



**HAL**  
open science

## Désaccordage induit par les incertitudes aléatoires de géométrie des structures cycliques

Evangéline Capiez-Lernout, Christian Soize

► **To cite this version:**

Evangéline Capiez-Lernout, Christian Soize. Désaccordage induit par les incertitudes aléatoires de géométrie des structures cycliques. 6ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA, May 2003, Giens (Var), France. pp.Pages : 219-226. hal-00773305

**HAL Id: hal-00773305**

**<https://hal.science/hal-00773305>**

Submitted on 12 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Désaccordage induit par les incertitudes aléatoires de géométrie des structures cycliques

E. Capiez-Lernout<sup>a</sup>, C. Soize<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de Mécanique (LaM), Université de Marne-La-Vallée, 5, Bd Descartes, F-77455 Marne-La-Vallée

capiez@univ-mlv.fr

<sup>b</sup> soize@univ-mlv.fr

Actes du 6ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens (Var), 20-23 mai 2003, Tome I, pp. 219-226, ISBN 2-7302-1032-6

## Résumé

Un des enjeux majeurs dans le cadre du désaccordage des aubages de turbomachines consiste à spécifier les tolérances de fabrication pour un niveau d'amplification de réponse forcée sur les aubes donné. Une méthodologie originale utilisant un modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes aléatoires sur les aubes de turbomachines est présentée afin de résoudre ce problème inverse.

## 1 Introduction

La problématique du désaccordage des aubes de turbomachines nécessite la construction de modèles probabilistes robustes afin de prédire le comportement vibratoire des roues aubagées. Récemment, des modèles probabilistes incluant le désaccordage en mode ont montré des résultats différents de ceux obtenus par des modélisations usuelles [3, 1]. L'approche probabiliste non paramétrique [4, 5, 6] est utilisée pour construire un modèle probabiliste non paramétrique adapté à l'analyse du désaccordage. Une telle approche prend en compte tous les types d'incertitudes, en particulier les incertitudes aléatoires de géométrie dues aux tolérances de fabrication. Une méthodologie originale utilisant l'approche non paramétrique est ici proposée afin de spécifier le niveau d'incertitudes aléatoires de géométrie pour un niveau d'amplification de réponse forcée donné.

## 2 Modèle matriciel réduit moyen d'une aube

La théorie viscoélastique sans mémoire linéarisée est utilisée. On s'intéresse aux vibrations linéaires d'une structure à géométrie cyclique d'ordre  $N$  faiblement amortie autour d'une configuration statique non précontrainte prise comme référence. La structure est soumise à des forces extérieures et est étudiée dans une bande basse fréquence  $\mathcal{B}$ . La structure est décomposée en  $N$  sous-structures identiques, chacune modélisant une aube à frontière libre et en 1 disque fixé en une partie de sa frontière. Chaque aube  $j$  est couplée au disque via l'interface  $\Sigma_j$ . Par

souci de clarté dans les notations, l'exposant indiciel  $j$  relatif à l'aube  $j$  est omis quand aucune confusion n'est possible.

Pour tout  $\omega$  dans  $\mathbb{B}$ , le modèle élément fini moyen de l'aube  $j$  à interface de couplage libre s'écrit :

$$(-\omega^2[\underline{M}] + i\omega[\underline{D}] + [\underline{K}])\underline{\mathbf{u}}(\omega) = \underline{\mathbf{f}}(\omega), \quad (1)$$

avec  $\underline{\mathbf{u}}(\omega)$  et  $\underline{\mathbf{f}}(\omega)$  les vecteurs des DDLs physiques et des forces extérieures à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n_a}$  et  $[\underline{M}]$ ,  $[\underline{D}]$  et  $[\underline{K}]$  les matrices réelles ( $n_a \times n_a$ ) moyennes de masse, d'amortissement et de rigidité respectivement définie positive et positives. Introduisant la décomposition par blocs par rapport aux  $n_i$  DDLs internes  $\underline{\mathbf{u}}_i(\omega)$  et aux  $n_\Sigma$  DDLs de l'interface de

