La solution stochastique de l'Eq. (6) est construite par la méthode de Monte Carlo avec n_s réalisations. Pour chaque réalisation, l'Eq. (6) est résolue avec un schéma implicite inconditionnellement stable (schéma de Newmark) accompagné d'une méthode itérative de résolution de l'équation algébrique non linéaire à chaque pas de temps. Les réalisations de la matrice aléatoire $[\mathbf{A}_n]$, où $[\mathbf{A}_n]$ représente $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ ou $[\mathbf{K}_n]$, sont construites en utilisant la représentation donnée au paragraphe 4.5(D). Il faut noter que le coût numérique reste admissible car l'Eq. (6) est celle du modèle stochastique réduit avec $n \ll m$.

(C) Analyse de convergence. En utilisant l'estimateur usuel de l'espérance mathématique E, la convergence par rapport à la dimension n du modèle stochastique réduit et par rapport au nombre n_s de réalisations de la méthode de Monte Carlo, est analysée en construisant la fonction $(n_s, n) \mapsto \text{Conv}(n_s, n)$ définie par

$$\text{Conv}(n_s, n) = \left\{ \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \int_0^T \|\mathbf{Q}^n(t, \theta_k)\|^2 \, dt \right\}^{1/2} \quad , \tag{24}$$

où $\mathbf{Q}^n(t, \theta_1), \ldots, \mathbf{Q}^n(t, \theta_{n_s})$ sont les n_s réalisations de $\mathbf{Q}^n(t)$.

5 Validation de la capacité de l'approche probabiliste non paramétrique à prendre en compte les incertitudes de modèle

5.1 "Système sur plan"

Le "système sur plan" considéré est un corps élastique tridimensionnelle cylindre élancé $\underline{\Omega}$ défini dans un repère cartésien $(Oxyz)$ (voir Figure 3). La section du cylindre est rectangulaire et les dimensions sont $\underline{h}_1 = 10\,m$, $\underline{h}_2 = 1\,m$ et $\underline{h}_3 = 1.5\,m$. Le milieu élastique est constitué d'un matériau composite. La structure est simplement appuyée.

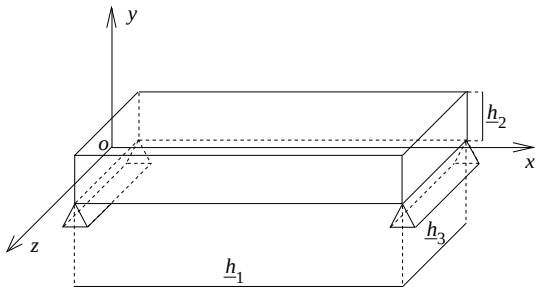

FIG. 3 - "Sytème sur plan": élastodynamique linéaire d'un corps élastique 3D élancé.

5.2 Sytème réel

La Figure 4 montre le système réel correspondant au "système sur plan" défini à la Figure 3. Il y a des incertudes sur la géométrie dues aux tolérances de fabrication. Le domaine du système réel est Ω_{RS} qui diffère de $\underline{\Omega}$. Les conditions d'appuis simples ne sont pas réalisées exactement et le matériau composite fabriqué ne correspnd pas tout à fait au matériau "sur plan".

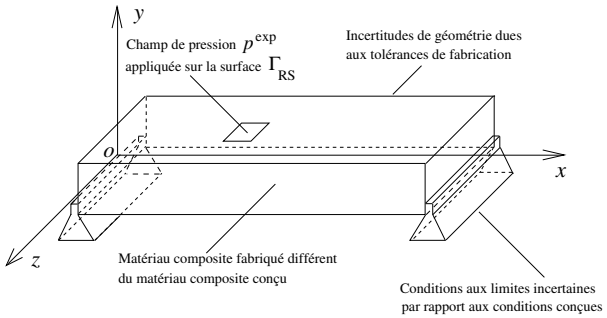

FIG. 4 - Système réel résultant de la fabrication du "système sur plan" de la Figure 3.

On est intéressé par la réponse dynamique dans la bande de fréquence $B =]0\,,1000]\,Hz$ pour une excitation induite par un champ de pression $p^{\text{exp}}(\omega)$ constante en fréquence sur B et constante en espace sur la surface d'application Γ_{RS} (voir Figure 4 et pout le détail des données, voir [41]).

