



HAL
open science

Descente fidèlement plate pour les n -champs d'Artin.

Bertrand Toen

► **To cite this version:**

Bertrand Toen. Descente fidèlement plate pour les n -champs d'Artin.. *Compositio Mathematica*, 2011, 147 (05), pp.1382-1412. 10.1112/S0010437X10005245 . hal-00772828

HAL Id: hal-00772828

<https://hal.science/hal-00772828>

Submitted on 11 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Descente fidèlement plate pour les n -champs d'Artin

Bertrand Toën

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, UMR CNRS 5149

Université de Montpellier 2

Case Courrier 051

Place Eugène Bataillon

34095 Montpellier Cedex

France

e-mail: btoen@math.univ-montp2.fr

Décembre 2009

Résumé

Nous montrons deux résultats de descente fidèlement plate de présentation finie dans le cadre des n -champs d'Artin. Tout d'abord, un champ pour la topologie étale et qui est un n -champ d'Artin au sens de [Si, HAGII] est aussi un champ pour la topologie fppf. De plus, un n -champ pour la topologie fppf et qui possède un n -atlas fppf est un n -champ d'Artin (i.e. possède aussi un n -atlas lisse). Nous déduisons de ces deux résultats un théorème de comparaison entre cohomologies étale et fppf (à coefficients dans des schémas en groupes non nécessairement lisses ou encore non-abéliennes). Ce travail est écrit dans le contexte des champs dérivés de [HAGII, To1], et ces résultats valent donc aussi pour des n -champs d'Artin dérivés.

Introduction

L'objectif de ce travail est de démontrer l'équivalence de deux notions, à priori différentes, de n -champs algébriques¹. Comme cela est expliqué dans [HAGII, §1.3], il existe une notion générale de *champs (n -)géométriques*, qui dépend du choix d'un couple (τ, \mathbf{P}) , formé d'une topologie de Grothendieck τ sur le site des schémas affines, et d'une classe de morphismes \mathbf{P} entre schémas affines, et satisfaisant à certaines conditions de compatibilité. Par définition, les champs géométriques pour le couple (τ, \mathbf{P}) sont obtenus en recollant des schémas affines le long de relations d'équivalences itérées de type \mathbf{P} . Si $\tau = et$ est la topologie étale, et $\mathbf{P} = et$ la classe des morphismes étales, la notion de champs géométriques correspondante est celle de champs algébriques de Deligne-Mumford, ou plus précisément son extension au cadre des champs supérieurs. Si $\tau = et$ est la topologie étale et $\mathbf{P} = li$ est la classe des morphismes lisses, alors la notion de champs géométriques correspond à celle de champs algébriques d'Artin (au sens de [Si] et de [HAGII, §2.1]). Dans ce travail nous nous intéresserons au cas du couple $(fppf, pl)$, formé de la topologie fidèlement plate et de présentation finie (notée *fppf*), et de la classe *pl* des morphismes plats de présentation finie. Notre résultat principal affirme que les champs géométriques pour le couple $(fppf, pl)$ sont exactement les champs géométriques pour le couple (et, li) , c'est à dire les champs algébriques d'Artin.

Théorème 0.1 *Le foncteur champ associé pour la topologie fppf induit une équivalence de la catégorie des champs géométriques pour le couple (et, li) avec celle des champs géométriques pour le couple $(fppf, pl)$.*

¹Par la suite, l'expression *champs* fera toujours référence à la notion de champs supérieurs. Les champs en groupoïdes seront alors appelés des *1-champs*.

De manière équivalente, le théorème précédent peut aussi s'énoncer en deux assertions, l'une concernant la pleine fidélité et l'autre l'essentielle surjectivité:

1. Un champ géométrique pour le couple (et, li) est un champ pour la topologie $fppf$.
2. Un champ pour la topologie $fppf$, qui possède un atlas plat et localement de présentation finie, possède un atlas lisse.

La première assertion affirme que la cohomologie non-abélienne, pour la topologie étale et à valeurs dans un champs algébrique d'Artin, peut aussi se calculer en utilisant la topologie $fppf$. Il s'agit donc d'un énoncé de comparaison entre cohomologie étale et $fppf$, qui généralise le fait bien connu $H_{et}^i(X, G) \simeq H_{fppf}^i(X, G)$, pour X un schéma et G un schéma en groupes abéliens lisse (voir [Gr, App. 11]). La seconde assertion est une généralisation au cadre des champs supérieurs d'un théorème d'Artin qui affirme que le 1-champ quotient d'un groupoïde plat et de présentation finie dans les schémas peut aussi s'écrire comme le 1-champ quotient d'un groupoïde lisse (voir par exemple [La-Mo]). Comme nous le verrons, il se trouve que le point (1) est une conséquence du point (2) (voir notre lemme 2.2). Le contenu du théorème 0.1 est donc essentiellement le fait que l'existence d'un atlas plat et localement de présentation finie implique l'existence d'un atlas lisse.

Le théorème 2.1 possède plusieurs conséquences intéressantes. L'une est l'existence d'une théorie des *n-gerbes algébriques*, généralisation d'ordre supérieur des gerbes algébriques de [La-Mo], et de l'existence de gerbes résiduelles (ce qui implique, entre autre, la représentabilité des faisceaux d'homotopie). Nous ne présenterons pas ces conséquences dans ce travail, et nous renvoyons le lecteur à [To3, §2.2, §2.3], où il trouvera, de plus, des applications aux invariants cohomologiques des n -champs d'Artin. En contre partie, nous avons inclut des applications à la comparaison entre cohomologies (non-abéliennes) étales et $fppf$. Pour G un champ en groupes lisses, nous montrons que les espaces $H_{et}^1(X, G)$ et $H_{fppf}^1(X, G)$ coïncident, généralisant ainsi l'énoncé analogue pour des schémas en groupes. Travailler avec des champs supérieurs nous permet d'introduire la notion de champs en k -groupes G , qui possède des champs classifiants $K(G, i)$ pour tout $i \leq k$, ce qui permet ainsi de définir les espaces $H_{\tau}^i(X, G)$ pour tout $i \leq k$ (pour τ une des deux topologies et ou $fppf$). Lorsqu'un tel G est plat et localement de présentation finie le théorème 0.1 implique que $K(G, i)$ est un champ géométrique, lisse lorsque $i > 0$. Nous tirons de cela, pour tout schéma en groupes abéliens plats et localement de présentation finie G , et tout schéma X , l'existence d'une suite exacte longue

$$H_{et}^{i-2}(X, \underline{H}_{fppf}^1(-, G)) \longrightarrow H_{et}^i(X, G) \longrightarrow H_{fppf}^i(X, G) \longrightarrow H_{et}^{i-1}(X, \underline{H}_{fppf}^1(-, G)) \longrightarrow H_{et}^{i+1}(X, G),$$

où $\underline{H}_{fppf}^1(-, G)$ est le faisceau, pour la topologie étale, associé au préfaisceau $U \mapsto H_{fppf}^1(U, G)$. Ceci s'exprime aussi en disant que $\mathbb{R}^i f_*(G) = 0$ pour tout $i > 1$, où f est le morphisme géométrique de passage de la topologie $fppf$ à la topologie étale. Dans le même genre d'idée, si A est un anneau hensélien excellent de corps résiduel k , et si G est un schéma en groupes plat et localement de présentation finie sur A , de fibre spéciale G_0 , alors nous montrons que le morphisme de restriction

$$H_{fppf}^i(\text{Spec } A, G) \longrightarrow H_{fppf}^i(\text{Spec } k, G_0)$$

est un isomorphisme pour $i > 1$, et surjectif pour $i = 1$. Nous n'avons pas trouvé d'énoncés dans ce goût dans la littérature, et il est possible que ces deux résultats soit nouveaux.

La stratégie de preuve du théorème 0.1 est tout à fait analogue à celle utilisée dans [La-Mo] pour traiter le cas des 1-champs. Le point clé est la construction, à partir d'un recouvrement plat et localement de présentation finie entre schémas $p : X' \rightarrow X$, d'un recouvrement lisse $Y \rightarrow X$. Le schéma Y est le schéma des *quasi-sections quasi-lisses* de la projection p , qui classe les extensions finies plates $Z \rightarrow X$ munies d'un morphisme l.c.i. $Z \rightarrow X'$ au-dessus de X . Le principal apport de ce travail est de montrer que cette construction reste raisonnable lorsque p est maintenant un atlas $fppf$ de n -champs, ce qui complique considérablement les détails techniques. Cependant, les étapes de la preuve que nous donnons suivent essentiellement celles dans le cas des schémas, avec même une

simplification pour démontrer la lissité de Y , due à l'utilisation du langage de la géométrie algébrique dérivée (ce qui permet de ramener la preuve de la lissité de $Y \rightarrow X$ au *simple calcul* d'un espace cotangent). L'intégralité de ce travail est d'ailleurs écrit dans le langage des champs dérivés de [HAGII], et notre théorème 0.1 est donc aussi valable dans ce contexte.

Remerciements: Le résultat principal de ce travail avait été annoncé, avec quelques rudiments de preuve, dans [To1]. C'est la remarque, ravivée récemment par une correspondance avec Chetan Balwe, que les constructions et résultats de [To3] en dépendent qui m'a incité à en rédiger une preuve complète. Je remercie donc Chetan pour son message (et je ne peux qu'inviter le lecteur à lire sa thèse [Ba]).

Par ailleurs, cet article a été rédigé à cheval entre Toulouse et Montpellier, en grande partie dans le fameux train CORAIL TEOZ de 17h45, et je souhaite remercier la SNCF pour avoir su garder des retards tout à fait raisonnables durant cette période. Ces va-et- viens font suite à mon changement d'affectation, de l'Institut de Mathématique de Toulouse vers l'Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier: je remercie le second pour un accueil très chaleureux.

Notation et terminologie:

- k : un anneau commutatif de base fixé, ou plus généralement un anneau commutatif simplicial (pour les lecteurs *braves*).
- $sk - CAlg$: la catégorie des k -algèbres simpliciales.
- $dAff_k := (sk - CAlg)^{op}$: la catégorie des k -schémas affines dérivés.
- τ : une topologie de modèles sur $dAff_k$, ou bien la topologie étale, ou bien la topologie $fppf$.
- τ -champ dérivé : un champ sur le site de modèles $(dAff_k, \tau)$.
- τ -champ non dérivé (ou tronqué) : un champ sur le site Aff_k des k -schémas affines (non dérivés) munie de la topologie τ induite.
- $dSt_\tau(k)$: la catégorie des τ -champs dérivés.
- $St_\tau(k)$: la catégorie des τ -champs non dérivés, vue comme sous-catégorie pleine de $dSt_\tau(k)$.

1 Deux notions de champs dérivés n -géométriques

Dans cette section nous rappelons la notion de n -champs géométriques introduite dans [HAGII, §1.3]. Nous travaillerons au-dessus de la catégorie de modèles des k -algèbres simpliciales, dont nous ferons varier la topologie τ ainsi que la classe de morphismes \mathbf{P} utilisée pour définir les atlas. Le lecteur trouvera le formalisme général des champs géométriques au-dessus d'un HAG contexte dans [HAGII], dont les notions présentées ici sont des cas particuliers.

1.1 Changement de topologie et de contextes pour les champs dérivés

Nous notons $sk - CAlg$ la catégorie des k -algèbres simpliciales commutatives, que nous munissons de sa structure de modèles standard (voir par exemple [HAGII, §2.2.1]). Nous notons aussi $dAff_k := sk - CAlg^{op}$ la catégorie opposée, muni de la structure de modèles induite. Soit τ une (prè-)topologie de modèles sur $dAff_k$ (voir [HAGI, §4.3]). Cette topologie donne lieu à une topologies de Grothendieck sur $Ho(dAff_k)$ (encore notées τ) ainsi qu'à

la catégorie de modèles des champs sur $dAff_k$ qui lui correspond (voir [HAGI, §4.6]) $dAff_k^{\sim, \tau}$. La catégorie homotopique des champs dérivés pour τ (nous dirons aussi τ -*champ dérivés*, ou encore *champ dérivé* si la topologie τ est soit implicite, ou bien si l'énoncé ne dépend pas de la topologie choisie) est

$$dSt_\tau(k) := Ho(dAff_k^{\sim, \tau}).$$

Rappelons que $dSt_\tau(k)$ s'identifie naturellement à la sous-catégorie pleine de la catégorie homotopique $Ho(SPr(dAff_k))$, des préfaisceaux simpliciaux sur $dAff_k$, formée des objets qui d'une part préservent les équivalences, et d'autre part possèdent la propriété de descente pour les τ -hyper-recouvrements (voir [HAGI, §4.4]). Par la suite nous verrons toujours $dSt_\tau(k)$ comme plongée dans $Ho(SPr(dAff_k))$.