couplage  $\underline{\mathbf{u}}_\Sigma(\omega)$ , la décomposition de Craig et Bampton [2] par rapport aux  $N_g$  coordonnées généralisées  $\underline{\mathbf{q}}(\omega)$  liées aux  $N_g$  modes à interface de couplage fixe s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{H}] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma(\omega) \end{bmatrix} \quad (2)$$

où la matrice  $[\underline{H}]$  est la matrice de passage de la base réduite vers la base physique de l'aube. En utilisant (1) et (2), on obtient

$$[\underline{A}_{\text{red}}(\omega)] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{H}]^T \underline{\mathbf{f}}(\omega) \quad (3)$$

où  $[\underline{A}_{\text{red}}(\omega)] = -\omega^2[\underline{M}_{\text{red}}] + i\omega[\underline{D}_{\text{red}}] + [\underline{K}_{\text{red}}]$  définit la matrice réduite moyenne de raideur dynamique de l'aube avec

$$[\underline{M}_{\text{red}}] = [\underline{H}]^T [\underline{M}] [\underline{H}] \quad , \quad [\underline{D}_{\text{red}}] = [\underline{H}]^T [\underline{D}] [\underline{H}] \quad , \quad [\underline{K}_{\text{red}}] = [\underline{H}]^T [\underline{K}] [\underline{H}]. \quad (4)$$

### 3 Modèle non paramétrique d'incertitudes pour le désaccordage

Dans un premier temps, la roue aubagée est décomposée en sous-structures afin de considérer des incertitudes aléatoires statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre. Les principaux résultats concernant l'approche probabiliste non paramétrique [4],[5] et [6] sont utilisés et adaptés à la problématique du désaccordage sur chaque aube. Une telle approche probabiliste s'effectue à partir d'un modèle matriciel réduit moyen. De plus, le modèle matriciel réduit moyen de l'aube doit permettre de construire le modèle matriciel réduit moyen pour la structure complète ce qui justifie l'utilisation de la sous-structuration dynamique de Craig et Bampton qui conserve les DDLs d'interface. La matrice aléatoire de raideur dynamique de l'aube s'écrit  $[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}(\omega)] = -\omega^2[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}] + i\omega[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}] + [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}]$  avec  $[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}]$  les matrices réduites aléatoires de masse, d'amortissement et de rigidité qui définissent des variables aléatoires dans l'espace des matrices symétriques réelles définie positive et positives et telles que :

$$\mathcal{E}\{[\underline{\mathbf{E}}_{\text{red}}]\} = [\underline{E}_{\text{red}}], \quad E = \{M, D, K\}, \quad \mathbf{E} = \{\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}\}. \quad (5)$$

La construction du modèle probabiliste sur les matrices aléatoires nécessite tout d'abord de factoriser les valeurs moyennes des matrices aléatoires telle que  $[\underline{E}_{\text{red}}] = [\underline{L}_E]^T [\underline{L}_E]$ ,  $E = \{M, D, K\}$ . Chaque matrice aléatoire s'écrit donc

$$[\underline{\mathbf{E}}_{\text{red}}] = [\underline{L}_E]^T [\underline{\mathbf{G}}_E] [\underline{L}_E], \quad E = \{M, D, K\}, \quad \mathbf{E} = \{\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}\}. \quad (6)$$

où  $[\mathbf{G}_M]$ ,  $[\mathbf{G}_D]$  et  $[\mathbf{G}_K]$  sont des variables aléatoires indépendantes deux à deux et à valeurs dans l'espace des matrices réelles symétriques définies positives [5] telle que leurs valeurs moyennes (d'après (5)) et le moment d'ordre 2 de leurs inverses sont :

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{G}_E]\} = [\underline{\mathbf{G}}_E] = [I_{N_E}] \quad , \quad \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_E]^{-1}\|_F^2\} < \infty \quad , \quad E = \{M, D, K\}; \quad (7)$$

où  $N_E$  est le rang de la matrice  $[\underline{\mathbf{E}}_{\text{red}}]$ , et où  $\|[\mathbf{G}_E]^{-1}\|_F^2 = \text{Tr}([\mathbf{G}_E]^{-1}[\mathbf{G}_E]^{-T})$  définit le carré de la norme de Frobenius de la matrice  $[\mathbf{G}_E]^{-1}$ . Chaque matrice aléatoire est caractérisée par son niveau de dispersion  $\delta_E$  tel que

$$\delta_E = \left\{ \frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_E] - [\underline{\mathbf{G}}_E]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_E]\|_F^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad , \quad E = \{M, D, K\}. \quad (8)$$