5.3 Modèle moyen

Le modèle moyen, comme modèle de prévision du système réel défini à la Figure 4, est construit à partir du "système sur plan" défini à la Figure 3. Ce modèle moyen est une poutre d'Euler homogène amortie de longueur $\underline{h}_1$, simplement appuyée en $x = 0$ et $x = \underline{h}_1$ (see Figure 5). L'excitation est modélisée par une force concentrée localisée au centre de Γ_{RS}, constante en fréquence sur B. Le matériau composite est modélisé par un matériau élastique

isotrope homogène dont les paramètres moyens (nominaux) sont $\underline{\mathcal{E}} = 10^{10}\, N/m^2$ (module d'Young), $\underline{\rho} = 1700\, Kg/m^3$ (masse volumique) et $\underline{\xi} = 0.01$ (taux d'amortissement). Les fréquences propres de ce modèle moyen sont $\underline{\nu}_1 = 11,\ \underline{\nu}_2 = 44,\ \underline{\nu}_3 = 99,\ \underline{\nu}_4 = 176,\ \underline{\nu}_5 = 275, \underline{\nu}_6 = 396, \underline{\nu}_7 = 539, \underline{\nu}_8 = 704, \underline{\nu}_9 = 891,\ \underline{\nu}_{10} = 1100, \ldots, \underline{\nu}_{80} = 70385\, Hz$. Pour tout ω dans B, la force externe appliquée induit des vibrations de flexion dans le plan (Oxy).

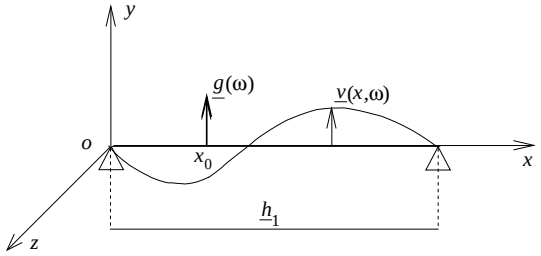

FIG. 5 - Modèle moyen comme modèle de prévision du système réel résultant du "système sur plan" défini à la Figure 3.

5.4 Expérimentation numérique du système réel

L'expérimentation numérique du système réel est obtenue (1) en construisant un modèle élastique 3D du système réel, (2) en discrétisant le système par la méthode des éléments finis et (3) en résolvant les équations dans la bande B par la méthode de l'analyse modale. Le matériau est pris homogène et isotrope avec un module d'Young de $10^{10}\, N/m^2$, un coefficient de Poisson de 0.15, une masse volumique de $1700\, Kg/m^3$. Les taux d'amortissement modal sont pris comme les réalisations d'une variable aléatoire uniforme sur $[0.009\,, 0.011]$ dont la valeur moyenne est 0.01. Le maillage par éléments finis est constitué de $80 \times 8 \times 12 = 7680$ éléments finis tridimenssionnelles solides à 8 noeuds. Il y a 9477 noeuds et un total de $28\,275$ degrés de liberté. L'analyse modale sur la bande B est faite avec 150 modes élastiques. Il y a 101 fréquences propres dans la bande B et 49 fréquences propres dans la bande $[1000, 1197]\, Hz$. La fréquence fondamentale est $\nu_1^{\text{exp}} = 16\, Hz$. Il y a 14 fréquences propres dans la bande $[0, 230]\, Hz$. Les fréquences propres des 5 premiers modes de flexion correspondent au 5 premiers modes de flexion du modèle moyen (poutre Euler), ont respectivement 2 à 6 noeuds de vibration sur la fibre neutre et sont $\nu_{j_1}^{\text{exp}} = 16,\ \nu_{j_2}^{\text{exp}} = 40,\ \nu_{j_3}^{\text{exp}} = 91,\ \nu_{j_4}^{\text{exp}} = 153,\ \nu_{j_5}^{\text{exp}} = 220,\ Hz$ avec $j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 7, j_4 = 10, j_5 = 14$.

5.5 Estimation des paramètres de dispersion du modèle non paramétrique d'incertitudes

En utilisant l'expérimentation numérique du système réel, une estimation des paramètres de dispersion δ_M, δ_D et δ_K des matrices généralisées aléatoires de masse, d'amortissement et de raideur est faite en utilisant la méthode présentée dans [44]. Une telle estimation donne $\delta_M = 0.29$, $\delta_D = 0.30$ et $\delta_K = 0.68$.

5.6 Prévision avec le modèle d'incertitude et comparaison avec l'expérimentation

Dans ce paragraphe, on présente (1) la prévision avec le modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes et (2) les comparaisons des prévisions du modèle moyen avec les réponses expérimentales du système réel. La convergence par rapport à n et n_s est montrée à la Figure 6 qui donne le graphe de la fonction $n_s \mapsto \text{Conv}(n_s, n)$ définie par l'Eq. (24) pour différentes valeurs de n. Cette figure montre que la convergence en moyenne d'ordre deux est obtenue pour $n \geq 80$ et $n_s \geq 1500$.