La catégorie des τ -champs dérivés contient une sous-catégorie pleine $St_\tau(k) \subset dSt_\tau(k)$, formée des τ -champs *non-dérivés* (nous dirons aussi *tronqués*). La catégorie $St_\tau(k)$ est équivalente à la catégorie homotopique des préfaisceaux simpliciaux sur le site des schémas affines (non-dérivés) Aff_k , muni de la topologie τ restreinte aux k -algèbres non-simpliciales. Le foncteur d'inclusion $St_\tau(k) \hookrightarrow dSt_\tau(k)$ est alors obtenu par extension de Kan à gauche des préfaisceaux simpliciaux le long de l'inclusion naturelle $Aff_k \hookrightarrow dAff_k$ induite par l'inclusion des k -algèbres dans les k -algèbres simpliciales (qui consiste à voir une k -algèbre comme une k -algèbre simpliciale constante). Ce foncteur d'inclusion $i : St_\tau(k) \longrightarrow dSt_\tau(k)$ possède un adjoint à droite

$$t_0 : dSt_\tau(k) \longrightarrow St_\tau(k),$$

qui à un préfaisceau simplicial sur $dAff_k$ associe sa restriction à Aff_k . Par la suite, nous identifierons systématiquement $St_\tau(k)$ à une sous-catégorie pleine de $dSt_\tau(k)$, formée des F tels que le morphisme naturel $t_0(F) \longrightarrow F$ soit un isomorphisme. Nous renvoyons à [HAGII, §2.1] pour plus de détails sur les champs non-dérivés.

Soient maintenant une classe de morphismes \mathbf{P} dans $Ho(dAff_k)$. Nous supposons que la topologie τ satisfait les conditions [HAGII, 1.3.2.2]. Nous supposons aussi que le couple (τ, \mathbf{P}) satisfait les conditions [HAGII, 1.3.2.11]. Nous ne rappelons pas ces conditions ici, qui affirment, en gros, que la topologie τ est sous-canonique, compatible avec les sommes disjointes finies, et que les morphismes de \mathbf{P} ont de bonnes propriétés de localité par rapport à τ . Par la suite nous nous intéresserons à deux exemples: τ sera la topologie étale et \mathbf{P} les morphismes lisses, ou encore τ sera la topologie fppf et \mathbf{P} sera les morphismes plats et de présentation presque finie (dont les définitions seront rappelées dans les deux paragraphes suivants).

La donnée du couple (τ, \mathbf{P}) permet, comme cela est expliqué dans [HAGII, Def. 1.3.3.1], de définir une notion de champs dérivés (n, \mathbf{P}) -géométriques. Les champs dérivés (n, \mathbf{P}) -géométriques forment une sous-catégorie pleine de $dSt_\tau(k)$, notée $dSt_\tau^{n, \mathbf{P}}(k)$. On a des inclusions naturelles

$$dSt_\tau^{n, \mathbf{P}}(k) \subset dSt_\tau^{n+1, \mathbf{P}}(k) \subset dSt_\tau(k),$$

et la réunion de ces sous-catégories sera notée

$$dSt_\tau^{\mathbf{P}}(k) := \cup_n dSt_\tau^{n, \mathbf{P}}(k).$$

Rappelons la définition, par induction sur n , des catégories $dSt_{n, \tau}^{\mathbf{P}}(k)$. Pour $n = 0$, la sous-catégorie $dSt_{0, \tau}^{\mathbf{P}}(k)$ consiste en tous les champs dérivés affines, c'est à dire de la forme $\mathbb{R}\underline{Spec} A$ pour un $A \in sk - CAlg^2$. Les conditions sur τ impliquent que le foncteur

$$\mathbb{R}\underline{Spec} : Ho(sk - CAlg)^{op} \longrightarrow dSt_\tau(k)$$

est pleinement fidèle. Ainsi, $dSt_{0, \tau}^{\mathbf{P}}$ est naturellement équivalent à la catégorie $Ho(dAff_k)$ (et se trouve donc être indépendante du choix de \mathbf{P} et de τ). Un morphisme entre champs dérivés $f : F \longrightarrow G$ est dit 0-géométrique (ou affine), si pour tout X affine et tout $X \longrightarrow G$, le champ dérivé $F \times_G^h X$ est 0-géométrique. Un tel morphisme est de plus dans \mathbf{P} si la projection induite $X \longrightarrow F \times_G^h X$ correspond à un morphisme de \mathbf{P} dans $Ho(dAff_k)$.

²Les conventions de ce travail diffèrent de celles de [HAGII], les objets affines dans [HAGII] étant (-1) -géométriques.

Supposons maintenant $n > 0$ et que la catégorie $dSt_{\tau}^{n-1, \mathbf{P}}(k)$ soit définie, ainsi que la notion de morphismes $(n-1, \mathbf{P})$ -représentables et de morphismes $(n-1, \mathbf{P})$ -représentables dans \mathbf{P} . On définit alors la sous-catégorie $dSt_{\tau}^{n, \mathbf{P}}(k)$, ainsi que les notions de morphismes (n, \mathbf{P}) -représentables et de morphismes (n, \mathbf{P}) -représentables et dans \mathbf{P} , de la façon suivante.

1. Un champ dérivé $F \in dSt_{\tau}(k)$ est (n, \mathbf{P}) -géométrique s'il existe une famille $\{X_i\}_i$ d'affines, et un épimorphisme de champs

$$\coprod_i X_i \longrightarrow F$$

tel que chaque morphisme $X_i \longrightarrow F$ soit un morphisme $(n-1, \mathbf{P})$ -géométrique et dans \mathbf{P} . Une telle donnée pour F sera appelée par la suite un (n, \mathbf{P}) -atlas pour F .

2. Un morphisme de champs dérivés $f : F \longrightarrow G$ est (n, \mathbf{P}) -représentable si pour tout affine X , et tout morphisme $X \longrightarrow G$, le champ dérivé $F \times_G^h X$ est (n, \mathbf{P}) -géométrique.
3. Un morphisme de champs dérivés $f : F \longrightarrow G$ est (n, \mathbf{P}) -représentable et dans \mathbf{P} s'il est d'une part (n, \mathbf{P}) -géométrique, et d'autre part si pour tout $X \longrightarrow G$ avec X affine, il existe un $(n-1, \mathbf{P})$ -atlas

$$\coprod_i X_i \longrightarrow F \times_G^h X$$

tel que tous les morphismes induits $X_i \longrightarrow X$ entre champs affines soient dans \mathbf{P} .

Supposons maintenant que l'on se donne deux topologies de modèles τ et τ' , et deux classes de morphismes \mathbf{P} et \mathbf{P}' , de sorte à ce que les couples (τ, \mathbf{P}) et (τ', \mathbf{P}') satisfassent tous deux aux conditions [HAGII, 1.3.2.2, 1.3.2.11]. Nous supposons que le couple (τ, \mathbf{P}) est *plus fort* que (τ', \mathbf{P}') au sens suivant.

1. Tout τ -champ dérivé est un τ' -champ dérivé.
2. On a $\mathbf{P}' \subset \mathbf{P}$.

La condition (1) ci-dessus dit qu'un préfaisceau simplicial $F : dAff_k^{op} \longrightarrow SEns$, qui préserve les équivalences et qui vérifie la condition de descente pour les τ -hyper-recouvrements, vérifie aussi la condition de descente pour les τ' -hyper-recouvrements. En identifiant les catégories $dSt_{\tau}(k)$ et $dSt_{\tau'}(k)$ à des sous-catégories pleines de $Ho(SPr(dAff_k))$, cette condition est équivalente au fait que $dSt_{\tau}(k) \subset dSt_{\tau'}(k)$.

Considérons maintenant le foncteur d'inclusion

$$i : dSt_{\tau}(k) \longrightarrow dSt_{\tau'}(k).$$

Le foncteur de champs associé pour la topologie τ , restreint à $dSt_{\tau'}(k)$, fournit un adjoint à gauche de ce foncteur d'inclusion

$$a : dSt_{\tau'}(k) \longrightarrow dSt_{\tau}(k).$$

Rappelons de plus que ce foncteur, ou plutôt son relevé naturel au niveau des catégories de modèles, commute aux limites homotopiques finies (voir [HAGI, Prop. 3.4.10]). Cette propriété d'exactitude et la condition $\mathbf{P}' \subset \mathbf{P}$ impliquent alors facilement (c'est à dire en utilisant les propriétés élémentaires des champs géométrique données dans [HAGII, §1.3.3]), par induction sur n , que le foncteur a transforme les τ' -champs dérivés (n, \mathbf{P}') -géométriques en des τ -champs dérivés (n, \mathbf{P}) -géométriques. Il induit ainsi, pour tout $n \geq 0$, un foncteur

$$a : dSt_{\tau'}^{n, \mathbf{P}'}(k) \longrightarrow dSt_{\tau}^{n, \mathbf{P}}(k).$$

1.2 Champs dérivés (n, li) -géométriques et (n, pl) -géométriques

Nous spécifions dans ce paragraphe deux couples (τ, \mathbf{P}) et (τ', \mathbf{P}') comme dans le paragraphe précédent. Le premier couple (τ, \mathbf{P}) sera formé de la topologie fidèlement plate de présentation (presque) finie et des morphismes plats de présentation (presque) finie, et le second, (τ', \mathbf{P}') , de la topologie étale et des morphismes lisses. Nous commencerons donc par rappeler les définitions des morphismes étales, lisses, plats et plats de présentation presque finie entre k -algèbres simpliciales commutatives. Soit donc $f : A \rightarrow B$ un morphisme dans $sk-CAlg$. On rappelle les notions suivantes, qui sont essentiellement tirées de [HAGII] (sauf la notion (1)), référence dans laquelle le lecteur trouvera aussi des définitions équivalentes en termes de complexes cotangents ou d'exactitude de foncteurs de changement de bases.

1. Le morphisme f est *de présentation presque finie* si le morphisme induit $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme de présentation finie d'anneaux commutatifs.
2. Le morphisme f est *plat* si le morphisme $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ est plat, et si de plus pour tout $i > 0$ le morphisme naturel

$$\pi_i(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \rightarrow \pi_i(B)$$

est un isomorphisme.

3. Le morphisme f est *lisse* s'il est plat et si de plus $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme lisse (en particulier de présentation finie) d'anneaux commutatifs.
4. Le morphisme f est *étale* s'il est plat et si de plus $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme étale (en particulier de présentation finie) d'anneaux commutatifs.

On montre que les morphismes plats, plats de présentation presque finie, lisses et étales sont stables par changement de bases (homotopiques) dans $Ho(dAff_k)$ et par composition. Cela se déduit aisément du fait que lorsque $A \rightarrow B$ est plat, alors pour tout A -module simplicial M le morphisme naturel

$$\pi_*(M) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \rightarrow \pi_*(M \otimes_A^{\mathbb{L}} B)$$

est un isomorphisme.

Remarque 1.1 Les morphismes lisses et étales définis ci-dessus sont (*homotopiquement*) *de présentation finie* dans la catégorie de modèles $sk-CAlg$ (voir [HAGII, Def. 1.2.3.1]). Cependant les morphismes de présentation presque finie ne sont pas de présentation fini en ce sens, ni même les morphismes plats et de présentation presque finie. Par exemple, si k est un corps, toute k -algèbre de type finie est presque de présentation finie et plate au sens ci-dessus, mais elle n'est homotopiquement de présentation finie dans $sk-CAlg$ que lorsqu'elle est localement d'intersection complète.

Pour finir, une famille de morphismes $\{A \rightarrow A_i\}$ dans $sk-CAlg$ est *surjective*, si le morphisme de schémas

$$\{Spec \pi_0(A_i) \rightarrow Spec \pi_0(A)\}$$

est surjectif (i.e. tout idéal premier de $\pi_0(A)$ se relève en un idéal premier d'un des $\pi_0(A_i)$). Nous dirons alors qu'une telle famille $\{A \rightarrow A_i\}$ est un *recouvrement plat et de présentation presque finie*, si tous les morphismes $A \rightarrow A_i$ sont plats et de présentation presque finie, et si de plus la famille $\{A \rightarrow A_i\}$ est surjective. De même, une telle famille est un *recouvrement étale* si tous les morphismes $A \rightarrow A_i$ sont étales, et si de plus la famille $\{A \rightarrow A_i\}$ est surjective. On voit sans peine que les recouvrements plats et de présentation presque finie, et les recouvrement étale, forment deux topologie de modèles sur $dAff_k$. Ces deux topologies seront respectivement appelées les topologies *plate et de présentation presque finie*, et *étale*. La topologie plate et de présentation presque finie sera symboliquement notée *fppf*. La topologie étale sera notée *et*.

