



**HAL**  
open science

## Anneaux de définition des dg-algèbres propres et lisses.

Bertrand Toen

► **To cite this version:**

Bertrand Toen. Anneaux de définition des dg-algèbres propres et lisses.. Bulletin of the London Mathematical Society, 2007, 40 (4), pp.642-650. 10.1112/blms/bdn043 . hal-00772942

**HAL Id: hal-00772942**

**<https://hal.science/hal-00772942>**

Submitted on 11 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Anneaux de définition des dg-algèbres propres et lisses

Bertrand Toën

Laboratoire Emile Picard UMR CNRS 5580  
Université Paul Sabatier Toulouse 3, Bat 1R2  
31 062 TOULOUSE cedex 9, France

Mai 2007

## Résumé

Soit  $k = \operatorname{colim}_i k_i$  une colimite filtrante d'anneaux commutatifs. On montre que la théorie homotopique des dg-algèbres propres et lisses sur  $k$  est la colimite des théories homotopiques des dg-algèbres propres et lisses sur les  $k_i$ . Nous en déduisons en particulier une réponse positive à la conjecture [Ka, Conj 5.3], à savoir que toute dg-algèbre propre et lisse est définissable sur une  $\mathbb{Z}$ -algèbre commutative de type fini.

Ce texte accompagne le travail [To1], et a pour objectif de démontrer une autre propriété de finitude spécifique aux dg-algèbres propres et lisses. Cette propriété de finitude affirme qu'une telle dg-algèbre sur une colimite filtrante d'anneaux commutatifs  $A = \operatorname{colim} A_i$  est toujours définissable sur un des  $A_i$ . En particulier, une dg-algèbre propre et lisse sur un anneau  $k$  est toujours définissable sur une  $\mathbb{Z}$ -algèbre commutative de type fini. Ceci répond positivement à la conjecture [Ka, 5.3], et permet d'appliquer des techniques de passage à la caractéristique positive pour l'étude des dg-algèbres propres et lisses (dont une application est l'étude de la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, voir [Ka]).

Les résultats de ce travail sont dans la même lignée que ceux de [To1], bien qu'ils ne semblent ni découler de ceux-ci ni les impliquer directement. Tout comme nous l'avons mentionné dans [To1], ces résultats s'éclairent à la lumière de la théorie des champs (supérieurs et même dérivés, voir [To2]). Le théorème 1 démontré dans ce travail affirme en effet que le champ des dg-algèbres propres et lisses est localement de présentation finie. Ceci est un premier pas vers une preuve du fait que ce champ est un  *$D^-$ -champ localement géométrique localement de présentation finie* (dans la terminologie de [To-Va]). J'espère pouvoir revenir sur le caractère géométrique du champ des dg-algèbres propres et lisses dans un travail ultérieur, afin de mieux comprendre, et sans doute d'améliorer, les résultats de [To1].

**Remerciements:** Je tiens à remercier D. Kaledin pour de nombreuses conversations sur le sujet, et en particulier pour avoir remarqué que le sous-lemme 4 découlait formellement des

arguments de la preuve du théorème principal. Je remercie aussi le rapporteur pour ses commentaires.

Nous renvoyons à [To1, To-Va, Ke, Ko-So] pour les notions de dg-algèbres propres, lisses et homotopiquement de présentation finie. Pour un anneau commutatif  $k$  nous noterons  $Ho(k - dg - alg^{pl})$  la sous-catégorie pleine de la catégorie homotopique des  $k$ -dg-algèbres formée des dg-algèbres propres et lisses sur  $k$ . Pour tout morphisme d'anneaux commutatifs  $k \longrightarrow k'$ , on dispose d'un foncteur de changement de bases

$$- \otimes_k^{\mathbb{L}} k' : Ho(k - dg - alg) \longrightarrow Ho(k' - dg - alg).$$

Ce foncteur préserve les caractères propres, lisses, et homotopiquement de présentation finie des dg-algèbres. Avec ces notations, le théorème principal de ce travail est le suivant.