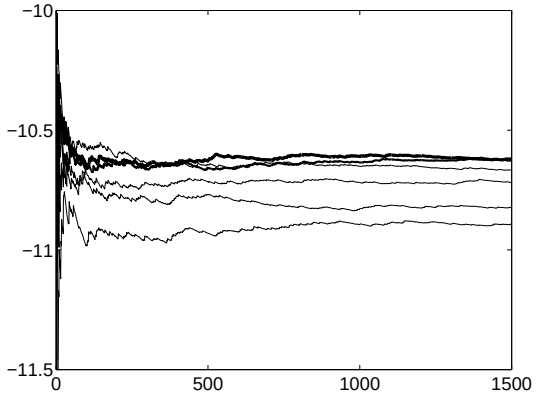

FIG. 6 - Convergence en moyenne d'ordre deux : graphes de $n_s \mapsto \log_{10}\{\text{Conv}(n_s, n)\}$ pour $n = 20$, $n = 30$ and 60 (les trois traits minces du dessous), pour $n = 80$, $n = 120$ et $n = 160$ (les 3 traits du dessus : $n = 80$ (trait mince), $n = 120$ (trait moyen) et $n = 160$ (trait épais)).

La force d'excitation est localisée en $x = 4.250$. Soient O_1 et O_2 les points d'observation appartenant à la fibre neutre en $x_1 = 5.000$ et $x_2 = 6.375$. Le domaine de confiance du module de la fonction de réponse en fréquence aux points d'observation O_1 et O_2 est calculée avec la méthode présentée au paragraphe 4, pour un niveau de probabilité $P_c = 0.98$ et pour $n = 80$ et $n_s = 3000$. Pour les observations O_1 et O_2, les Figs. 7 (gauche et droite) donnent une comparaison entre les prévisions des réponses du modèle moyen, les réponses du système réel (expérimentation numérique) et les prévisions du domaine de confiance du système stochastique résultant de la modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et des incertitudes sur les données.

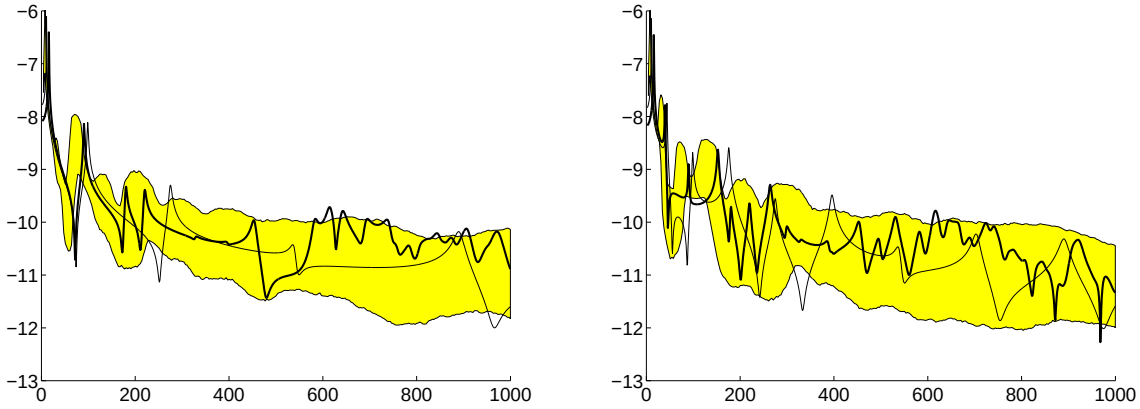

FIG. 7 - Prévision du domaine de confiance (région grise) du système stochastique avec l'approche non paramétrique des incertitudes de modèle et de données aux points d'observation O_1 (Figure gauche) et O_2 (Figure droite). Modèle moyen (trait mince). Expérimentation numérique du système réel (trait épais).

5.7 Difficultés de l'approche probabiliste paramétrique pour représenter les incertitudes de modèle

Dans ce paragraphe, on présente les résultats donnés par l'approche probabiliste paramétrique (incertitudes sur les données). Pour une telle approche, les variables aléatoires considérées sont la masse volumique ρ, les paramètres géométriques h_1, h_2 et h_3, le module d'Young $\mathcal{E}$ et le

taux d'amortissement ξ. Ces 6 variables aléatoires sont prises indépendantes. Les variables aléatoires h_1, h_2 et h_3 sont uniformes de moyennes connues $\underline{h}_1$, $\underline{h}_2$ et $\underline{h}_3$, et de coefficients de variation δ_{h_1}, δ_{h_2} et δ_{h_3} qui sont estimés par la méthode décrite ci-après. Pour simplifier, on prend $\delta_{h_1} = \delta_{h_2} = \delta_{h_3}$. Les variables aléatoires ρ, $\mathcal{E}$ et ξ à valeurs positives sont de loi gamma, de moyennes connues $\underline{\rho}$, $\underline{\mathcal{E}}$ et $\underline{\xi}$, et de coefficients de variation δ_ρ, $\delta_\mathcal{E}$ et δ_ξ qui sont estimés par la méthode décrite ci-après.