Nous considérons maintenant pl , la classe des morphismes plats et de présentation presque finie dans $dAff_k$, et li celle des morphismes lisses. Les couples (et, li) et $(fppf, pl)$ satisfont aux conditions de [HAGII, 1.3.2.2, 1.3.2.11]. De plus, le couple $(fppf, pl)$ est clairement plus fort que (et, li) . On dispose donc d'un foncteur entre les catégories de champs dérivés n -géométriques correspondantes

$$\phi_n : dSt_{et}^{n, li} \longrightarrow dSt_{fppf}^{n, pl}$$

induit par le foncteur de champ associé pour la topologie $fppf$.

Pour terminer cette section signalons l'aspect local pour la topologie $fppf$ de la lissité. Ce résultat nous sera utile par la suite.

Proposition 1.2 *Soit $X \longrightarrow Y$ un morphisme dans $dAff_k$. Alors, f est lisse si et seulement s'il existe un recouvrement $fppf$ $\{X_i \longrightarrow X\}$ tel que les morphismes composés $X_i \longrightarrow Y$ soit lisses.*

Preuve: Seule la suffisance demande une preuve. Soit $X = Spec B$, $Y = Spec A$, et $X_i = Spec B_i$. On commence par voir que $A \longrightarrow B$ est un morphisme plat. En effet, la famille de morphismes d'anneaux non simpliciaux $\{\pi_0(B) \longrightarrow \pi_0(B_i)\}$ est fidèlement plate par hypothèse, et les morphismes composés $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B_i)$ sont plats. Cela implique que $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme plat. Il faut de plus montrer que le morphisme

$$f : \pi_*(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \longrightarrow \pi_*(B)$$

est bijectif. Mais, par changement de base le long de $\pi_0(B) \longrightarrow \pi_0(B_i)$ ce morphisme devient

$$\pi_*(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \otimes_{\pi_0(B)} \pi_0(B_i) \simeq \pi_*(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B_i) \longrightarrow \pi_0(B_i).$$

Par hypothèse ces morphismes sont bijectifs, et comme $\{\pi_0(B) \longrightarrow \pi_0(B_i)\}$ est fidèlement plate on en déduit que f est bijectif.

On vient de voir que $A \longrightarrow B$ est un morphisme plat. Il nous reste à montrer que $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est aussi lisse. Pour cela on peut sans perte de généralité supposer que $A = \pi_0(A)$ (et donc $B \simeq \pi_0(B), B_i \simeq \pi_0(B_i)$), et l'énoncé se ramène alors à la localité pour la topologie $fppf$ des morphismes lisses entre anneaux non simpliciaux. On a donc un morphisme plat $A \longrightarrow B$, et un recouvrement $fppf$ $\{B \longrightarrow B_i\}$, tel que chaque $A \longrightarrow B_i$ soit un morphisme lisse. En particulier $A \longrightarrow B_i$ est de présentation finie, et cela implique par descente fidèlement plate que $A \longrightarrow B$ est un morphisme de présentation finie. On pourra donc, par l'argument standard, se ramener au cas où tous les anneaux sont de type fini sur \mathbf{Z} , et en particulier noethériens (voir par exemple [EGAIV-3, Cor. 11.2.6.1]). Il reste à montrer que $A \longrightarrow B$ est aussi formellement lisse, ou de manière équivalente que pour tout corps algébriquement clos K et tout morphisme $A \longrightarrow K$, la K -algèbre $B_K := B \otimes_A K$ est lisse. On se ramène ainsi au cas où $A = K$ est un corps algébriquement clos. On dispose ainsi de B une K -algèbre de type fini, d'un recouvrement $fppf$ $\{B \longrightarrow B_i\}$, tel que chaque B_i soit lisse sur K . Pour montrer que B est lisse, il suffit de montrer que B est de dimension homologique finie comme $B \otimes_K B$ -module, ou de manière équivalente de Tor -dimension finie. Or, par hypothèse cette Tor -dimension est localement, pour la topologie $fppf$, finie sur $Spec B$, ce qui par descente $fppf$ de la platitude implique aussi qu'elle est localement finie pour la topologie de Zariski. Par quasi-compacité on conclut qu'elle est finie. \square

2 Le théorème de comparaison

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Pour tout entier $n \geq 0$, le foncteur*

$$\phi_n : dSt_{et}^{n, li} \longrightarrow dSt_{fppf}^{n, pl}$$

est une équivalence de catégories.

Avant d'entrer dans les détails de la preuve signalons quelques réductions faciles.

Lemme 2.2 *Soit $n > 0$.*

1. *Le foncteur ϕ_n est pleinement fidèle si tout et -champ dérivé qui est (n, li) -géométrique est aussi un $fppf$ -champ dérivé.*
2. *Si le foncteur ϕ_{n-1} est une équivalence alors le foncteur ϕ_n est pleinement fidèle.*

Preuve: (1) Le foncteur ϕ_n est la restriction du foncteur a , de champ associé pour la topologie $fppf$, qui possède comme adjoint à droite le foncteur d'inclusion $dSt_{fppf}(k) \subset dSt_{et}(k)$. Ainsi, ϕ_n est pleinement fidèle si pour tout $F \in dSt_{et}^{n, li}$, le morphisme d'adjonction

$$F \longrightarrow a(F)$$

est un isomorphisme dans $dSt_{et}(k)$. Or, $F \longrightarrow a(F)$ est un isomorphisme précisément lorsque F est un $fppf$ -champ dérivé.

(2) Soit $F \in dSt_{et}^{n, li}$. D'après (1) il nous suffit de montrer que le morphisme d'adjonction $f : F \longrightarrow \phi_n(F)$ est un isomorphisme dans $dSt_{et}(k)$. Soient X et Y deux objets affines et considérons deux morphismes $X, Y \longrightarrow F$. Alors, en utilisant que ϕ_{n-1} est pleinement fidèle, on voit que le morphisme induit

$$X \times_F^h Y \longrightarrow \phi_{n-1}(X \times_F^h Y) \simeq X \times_{\phi_{n-1}(F)}^h Y$$

est un isomorphisme. Ceci implique que le morphisme f est un monomorphisme (voir [HAGII, Rem. 1.2.6.2]). Il nous reste donc à montrer que f est aussi un épimorphisme de champs dérivés pour la topologie étale. Soit X un objet affine, et $x : X \longrightarrow \phi_n(F)$ un morphisme. On doit montrer qu'il existe un recouvrement étale $Y \longrightarrow X$ et un relèvement $Y \longrightarrow F$ du point x , c'est à dire que

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \phi_n(F) \end{array}$$

commute dans dSt_{et} . Soit $U = \coprod U_i \longrightarrow F$ un n -atlas lisse pour F . On considère le morphisme induit

$$\phi_n(U) \simeq U \longrightarrow \phi_n(F),$$

ainsi que

$$U_X := U \times_{\phi_n(F)}^h X \longrightarrow X.$$

On remarquera que U_X est le produit fibré homotopique de champs dérivés étales qui sont aussi des champs dérivés $fppf$, et donc est lui même un champs pour la topologie $fppf$. Comme $\phi_n(F)$ est le $fppf$ -champ associé à F , il existe un recouvrement $fppf$ $X' \longrightarrow X$ et un relèvement $X' \longrightarrow F$ de x . En utilisant que $F \longrightarrow \phi_n(F)$ est un monomorphisme, on trouve

$$U_{X'} := U_X \times_X^h X' \simeq U \times_F^h X',$$

ce qui montre que $U_{X'}$ est dans $dSt_{et}^{n-1, et}$. Soit $V = \coprod V_i \longrightarrow U_{X'}$ un $(n-1, li)$ -atlas. Le composé $V \longrightarrow U_X$ est un morphisme de $fppf$ -champs dérivés qui est $(n-2, pl)$ -représentable, plat de présentation presque fini et surjectif. Ainsi, $U_X \in dSt_{fppf}^{n-1, pl}$, et comme ϕ_{n-1} est une équivalence on voit que $U_X \in dSt_{et}^{n-1, li}$. De plus, le morphisme $U \longrightarrow F$ étant lisse surjectif, le morphisme induit $U_{X'} \longrightarrow X'$ est encore lisse surjectif. Comme le morphisme $X' \longrightarrow X$ est fidèlement plat cela implique que $U_X \longrightarrow X$ est lisse et surjectif. Ainsi, il existe un recouvrement étale $Y \longrightarrow X$ et un relèvement $Y \longrightarrow U_X$ de la projection $U_X \longrightarrow X$. En composant avec les

morphismes $U_X \rightarrow U \rightarrow F$, on trouve le relèvement du point x cherché. \square

Ainsi, pour démontrer le théorème 2.1 nous procéderons par induction sur n . Pour $n = 0$ l'énoncé est évident car les champs dérivés 0-géométriques sont toujours les objets affines, et ce quel que soit le couple (τ, \mathbf{P}) (toujours satisfaisant aux deux mêmes conditions). On se fixe alors $n > 0$, et on suppose que ϕ_i soit une équivalence pour tout $i < n$. Par le lemme 2.2 il nous suffit donc de démontrer que ϕ_n est essentiellement surjectif. La démonstration de cette dernière assertion se fera en plusieurs étapes.

2.1 Le champ dérivé des extensions finies et strictement finies

Dans cette section nous définissons des *et*-champs dérivés \underline{Fin}_m et \underline{Fin}_m^{str} , classifiant les schémas dérivés affines et de longueur finie fixée m . L'objet \underline{Fin}_m^{str} est une version rigidifiée de \underline{Fin}_m , de sorte que \underline{Fin}_m^{str} soit affine et qu'il existe un morphisme naturel $\underline{Fin}_m^{str} \rightarrow \underline{Fin}_m$ qui soit un Gl_m -torseur. Cela implique en particulier que \underline{Fin}_m est un *et*-champ dérivé $(1, li)$ -géométrique.

Pour commencer, nous dirons qu'un morphisme $A \rightarrow B$ dans $sk - CAlg$ est *fini et plat* si le A -module B est projectif de type fini au sens de [HAGII, §1.2.4]. Rappelons que cela signifie que B est isomorphe, dans $Ho(sB - Mod)$ (la catégorie homotopique des B -modules simpliciaux), à un rétracte d'un A -module de la forme A^m , pour un certain entier m . En particulier, si K est un corps et $A \rightarrow K$ un morphisme, $B_K := B \otimes_A^L K$ est isomorphe, dans $Ho(sK - Mod)$ à un K -espace vectoriel de dimension finie. Nous dirons alors que $A \rightarrow B$, plat fini, est de rang m si pour tout corps K et tout morphisme $A \rightarrow K$ on a $dim_K(B \otimes_A^L K) = m$.

Par définition, \underline{Fin}_m est le foncteur qui associe à $A \in sk - CAlg$ le nerf de la catégorie des équivalences entre A -algèbres plates, finies et de rang m . La construction précise de ce foncteur utilise, par exemple, la notion générale de préfaisceaux de Quillen (voir [HAGII, App. B]), ou aussi la fin du §2.3 de [To1]). Concrètement le foncteur

$$\underline{Fin}_m : sk - CAlg \rightarrow SEns$$

se construit de la façon suivante. Pour $A \in sk - CAlg$ on considère $sA - CAlg^{fin, m, cof}$, la catégorie dont les objets sont les cofibrations de k -algèbres simpliciales $A \rightarrow B$, avec B plat et fini, de rang m . Les morphismes dans $sA - CAlg^{fin, m, cof}$ sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & B' \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & A, \end{array}$$

avec f une équivalence faible. Si l'on a $A \rightarrow A'$, un morphisme dans $sk - CAlg$, on dispose d'un foncteur de changement de bases

$$A' \otimes_A - : sA - CAlg^{fin, m, cof} \rightarrow sA' - CAlg^{fin, m, cof}.$$

La construction $A \mapsto sA - CAlg^{fin, m, cof}$ définit de cette façon un pseudo-foncteur $sk - CAlg \rightarrow Cat$, que l'on rectifie, à équivalence près, par la construction de Grothendieck usuelle (voir par exemple [HAGII, App. B]), afin d'obtenir un vrai foncteur $sk - CAlg \rightarrow Cat$. Composé avec le foncteur nerf $Cat \rightarrow SEns$, on obtient le foncteur cherché

$$\underline{Fin}_m : sk - CAlg \rightarrow SEns.$$

La valeur de ce foncteur sur un objet $A \in sk - CAlg$ est le nerf d'une catégorie qui est naturellement équivalente à $sA - CAlg^{fin, m, cof}$, et l'on dispose ainsi d'isomorphismes fonctoriels dans $Ho(SEns)$

$$\underline{Fin}_m(A) \simeq N(sA - CAlg^{fin, m, cof}).$$

On montre que le préfaisceau simplicial \underline{Fin}_m est un champ dérivé pour la topologie fpqc, et en particulier pour les topologies étales et fppf (voir par exemple [HAGII, Thm. 1.3.7.2] pour les grandes étapes de la preuve).