**Théorème 1** *Soit  $I$  une catégorie filtrante et  $\{k_i\}_{i \in I}$  un  $I$ -diagramme d'anneaux commutatifs de colimite  $k := \text{colim}_{i \in I} k_i$ . Le foncteur naturel*

$$\text{Colim}_{i \in I} - \otimes_k^{\mathbb{L}} k : \text{Colim}_{i \in I} Ho(k_i - dg - alg^{pl}) \longrightarrow Ho(k - dg - alg^{pl})$$

*est une équivalence de catégories.*

La preuve que nous donnons de ce théorème repose sur les faits connus suivants, tous démontrés dans [To-Va] à l'exception de F7 dont nous donnerons une preuve (voir le sous-lemme 3).

- F1 Une dg-algèbre propre et lisse est homotopiquement de présentation finie (voir [To-Va, Cor. 2.13]).
- F2 Une dg-algèbre homotopiquement de présentation finie est lisse (voir [To-Va, Prop. 2.14]).
- F3 Une dg-algèbre est homotopiquement de présentation finie si et seulement si elle est quasi-isomorphe à un rétracte d'un complexe  $I$ -cellulaire fini (voir [To-Va, Prop. 2.2]).
- F4 Soit  $I$  une catégorie filtrante et  $\{k_i\}_{i \in I}$  un  $I$ -diagramme d'anneaux commutatifs de colimite  $k := \text{colim}_{i \in I} k_i$ . Soit  $A_i$  une  $k_i$ -dg-algèbre (pour un  $i \in I$ ) et notons

$$A := A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \simeq \text{Colim}_{j \in i/I} A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j.$$

Alors le foncteur naturel

$$\text{Colim}_{j \in i/I} - \otimes_{k_j}^{\mathbb{L}} k : \text{Colim}_{j \in i/I} D_{\text{parf}}(A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j) \longrightarrow D_{\text{parf}}(A)$$

est une équivalence de catégories (voir [To-Va, Lem. 2.10]).

- F5 Soit  $I$  une catégorie filtrante et  $\{k_i\}_{i \in I}$  un  $I$ -diagramme d'anneaux commutatifs de colimite  $k := \text{colim}_{i \in I} k_i$ . Soit  $A_i$  une  $k_i$ -dg-algèbre (pour un  $i \in I$ ) homotopiquement de présentation finie et notons

$$A := A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \simeq \text{Colim}_{j \in i/I} A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j.$$

Nous noterons  $D_{pspa}(A)$  (resp.  $D(A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j)$ ) la sous-catégorie pleine de  $D(A)$  (resp. de  $D_{pspa}(A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j)$ ) formée des  $A$ -dg-modules (resp. des  $A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j$ -dg-modules) dont le complexe sous-jacent de  $k$ -modules (resp. de  $k_j$ -modules) est parfait. Alors le foncteur naturel

$$Colim_{j \in i/I} - \otimes_{k_j}^{\mathbb{L}} k : Colim_{j \in i/I} D_{pspa}(A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j) \longrightarrow D_{pspa}(A)$$

est une équivalence de catégories. Ceci est une conséquence du caractère localement de présentation finie du champ  $\mathcal{M}_T$  de [To-Va, Thm. 3.6] (pour  $T = A_i$ ). Par soucis de clarté nous redonnerons une preuve de ce fait (voir le sous-lemme 7).

F6 Soit  $A$  une  $k$ -dg-algèbre lisse. Alors un  $A$ -dg-module  $E$  qui est parfait comme complexe de  $k$ -modules et aussi parfait comme  $A$ -dg-module (voir [To-Va, Lem. 2.8 (2)]). En d'autres termes on a  $D_{pspa}(A) \subset D_{parf}(A)$ .