Soient Λ_1^{par} et $\Lambda_1^{\text{nonpar}}$ les plus petites fréquences propres aléatoires du système stochastique construit d'une part avec l'approche probabiliste paramétrique et d'autre part avec l'approche probabiliste non paramétrique. Soient $\delta_{\Lambda_1^{\text{par}}}$ et $\delta_{\Lambda_1^{\text{nonpar}}}$ les coefficients de variation des variables aléatoires Λ_1^{par} et $\Lambda_1^{\text{nonpar}}$. Dans le but de comparer des "choses" comparables, les coefficients de variation $\delta_{h_1} = \delta_{h_2} = \delta_{h_3}$, δ_ρ et $\delta_\mathcal{E}$ des variables aléatoires h_1, h_2, h_3, ρ et $\mathcal{E}$ pour l'approche probabiliste paramétrique, sont calculés en résolvant le problème suivant d'optimisation : $\min\{(\delta_{\Lambda_1^{\text{par}}} - \delta_{\Lambda_1^{\text{nonpar}}})^2\}$ où $\delta_{\Lambda_1^{\text{nonpar}}} = 0.076918$ est connu. Une solution de ce problème est $\delta_{h_1} = \delta_{h_2} = \delta_{h_3} = 0.024$, $\delta_\rho = 0.03$, $\delta_\mathcal{E} = 0.1$ correspondant à $\delta_{\Lambda_1^{\text{par}}} = 0.076492$. Le coefficient de variation δ_ξ est tel que $\delta_\xi = \delta_D = 0.3$. Pour les observations O_1 et O_2, les Figs. 8 (gauche et droite) montrent les comparaisons entre les prévisions des réponses du modèle moyen, les réponses du système réel (expérimentation numérique) et les prévisions du domaine de confiance du système stochastique résultant de la modélisation probabiliste paramétrique des incertitudes sur les données.

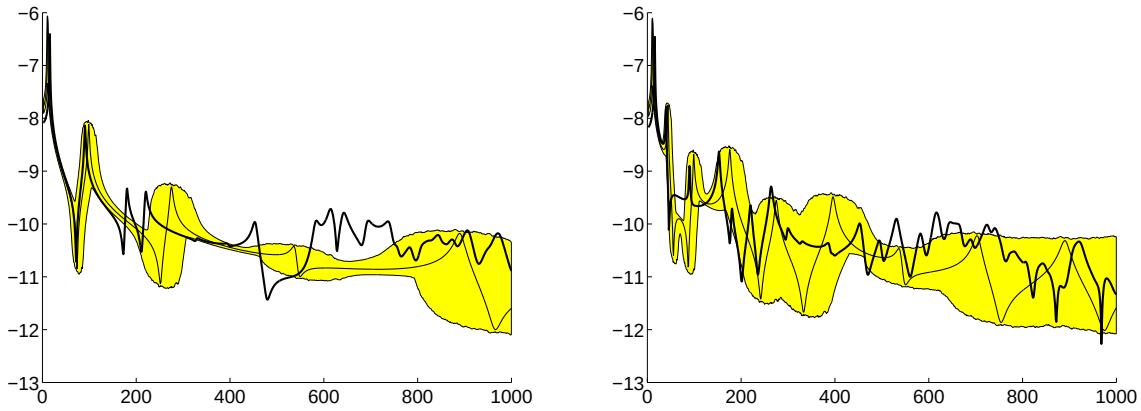

FIG. 8 - Prévision du domaine de confiance (région grise) du système stochastique avec l'approche paramétrique des incertitudes sur les données aux points d'observation O_1 (Figure gauche) et O_2 (Figure droite). Modèle moyen (trait mince). Expérimentation numérique du système réel (trait épais).

5.8 **Conclusion**

La comparaison des Figs. 7 gauche et droite avec les Figs. 8 gauche et droite respectivement, montre que les deux approches donnent des résultats similaires dans le domaine des basses fréquences $[0\,,100]\,Hz$ (cette bande est relativement robuste par rapport aux incertitudes de modèle) et sont très différents dans la bande de fréquence $[100, 1000]\,Hz$. L'approche probabiliste paramétrique permet de modéliser les incertitudes sur les données mais ne permet pas de prendre en compte les incertitudes de modèle dont les effets croissent avec la fréquence. L'approche probabiliste non paramétrique permet de prendre en compte les incertitude de modèle.

6 Robustesse d'un modèle de simulation numérique par rapport aux incertitudes de modèle et aux incertitudes de données en dynamique d'une structure aérospatiale

Dans ce paragraphe, on étudie la robustesse du modèle numérique de prévision par rapport aux incertitudes de modèle et aux incertitudes sur les données pour la dynamique d'une structure aérospatiale. Les incertitudes sur les données sont analysées avec l'approche probabiliste paramétrique. Les incertitudes de modèle et les incertitudes sur les données sont analysées avec l'approche probabiliste non paramétrique présentée au paragraphe 4. Les détails de l'application présentée ci-dessous sont donnés dans [49,57].