L'oubli de la structure multiplicative fournit, pour tout $A \in sk - CAlg$, un foncteur $sA - CAlg^{fin,m,cof} \rightarrow sA - Mod^{fin,m,cof}$, où $sA - Mod^{fin,m,cof}$ est la catégorie des A -modules simpliciaux cofibrants, projectifs et de rang m . Cet oubli permet de construire un morphisme de *et*-champs dérivés

$$\underline{Fin}_m \rightarrow Vect_m \simeq BGl_m,$$

où $Vect_m$ est le champ des fibrés vectoriels de rang n (voir [HAGII, Def. 1.3.7.5]). La fibre homotopique de ce morphisme, prise au fibré vectoriel trivial sera notée \underline{Fin}_m^{str} .

Proposition 2.3 *Le *et*-champ dérivé \underline{Fin}_m^{str} est 0-géométrique (i.e. affine), et le *et*-champ dérivé \underline{Fin}_m est (1, li)-géométrique.*

Preuve: Pour démontrer cette proposition nous utiliserons le lemme de représentabilité suivant (voir [HAGII, App. C] et [Lu] pour des versions plus générales).

Lemme 2.4 *Soit F un *et*-champ dérivé. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *Le *et*-champ tronqué $t_0(F)$ est affine.*
2. *Le morphisme diagonal $F \rightarrow F \times^h F$ est 0-représentable.*
3. *F est nilcomplet: pour tout objet $A \in sk - CAlg$, de tour de Postnikov*

$$A \rightarrow \dots \rightarrow A_{\leq k} \rightarrow A_{\leq k-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_{\leq 0} = \pi_0(A)$$

le morphisme naturel

$$F(A) \rightarrow \text{Holim}_k F(A_{\leq k})$$

est une équivalence.

4. *F est inf-cartésien: pour tout $A \in sk - CAlg$, tout A -module connexe $M \in sA - Mod$ (i.e. $\pi_0(M) = 0$), et toute k -dérivation $d : A \rightarrow A \oplus M$ (voir [HAGII, §1.2.1]), le carré homotopiquement cartésien suivant*

$$\begin{array}{ccc} A \oplus_d \Omega_* M & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow (id, 0) \\ A & \xrightarrow{d} & A \oplus M \end{array}$$

induit un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} F(A \oplus_d \Omega_* M) & \longrightarrow & F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A) & \longrightarrow & F(A \oplus M). \end{array}$$

Alors F est affine.

Preuve du lemme: Tout d'abord, les conditions (2) et (4) impliquent que F possède une théorie de l'obstruction au sens de [HAGII, §1.4.2] (voir [HAGII, Prop. 1.4.2.7]). On choisit A_0 , une k -algèbre commutative et un isomorphisme $\mathbb{R}Spec A_0 \rightarrow t_0(F)$. En composant avec l'inclusion naturelle $t_0(F) \rightarrow F$ on trouve un morphisme

$$u_0 : \mathbb{R}Spec A_0 \rightarrow F.$$

Ce morphisme induisant un isomorphisme sur les tronqués, on voit facilement que son complexe cotangent $\mathbb{L}_{u_0} \in Ho(sA_0 - Mod)$ est 1-connexe (i.e. $\pi_0(\mathbb{L}_{u_0}) = \pi_1(\mathbb{L}_{u_0}) = 0$). Nous allons construire par induction un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}Spec A_0 & \xrightarrow{u_0} & F \\
\downarrow & \nearrow u_k & \\
\vdots & & \\
\mathbb{R}Spec A_k & \nearrow u_{k+1} & \\
\downarrow & & \\
\mathbb{R}Spec A_{k+1} & & \\
\downarrow & & \\
\vdots & &
\end{array}$$

où A_k est k -tronquée, le morphisme $A_{k+1} \rightarrow A_k$ induit un isomorphisme sur les π_i pour $i < k + 1$, et de sorte à ce que \mathbb{L}_{u_k} soit $(k + 1)$ -connexe. On dispose donc d'un morphisme naturel de troncation $\mathbb{L}_{u_k} \rightarrow \pi_{k+2}(\mathbb{L}_{u_k})[k + 2]$ (où $(-)[m]$ désigne le foncteur de suspension itéré m -fois). Supposons que l'on ait construit $A_k \in sk - CAlg$, et un morphisme $u_k : \mathbb{R}Spec A_k \rightarrow F$ comme ci-dessus. On pose $M_{k+1} := \pi_{k+2}(\mathbb{L}_{u_k})$, qui est un $\pi_0(A_k)$ -module. Le morphisme naturel $\mathbb{L}_{A_k} \rightarrow \mathbb{L}_{u_k}$ induit donc un morphisme $\mathbb{L}_{A_k} \rightarrow M_{k+1}[k + 2]$, et donc une extension de carré nul $A_{k+1} \rightarrow A_k$, extension de A_k par le A_k -module simplicial $\Omega_* M_k[k + 2] \simeq M_k[k + 1]$ (voir [HAGII, §1.2.1]). Par construction de A_{k+1} , l'obstruction d'étendre le morphisme $\mathbb{R}Spec A_k \rightarrow F$ le long de $\mathbb{R}Spec A_{k+1} \rightarrow \mathbb{R}Spec A_k$ s'annule de manière naturelle et il existe donc une extension bien définie (voir [HAGII, Prop. 1.4.2.5])

$$u_{k+1} : \mathbb{R}Spec A_{k+1} \rightarrow F.$$

Cette extension est telle que $\mathbb{L}_{u_{k+1}}$ est de plus $(k + 2)$ -connexe. Ceci fini de montrer l'existence de la tour des morphismes u_k comme ci-dessus.

On pose alors $A := holim_k A_k$. D'après la condition (3), le système des u_k définit un morphisme $u : \mathbb{R}Spec A \rightarrow F$. Par construction ce morphisme induit un isomorphisme sur les tronqués $\mathbb{R}Spec \pi_0(A) \simeq t_0(F)$, mais aussi un isomorphisme sur les complexes cotangents (i.e. $\mathbb{L}_u \simeq 0$). On déduit de cela et de (3)–(4), en utilisant les invariants de Postnikov (voir [HAGII, §2.2.1]) que le morphisme u induit, pour tout $B \in sk - CAlg$, une équivalence

$$(\mathbb{R}Spec A)(B) = Map(A, B) \rightarrow F(B).$$

□

Nous allons maintenant appliquer le lemme 2.4 au cas où $F = Fin_m^{str}$. Soit A une k -algèbre commutative non simpliciale. On commence par remarquer que le foncteur π_0 induit un foncteur adjoint à gauche de la catégorie $sA - CAlg^{fin, m, cof}$ vers le groupoïde des A -modules projectifs de type fini. De cela on déduit aisément que le champ tronqué $t_0(sA - CAlg^{fin, m, cof})$ est le champ usuel des schémas plats, finis et de longueur m . On déduit de cela aussi que $t_0(Fin_m^{str})$ n'est autre que le faisceau des structures de k -algèbres commutatives sur le module k^m , dont l'ensemble des valeurs sur une k -algèbre non simpliciale A est l'ensemble des structures de A -algèbres commutatives sur le A -module A^m . Ce foncteur est clairement représentable par un schéma affine. Pour pouvoir appliquer le lemme 2.4 il nous faut donc démontrer que les conditions (2), (3) et (4) sont satisfaites pour Fin_m^{str} . Comme Fin_m^{str} est la fibre homotopique du morphisme $Fin_m \rightarrow Vect_m$, et que le champ dérivé $Vect_m$ vérifie ces conditions (car il est $(1, li)$ -géométrique), il nous suffit de montrer que Fin_m vérifie les conditions (2), (3) et (4)

du lemme 2.4.

(2) Montrer que le diagonale du *et*-champ dérivé \underline{Fin}_m est 0-représentable est équivalent au fait suivant: soient $A \in sk-CAlg$, et B, B' deux A -algèbres simpliciales, cofibrantes et libres (à équivalence près) de rang m comme A -modules. Alors le *et*-champ dérivé $\underline{Eq}(B, B')$ sur $\mathbb{R}Spec A$, qui envoie une A -algèbre commutative A' sur l'ensemble simplicial $\underline{Eq}(B \otimes_A A', B' \otimes_A A')$, des équivalences de A' -algèbres commutatives, est affine. Pour cela on considère le *et*-champ dérivé $\underline{Hom}(B, B')$, de tous les morphismes entre B et B' , et on commence par remarquer qu'il est affine. En écrivant B comme une colimite homotopique de A -algèbres simpliciales libres on se ramène au cas où B est une A -algèbre commutative libre sur un ensemble I (car les schémas dérivés affines sont stables par limites homotopiques). Dans ce cas on a

$$\underline{Hom}(B, B') \simeq \mathbb{R}Spec Sym_A(\oplus_I (B')^\vee),$$

où $(B')^\vee$ est le A -module simplicial dual de B . On remarque ensuite que $\underline{Eq}(B, B')$ est un ouvert Zariski de $\underline{Hom}(B, B')$. De plus, cet ouvert entre dans un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} \underline{Eq}(B, B') & \longrightarrow & \underline{Hom}(B, B') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Gl_m & \longrightarrow & M_m, \end{array}$$

où M_m est le schéma affine des matrices $m \times m$, et le morphisme $\underline{Hom}(B, B') \rightarrow M_m$ est obtenu en choisissant des isomorphismes dans $Ho(sA - Mod)$ de B et B' avec A^m . Ceci termine la preuve que la diagonale de F est 0-représentable.

(3) En utilisant le point (2), et le fait qu'un champ dérivé affine vérifie les conditions (3) et (4), on remarque que le morphisme naturel

$$F(A) \longrightarrow Holim_k F(A_{\leq k})$$

est un monomorphisme (i.e. est injectif sur les π_0 et un isomorphisme sur tous les π_i pour $i > 0$). Il reste donc à voir que ce morphisme est surjectif sur les composantes connexes. Il est facile de voir qu'il existe une bijection entre $\pi_0(Holim_k F(A_{\leq k}))$, et l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets dans $Holim_k Ho(sA_{\leq k} - CAlg^{fin, m, cof})$. Ainsi, un élément de $\pi_0(Holim_k F(A_{\leq k}))$ se représente par un système d'objets $B_k \in sA_{\leq k} - CAlg^{fin, m, cof}$, et des équivalences $B_{k+1} \otimes_{A_{\leq k+1}} A_{\leq k} \rightarrow B_k$, de $A_{\leq k}$ -algèbres simpliciales commutatives. A un tel système on associe

$$B := Holim_k B_k \in Ho(sA - CAlg).$$

Il n'est pas difficile de voir que B est fini de rang m comme B -module simplicial, et qu'un remplacement cofibrant de B fournit un antécédent, à homotopie près, du système $\{B_k\}$ par le morphisme $F(A) \rightarrow Holim_k F(A_{\leq k})$.

(4) Tout comme pour le point (3), le morphisme en question est un monomorphisme. Pour montrer qu'il est aussi surjectif sur les composantes connexes on utilise le lemme [To2, Lem. 4.2] (ou plus précisément sa version pour des sous-catégories de modèles stables par équivalence). Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que le carré de foncteur de Quillen

$$\begin{array}{ccc} s(A \oplus_d \Omega_* M) - CAlg & \longrightarrow & sA - CAlg \\ \downarrow & & \downarrow (id, 0) \\ sA - CAlg & \xrightarrow{d} & s(A \oplus M) - CAlg \end{array}$$

induit un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} N(s(A \oplus_d \Omega_* M) - CAlg^{fin,m,cof}) & \longrightarrow & N(sA - CAlg^{fin,m,cof}) \\ \downarrow & & \downarrow (id,0) \\ N(sA - CAlg^{fin,m,cof}) & \xrightarrow{d} & N(s(A \oplus M) - CAlg^{fin,m,cof}). \end{array}$$

Ceci termine la vérification que le champ dérivé Fin^m vérifie les conditions du lemme 2.4, et donc la preuve de la proposition 2.3. \square

Le complexe cotangent du champ Fin_m peut se décrire de la façon suivante. Il s'agit du fait, bien connu, que les déformations infinitésimales d'une A -algèbre commutative projective et de rang finie sont classifiées par la cohomologie d'André-Quillen.