Le tenseur de covariance  $C_{jk,j'k'}^{G_E} = \mathcal{E}\{([\mathbf{G}_E]_{jk} - [\underline{\mathbf{G}}_E]_{jk})([\mathbf{G}_E]_{j'k'} - [\underline{\mathbf{G}}_E]_{j'k'})\}$  s'écrit :

$$C_{jk,j'k'}^{G_E} = \frac{\delta_E^2}{N_E + 1} \{\delta_{j'k}\delta_{jk'} + \delta_{jj'}\delta_{kk'}\}. \quad (9)$$

## 4 Modèle probabiliste paramétrique pour les incertitudes aléatoires de géométrie

Dans le but d'estimer les niveaux de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  du modèle probabiliste non paramétrique, un modèle probabiliste paramétrique d'incertitudes aléatoires de géométrie est introduit *a priori*. Ce modèle paramétrique n'est pas utilisé pour construire la distribution de probabilité liée au modèle non paramétrique. Il est uniquement utilisé pour estimer la valeur de  $\delta_E$ ,  $E \in \{M, K\}$  qui constitue le paramètre d'entrée du modèle non paramétrique. Désormais, on suppose que les incertitudes paramétriques aléatoires à l'origine du désaccordage sont principalement dues à des perturbations géométriques sur les aubes. Lors du processus de fabrication des aubes, chaque aube fabriquée est différente l'une de l'autre et de l'aube nominale. L'aube nominale est utilisée pour spécifier les tolérances. Les tolérances dimensionnelles (corde, longueur de l'aube), géométriques (enveloppe de forme) obéissent au principe d'indépendance précisant que chaque exigence tolérancielle est indépendante l'une de l'autre. Les tolérances d'ordre supérieur (ondulation...) sont négligées. Soit  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $\underline{t}$  le vecteur à valeur dans  $\mathbb{R}$  des paramètres tolérancés. Soit alors  $\mathbf{T} = T_1, \dots, T_s$  la variable aléatoire du second ordre à valeurs dans  $B_s = \prod_{r=1}^s [-\tau_r, \tau_r]$  où  $\tau_r > 0$  définit la fluctuation maximale de la variable aléatoire  $T_r$ . En utilisant le principe d'indépendance et le principe du maximum d'entropie, on déduit que  $\forall r \in \{1, \dots, s\}$ ,  $T_r$  est une variable aléatoire uniforme centrée d'écart type  $\sigma_r = \tau_r/\sqrt{3}$ .

## 5 Méthodologie pour le problème inverse

### 5.1 Identification des incertitudes de géométrie avec les niveaux de dispersion $\delta$ des matrices aléatoires

Un modèle probabiliste paramétrique d'incertitudes, dont les paramètres caractérisent les tolérances de fabrication de l'aube a été construit. Sa construction reste cependant arbitraire car elle ne constitue pas une modélisation exacte du problème. Toutefois, ce modèle

fournit une information globale qui permet de construire une relation entre le paramètre  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_s)$  des fluctuations extrêmes de tolérancement et les niveaux de dispersion  $\delta_M$  et  $\delta_K$  du modèle non paramétrique. Le modèle élément fini moyen de l'aube défini dans la Section 2 correspond au modèle élément fini de l'aube nominale. Puisque le modèle probabiliste non paramétrique est construit à partir du modèle matriciel réduit moyen de l'aube, le critère permettant d'établir la relation entre les deux modèles probabilistes est nécessairement défini dans la même base de coordonnées réduites relatives à l'aube nominale. Comme les caractéristiques de chaque aube doivent être comparées par rapport à leurs caractéristiques nominales, on étudie les fluctuations des matrices aléatoires autour de leur valeur nominales dans la base commune de projection. Dans la suite, on a  $E \in \{M, K\}$ . Dans un premier temps, la matrice aléatoire  $[E(\mathbf{T})]$  est réduite sur la base de projection nominale telle que

$$[E_{\text{red}}(\mathbf{T})] = [\underline{H}]^T [E(\mathbf{T})] [\underline{H}] \quad (10)$$