6.1 Modèle moyen et modèle moyen réduit

Le modèle éléments finis moyen est construit en cinq sous-domaines: le satellite a 120 000 degrés de liberté (DDL), les deux boosters à propergol solide chacun ayant 12 000 DDL, l'étage principal ayant 8 800 DDL et enfin, le composite supérieur avec 16 000 DDL. Le modèle total de la structure est constitué de 168 800 DDL. L'excitation externe du système mécanique sont des forces harmoniques appliquées dans la direction transversale à l'axe x du lanceur. La bande de fréquence pour l'analyse est $]0\,,60[\,Hz$. L'observation est le déplacement en fin de section de la poutre connectée au panneau solaire et dénotée par "obs" sur la Figure 9. Une méthode de sous-structuration dynamique [58] est utilisée pour construire le modèle moyen réduit en utilisant une sous-structure par sous-domaine.

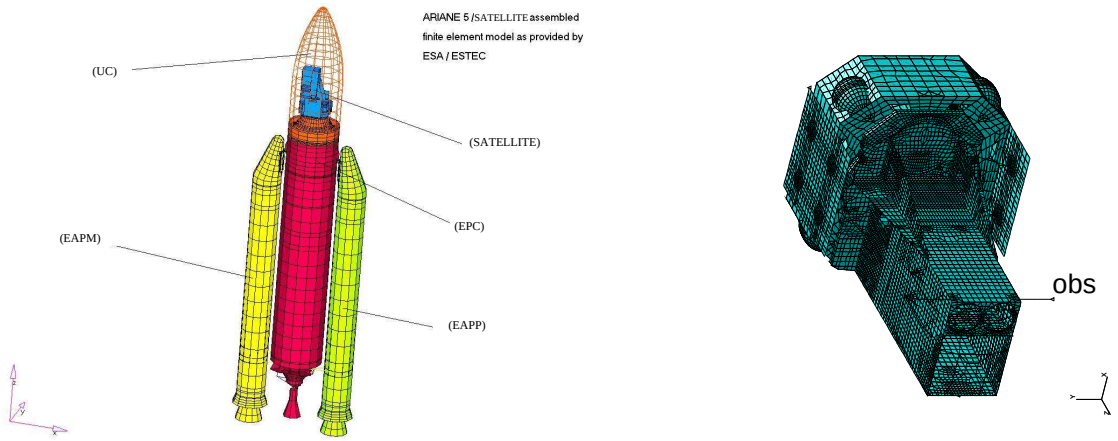

FIG. 9 - Modèle éléments finis de la structure aérospatiale constituée d'un satellite couplé à son lanceur (figure gauche). Modèle éléments finis du satellite (figure droite).

6.2 Approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les données

Dans cette application, pour l'approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les données, les seules données incertaintes sont celles du satellite. Il y a 1318 paramètres considérés comme incertains et qui sont modélisés par des variables aléatoires réelles indépendantes. La valeur moyenne de chaque variable aléatoire est égale à la valeur correspondante du modèle moyen (modèle nominal) et le coefficient de variation appartient au domaine $[0.04\,,0.40]$. Chaque distribution de probabilité est soit log-normal soit normal en fonction de la nature du paramètre modélisé.

6.3 Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et des incertitudes sur les données

L'approche probabiliste non paramétrique présentée dans le paragraphe 4 est appliquée au modèle moyen réduit du satellite considéré comme une sous-structure. Les incertitudes de modèle et les incertitudes sur les données sont prises en compte pour les opérateurs de masse, d'amortissement et raideur. Les trois paramètres de dispersion δ_M^{nonpar}, δ_D^{nonpar} and δ_K^{nonpar} des matrices aléatoires de masse, d'amortissement et de raideur généralisés sont identifiés à partir de l'approche probabiliste paramétrique avec la méthode suivante. Soient Λ_1^{par} et $\Lambda_1^{\text{nonpar}}$ les fréquences propres fondamentales aléatoires du système stochastique (le satellite en condition libre-libre) calculées d'une part avec l'approche probabiliste paramétrique et d'autre part avec l'approche probabiliste non paramétrique. Les paramètres de dispersion δ_M^{nonpar} and δ_K^{nonpar} sont alors obtenus en minimisant la distance entre les deux densités de probabilité des variables aléatoires Λ_1^{par} et $\Lambda_1^{\text{nonpar}}$. L'identification de δ_D^{nonpar} est obtenue en minimisant la distance entre les deux matrices aléatoires d'amortissement généralisé. Les résultats de cette identification sont $\delta_M^{\text{nonpar}} = 0.14$, $\delta_D^{\text{nonpar}} = 0.42$ et $\delta_K^{\text{nonpar}} = 0.13$.