Proposition 2.5 *Soit $A \in sk - CAlg$, et $u : \mathbb{R}Spec A \rightarrow Fin_m$ un morphisme de champs dérivés correspondant à une A -algèbre commutative B projective et de rang m comme A -module. Notons*

$$B^\vee := \mathbb{R}Hom_{sA-Mod}(B, A)$$

le A -module dual de B , muni de sa structure de B -module naturelle. Alors, il existe un isomorphisme naturel dans $Ho(Sp(sA - Mod))$

$$\mathbb{L}_{Fin_m, u} \simeq \mathbb{L}_{B/A}[-1] \otimes_B^{\mathbb{L}} B^\vee.$$

Preuve: Soit $\Omega_u Fin_m$, le champ dérivé des lacets de base u dans Fin_m . Comme nous l'avons déjà vu lors de la preuve de la proposition 1.2, le champ dérivé $\Omega_u Fin_m$ est un ouvert du champ $Hom(B, B)$, des endomorphismes de B comme A -algèbre simpliciale. On a ainsi

$$\mathbb{L}_{Fin_m}[1] \simeq \mathbb{L}_{\Omega_u Fin_m, u} \simeq \mathbb{L}_{Hom(B, B), id}.$$

Il est facile de voir, par définition du complexe cotangent et du champ dérivé $Hom(B, B)$, qu'il existe des isomorphismes fonctoriel en $M \in Ho(sA - Mod)$

$$\begin{aligned} & [\mathbb{L}_{Hom(B, B), id}, M]_{Ho(sA-Mod)} \simeq [\mathbb{L}_{B/A}, M \otimes_A^{\mathbb{L}} B]_{Ho(sB-Mod)} \\ & \simeq [\mathbb{L}_{B/A}, \mathbb{R}Hom_{sA-Mod}(B^\vee, M)]_{Ho(sB-Mod)} \simeq [\mathbb{L}_{B/A} \otimes_B^{\mathbb{L}} B^\vee, M]_{Ho(sA-Mod)}, \end{aligned}$$

ce qui implique l'énoncé de la proposition. \square

2.2 Restriction des scalaires le long d'un morphisme fini

Soit $p : G \rightarrow H$ un morphisme de et -champs dérivés, et considérons les catégories de champs au-dessus de G et de H

$$dSt_{et}(k/F) := Ho(dAff_k^{\sim, et}/G) \quad dSt_{et}(k/F') := Ho(dAff_k^{\sim, et}/H).$$

Le changement de bases le long du morphisme p induit un foncteur

$$p^* : dSt_{et}(k/H) \rightarrow dSt_{et}(k/G)$$

qui envoie un objet $(F \rightarrow H)$ sur $(F \times_H^h G \rightarrow G)$. Ce foncteur possède un adjoint à droite

$$p_* : dSt_{et}(k/G) \rightarrow dSt_{et}(k/H),$$

qui à un objet $F \rightarrow G$ associe le *et*-champ dérivé des morphismes au-dessus de H

$$p_*(F) := \mathbf{Map}_{/H}(G, F),$$

où $\mathbf{Map}_{/H}$ désigne le Hom interne de la catégorie $dSt_{et}(k/H)$ (voir [HAGI, §3.6] pour l'existence des Hom internes). Le foncteur p_* s'appelle la *restriction des scalaires le long du morphisme p* .

L'adjonction (p^*, p_*) peut aussi se réaliser par une adjonction de Quillen de la façon suivante. On représente p , à équivalence près, par une fibration $p : G \rightarrow H$ entre objets fibrants de $dAff_k^{\sim, et}$. On remarque alors que le foncteur de changement de base

$$- \times_H G : dAff_k^{\sim, et}/H \rightarrow dAff_k^{\sim, et}/G$$

est de Quillen à gauche. L'adjonction induite sur les catégories homotopiques correspondantes est l'adjonction décrite ci-dessus (p^*, p_*) .

L'énoncé suivant est un cas particulier d'un critère de représentabilité pour la restriction des scalaires le long de morphismes propres et plats (voir ??) (la restriction aux morphismes finis simplifie sensiblement la preuve).

Proposition 2.6 *Soit $p : G \rightarrow H$ un morphisme entre *et*-champs dérivés. On suppose que p est 0-géométrique, plat et fini: pour tout $X = \mathbb{R}\underline{Spec} A \rightarrow H$, on a $G \times_H^h X \simeq \mathbb{R}\underline{Spec} B$ avec B une A -algèbre commutative projective et finie. Alors le foncteur*

$$p_* : dSt_{et}(k/G) \rightarrow dSt_{et}(k/H)$$

présERVE les champs dérivés (n, li) -représentables, pour tout $n \geq 0$ (c'est à dire $p_(F) \rightarrow H$ est (n, li) -représentable si $F \rightarrow G$ l'est).*

Preuve: Tout d'abord, l'assertion est locale pour la topologie étale sur H et l'on peut donc supposer que G et H sont tous deux affines, et que le morphisme

$$p : G = \mathbb{R}\underline{Spec} B \rightarrow H = \mathbb{R}\underline{Spec} A$$

correspond à une A -algèbre commutative B , libre et de rang fini comme A -module. Les catégories $dSt_{et}(k/G)$ et $dSt_{et}(k/H)$ sont alors respectivement équivalentes à $dSt_{et}(B)$ et $dSt_{et}(A)$, des champs pour la topologie étales sur $dAff_B := (B - CAlg)^{op}$ et $dAff_A := (A - CAlg)^{op}$. Le foncteur p_* est alors donné par la formule

$$p_*(F)(A') := F(A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B) \quad \forall A' \in A - CAlg.$$

La preuve procède, comme il se doit, par induction sur n . Commençons par traiter le cas $n = 0$. Soit $F = \mathbb{R}\underline{Spec} B'$, affine au-dessus de $\mathbb{R}\underline{Spec} B$. On a

$$p_*(F)(A') := F(A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B) \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}_{B - CAlg}(B', A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B).$$

Pour montrer que $p_*(F)$ est affine, nous utiliserons le résultat de représentabilité des foncteurs définis sur des catégories de modèles combinatoire [To-Ve, Prop. 1.9]. Il nous suffit donc de montrer les deux assertions suivantes.

1. Le foncteur $p_*(F)$ commute avec les limites homotopiques dans $A - CAlg$.
2. Le foncteur $p_*(F)$ commute avec les colimites λ -filtrantes pour λ un cardinal suffisamment grand.

Le point (1) se déduit du fait que B est libre de rang fini comme A -module. En effet, il suffit de voir que $A' \mapsto A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B$ commute aux limites homotopiques. Comme le foncteur d'oubli $B - CAlg \rightarrow sB - Mod$ reflète les limites homotopiques il suffit de voir que le foncteur

$$- \otimes_A^{\mathbb{L}} B : Ho(sA - Mod) \rightarrow Ho(sB - Mod)$$

commute aux limites homotopiques. Mais, comme $B \simeq A^m$ comme A -module, ce dernier foncteur est isomorphe à $M \mapsto M^m$, et commute donc aux limites homotopiques.

Le point (2) se déduit du fait que la catégorie de modèles $B - CAlg$ est combinatoire. Dans une telle catégorie de modèles tout objet x est homotopiquement λ -petit pour un cardinal λ (i.e. $Map(x, -)$ commute aux colimites homotopiques λ -filtrantes, voir [Du]).

Cela termine la preuve de la proposition 2.5 pour le cas $n = 0$. Supposons maintenant qu'elle soit démontrée pour n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$. Soit $F \in dSt_{et}(A)$ un et -champ dérivé $(n + 1, li)$ -géométrique. Soit $\{U_i\}$ des affines et

$$f : U := \coprod_i U_i \longrightarrow F$$

un $(n + 1, li)$ -atlas. Nous allons montrer, par récurrence sur n , que le morphisme induit

$$g := p_*(f) : V := \coprod_i p_*(U_i) \longrightarrow p_*(F)$$

est un $(n + 1, li)$ -atlas. Nous supposons donc que p_* préserve les (m, li) -atlas pour $m \geq n$.

Nous avons déjà vu que chacun des $p_*(U_i)$ était affine (cas $n = 0$). Commençons par voir que le morphisme g est un épimorphisme de champs dérivés pour la topologie étale, et plus généralement que le foncteur p_* préserve les épimorphismes pour la topologie étale. Pour voir cela, soit $G \longrightarrow G'$ un épimorphisme dans $dSt_{et}(B)$, et soit $x \in p_*(G')(A')$ pour $A' \in A - CAlg$. Comme $p_*(G')(A') \simeq G'(A' \otimes_A^L B)$, il existe un recouvrement étale $A' \otimes_A^L B \longrightarrow C$ tel que x se relève, à homotopie près, à $G(C)$. Or, comme B est fini et plat sur A , on sait qu'il existe un recouvrement étale $A' \longrightarrow C'$, et un diagramme commutatif dans $Ho(sk - CAlg)$

$$\begin{array}{ccc} A' \otimes_A^L B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \searrow & \\ C' \otimes_A^L B & & \end{array}$$

(pour démontrer l'existence d'un tel C' on utilise [HAGII, Cor. 2.2.2.9] pour ramener l'énoncé au cas des k -algèbres commutatives non simpliciales, et on utilise qu'une algèbre finie sur un anneau local henselien strict et un produit d'anneaux locaux henséliens stricts). Cela montre que x se relève, à homotopie près, à un élément dans $G(A' \otimes_A^L C') \simeq p_*(G)(A')$, ce qu'il fallait montrer.

Comme le morphisme g est un épimorphisme, le champ dérivé $p_*(F)$ est équivalent au quotient homotopique du groupoïde de Segal nerf de g

$$p_*(F) \simeq Hocolim \left([n] \mapsto \underbrace{V \times_{p_*(F)}^h V \times_{p_*(F)}^h V \dots \times_{p_*(F)}^h V}_{n\text{-fois}} \right)$$

(voir [HAGII, §1.3.4]). Ainsi, pour voir que $p_*(F)$ est $(n + 1, li)$ -géométrique il suffit de voir que ce nerf est un groupoïde de Segal (n, li) -géométrique et lisse, c'est à dire la projection

$$V \times_{p_*(F)}^h V \longrightarrow V$$

est un morphisme (n, li) -représentable et lisse. Comme le morphisme p_* commute aux limites homotopiques (car c'est un foncteur dérivé à droite d'un foncteur de Quillen à droite) on a

$$V \times_{p_*(F)}^h V \simeq \coprod_{i,j} p_*(U_i \times_F^h U_j),$$

et par induction on voit que la projection $V \times_{p_*(F)}^h V \longrightarrow V$ est (n, li) -représentable. Pour terminer la preuve de la proposition il nous reste à montrer que cette projection est lisse, c'est à dire que pour tout i, j la projection

$$p_*(U_i \times_F^h U_j) \longrightarrow p_*(U_i)$$

est lisse. Pour cela nous utiliserons le critère infinitésimal de lissité [HAGII, Prop. 2.2.5.1]. Tout d'abord, le fait que $p_*(U_i \times_F^h U_j) \longrightarrow p_*(U_i)$ soit localement de présentation finie se déduit par induction sur n et par le fait que p_* préserve les objets affines et de présentation finie.

Soit donc $A' \in A\text{-}CAlg$, M un A' -module connexe et $d : A' \longrightarrow A' \oplus M$ une A -dérivation. Notons, $B' := A' \otimes_A^L B$, $M_B := M \otimes_A^L B$, ainsi que

$$d_B : B' \longrightarrow B' \oplus M_B$$

la B -dérivation induite par changement de base le long de $A \rightarrow B$. Soit $A' \oplus_d \Omega_* M$ l'extension de carré nul associée à d , et considérons le morphisme

$$p_*(U_i \times_F^h U_j)(A' \oplus_d \Omega_* M) \longrightarrow p_*(U_i)(A' \oplus_d \Omega_* M) \times_{p_*(U_i)(A')}^h p_*(U_i \times_F^h U_j)(A').$$

Il s'agit de montrer que ce morphisme est surjectif à homotopie près. Tout d'abord, comme B est plat sur A on a

$$(A' \oplus_d \Omega_* M) \otimes_A^L B \simeq B' \oplus_{d_B} \Omega_*(M_B).$$

Ainsi, par adjonction le morphisme ci-dessus s'écrit aussi

$$(U_i \times_F^h U_j)(B' \oplus_{d_B} \Omega_* M_B) \longrightarrow U_i(B' \oplus_{d_B} \Omega_* M_B) \times_{U_i(B')}^h (U_i \times_F^h U_j)(B').$$

Or ce morphisme est surjectif sur les composantes connexes car $U_i \times_F^h U_j \longrightarrow U_i$ est un morphisme (n, li) -représentable et lisse (voir [HAGII, Prop. 2.2.5.1]). Ceci termine la preuve de la proposition 2.5. \square

2.3 Quasi-sections

Dans ce paragraphe nous introduisons le *et*-champ dérivé \underline{QSect}_f , des *quasi-sections* d'un morphisme fixé $f : F' \longrightarrow F$ dans $dStet(k)$. Les quasi-sections sont des sections à extension finie près, et le champ \underline{QSect}_f classifie les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & F \end{array}$$

avec $X' \longrightarrow X$ un morphisme 0-représentable, plat et fini. La définition précise du champ dérivé \underline{QSect}_f va occuper toute la première partie de ce paragraphe. Nous étudierons ensuite la représentabilité de \underline{QSect}_f en fonction de celle de p , ce qui est une façon de combiner les résultats 2.3 et 2.5. Nous introduirons aussi un certain sous-champ ouvert des quasi-sections *quasi-lisses*.