Soit alors  $W_E^{\text{tol}}$  le paramètre scalaire caractérisant la dispersion de la matrice  $[E_{\text{red}}(\mathbf{T})]$  autour de sa valeur nominale définie par  $[E_{\text{red}}(0)] = [\underline{E}_{\text{red}}]$ . Le paramètre  $W_E^{\text{tol}}$  est défini par

$$W_E^{\text{tol}} = \mathcal{E}\{\| [E_{\text{red}}(\mathbf{T})] - [\underline{E}_{\text{red}}] \|_F^2\} \quad (11)$$

Un raisonnement similaire est effectué pour le modèle probabiliste non paramétrique avec

$$W_E^{\text{np}} = \mathcal{E}\{\| [\mathbf{E}_{\text{red}}] - [\underline{E}_{\text{red}}] \|_F^2\} \quad (12)$$

Les incertitudes de géométrie sont alors décrites à travers le modèle non paramétrique par identification des paramètres scalaires  $W_E^{\text{tol}}$  et  $W_E^{\text{np}}$ . En utilisant (9),(11) et (12), on obtient :

$$\delta_E(\boldsymbol{\tau}) = \sqrt{\frac{W_E^{\text{tol}}(\boldsymbol{\tau})(N_E + 1)}{\text{tr}([\underline{E}_{\text{red}}])^2 + \text{tr}([\underline{E}_{\text{red}}])^2}}, \quad (13)$$

Une première simulation numérique de Monte Carlo est effectuée sur le modèle élément fini de l'aube. Les

réalisations des matrices éléments finis aléatoires de masse et de raideur de l'aube sont construites en utilisant le modèle probabiliste paramétrique *a priori*. Celles-ci sont ensuite projetées sur la base nominale de réduction afin d'estimer la relation entre le paramètre  $\boldsymbol{\tau}$  des fluctuations extrêmes des tolérances et les niveaux de dispersion  $\delta_M$ ,  $\delta_K$  constituant les paramètres d'entrée du modèle probabiliste non paramétrique.

## 5.2 Analyse du désaccordage

Le niveau de dispersion associé à l'incertitude sur la dissipation est introduit ensuite de manière indépendante. Une analyse de sensibilité en fonction de  $\delta_M$ ,  $\delta_D$  et  $\delta_K$  est alors effectuée : dans un premier temps, le modèle matriciel réduit moyen d'une aube est construit et assemblé avec le modèle matriciel élément fini moyen d'un secteur de disque. La symétrie cyclique est utilisée pour calculer le problème aux valeurs propres généralisé moyen relatif au modèle matriciel réduit moyen de la structure. Les vecteurs propres moyens associés aux  $\tilde{n}$  premières valeurs propres moyennes constituent une base de projection moyenne qui

sera utilisée pour réduire le coût des simulations numériques. L'analyse du désaccordage est effectuée par simulation numérique de Monte Carlo. Les réalisations des matrices réduites aléatoires de masse, de raideur et d'amortissement relatives au modèle probabiliste non paramétrique sont construites pour chaque aube et assemblées avec le modèle élément fini moyen du disque. Après réduction du modèle matriciel réduit de la structure sur la base moyenne de projection, une réalisation de l'observable est obtenue. L'observable  $B_\infty$  est le facteur d'amplification dynamique sur  $\mathbb{B}$  relatif à l'énergie élastique