6.4 Robustesse du modèle de simulation numérique par rapport aux incertitudes de modèles et des incertitudes sur les données

La figure 10 montre le domaine de confiance du déplacement aléatoire au point d'obseravtion "obs" calculé avec l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et de données sur le satellite. On peut conclure que le modèle moyen est robuste par rapport aux incertitudes de modèle et de données dans la bande $[0, 25]\ Hz$. La sensibilité du modèle moyen aux incertitudes croît avec la fréquence.

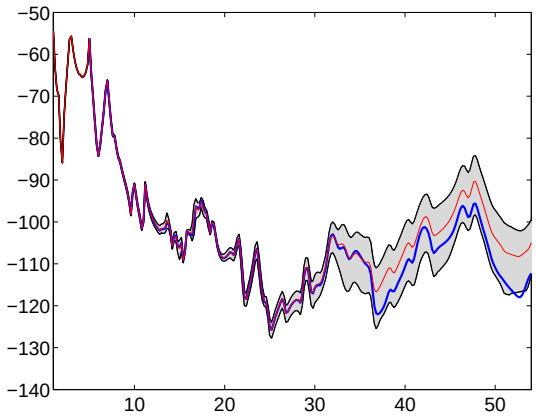

FIG. 10 - Déplacement aléatoire en dB pour l'observation "obs" calculé avec l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et de données sur le satellite. Réponse du modèle moyen (trait épais). Valeur moyenne de la réponse stochastique (trait mince). Domaine de confiance pour un niveau de probabilité de 0.98 (région grise).

Les deux figures 11 permettent d'analyser la robustesse vis-à-vis des incertitudes sur les données et des incertitudes de modèle. La figure 11 de gauche montre les résultats obtenus avec l'approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les données du satellite. On peut voir que la robustesse par rapport aux incertitudes sur les données n'est pas constante dans la bande $[30, 60]\ Hz$. Elle est bonne dans les bandes $[30, 33]$ et$[45, 60]\ Hz$ et est moins bonne dans la bande $[33, 45]\ Hz$. La figure 11 de droite qui est un zoom de la figure 10 pour la bande

$[30, 60]\ Hz$, montre les résultats obtenus avec l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes sur le modèle et sur les données du satellite. On peut voir que la robustesse par rapport aux incertitudes de modèle décroit avec la fréquence croisante dans la bande $[30, 60]\ Hz$. La comparaison des figures 11 gauche et droite montre que le modèle moyen est moins robuste vis-à vis des incertitudes de modèle que des incertitudes sur les données dans la bande $[30, 60]\ Hz$.

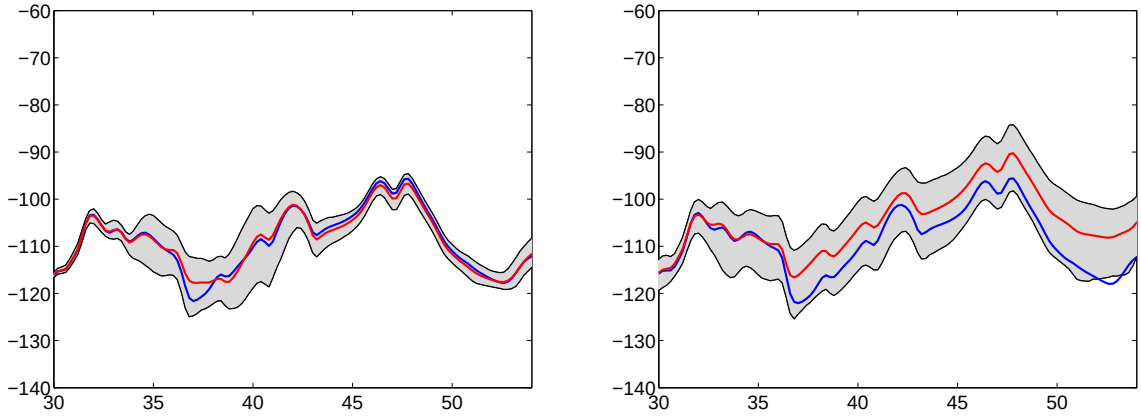

FIG. 11 - Déplacement aléatoire en dB pour l'observation "obs" (1) calculé avec l'approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les données du satellite (figure gauche) et (2) calculé avec l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et de données sur le satellite (figure droite). Réponse du modèle moyen (trait épais). Valeur moyenne de la réponse stochastique (trait mince). Domaine de confiance pour un niveau de probabilité de 0.98 (région grise).

7 Conclusion

Une approche probabiliste non paramétrique a été proposée pour prendre en compte les incertitudes de modèle et les incertitudes de données en mécanique numérique. Il a été démontré avec un exemple simple que l'approche probabiliste paramétrique usuelle qui permet de prendre en compte les incertitudes sur les données ne permet pas de prendre en compte les incertitudes de modèle. Une application sur une structure complexe du domaine aérospatial a été présentée et à permis d'analyser le niveau de robustesse de prévision du modèle moyen par rapport aux incertitudes de données et des incertitudes de modèle.