F7 La catégorie homotopique  $Ho(k - dg - alg)$  est Karoubienne. En d'autres termes, pour tout objet  $A \in Ho(k - dg - alg)$  et tout endomorphisme idempotent  $p$  de  $A$ , il existe un objet  $B$  et deux morphismes  $i : B \longrightarrow A$ ,  $r : A \longrightarrow B$  tels que  $ri = id$  et  $ir = p$ . Ce fait n'est pas une formalité car il est bien connu qu'il existe des catégories de modèles  $M$  telle que  $Ho(M)$  ne soit pas Karoubienne (l'exemple le plus fameux est celui de la catégorie homotopique des espaces, voir par exemple [Fr-He]).

Passons maintenant à la preuve du théorème 1. Nous commencerons par démontrer l'analogue du théorème 1 pour les dg-algèbres homotopiquement de présentation finie. Pour cela, nous noterons  $Ho(k - dg - alg^{hpf})$  la sous-catégorie pleine de  $Ho(k - dg - alg)$  formée des  $k$ -dg-algèbres homotopiquement de présentation finie (pour un anneau  $k$ ).

**Lemme 2** *Soit  $I$  une catégorie filtrante et  $\{k_i\}_{i \in I}$  un  $I$ -diagramme d'anneaux commutatifs de colimite  $k := colim_{i \in I} k_i$ . Le foncteur naturel*

$$Colim_{i \in I} - \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k : Colim_{i \in I} Ho(k_i - dg - alg^{hpf}) \longrightarrow Ho(k - dg - alg^{hpf})$$

*est une équivalence de catégories.*

*Preuve du lemme 2:* Soient  $A_i$  et  $B_i$  deux objets de  $Ho(k_i - dg - alg^{hpf})$  pour un objet  $i \in I$ . Notons

$$A := A \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \quad B := B \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k.$$

Vue comme  $k_i$ -dg-algèbre (à travers le foncteur d'oubli), la dg-algèbre  $B$  s'écrit comme une colimite filtrante

$$B \simeq Colim_{j \in i/I} B \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j.$$

Ainsi, comme  $A$  est homotopiquement de présentation finie on trouve

$$\begin{aligned} [A, B]_{Ho(k-dg-alg)} &\simeq [A_i, Colim_{j \in i/I} B \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j]_{Ho(k_i-dg-alg)} \\ &\simeq Colim_{j \in i/I} [A_i, B \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j]_{Ho(k_i-dg-alg)} \simeq Colim_{j \in i/I} [A \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j, B \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j]_{Ho(k_j-dg-alg)}. \end{aligned}$$

Ceci montre que le foncteur en question est pleinement fidèle.

Pour l'essentielle surjectivité nous allons utiliser F3 et F7. Soit  $A \in Ho(k - dg - alg^{hpf})$ . D'après F3 nous savons qu'il existe une  $k$ -dg-algèbre  $B$  qui est quasi-isomorphe à un complexe  $I$ -cellulaire fini, et deux morphismes

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{r} A,$$

tels que  $r \circ i = id$  (dans  $Ho(k - dg - alg^{hpf})$ ). Notons  $p = i \circ r$ , qui est un endomorphisme de  $B$  tel que  $p^2 = p$  (toujours dans  $Ho(k - dg - alg^{hpf})$ ).

Comme  $B$  est un complexe  $I$ -cellulaire fini, il est facile de voir que  $B$  est définie, à quasi-isomorphisme près, sur  $k_i$  pour  $i \in I$ . Soit donc  $B_i$ , une  $k_i$ -dg-algèbre, qui est aussi quasi-isomorphe à un complexe  $I$ -cellulaire fini, telle que  $B_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \simeq B$  dans  $Ho(k - dg - alg)$ . On peut donc écrire

$$B \simeq \text{Colim}_{j \in i/I} B_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j.$$