des aubes. L'énergie élastique associée au modèle moyen de l'aube  $j$  s'écrit  $\underline{w}_{\text{elas}}^j(\omega) = 1/2 \underline{\mathbf{u}}^j(\omega)^T [\underline{\mathbf{K}}^j] \underline{\mathbf{u}}^j(\omega)$  et est telle que  $\underline{w}_{\text{elas}}^j(\omega) = \underline{w}_{\text{elas}}^k(\omega) = \underline{w}_{\text{elas}}(\omega)$ ,  $\forall j \neq k$  dans le cas d'une excitation cyclique. Introduisant l'énergie élastique associée au modèle aléatoire de l'aube  $j$  et notée  $\mathbf{W}_{\text{elas}}^j(\omega) = 1/2 \mathbf{U}^j(\omega)^T [\underline{\mathbf{K}}^j] \mathbf{U}^j(\omega)$ , où  $\mathbf{U}^j(\omega)$  est le vecteur aléatoire des DDLs de l'aube  $j$ , le facteur d'amplification dynamique s'écrit :

$$B_\infty = \sqrt{\frac{\sup_{\omega \in \mathbb{B}} \sup_{j \in \{0, \dots, N-1\}} \mathbf{W}_{\text{elas}}^j(\omega)}{\underline{w}_{\text{elas}, \infty}}}, \quad \underline{w}_{\text{elas}, \infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{B}} \underline{w}_{\text{elas}}(\omega). \quad (14)$$

$B_\infty$  définit une variable aléatoire du second ordre à valeurs réelles positives. On s'intéresse à la quantité  $\mathcal{P}(B_\infty > b_\infty)$  où  $b_\infty$  représente un facteur d'amplification critique. En précisant une valeur de  $b_\infty$  et un niveau de probabilité donné  $\mathcal{P}(B_\infty > b_\infty)$ , les niveaux de dispersions  $\delta_K$  et  $\delta_M$  sont déterminés. La fluctuation extrême de tolérancement est alors déduite de (13).

## 6 Exemple numérique

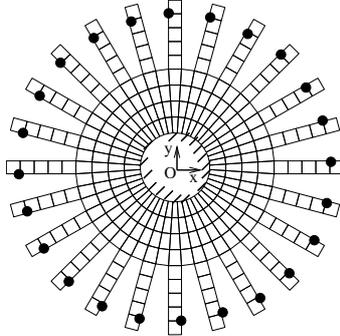


FIG. 1 – Maillage éléments finis de la structure, Force excitatrice (●)

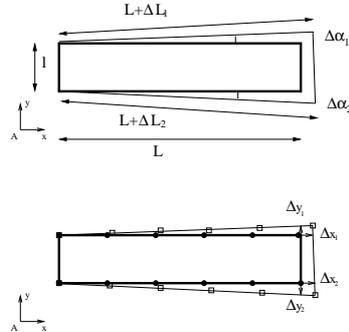


FIG. 2 – Aube nominale (trait épais), aube fabriquée (trait maigre)

La roue aubagée est constituée d'un disque de 24 aubes modélisé par la théorie des plaques minces en flexion. La structure étant plane, les mouvements membranaires et transverses sont entièrement découplés et la flexion seule est étudiée. Le disque est une couronne en matériau homogène et isotrope de rayon interne  $3.5 \times 10^{-2}$ m, de rayon externe 0.1 m, d'épaisseur  $5 \times 10^{-3}$  m, de densité volumique massique  $7860 \text{ kg/m}^3$ , de module d'Young  $1.89 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , de coefficient de Poisson 0.25 et est encastré en sa frontière interne. L'aubage est en