Références

[1] Shinozuka, M. & Astill, C. J. (1972). Random eigenvalue problems in structural analysis. *AIAA Journal* Vol. 10(No. 4): 456-462.

[2] Chen, P. C. & Soroka, W. W. (1973). Multi-degree dynamic response of a system with statistical properties. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 37(No. 4): 547-556.

[3] Prasthofer, P. H. & Beadle, C. W. (1975). Dynamic response of structures with statistical uncertainties in their stiffness. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 42(No. 4): 477-493.

[4] Haug, E. J., Choi, K. K. & Komkov, V. (1986). *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. London: Academic Press.

[5] Ibrahim, R. A. (1987). Structural dynamics with parameter uncertainties. *Applied Mechanics Reviews* Vol. 40(No. 3): 309-328.

[6] Kotulski, Z. & Sobczyk, K. (1987). Effects of parameter uncertainty on the response of vibratory systems to random excitation. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 119(No. 1): 159-171.

[7] Shinozuka, M. (1987). Structural response variability. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE* Vol. 113(No. 6): 825-842.

[8] Jensen, H. & Iwan, W. D. (1992). Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation. *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 118(No. 5): 1012-1025.

[9] Iwan, W. D. & Jensen, H. (1993). On the dynamical response of continuous systems including model uncertainty. *Transactions of ASME* Vol. 60: 484-490.

[10] Lee, C. & Singh, R. (1994). Analysis of discrete vibratory systems with parameter uncertainties. Part II: Impulse response. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 174(No. 3): 395-412.

[11] Papadimitriou, C., Katafygiotis, L. S. & Beck, J. L. (1995). Approximate analysis of response variability of uncertain linear systems. *Probabilistic Engineering Mechanics* Vol. 10(No. 4): 251-264.

[12] Lin, Y. K. & Cai, G. Q. (1995). *Probabilistic Structural Dynamics*. New York: McGraw-Hill.

[13] Micaletti, R. C., Cakmak, A. S., Nielsen, S. R. K. & Koyluglu, H. U. (1998). A solution method for linear and geometrically nonlinear MDOF systems with random properties subject to random excitation. *Probabilistic Engineering Mechanics* Vol. 13(No. 2): 85-95.

[14] Schuëller, G.I. (editor), (1997). A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics* Vol. 12(No. 4): 197-321.

[15] Mignolet, M.P. & Hu, W. (1998). Direct prediction of the effects of mistuning on the forced response of bladed disks. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* Vol. 120(No.3): 626-634.

[16] Vanmarcke, E. & Grigoriu, M. (1983). Stochastic finite element analysis of simple beams. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* Vol. 109(No. 5): 1203-1214.

[17] Liu, W. K., Belytschko, T. & Mani, A. (1986). Random field finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* Vol. 23: 1832-1845.

[18] Shinozuka, M. & Deodatis, G. (1988). Response variability of stochastic finite element systems. *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 114(No. 3): 499-519.

[19] Spanos, P.D. & Ghanem, R.G. (1989). Stochastic finite element expansion for random media. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* Vol. 115(No. 5): 1035-1053.

[20] Kleiber, M., Tran, D. H. & Hien, T. D. (1992). *The Stochastic Finite Element Method*. New York: John Wiley & Sons.

[21] Spanos, P.D. & Zeldin, B.A. (1994). Galerkin sampling method for stochastic mechanics problems. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* Vol. 120(No. 5): 1091-1106.

[22] Ditlevsen, O. & Tarp-Johansen, N. J. (1998). Choice of input fields in stochastic finite elements. *Probabilistic Engineering Mechanics* Vol. 14(No. 1-2): 63-72.

[23] Hien, T. & Kleiber, M. (1997). Stochastic finite element modeling in linear transient heat transfer. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 144:111-124.

[24] Ghanem, R. & Dham, S. (1998). Stochastic finite element analysis for multiphase flow in heterogeneous porous media. *Transport in Porous Media* Vol. 32: 239-262.

[25] Ghanem, R. (1999). Ingredients for a general purpose stochastic finite elements formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 168: 19-34.

[26] Székely, G.S. & Schuëller, G.I. (2001). Computational procedure for a fast calculation of eigenvectors and eigenvalues of structures with random properties. *Computer Methods in*

Applied Mechanics and Engineering Vol. 191: 799-816.

[27] Le Maître, O. P., Knio, O. M., Najm, H.N. & Ghanem, R. (2001). A stochastic projection method for fluid flow. I. Basic formulation. *Journal of computational Physics* Vol. 173:481-511.

[28] Le Maître, O. P., Knio, O. M., Najm, H.N. & Ghanem, R. (2002). A stochastic projection method for fluid flow. II. Random Process. *Journal of computational Physics* Vol. 181:9-44.