Comme  $B$  est un complexe  $I$ -cellulaire fini c'est un objet homotopiquement de présentation finie. On a donc,

$$[B, B]_{Ho(k-dg-alg)} \simeq \text{Colim}_{j \in i/I} [B_i \otimes_{k_i} k_j, B_i \otimes_{k_i} k_j]_{Ho(k_j-dg-alg)}.$$

Ainsi, quitte à remplacer l'objet  $i$  par un objet  $j \in i/I$ , on peut supposer qu'il existe  $p_i$  un endomorphisme de  $B_i$  dans  $Ho(k_i - dg - alg)$ , tel que

$$p_i^2 = p_i \quad p_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k = p.$$

Nous invoquons ici le fait F7, qui découle du sous-lemme plus général suivant (en prenant  $M = k - dg - alg$ , et  $\Pi := H^*$  le foncteur de cohomologie totale).

**Sous-lemme 3** *Soit  $M$  une catégorie de modèles munie d'un foncteur  $\Pi : M \longrightarrow Ens$  vérifiant les propriétés suivantes.*

1. *Un morphisme  $f : A \longrightarrow B$  est une équivalence si et seulement si le morphisme induit  $\Pi(f) : \Pi(A) \longrightarrow \Pi(B)$  est un isomorphisme.*
2. *Le foncteur  $\Pi$  commute aux colimites filtrantes.*

*Alors la catégorie  $Ho(M)$  est Karoubienne.*

Avant de donner la preuve du sous-lemme précédent montrons comment il permet de conclure la preuve du lemme 2. On choisit un objet  $A_i$  dans  $Ho(k_i - dg - alg)$  ainsi que deux morphismes  $i_i : A_i \longrightarrow B_i$  et  $r_i : B_i \longrightarrow A_i$  avec  $i_i r_i = p_i$  et  $r_i i_i = id$ . Alors  $A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k$  et  $A$  sont isomorphes dans  $Ho(k - dg - alg)$ . En effet, cela se déduit de l'unicité de la décomposition d'un endomorphisme idempotent. Plus précisément, on considère les deux morphismes

$$A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \xrightarrow{i_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k} B_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \simeq B \xrightarrow{r} A$$

$$A \xrightarrow{i} B \simeq B_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \xrightarrow{r_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k} A_i.$$

Il est facile de vérifier que ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre.

*Preuve du sous-lemme 3:* Soit  $B$  un objet de  $M$  et  $p$  un endomorphisme idempotent de  $B$  dans  $Ho(M)$ . On peut supposer que  $B$  est un objet cofibrant et fibrant et donc représenter  $p$  par un morphisme  $e : B \rightarrow B$  dans  $M$ . Nous définissons alors un objet

$$A := \text{Colim}( B \xrightarrow{e} B \xrightarrow{e} \cdots )$$

qui est la composition transfinie dénombrable du morphisme  $e$ .

Nous allons maintenant construire deux morphismes naturels

$$i : A \rightarrow B \quad r : B \rightarrow A,$$

et vérifier que  $ir = p$  et  $ri = id$ . Pour cela, notons  $\mathbb{N}$  la catégorie associée à l'ensemble ordonné des entiers naturels. Nous disposons de la catégorie des  $\mathbb{N}$ -diagrammes  $M^{\mathbb{N}}$ . Cette catégorie est elle même une catégorie de modèle pour la structure de Reedy (voir par exemple [Ho]), pour laquelle les fibrations et équivalences sont définies termes à termes. Nous disposons d'un foncteur naturel

$$Ho(M^{\mathbb{N}}) \rightarrow Ho(M)^{\mathbb{N}}$$

de la catégorie homotopique des  $\mathbb{N}$ -diagrammes dans  $M$  vers celle des  $\mathbb{N}$ -diagrammes dans  $Ho(M)$ .