matériau homogène, isotrope et composé de 24 aubes rectangulaires, de longueur  $7 \times 10^{-2}$  m, de largeur  $8.5 \times 10^{-3}$  m, d'épaisseur linéairement décroissante de  $5 \times 10^{-3}$  à  $1 \times 10^{-3}$  m, de masse volumique  $7860 \text{ kg/m}^3$ , de module d'Young  $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  et de coefficient de Poisson 0.25. Un modèle d'amortissement hystérétique avec un facteur de perte  $\eta = 0.003$  est ajouté. Le modèle éléments finis (Figure 1) est constitué de 312 éléments quadrangulaire de plaque mince en flexion et possède 1296 DDLs avec  $n_a = 36$ ,  $n_d = 576$  et  $n_\Sigma = 6$ , désignant respectivement le nombre de DDLs d'une aube, du disque et d'une interface de couplage aube-disque. Les fréquences propres du système accordé en fonction du nombre d'onde circonférentiel montrent une zone de veering ce qui conduit à choisir la bande d'analyse  $\mathbb{B} = [7080, 7160]$  Hz correspondant à un nombre d'onde circonférentielle  $m = 4$ . Chaque aube  $j$  est soumise à un chargement unitaire  $\underline{f}^j(\omega)$  tel que  $\underline{f}^j(\omega)_k = \mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega) \delta_{k,(2d+1)} e^{2i\pi m j/N}$  avec  $d$  le noeud excité,  $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega)$  la fonction indicatrice de  $\mathbb{B}$ ,  $k$  la composante du vecteur  $\underline{f}^j(\omega)$ .

L'aube nominale est modélisée par une plaque plane de repère  $(A, x, y)$ . Dans ce paragraphe, l'indice  $i, i = \{1, 2\}$  est relatif au côté supérieur ou inférieur de l'aube. Cinq variables aléatoires indépendantes uniformes centrées  $\Delta\alpha_i, \Delta L_i, \Delta e, i = \{1, 2\}$  caractérisent les tolérances de ce modèle. La fluctuation d'épaisseur de l'aube est linéaire sur sa longueur et constante sur sa largeur. Elle est modélisée par la variable aléatoire  $\Delta e$  qui décrit la fluctuation d'épaisseur en bout d'aube. Les fluctuations des longueurs des côtés et de la perpendicularité des côtés par rapport à la base déterministe de l'aube sont décrites par les variables aléatoires  $\Delta\alpha_i, \Delta L_i, i = \{1, 2\}$ . Le modèle probabiliste *a priori* sur les coordonnées des noeuds de frontière est contrôlé au premier ordre par cinq variables aléatoires caractérisant les déplacements aléatoires des noeuds aux extrémités de l'aube (Figure 2). Les variables aléatoires  $\Delta x_i = \Delta L_i, \Delta y_i = L \Delta\alpha_i, i = \{1, 2\}$  et  $\Delta e$  sont indépendantes, centrées de loi uniforme et telles que  $\sigma_{\Delta x_i} = \sigma_{\Delta y_i} = \sigma_{\Delta e} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, i = \{1, 2\}$ .

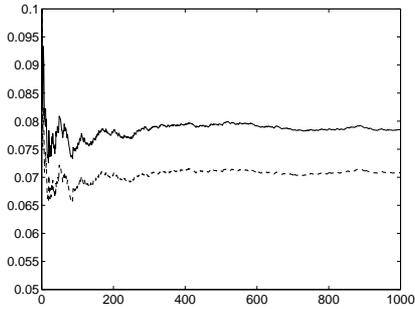


FIG. 3 – Graphes de  $n_t \mapsto \delta_M$  (trait interrompu) et de  $n_t \mapsto \delta_K$  (trait continu) pour  $\tau = 140 \times 10^{-6} \text{ m}$

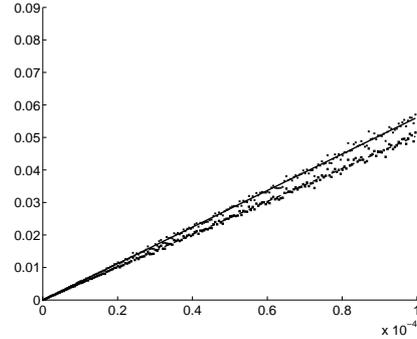


FIG. 4 – Graphes de  $\tau \mapsto \delta_M$  (trait interrompu épais) et de  $\tau \mapsto \delta_K$  (trait continu épais).