Nous commencerons par le *et*-champ dérivé des carrés commutatifs, noté \underline{Car} , et défini de la façon suivante. On note \square la catégorie classifiant les carrés commutatifs

$$\square := \Delta^1 \times \Delta^1,$$

où Δ^1 est la catégorie avec deux objets 0 et 1, et un unique morphisme $0 \rightarrow 1$

$$\Delta^1 = (0 \rightarrow 1) \quad \square = (0 \rightarrow 1) \times (0 \rightarrow 1).$$

Pour $A \in sk - CAlg$, on considère la catégorie de modèles $dAff_A^{\sim, et}$, ainsi que la catégorie des diagrammes $(dAff_A^{\sim, et})^\square$. On définit $\underline{Car}(A)$ comme étant le nerf de la catégorie des équivalences dans $(dAff_A^{\sim, et})^\square$

$$\underline{Car}(A) := N(w(dAff_A^{\sim, et})^\square).$$

Lorsque $A \rightarrow B$ est un morphisme dans $sk - CAlg$, on dispose d'un foncteur d'oubli $dAff_B \rightarrow dAff_A$, qui induit un foncteur de restriction $(dAff_A^{\sim, et})^\square \rightarrow (dAff_B^{\sim, et})^\square$. Ce foncteur de restriction préserve les équivalences et induit donc un morphisme d'ensembles simpliciaux $\underline{Car}(A) \rightarrow \underline{Car}(B)$. L'association $A \mapsto \underline{Car}(A)$ définit de cette façon un préfaisceau simplicial \underline{Car} sur $dAff_k$. On vérifie que \underline{Car} est un *et*-champ dérivé (en utilisant par exemple les techniques présentées à la fin du §2.3 de [To1]).

De la même façon, on définit \underline{Mor} , le *et*-champ dérivé des morphismes, qui envoie A sur le nerf des équivalences dans $(dAff_A^{\sim, et})^{\Delta^1}$.

Fixons maintenant $f : F' \rightarrow F$ un morphisme dans $dSt_{et}(k)$, que nous prenons soins de relever en un morphisme dans $dAff_k^{\sim, et}$ (quitte à prendre des remplacements fibrants et cofibrants). L'inclusion en l'objet 1

$$\{1\} \times id : \Delta^1 \hookrightarrow \square = \Delta^1 \times \Delta^1$$

induit un morphisme de restriction

$$\underline{Car} \rightarrow \underline{Mor}.$$

Ce morphisme envoie un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & F \end{array}$$

sur le morphisme $F' \rightarrow F$. Le morphisme f définit un point global $* \rightarrow \underline{Mor}$, et on pose

$$\underline{Car}_{/f} := * \times_{\underline{Mor}}^h \underline{Car}.$$

Le *et*-champ dérivé \underline{Car} est le champ des carrés commutatifs dont le morphisme but est fixé égal à f .

On considère un sous-champ $\underline{Car}'_m \subset \underline{Car}$: pour $A \in sk - CAlg$, $\underline{Car}'_m(A)$ est la réunion des composantes connexes de $\underline{Car}(A)$ formée des diagrammes commutatifs dans $dSt_{et}(A)$

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & F \end{array}$$

avec $G \simeq \mathbb{R}Spec A$ et $G' \rightarrow \mathbb{R}Spec A$ plat et fini de rang m (c'est un sous-champ car être affine est une condition locale, ainsi qu'être plat et fini). On considère alors le carré homotopiquement cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{QSect}_{f,m} & \longrightarrow & \underline{Car}_{/f} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Car}'_m & \longrightarrow & \underline{Car}. \end{array}$$

Définition 2.7 Soit $f : F' \rightarrow F$ comme ci-dessus. Le *et*-champ dérivé des quasi-sections de f de rang m est $\underline{QSect}_{f,m} \in dSt_{et}(k)$ défini ci-dessus.

Notons qu'il existe une projection naturelle $\underline{QSect}_{f,m} \longrightarrow F$, qui à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & F \end{array}$$

avec $G \simeq \mathbb{R}\underline{Spec} A$, associe le A -point x de F correspondant (nous laissons au lecteur le soin de définir cette projection de manière rigoureuse).

On combine maintenant les deux résultats de représentabilité Prop. 2.3 et 2.6 en l'énoncé suivant.

Proposition 2.8 *Si $f : F' \longrightarrow F$ est un morphisme (n, li) -représentable dans $dSt_{et}(k)$, avec $n > 0$. Alors la projection $\underline{QSect}_{f,m} \longrightarrow F$ est (n, li) -géométrique.*

Preuve: On dispose d'un morphisme $\underline{QSect}_{f,m} \longrightarrow \underline{Fin}_m$, qui à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}\underline{Spec} A & \longrightarrow & F \end{array}$$

associe le champ affine G' , de la forme $\mathbb{R}\underline{Spec} B$, pour B une A -algèbre plate et finie de rang m (nous laissons le soin au lecteur de revenir sur les définition de $\underline{QSect}_{f,m}$ et \underline{Fin}_m afin de définir proprement ce morphisme $\underline{QSect}_{f,m} \rightarrow \underline{Fin}_m$ dans $dSt_{et}(k)$). Si l'on se fixe $A \rightarrow B$ plate et finie de rang m , on dispose d'un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} \underline{Map}_{/\mathbb{R}\underline{Spec} A}(\mathbb{R}\underline{Spec} B, F' \times_{F'}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\underline{Spec} A) & \longrightarrow & \underline{QSect}_{f,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}\underline{Spec} A & \xrightarrow{B} & \underline{Fin}_m \times^h F. \end{array}$$

La proposition 2.6, et l'hypothèse de représentabilité sur f , implique que $\underline{Map}_{/\mathbb{R}\underline{Spec} A}(\mathbb{R}\underline{Spec} B, F' \times_{F'}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\underline{Spec} A)$ est (n, li) -représentable au-dessus de $\mathbb{R}\underline{Spec} A$. Ceci montre que le morphisme $\underline{QSect}_{f,m} \rightarrow \underline{Fin}_m \times^h F$ est (n, li) -géométrique. Comme \underline{Fin}_m est $(1, li)$ -géométrique (prop. 2.3) il s'en suit que $\underline{QSect}_{f,m} \longrightarrow F$ est (n, li) -représentable (on utilise ici $n > 0$). \square

Nous aurons besoin d'un résultat un peu plus fin. Considérons le carré homotopiquement cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{QSect}_{f,m}^{str} & \longrightarrow & \underline{QSect}_{f,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Fin}_m^{str} & \longrightarrow & \underline{Fin}_m. \end{array}$$

Définition 2.9 *Soit $f : F' \longrightarrow F$ comme ci-dessus. Le et-champ dérivé des quasi-sections strictes de f de rang m est $\underline{QSect}_{f,m}^{str} \in dSt_{et}(k)$ défini ci-dessus.*

Proposition 2.10 *Si $f : F' \longrightarrow F$ est un morphisme (n, li) -représentable dans $dSt_{et}(k)$. Alors la projection naturelle $\underline{QSect}_{f,m}^{str} \longrightarrow F$ est (n, li) -géométrique.*

Preuve: Au cours de la preuve de la proposition 2.8 nous avons vu que le morphisme $\underline{QSect}_{f,m} \rightarrow \underline{Fin}_m \times^h F$ était (n, li) -représentable (ce point n'utilisait pas l'hypothèse $n > 0$). Il s'en suit par changement de bases que $\underline{QSect}_{f,m}^{str} \rightarrow \underline{Fin}_m^{str} \times^h F$ est (n, li) -représentable. Comme \underline{Fin}_m^{str} est affine, on trouve que $\underline{QSect}_{f,m}^{str} \rightarrow F$ est (n, li) -géométrique. \square

Pour terminer nous allons considérer un certain sous-champ $\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql} \subset \underline{QSect}_{f,m}^{str}$, formée des quasi-sections *quasi-lisses*. Nous continuons avec un morphisme $f : F' \rightarrow F$ que nous supposons (n, li) -représentable. Soit $A \in sk - CAlg$, et soit $q : \mathbb{R}Spec A \rightarrow \underline{QSect}_{f,m}^{str}$ un morphisme correspondant à un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}Spec B & \xrightarrow{u} & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}Spec A & \longrightarrow & F \end{array}$$

Nous dirons que la quasi-section q est *quasi-lisse* (on pourrait aussi dire *l.c.i.*) si le complexe cotangent du morphisme u est parfait et d'amplitude contenue dans $[-1, \infty[$ (on rappelle que \mathbb{L}_u est la cofibre homotopique du morphisme $\mathbb{L}_{F,u} \rightarrow \mathbb{L}_B$). Nous noterons $\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql}$ le sous-préfaisceau simplicial de $\underline{QSect}_{f,m}^{str}$ formé des quasi-sections qui sont quasi-lisses: pour $A \in sk - CAlg$, l'ensemble simplicial $\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql}(A)$ est la réunion des composantes connexes de $\underline{QSect}_{f,m}^{str}(A)$ qui consistent en des carrés comme ci-dessus avec u quasi-lisse.

Proposition 2.11 *Soit $f : F' \rightarrow F$ un morphisme (n, li) -représentable plat et presque de présentation finie. Le morphisme d'inclusion*

$$\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql} \rightarrow \underline{QSect}_{f,m}^{str}$$

est une immersion de Zariski ouverte.

Preuve: Un morphisme $A \rightarrow B$ dans $sk - CAlg$ est dit *quasi-lisse* s'il est homotopiquement de présentation finie et si de plus son complexe cotangent $\mathbb{L}_{B/A}$ est homotopiquement de présentation finie dans $sB - Mod$ (on dit aussi *parfait*, tout au moins lorsque l'on considère $\mathbb{L}_{B/A}$ comme un B -module *stable*, voir [HAGII, §1.2.11]), et d'amplitude contenue dans $[-1, 0]$. Reappelons que cette dernière condition signifie que pour tout B -module connexe et simplement connexe M on a $[\mathbb{L}_{B/A}, M] = 0$. En utilisant [HAGII, Prop. 2.2.2.4] on voit qu'un tel morphisme est quasi-lisse si et seulement si $\pi_0(B)$ est une $\pi_0(A)$ -algèbre de présentation finie et si de plus $\mathbb{L}_{B/A}$ est parfait et d'amplitude contenue dans $[-1, 0]$. On remarque que la notion de quasi-lissité est locale pour la topologie étale sur $dAff_k$, et s'étend donc de manière usuelle en une notion de morphismes entre *et*-champs dérivés (n, li) -géométriques (voir par exemple [HAGII, §1.3.6]).

Pour démontrer la proposition on considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y = \mathbb{R}Spec B & \xrightarrow{u} & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X = \mathbb{R}Spec A & \xrightarrow{v} & F, \end{array}$$

avec B une A -algèbre simpliciale plate et finie (de rang m). Il nous faut montrer que le lieu dans X au-dessus duquel le morphisme u est quasi-lisse est un ouvert $U \subset X$. Comme ceci est une assertion locale pour la topologie étale sur X , et que localement sur X_{et} le morphisme u se factorise par un $(n-1, li)$ -atlas de $F' \times_F X$, on se ramène

au cas où $F = X$ (et $v = id$) et $F' = \mathbb{R}\underline{Spec} C$ est affine. On dispose donc d'un diagramme commutatif d'affines

$$\begin{array}{ccc} Y = \mathbb{R}\underline{Spec} B & \xrightarrow{u} & Z = \mathbb{R}\underline{Spec} C \\ \downarrow & \swarrow & \\ X = \mathbb{R}\underline{Spec} A & & \end{array}$$

avec B plate et finie sur A et C une A -algèbre simpliciale plate et presque de présentation finie. On considère $U \subset X$ le sous-objet de X qui pour $A' \in sk-CAlg$ consiste en tous les morphismes $A \rightarrow A'$ tels que le morphisme induit

$$C \otimes_A^{\mathbb{L}} A' \rightarrow B \otimes_A^{\mathbb{L}} A'$$

soit quasi-lisse. On doit montrer que U est un ouvert Zariski de X . Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.12 *Soit $A \in sk-CAlg$ et $M \in Ho(sA-Mod)$. Alors M est parfait d'amplitude contenue dans $[a, 0]$ si et seulement si $M \otimes_A^{\mathbb{L}} \pi_0(A)$ est parfait et d'amplitude contenue dans $[a, 0]$ en tant que $\pi_0(A)$ -module simplicial.*