**Sous-sous-lemme 4** *Le foncteur ci-dessus*

$$Ho(M^{\mathbb{N}}) \rightarrow Ho(M)^{\mathbb{N}}$$

*est plein.*

*Preuve du sous-sous-lemme 4:* Soient

$$X := ( X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \quad X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \longrightarrow \cdots )$$

$$Y := ( Y_0 \xrightarrow{g_0} Y_1 \xrightarrow{g_1} \cdots \quad Y_n \xrightarrow{g_n} Y_{n+1} \longrightarrow \cdots )$$

deux  $\mathbb{N}$ -diagrammes dans  $Ho(M^{\mathbb{N}})$ . On supposera  $X$  cofibrant et  $Y$  fibrant. Cela signifie que chaque  $Y_n$  est fibrant dans  $M$ , et que chaque morphisme  $f_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$  est une cofibration entre objets cofibrants.

Soit  $u : X \rightarrow Y$  un morphisme dans  $Ho(M)^{\mathbb{N}}$ . Le morphisme  $u$  est donné par des morphismes  $u_n \in [X_n, Y_n]$  dans  $Ho(M)$ , tels que pour tout  $n$  on ait  $g_n u_n = u_{n+1} f_n$  dans  $Ho(M)$ . Comme  $X_n$  est cofibrant et  $Y_n$  est fibrant, on peut choisir un représentant  $u'_n : X_n \rightarrow Y_n$  dans  $M$ . L'égalité précédente implique alors que les deux morphismes  $g_n u'_n$  et  $u'_{n+1} f_n$  sont homotopes. Par récurrence sur  $n$ , nous allons construire des morphismes  $v_n : X_n \rightarrow Y_n$ , qui sont homotopes aux  $u'_n$ , et tels que  $g_n v_n = v_{n+1} f_n$  dans  $M$ . Supposons que de tels morphismes  $v_i$  soient construits

pour  $i \leq n$ . On choisit une homotopie

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y_{n+1} \\
 & \nearrow^{g_n v_n} & \uparrow p_0 \\
 X_n & \xrightarrow{h} & Cyl(Y_{n+1}) \\
 & \searrow_{u'_{n+1} f_n} & \downarrow p_1 \\
 & & Y_{n+1}
 \end{array}$$

où  $Cyl(Y_n)$  est un objet cylindre pour  $Y_{n+1}$  (voir [Ho]). On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 X_n & \xrightarrow{h} & Cyl(Y_{n+1}) \\
 f_n \downarrow & & \downarrow p_1 \\
 X_{n+1} & \xrightarrow{u'_{n+1}} & Y_{n+1}.
 \end{array}$$

Le morphisme  $p_1$  étant une fibration triviale on peut choisir un relèvement  $k : X_{n+1} \rightarrow Cyl(Y_{n+1})$  de  $h$  (qui fasse commuter les deux triangles possibles). On pose

$$v_{n+1} := p_0 k : X_{n+1} \rightarrow Y_{n+1}.$$

Par construction,  $v_{n+1}$  est homotope à  $u'_{n+1}$  (car  $k$  est une homotopie), et  $v_{n+1} f_n = g_n v_n$ . Les morphismes  $v_n$  définissent alors un morphisme  $X \rightarrow Y$  dans  $M^{\mathbb{N}}$ , dont l'image dans  $Ho(M)^{\mathbb{N}}$  est le morphisme  $u$  que l'on s'est donné.  $\square$

Revenons maintenant à la preuve du sous-lemme 3. On considère deux objets

$$X := ( B \xrightarrow{e} B \xrightarrow{e} \dots B \xrightarrow{e} B \longrightarrow \dots )$$

$$Y := ( B \xrightarrow{id} B \xrightarrow{id} \dots B \xrightarrow{id} B \longrightarrow \dots )$$

dans  $Ho(M)^{\mathbb{N}}$ . On dispose d'un morphisme  $X \rightarrow Y$  dans  $Ho(M)^{\mathbb{N}}$  défini par  $u_n := e$  pour tout  $n$