Une analyse de sensibilité est mise en oeuvre pour  $\tau \in \mathbb{T} = [0.1, 140] 10^{-6} \text{ m}$  par simulation numérique de Monte-Carlo afin de déterminer les relations  $\delta_M(\tau)$  et  $\delta_K(\tau)$ . Notant  $\theta_1, \dots, \theta_{n_t}, n_t$  réalisations, la quantité  $\| [E_{\text{red}}(T(\theta_j))] - [E_{\text{red}}] \|_F^2$ ,  $E \in \{M, K\}$  est calculée pour chaque  $\theta_j$  et pour  $\tau$  fixé. Le paramètre  $W_E^{\text{tol}}$  est alors estimé par  $W_E^{\text{tol}} \simeq$

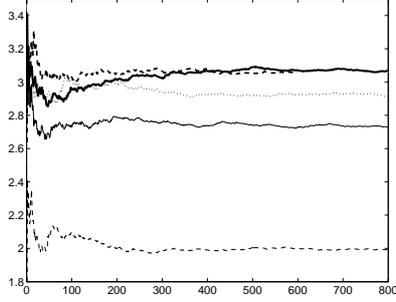


FIG. 5 – Analyse de convergence du modèle non paramétrique : graphe de  $n_s \mapsto \mathcal{E}\{B_\infty^2\}$  pour  $N_g = 3$  (trait interrompu maigre),  $N_g = 8$  (trait maigre),  $N_g = 15$  (trait pointillé épais),  $N_g = 30$  (trait épais). Le trait interrompu épais correspond aux paramètres de réductions optimaux  $N_g = 20$ ,  $\tilde{n} = 120$ .

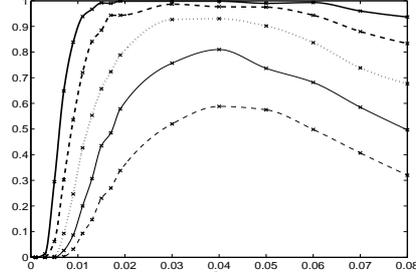


FIG. 6 – Analyse du désaccordage : graphes de  $\delta_K \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b_\infty)$  pour  $\delta_M = 0$ ,  $\delta_D = 0.1$  et pour plusieurs valeurs de  $b_\infty$  :  $b_\infty = 1.3$  (trait épais),  $b_\infty = 1.4$  (trait interrompu épais),  $b_\infty = 1.5$  (trait pointillé épais),  $b_\infty = 1.6$  (trait maigre),  $b_\infty = 1.7$  (trait interrompu maigre).

$\frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \|[E_{\text{red}}(T(\theta_j))] - [E_{\text{red}}]\|_F^2$ . Les quantités  $\delta_M$  et  $\delta_K$  sont déduites alors de (13). La figure 3 montre le graphe  $n_t \mapsto \delta_M$  (trait interrompu épais) et  $n_t \mapsto \delta_K$  (trait épais) pour  $\tau = 140 \times 10^{-6}m$ . Une bonne convergence est obtenue pour  $n_t = 250$ . La figure 4 montre alors les graphes  $\tau \mapsto \delta_M$  et  $\tau \mapsto \delta_K$ . On constate que  $\delta_K$  et  $\delta_M$  sont proportionnels à  $\tau$ . De plus, le niveau de dispersion relatif à la masse est plus faible que celui relatif à la raideur. Les paramètres  $\delta_M$  et  $\delta_K$  ainsi déterminés constituent les paramètres d'entrée du modèle non paramétrique. Le niveau d'incertitude est supposé homogène d'une aube à l'autre de telle sorte que  $\delta_M^j = \delta_M$  et  $\delta_K = \delta_K^j$  pour tout  $j \in \{0, \dots, N-1\}$ . Dans la suite, la roue aubagée est supposée dynamiquement équilibrée. L'équilibrage est effectué sur le disque et est supposé sans impact sur le facteur d'amplification dynamique. Par conséquent, le niveau de dispersion relatif à la masse des aubes est supposé négligeable :  $\delta_M = 0$ . Une incertitude sur l'amortissement est fixée :  $\delta_D = \delta_D^j = 0.1$ . L'étude de convergence est limitée à la convergence en moyenne d'ordre 2 de la séquence  $\{B_\infty(N_g, \tilde{n})\}$  pour  $\delta_K = 0.05$ . Disposant de  $n_s$  échantillons  $\theta_1, \dots, \theta_{n_s}$ , le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire est estimé par  $\mathcal{E}\{B_\infty(N_g, \tilde{n})^2\} \simeq \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} B_\infty(N_g, \tilde{n})^2$ . La figure 3 montre qu'une bonne convergence est obtenue pour  $n_s = 600$ ,  $N_g = 20$  et  $\tilde{n} = 120$ . L'analyse du désaccordage est mise en oeuvre en estimant l'observable  $\mathcal{P}(B_\infty > b_\infty)$ . La figure 4 montre le graphe  $\delta_K \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b_\infty)$  pour plusieurs valeurs de  $b_\infty$ . On s'intéresse plus particulièrement à l'observable  $\mathcal{P}(B_\infty > b_\infty) \leq p$  où  $p$  est un niveau de probabilité donné. Le jeu de paramètres  $(b_\infty, p)$  constitue un critère de qualité pour la roue aubagée. En effet, pour un niveau  $p$  de probabilité et pour un facteur d'amplification dynamique  $b_\infty$  donné, le domaine des valeurs acceptables du niveau de dispersion  $\delta_K$  est déterminé à partir de la figure 6. Les fluctuations extrêmes  $\tau$  des paramètres tolérancés sont lus directement à partir de la figure 4.