Preuve: Le nécessité se déduit du fait qu'être parfait d'amplitude donnée est une propriété stable par changement de bases. Pour la suffisance on procède par récurrence sur l'amplitude. Pour $a = 0$ c'est l'énoncé [HAGII, Lem. 2.2.2.2]. Dire que $M \otimes_A^{\mathbb{L}} \pi_0(A)$ est parfait d'amplitude contenue dans $[a, 0]$ équivaut à dire qu'il existe un morphisme

$$p : \pi_0(A)^n \rightarrow M \otimes_A^{\mathbb{L}} \pi_0(A)$$

dont la cofibre homotopique est parfaite et d'amplitude contenue dans $[a, -1]$. Le morphisme p se relève de façon unique en un morphisme

$$p' : A^n \rightarrow M$$

dont la cofibre est un A -module simplicial N tel que $N \otimes_A^{\mathbb{L}} \pi_0(A)$ est parfait et d'amplitude contenue dans $[a, -1]$. Par récurrence N est donc parfait et d'amplitude contenue dans $[a, -1]$. La suite exacte de cofibrations $A^n \rightarrow M \rightarrow N$ implique donc que M est parfait et d'amplitude contenue dans $[a, 0]$. \square

Revenons à notre diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y = \mathbb{R}\underline{Spec} B & \xrightarrow{u} & Z = \mathbb{R}\underline{Spec} C \\ \downarrow & \swarrow & \\ X = \mathbb{R}\underline{Spec} A & & \end{array}$$

Le lemme précédent implique que u est quasi-lisse si et seulement si $\mathbb{L}_u \otimes_B^{\mathbb{L}} \pi_0(B)$ est parfait d'amplitude dans $[-1, 0]$. Comme B et C sont plates sur A on a

$$\pi_0(B) \simeq B \otimes_A^{\mathbb{L}} \pi_0 A \quad \pi_0(C) \simeq C \otimes_A^{\mathbb{L}} \pi_0 A,$$

et donc

$$\mathbb{L}_u \otimes_B^{\mathbb{L}} \pi_0(B) \simeq \mathbb{L}_{\pi_0(u)},$$

où $\pi_0(u) : \pi_0(C) \rightarrow \pi_0(B)$ est le morphisme induit. Comme les topologies de Zariski de A et de $\pi_0(A)$ coïncident on voit qu'il suffit de montrer que le lieu dans le schéma $Spec \pi_0(A)$, au-dessus duquel $\pi_0(u)$ est quasi-lisse, est un ouvert Zariski. En d'autres termes, nous avons ramené le problème au cas où A, B et C sont des k -algèbres commutatives non-simpliciales. En utilisant qu'un morphisme de présentation entre schémas affines est quasi-lisse si et seulement s'il est l.c.i. (voir ??), on voit que l'énoncé devient alors le fait bien connu suivant, dans le cadre des schémas affines (non-dérivés).

Lemme 2.13 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Y = \text{Spec } B & \xrightarrow{u} & Z = \text{Spec } C \\ \downarrow p & \swarrow q & \\ X = \text{Spec } A & & \end{array}$$

un diagramme commutatif de schémas affines, avec p plat et fini, et q plat et de présentation finie. Soit $x \in X$ un point tel que le morphisme induit sur les fibres $Y_x \rightarrow Z_x$ soit de locale intersection complète. Alors, u est de locale intersection complète au-dessus d'un voisinage Zariski de $p(x) \in X$.

Preuve: Comme tout est de présentation finie au-dessus de A on se ramène, par un argument standard, au cas où tous anneaux en jeu sont noethériens (voir ??). Comme p est fini, et donc propre, il suffit de montrer que si $x \in X$ est tel que $u_x : Y_x \rightarrow Z_x$ soit l.c.i., il existe un voisinage ouvert V de Y_x dans Y tel que u soit l.c.i. sur V . Le morphisme u_x étant l.c.i., on peut trouver, localement sur Y_x , une factorisation

$$u_x : Y_x \xrightarrow{j} Z_x \times \mathbb{A}^m \longrightarrow Z_x$$

avec j une immersion fermée régulière. L'immersion se relève un un morphisme $i : Y \rightarrow Z \times \mathbb{A}^m$ qui factorise u . Soit (f_1, \dots, f_r) des générateurs de l'idéal définissant Y dans $Z \times \mathbb{A}^m$, et formont la dg-algèbre de Koszul associé $K(f)$. On dispose d'une augmentation naturelle $K(f) \rightarrow B$, que l'on considère comme un morphisme de complexes cohérents bornés sur $Z \times \mathbb{A}^m$. Par hypothèse ce morphisme de complexe est un quasi-isomorphisme de complexes lorsqu'il est restreint à Y_x , et reste donc un quasi-isomorphisme sur un voisinage ouvert de Y_x dans Y . Mais ceci implique que u est l.c.i. sur un voisinage ouvert de Y_x . \square

Cela termine la preuve de la proposition 2.10. \square

2.4 Preuve du théorème

Nous sommes maintenant en mesure de donner une preuve du théorème 2.1. Pour cela, nous supposons que ϕ_n est une équivalence de catégorie, pour un $n \geq 0$. Pour montrer que ϕ_{n+1} est aussi une équivalence il suffit, d'après 2.2, de montrer que ϕ_{n+1} est essentiellement surjectif.

Soit donc $F \in dSt_{fppf}^{n+1, pl}(k)$. On sait que le morphisme diagonal $F \rightarrow F \times^h F$ est (n, pl) -représentable, et donc aussi (n, li) -représentable par récurrence. Soit $\{U_i\}$ une famille d'affines et

$$p = \coprod_i p_i : U := \coprod_i U_i \rightarrow F$$

un $(n+1, pl)$ -atlas. Pour tout i , et tout entier m , on dispose du *et*-champ dérivé $\underline{QSect}_{p_i, m}^{str}$ des quasi-sections strictes de rang m du morphisme p_i . On note $V_{i, m} \subset \underline{QSect}_{p_i, m}^{str}$ le sous-champ des quasi-sections quasi-lisses. D'après la proposition 1.2, le morphisme $V_{i, m} \rightarrow F$ est $(n+1, li)$ -représentable, car Zariski ouvert dans un *et*-champ dérivé (n, li) -représentable au-dessus de F (le seul cas où il est nécessaire de passer de n à $n+1$ est lorsque $n=0$, l'ouvert $V_{i, m}$ n'étant pas forcément affine). On considère le morphisme de projection

$$V := \coprod_{i, m} V_{i, m} \rightarrow F.$$

Pour terminer la preuve du théorème 2.1 il nous suffit de montrer les trois assertions suivantes.

1. Chaque *et*-champ $V_{i, m}$ est $(n+1, li)$ -géométrique.

2. Chaque morphisme $V_{i,m} \rightarrow F$ est $(n+1, li)$ -représentable et lisse.
3. Pour tout corps algébriquement clos L , le morphisme induit

$$\coprod_{i,m} : V_{i,m}(L) \rightarrow F(L)$$

est surjectif sur les composantes connexes.

Montrer les propriétés (1) – (3) ci-dessus impliquera que F est (n, li) -géométrique: un $(n+1, li)$ -atlas pour V induisant un (n, li) -atlas pour F .

(1) Il suffit de montrer que les *et*-champs $\underline{QSect}_{p_i,m}^{str}$ sont $(n+1, li)$ -géométriques, car les $V_{i,m}$ sont des ouverts des $\underline{QSect}_{p_i,m}^{str}$. On sait, d'après la proposition 2.10 que la projection $\underline{QSect}_{p_i,m}^{str} \rightarrow F$ est (n, li) -géométrique. Par construction, il existe un diagramme commutatif de *et*-champs dérivés

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\underline{QSect}}_{p_i,m}^{str} & \xrightarrow{u} & U_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{QSect}_{p_i,m}^{str} & \longrightarrow & F, \end{array}$$

où $\widetilde{\underline{QSect}}_{p_i,m}^{str} \rightarrow \underline{QSect}_{p_i,m}^{str}$ est un morphisme plat et fini (il s'agit de l'image réciproque de l'objet universel $\widetilde{\underline{Fin}}_m^{str} \rightarrow \underline{Fin}_m^{str}$). Comme $\widetilde{\underline{QSect}}_{p_i,m}^{str}$ et U_i sont (n, li) -représentables au-dessus de F , il s'en suit que le morphisme u est aussi (n, li) -représentable. Ceci implique que $\widetilde{\underline{QSect}}_{p_i,m}^{str}$ est un *et*-champ dérivé (n, li) -géométrique. Soit Y_j des affines et

$$\coprod_j Y_j \rightarrow \widetilde{\underline{QSect}}_{p_i,m}^{str}$$

un $(n-1, li)$ -atlas, en supposant que $n > 0$. Le morphisme composé

$$\coprod_j Y_j \rightarrow \underline{QSect}_{p_i,m}^{str}$$

est alors un $(n-1, pl)$ -atlas, ce qui par l'hypothèse de récurrence implique que $\underline{QSect}_{p_i,m}^{str}$ est (n, li) -géométrique si $n > 0$. Il faut ici prendre garde au cas $n = 0$, qui doit se traiter de manière indépendante. Dans ce cas on considère le diagramme homotopiquement cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\underline{QSect}}_{p_i,m}^{str} & \longrightarrow & \underline{QSect}_{p_i,m}^{str} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\underline{Fin}}_m^{str} & \xrightarrow{f} & \underline{Fin}_m^{str}, \end{array}$$

où f est la famille universelle des morphismes plats finis de rang m . On a vu que $\widetilde{\underline{QSect}}_{p_i,m}^{str}$ était affine, ainsi le *et*-champ dérivé $\underline{QSect}_{p_i,m}^{str}$ est localement, pour la topologie plate sur \underline{Fin}_m^{str} , affine. On sait, d'après [HAGII, Prop. 1.3.2.8] que cela implique que $\underline{QSect}_{p_i,m}^{str}$ est affine.

(2) Les morphismes $V_{i,m} \rightarrow F$ sont $(n+1, li)$ -représentables, d'après (1) et car la diagonale de F est (n, li) -représentable (et donc $(n+1, li)$ -représentable). Par changement de bases sur F on se ramène à montrer le lemme suivant.

Lemme 2.14 *Soit $f : F \rightarrow X$ un morphisme $(n+1, li)$ -représentable plat et presque de présentation finie avec X affine. Le morphisme naturel*

$$\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql} \rightarrow X$$

est lisse.

Preuve du lemme: Nous utiliserons le critère [HAGII, Cor. 2.2.5.3]. On considère la factorisation naturelle

$$\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql} \xrightarrow{p} X \times^h \underline{Fin}_m^{str} \xrightarrow{q} X,$$

et les morphismes sur les tronqués associés

$$t_0(\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql}) \xrightarrow{p} t_0(X) \times t_0(\underline{Fin}_m^{str}) \xrightarrow{q} t_0(X).$$

Pour voir que $t_0(\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql})$ est localement de présentation finie sur $t_0(X)$, il suffit de voir que $t_0(\underline{Fin}_m^{str})$ est un schéma affine (non-dérivé) de présentation finie sur $Spec k$, et que p est localement de présentation finie. Le schéma $t_0(\underline{Fin}_m^{str})$ classe les structures de k -algèbres commutatives sur k^m , et est donc de présentation finie. Il reste à voir que p est un morphisme localement de présentation finie de et -champs non-dérivés.

Pour cela, soit Y un schéma affine et $Y \rightarrow t_0(X) \times t_0(\underline{Fin}_m^{str})$ un morphisme correspondant à un morphisme $Y \rightarrow t_0(X)$ et un morphisme $Y' \rightarrow Y$ libre de rang m . Le produit fibré homotopique

$$t_0(\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql}) \times_{t_0(X) \times t_0(\underline{Fin}_m^{str})}^h t_0(X)$$

est un ouvert du et -champ (non-dérivé) $\underline{Map}_{/Y}(Y', F \times_{t_0(X)}^h Y)$, des Y -morphisms de Y' vers F (correspondant au sous-champ des morphismes quasi-lisses). Au cours de la preuve de la proposition 2.8 nous avons vu qu'un (n, li) -atlas de $\underline{Map}_{/Y}(Y', F \times_{t_0(X)}^h Y)$ était donné par $\underline{Map}_{/Y}(Y', t_0(U))$, où U est un (n, li) -atlas de F . Ainsi, la locale présentabilité du morphisme p ci-dessus se déduit du fait que pour tout schéma affine $U \rightarrow Y$, le schéma affine des morphismes $\underline{Map}_{/Y}(Y', U)$ est localement de présentation finie sur Y .

Nous venons donc de voir que $t_0(\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql}) \rightarrow t_0(X)$ est localement de présentation finie. Il reste à montrer que les complexes cotangents du morphisme $\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql} \rightarrow X$ sont parfaits et d'amplitude contenue dans $[0, \infty[$. Pour cela, on utilise la factorisation

$$\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql} \xrightarrow{p} X \times^h \underline{Fin}_m \xrightarrow{q} X.$$

Ainsi, pour tout $B \in sk - CAlg$, $Y := \mathbb{R}Spec B$, et tout morphisme $v : Y \rightarrow \underline{QSect}_{f,m}^{str,ql}$, on dispose d'un triangle distingué de B -modules stables

$$\mathbb{L}_{X \times^h \underline{Fin}_m / X, pv} \longrightarrow \mathbb{L}_{\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql} / X, v} \longrightarrow \mathbb{L}_{\underline{QSect}_{f,m}^{str,ql} / X \times^h \underline{Fin}_m, v}.$$

Supposons que le morphisme v corresponde à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{u} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X, \end{array}$$

avec $Y' = \mathbb{R}Spec B'$ plat et fini sur Y , et u quasi-lisse.