$$\begin{array}{ccccccc}
 B & \xrightarrow{e} & B & \xrightarrow{e} & \dots & B & \xrightarrow{e} & B & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow e & & \downarrow e & & & \downarrow e & & \downarrow e & & \\
 B & \xrightarrow{id} & B & \xrightarrow{id} & \dots & B & \xrightarrow{id} & B & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Par le sous-sous-lemme 4 ce morphisme se relève en un morphisme  $i' : X \rightarrow Y$  dans  $Ho(M)^{\mathbb{N}}$ . De même, on dispose d'un morphisme  $Y \rightarrow X$  dans  $Ho(M)^{\mathbb{N}}$  en posant  $u_n := e$  pour tout  $n$ . Ce morphisme se relève en un morphisme  $r' : Y \rightarrow X$  dans  $Ho(M)^{\mathbb{N}}$ . Finalement, en appliquant le foncteur (notons que les propriétés (1) et (2) du sous-lemme 3 impliquent que les colimites filtrantes préservent les équivalences dans  $M$ )

$$Colim_{\mathbb{N}} : Ho(M)^{\mathbb{N}} \rightarrow Ho(M)$$

on trouve nos deux morphismes  $i$  et  $r$  dans  $Ho(M)$

$$i := colim(i') : A \simeq colim(X) \longrightarrow B \simeq colim(Y)$$

$$r := colim(r') : B \simeq colim(Y) \longrightarrow A \simeq colim(X).$$

Considérons maintenant  $u : r \circ i : A \longrightarrow A$  dans  $Ho(M)$ . Cet endomorphisme induit un morphisme

$$\Pi(u) : \Pi(A) \longrightarrow \Pi(A).$$

Comme  $\Pi$  commute aux colimites filtrantes  $\Pi(u)$  est égal au morphisme composé

$$\begin{aligned} Colim(\Pi(B) \xrightarrow{\Pi(e)} \Pi(B) \xrightarrow{\Pi(e)} \cdots) &\longrightarrow Colim(\Pi(B) \xrightarrow{id} \Pi(B) \xrightarrow{id} \cdots) \\ &\longrightarrow Colim(\Pi(B) \xrightarrow{\Pi(e)} \Pi(B) \xrightarrow{\Pi(e)} \cdots) \end{aligned}$$

tous deux induits par  $\Pi(e)$  composantes par composantes. Enfin, comme  $\Pi(e)$  est un endomorphisme idempotent de  $\Pi(B)$  il n'est pas difficile de voir que  $\Pi(u) = id$ . Ceci implique en particulier que  $u$  est un automorphisme de  $A$  dans  $Ho(M)$ .

Pour conclure, on remarque que par construction nous avons  $i \circ r = p$  (dans  $Ho(M)$ ), comme on peut le voir en considérant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sim} & Colim(Y) \\ e \downarrow & & \downarrow r \\ B & \longrightarrow & Colim(X) \\ e \downarrow & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{\sim} & Colim(Y). \end{array}$$

Ainsi, on a

$$u^3 = r \circ p^2 \circ i = r \circ p \circ i = u^2.$$

Comme nous avons vu que  $u = r \circ i$  est un automorphisme cela implique que  $r \circ i = id$ . □

Ceci termine la preuve du lemme 2. □

Un corollaire immédiat du lemme 2 est le résultat suivant.

**Corollaire 5** Soit  $I$  une catégorie filtrante et  $\{k_i\}_{i \in I}$  un  $I$ -diagramme d'anneaux commutatifs de colimite  $k := colim_{i \in I} k_i$ . Le foncteur naturel

$$Colim_{i \in I} - \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k : Colim_{i \in I} Ho(k_i - dg - alg^{pl}) \longrightarrow Ho(k - dg - alg^{pl})$$

est pleinement fidèle

*Preuve:* Cela se déduit formellement de F1 et du lemme 2. □



**Lemme 6** Soit  $I$  une catégorie filtrante et  $\{k_i\}_{i \in I}$  un  $I$ -diagramme d'anneaux commutatifs de colimite  $k := \operatorname{colim}_{i \in I} k_i$ . Soit  $A_i$  une  $k_i$ -dg-algèbre homotopiquement de présentation finie pour un  $i \in I$ . Si  $A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k$  est une  $k$ -dg-algèbre propre, alors il existe  $j \in i/I$  tel que  $A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j$  soit une  $k_j$ -dg-algèbre propre.