Par exemple, si la qualité de la roue aubagée est définie par le jeu de paramètres  $(b_\infty, p) =$

(1.6, 0.6), il est déduit de la figure 6 que la région de confiance définie par  $\mathcal{P}(B_\infty > 1.6) \leq 0.6$  correspond à la plage de valeurs  $\delta_K \leq 0.0199$  or  $\delta_K \geq 0.0684$  soit  $\tau \leq 35.6 \mu m$  ou  $\tau \geq 121.5 \mu m$ . Le maximum global de la fonction  $\delta_K \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > b_\infty)$  montre qu'il existe une plage de valeurs interdites définie par  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ . Il existe donc deux façons de spécifier les tolérances. L'une fait référence à la notion de précision de fabrication, l'autre au désaccordage intentionnel. Par conséquent, une aube désaccordée intentionnellement en spécifiant une fluctuation extrême  $\tau$  telle que  $\tau > \tau_{\max}$  ou ayant des spécifications précises telle que  $\tau < \tau_{\min}$ , présente des facteurs d'amplification dynamique dont les caractéristiques sont similaires.

## 7 Conclusion

Une méthodologie de problème inverse utilisant une approche probabiliste non paramétrique a été proposée pour des structures à symétrie cyclique, plus particulièrement dans le cadre du désaccordage des roues aubagées de turbomachines. Une telle méthode permet de spécifier les incertitudes aléatoires de géométrie par rapport à une région de confiance du facteur d'amplification dynamique sur les aubes donné. L'efficacité de cette méthode a été illustrée par un exemple numérique.

## Références

- [1] CAPIEZ-LERNOUT, E., SOIZE, C. Une approche probabiliste non paramétrique du phénomène de désaccordage des structures à géométrie cyclique. In *Séminaire Descartes du Polytechnicum de Marne-La-Vallée, Actes des journées jeunes chercheurs*, pp. 65–74 (juin 2002).
- [2] CRAIG, R.R.JR., BAMPTON, M.C.C. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *AIAA Journal*, **6**(7), 1313–1319 (1968).
- [3] MIGNOLET, M.P., RIVAS-GUERRA, A.J., DELOR, J.P. Identification of Mistuning Characteristics of Bladed Disks From Free Response Data (Part 1 , 2). *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **123**(2), 395–411 (2001).
- [4] SOIZE, C. A Nonparametric Model of Random Uncertainties for Reduced Matrix Models in Structural Dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **15**(3), 277–294 (2000).
- [5] SOIZE, C. Maximum Entropy Approach for Modeling Random Uncertainties in Transient Elastodynamics. *Journal of the Acoustical Society of America*, **109**(5), 1979–1996 (2001).
- [6] SOIZE, C., CHEBLI, H. Random Uncertainties Model in Dynamic Substructuring Using a Non-Parametric Probabilistic Model. *ASCE Journal of Engineering Mechanics (accepted pour publication)* (2002).