[29] Pradlwarter, H.J., Schuëller, G.I. & Szekely, G.S. (2002). Random eigenvalue problems for large systems. *Computer and Structures* Vol. 80: 2415-2424.

[30] Schuëller, G.I., Pradlwarter, H.J. & Schenk, C.A. (2003). Nonstationary response of large linear fe-models under stochastic loading. *Computers and Structures* Vol. 81(No. 8-11):937-947.

[31] Schenk, C.A. & Schuëller, G.I. (2003). Buckling analysis of substructures for dynamic analyses. *Non-Linear Mechanics* Vol. 38: 1119-1132.

[32] Soize, C. (1999). A Nonparametric model of random uncertainties in linear structural dynamics. *Publications du LMA-CNRS*, ISBN 2-909669-16-5 Vol. 152: 109-138.

[33] Soize, C. (2000). A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics* Vol. 15 (No 3): 277-294.

[34] Soize, C. (2001). Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 109 (No. 5): 1979-1996.

[35] Soize, C. (2005). Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 194(No. 12-16):1333-1366.

[36] Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.* Vol. 27: 379-423 & 623-659.

[37] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review* Vol. 106(No. 4): 620-630 & Vol. 108(No. 2): 171-190.

[38] Soize, C. (2001). Transient responses of dynamical systems with random uncertainties. *Probabilistic Engineering Mechanics* Vol. 16(No. 4): 363-372.

[39] Chebli, H. & Soize, C. (2004). Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of non homogeneous uncertainties for dynamical systems. *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 115(No. 2): 697-705.

[40] Duchereau, J. & Soize,C. (2005). Transient dynamics in structures with nonhomogeneous uncertainties induced by complex joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*. In press.

[41] Soize, C. (2005). A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*. In press.

[42] Chen, C., Duhamel, D. & Soize, C. (2004). Uncertainties in structural dynamics for composite sandwich panels. *Proceedings of ISMA 2004, the International Conference on Noise and Vibration Engineering, CD-ROM, ISBN 90-73-802-82-2, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, September 20-22, 2004*: 2995-3008.

[43] Soize, C. (2003). Uncertain dynamical systems in the medium-frequency range. *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 129(No. 9): 1017-1027.

[44] Soize, C. (2003). Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 263: 893-916.

[45] Soize, C. (2001). Nonlinear dynamical systems with nonparametric model of random uncertainties. *Uncertainties in Engineering Mechanics* (e-journal from Resonance Publication, http://www.resonance-pub.com) Vol. 1 (No. 1): 1-38.

[46] Desceliers, C., Soize, C. & Cambier, S. (2004). Non-parametric-parametric model for random uncertainties in nonlinear structural dynamics - Application to earthquake engineering. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* Vol. 33(No. 3): 315-327.

[47] Capiez-Lernout, E. & Soize, C. (2004). Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* Vol. 126(No. 4): 600-618.

[48] Capiez-Lernout, E., Soize, C., Lombard, J.-P., Dupont, C. & Seinturier, E. (2005). Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* Vol. 127(No. 2).

[49] Capiez-Lernout, E., Pellissetti, M., Pradlwarter, H., Schuëller, G.I. & Soize, C. (2005). Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems, *Journal of Sound and Vibration* (submitted in December 2004).

[50] Durand, J.-F., Gagliardini, L. & Soize, C. (2004). Random uncertainties for vibroacoustic frequency response functions of cars. *Proceedings of ISMA 2004, the International Conference on Noise and Vibration Engineering, CD-ROM, ISBN 90-73-802-82-2, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, September 20-22, 2004*: 3255-3266.

[51] Soize, C. (1998). Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems, *European Journal of Mechanics, A/Solids* Vol. 17(No. 4): 657-685.

[52] Soize, C. (1998). Reduced models in the medium frequency range for general external structural-acoustics systems, *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 103(No. 6): 3393-3406.

[53] Soize, C. (1999). Reduced models for structures in the medium frequency range coupled with internal acoustic cavities. *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 106(No. 6): 3362-3374.

[54] Soize, C. & Mziou, S. (2003). Dynamic substructuring in the medium-frequency range. *AIAA Journal* Vol. 41(No. 6): 1113-1118.

[55] Ghanem, R. & Sarkar, A. (2003). Reduced models for the medium-frequency dynamics of stochastic systems. *Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 113(No. 2): 834-846.

[56] Mehta, M. L. 1991. *Random Matrices. Revised and Enlarged Second Edition*. New York: Academic Press.

[57] Pellissitti, M., Capiez-Lernout, E., Pradlwarter, H., Schuëller, G.I. & Soize, C. (2005). Large finite element systems with random uncertainties. *Proceedings 6th International Conference on Structural Dynamics EURODYN 2005, Paris, France, 4-7 September, 2005*.

[58] Craig, R.R. & Bampton, M.M. (1968). Coupling of substructures for dynamical analysis. *AIAA Journal* Vol. 6: 1313-1319.