*Preuve:* Soit  $A := A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k$ . On considère la  $A$ -dg-module parfait  $A \in D_{\text{parf}}(A)$ . Nous souhaitons alors utiliser le fait F5 afin de montrer que ce dg-module est défini sur  $A_j$  pour un  $j \in i/I$ . Avant cela nous redémontrons ce fait dans le sous-lemme suivant.

**Sous-lemme 7** Soit  $I$  une catégorie filtrante et  $\{k_i\}_{i \in I}$  un  $I$ -diagramme d'anneaux commutatifs de colimite  $k := \operatorname{colim}_{i \in I} k_i$ . Soit  $A_i$  une  $k_i$ -dg-algèbre (pour un  $i \in I$ ) homotopiquement de présentation finie et notons

$$A := A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \simeq \operatorname{Colim}_{j \in i/I} A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j.$$

Alors le foncteur naturel

$$\operatorname{Colim}_{j \in i/I} - \otimes_{k_j}^{\mathbb{L}} k : \operatorname{Colim}_{j \in i/I} D_{\text{pspa}}(A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j) \longrightarrow D_{\text{pspa}}(A)$$

est une équivalence de catégories.

*Preuve du sous-lemme:* La pleine fidélité du foncteur en question se déduit aisément des faits F2, F4 et F6. Il nous faut montrer l'essentielle surjectivité. Pour cela, soit  $E \in D_{\text{pspa}}(A)$ . Nous pouvons bien entendu supposer que  $A$  est une dg-algèbre cofibrante, et que  $E$  est un  $A$ -dg-module cofibrant. Ceci implique en particulier que le complexe sous-jacent à  $E$ , que nous noterons  $M$ , est un objet cofibrant dans la catégorie de modèles des complexes de  $k$ -modules. Le  $A$ -dg-module  $E$  est alors déterminé (voir par exemple [To-Va, Lem. 3.14]) par la classe d'isomorphisme de l'objet  $M \in D_{\text{parf}}(k)$ , et par le morphisme  $A \longrightarrow \underline{\operatorname{End}}(M)$  dans  $\operatorname{Ho}(k - dg - alg)$ , où  $\underline{\operatorname{End}}(M)$  est la  $k$ -dg-algèbre des endomorphismes du complexe  $M$ . Comme  $M$  est un complexe parfait, la propriété F4 (appliquée à  $A = k$ ) implique qu'il existe  $j \in i/I$  et  $M_j \in D_{\text{parf}}(k_j)$  tel que  $M_j \otimes_{k_j}^{\mathbb{L}} k \simeq M$ . Nous pouvons supposer que  $i = j$ . Dans ce cas, on a un isomorphisme dans  $\operatorname{Ho}(k_i - dg - alg)$

$$\underline{\operatorname{End}}(M) \simeq \operatorname{Colim}_{j \in i/I} \underline{\operatorname{End}}(M_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j)$$

(en supposant que  $M_i$  a été choisi cofibrant). Comme  $A_i$  est homotopiquement de présentation finie, cela implique que le morphisme

$$A_i \longrightarrow \underline{\operatorname{End}}(M)$$

se factorise dans  $\operatorname{Ho}(k_i - dg - alg)$  par un morphisme

$$A_i \longrightarrow \underline{\operatorname{End}}(M_j).$$

Ce morphisme induit un morphisme dans  $\operatorname{Ho}(k_j - dg - alg)$

$$A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j \longrightarrow \underline{\operatorname{End}}(M_j).$$

Ce dernier morphisme détermine un  $A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j$ -dg-module  $E_j \in D(A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j)$  qui par construction est tel que  $E_j \otimes_{k_j}^{\mathbb{L}} k \simeq E$ . Comme  $E_j$  est parfait comme complexe de  $k_j$ -module, ceci montre l'essentielle surjectivité du foncteur en question.  $\square$

Nous revenons maintenant à la preuve du lemme 6. Par hypothèse de propreté sur  $A$ , le  $A$ -dg-module  $A$  est parfait comme complexe de  $k$ -modules, et d'après le sous-lemme 7, quitte à remplacer  $i$  par un  $j \in i/I$ , on peut supposer qu'il existe  $E_i \in D_{pspa}(A_i)$  tel que  $E_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \simeq A$  dans  $D(A)$ . Or  $A_i$  est homotopiquement de présentation finie et donc lisse d'après F2. En particulier, F6 implique que  $E_i$  est un  $A_i$ -dg-module parfait. Ainsi,  $E_i$  et  $A_i$  sont deux  $A_i$ -dg-modules parfaits qui deviennent quasi-isomorphes après extension des scalaires à  $k$ . La propriété F4 implique donc qu'il existe  $j \in i/I$  tel que  $E_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j \simeq A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j$  dans  $D(A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j)$ . Cela a comme conséquence que  $A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j$  est un complexe parfait de  $k_j$ -modules, et donc est une  $k_j$ -dg-algèbre propre.  $\square$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 1. D'après 5 le foncteur en question est pleinement fidèle. Soit alors  $A$  une  $k$ -dg-algèbre propre et lisse. D'après 6, il existe  $i \in I$  et une  $k_i$ -dg-algèbre homotopiquement de présentation finie  $A_i$  avec  $A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k \simeq A$ . Le lemme 6 nous dit alors qu'il existe  $j \in i/I$  tel que  $A_j := A_i \otimes_{k_i}^{\mathbb{L}} k_j$  soit une  $k_j$ -dg-algèbre propre et lisse avec  $A_j \otimes_{k_j}^{\mathbb{L}} k$  quasi-isomorphe à  $A$ . Ceci montre que le foncteur en question dans le théorème 1 est essentiellement surjectif, et démontre donc ce théorème en vu du corollaire 8.

Une conséquence immédiate du théorème 1 est la corollaire suivant, qui est une réponse positive à la conjecture [Ka, 5.3].

**Corollaire 8** *Soit  $k$  un anneau commutatif et  $A$  une  $k$ -dg-algèbre propre et lisse. Alors il existe un anneau commutatif  $k_0$ , de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , un morphisme  $k_0 \rightarrow k$ , et une  $k_0$ -dg-algèbre propre et lisse  $A_0$  telle que*

$$A_0 \otimes_{k_0}^{\mathbb{L}} k \simeq A.$$

*Preuve:* On écrit  $k$  comme une colimite filtrante de sous-anneaux de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , et on applique le théorème 1.  $\square$

## Références

- [Fr-He] P. Freyd, A. Heller, *Splitting homotopy idempotents II*, J. Pure and Appl. Algebra **89** (1993), No. 1-2, 93-106.
- [Ho] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.
- [Ka] D. Kaledin, *Non-commutative Hodge-to-de Rham degeneration via the method of Deligne-Illusie*, pré-publication math.KT/0611623.
- [Ke] B. Keller, *On differential graded categories*, pré-publication accessible à <http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/index.html>

- [Ko-So] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Notes on A-infinity algebras, A-infinity categories and non-commutative geometry*, pré-publication math.RA/060624.
- [To1] B. Toën, *Finitude homotopique des dg-algèbres propres et lisses*, pré-publication math.AT/0609762.
- [To2] B. Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, pré-publication math.AG/0604504.
- [To-Va] B. Toën, M. Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, à paraître aux Annales de l'ENS. -