Alors, on a

$$\mathbb{L}_{\underline{QSec}_{f,m}^{str,ql}/X \times^h Fin_m, v} \simeq \mathbb{L}_{\underline{Map}_Y(Y', F \times_X^h Y), u}.$$

Tout comme pour la proposition 2.5 on voit qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\mathbb{L}_{\underline{Map}_Y(Y', F \times_X^h Y), u} \simeq \mathbb{L}_{F, u} \otimes_B^{\mathbb{L}} (B')^\vee \in Ho(Sp(sB - Mod)).$$

On a de même,

$$\mathbb{L}_{X \times^h Fin_m^{str}/X, pv} \simeq \mathbb{L}_{Fin_m, w} \in Ho(Sp(sB - Mod)),$$

où $w : Y \rightarrow Fin_m$ est le morphisme induit, correspondant au morphisme fini et plat $Y' \rightarrow Y$. Ainsi, d'après la proposition 2.5 $\mathbb{L}_{\underline{QSec}_{f,m}^{str,ql}/X, v}$ est la fibre homotopique, dans $Ho(Sp(sB - Mod))$, du morphisme naturel

$$\mathbb{L}_{F, u} \otimes_B^{\mathbb{L}} (B')^\vee \rightarrow \mathbb{L}_{B'/B} \otimes_B^{\mathbb{L}} (B')^\vee,$$

(induit par le morphisme $\mathbb{L}_{F, u} \rightarrow \mathbb{L}_{B'/B}$ induit par u). Comme u est quasi-lisse cette fibre homotopique est parfaite et d'amplitude contenue dans $[0, \infty[$, en tant que B' -module. Mais comme B' est projective et de rang fini sur B le B -module $\mathbb{L}_{\underline{QSec}_{f,m}^{str,ql}/X, v}$ est aussi parfait et d'amplitude contenue dans $[0, \infty[$. \square

(3) Soit $x : Spec L \rightarrow F$ un point géométrique de F , et notons

$$\coprod_i q_i : \coprod_i G_i \rightarrow Spec L$$

le changement de base du $(n+1, pl)$ -atlas $\{U_i\}$ le long de x . Remarquons que chaque G_i est plat sur $Spec L$, et donc est un *et*-champ non-dérivé (i.e. équivalent à son tronqué). Il nous suffit de montrer que $\underline{QSec}_{q_i, m}^{str, ql}(L)$ est non-vide pour un i et un m . Pour cela, soit V_i un affine non-vide et $V_i \rightarrow G_i$ un morphisme lisse (pour un i fixé quelconque). Comme V_i est plat sur $Spec L$, il s'agit d'un schéma affine non-dérivé. Soit alors $y \in V_i$ un point Cohen-MacCauley de V_i , et (f_1, \dots, f_r) une suite régulière en y . La L -algèbre $R := \mathcal{O}_{V_i, y}/(f_1, \dots, f_r)$ est finie sur L , de dimension un entier m , et part définition le morphisme naturel $Spec R \rightarrow V_i$ est l.c.i. Ces données fournissent une quasi-section quasi-lisse du morphisme $V_i \rightarrow Spec L$. Comme le morphisme $V_i \rightarrow G_i$ est lisse, l'image de cette quasi-section dans G_i fournit un élément dans $\pi_0(\underline{QSec}_{q_i, m}^{str, ql}(L))$, montrant ainsi que $\underline{QSec}_{q_i, m}^{str, ql}(L)$ n'est pas vide.

Nous venons de voir que les assertions (1) – (3) étaient satisfaites, ce qui finit de démontrer le théorème 2.1.

3 Application à la comparaison entre cohomologies étales et plates

Pour un *fppf*-champ dérivé, nous savons maintenant qu'être (n, pl) -géométrique et (n, li) -géométrique sont deux conditions équivalentes. Nous dirons alors simplement *être n -géométrique*. Nous dirons aussi *être géométrique* pour signifier *être n -géométrique pour un entier n* .

Rappelons que pour une catégorie de modèles M (ou plus généralement pour une sous-catégorie pleine d'une catégorie de modèles, stable par équivalence) on dispose d'une notion d'objet en groupoïdes de Segal X_* dans M (voir [HAGI, Def. 4.9.1]). Nous dirons qu'un objet en groupoïdes de Segal X_* est *un objet en groupes dans M* si l'objet $X_0 \in M$ est équivalent à l'objet final $*$. Nous appellerons alors *τ -champ dérivé en groupes* un objet en groupes X_* dans la catégorie de modèles $dAff_k^{\sim, \tau}$, tel que chaque X_n soit un τ -champ. Nous abuserons souvent du fait de désigner l'objet X_* par son objet sous-jacent $G := X_1 \in dAff_k^{\sim, \tau}$. Pour un τ -champ dérivé en groupes G on dispose de son τ -champ dérivé classifiant $K_\tau(G, 1) \in dSt_\tau(k)$ (voir [HAGI, Def. 4.9.1]).

Par définition, un τ -champ dérivé en m -groupes est un objet en groupes dans la catégorie de (pseudo, voir [HAGI, Def. 4.1.1]) modèles des τ -champs dérivés en $(m-1)$ -groupes. Pour un tel objet G , son τ -champ dérivé classifiant $K_\tau(G, 1)$ possède une structure induite de τ -champ dérivé en $(m-1)$ -groupes. Par itération on obtient ainsi un τ -champ classifiant $K_\tau(G, m)$.

Définition 3.1 Soit X un τ -champ dérivé et G un τ -champ dérivé en m -groupes. La cohomologie de X à coefficients dans G est définie par

$$H_\tau^{m-i}(X, G) := \pi_i(\text{Map}(X, K_\tau(G, m))).$$

Tout d'abord, $K_\tau(G, m)$ ne possédant aucune structure de groupe induite les $H_\tau^j(X, G)$ sont des groupes abéliens pour $j \leq m-2$, $H_\tau^{m-1}(X, G)$ est un groupe, et $H_\tau^m(X, G)$ est un ensemble pointé. On remarque que $H_\tau^j(X, G)$ n'est définie que pour $j \leq m$, mais peut être non-nul pour $j < 0$. Enfin, lorsque G est un k -schéma en groupes (resp. en groupes abéliens) et X un k -schéma, les $H_\tau^j(X, G)$ coïncident avec la cohomologie de X à coefficients dans G pour la topologie τ au sens usuel de la cohomologie des schémas.

Une conséquence du théorème 2.1 est le corollaire suivant. Il affirme en particulier que la cohomologie $fppf$ et étale, à coefficients dans un schéma en groupes plats de présentation fini, ne diffèrent essentiellement qu'en degré 1.

Corollaire 3.2 Soit G un $fppf$ -champ dérivé en m -groupes.

1. Si G est n -géométrique, plat et localement de présentation presque finie sur $\text{Spec} k$, alors $K_{fppf}(G, m)$ est $(n+m)$ -géométrique plat et de présentation presque finie sur $\text{Spec} k$. Si $m > 0$, alors $K_{fppf}(G, m)$ est lisse sur $\text{Spec} k$.
2. Si G est géométrique et plat de présentation presque finie sur $\text{Spec} k$, alors le morphisme $G \rightarrow \text{Spec} k$ est quasi-lisse.
3. Si G est géométrique et lisse sur $\text{Spec} k$, alors pour tout k -schéma X , le morphisme naturel

$$H_{\text{ét}}^i(X, G) \longrightarrow H_{fppf}^i(X, G)$$

est bijectif pour tout $i \leq m$.

4. Supposons que G soit un k -schémas en groupes abéliens (ou plus généralement un k -espace algébrique en groupes abéliens), plat et localement de présentation sur $\text{Spec} k$. Alors, pour tout k -schéma X il existe une suite exacte longue fonctorielle en X et en G

$$H_{\text{ét}}^{i-2}(X, \underline{H}_{fppf}^1(-, G)) \longrightarrow H_{\text{ét}}^i(X, G) \longrightarrow H_{fppf}^i(X, G) \longrightarrow H_{\text{ét}}^{i-1}(X, \underline{H}_{fppf}^1(-, G)) \longrightarrow H_{\text{ét}}^{i+1}(X, G),$$

où $\underline{H}_{fppf}^1(-, G)$ est le faisceau, pour la topologie étale, associé au préfaisceau $U \mapsto H_{fppf}^1(U, G)$.

5. Supposons que G soit un k -schémas en groupes abéliens (ou plus généralement un k -espace algébrique en groupes abéliens), plat et localement de présentation sur $\text{Spec} k$. Alors, pour tout k -schéma X et toute classe $\alpha \in H_{fppf}^i(X, G)$, avec $i > 1$, il existe un recouvrement étale $u : X' \rightarrow X$ tel que $u^*(\alpha) = 0$. En particulier, si X est hensélien strict alors $H_{fppf}^i(X, G) = 0$ pour tout $i > 1$.

Preuve: (1) Le $fppf$ -champ dérivé $K_{fppf}(G, m)$ est, par des applications successives de [HAGII, Prop. 1.3.4.2], $(m+n, pl)$ -géométrique, et donc $(n+m)$ -géométrique. Pour tout $m > 0$ le point global naturel $\text{Spec} k \rightarrow K_{fppf}(G, m)$ est plat et localement de présentation presque finie. Ainsi, $K_{fppf}(G, m)$ est localement pour la topologie $fppf$ lisse sur $\text{Spec} k$, ce qui d'après la proposition 1.2 implique qu'il est lisse sur $\text{Spec} k$.

(2) D'après le point précédent $K_{fppf}(G, 1)$ est lisse. Le *et*-champ dérivé G , qui s'écrit aussi $*$ $\times_{K_{fppf}(G,1)}^h *$, est donc un produit fibré de *et*-champs dérivés lisses. Il est donc quasi-lisse.

(3) Le *et*-champ dérivé $K_{et}(G, m)$ est, par une utilisation répétée de [HAGII, Prop. 1.3.4.2], $(n + m, li)$ -géométrique. Le lemme 2.2 (1) implique que pour *et*-champ X (et donc, en particulier, pour tout k -schéma X), le morphisme naturel

$$H_{et}^i(X, G) = [X, K_{et}(G, i)] \longrightarrow [X, K_{fppf}(G, i)] = H_{fppf}^i(X, G)$$

est bijectif, pour tout $i \leq m$.

(4) On considère $K_{fppf}(G, 1)$. D'après le point (1) c'est un champ dérivé géométrique en m -groupes (pour tout m car G est abélien), lisse sur $Spec k$. Soit m un entier assez grand. Le *et*-champ dérivé $K_{et}(K_{fppf}(G, 1), m - 1)$ est donc géométrique, et se trouve donc être un *fppf*-champ (voir le lemme 2.2). On a donc

$$K_{fppf}(G, m) \simeq K_{fppf}(K_{fppf}(G, 1), m - 1) \simeq K_{et}(K_{fppf}(G, 1), m - 1).$$

Ainsi, les faisceaux d'homotopie, pour la topologie étale, du *et*-champ tronqué $t_0(K_{fppf}(G, m))$ sont donnés par

$$\pi_m(t_0(K_{fppf}(G, m))) \simeq G \quad \pi_{m-1}(t_0(K_{fppf}(G, m))) \simeq \underline{H}_{fppf}^1(-, G) \quad \pi_{m-1}(t_0(K_{fppf}(G, m))) = 0 \text{ pour } i < m-1.$$

Il existe donc une suite exacte de fibration de *et*-champs non-dérivés

$$t_0(K_{et}(G, m)) \longrightarrow t_0(K_{fppf}(G, m)) \longrightarrow t_0(K_{et}(\underline{H}_{fppf}^1(-, G), m - 1)).$$

Pour tout k -schéma, cette suite exacte de fibration induit une suite exacte de fibration d'ensembles simpliciaux

$$Map(X, K_{et}(G, m)) \longrightarrow Map(X, K_{fppf}(G, m)) \longrightarrow Map(X, K_{et}(\underline{H}_{fppf}^1(-, G), m - 1)),$$

obtenue en remarquant que comme X est tronqué, on a $Map(X, F) \simeq Map(X, t_0(F))$ pour tout *et*-champ dérivé. La suite exacte longue en homotopie, associée à cette suite exacte de fibration, est la suite exacte cherchée.

(5) Se déduit, par exemple, du point (4). □

Remarque 3.3 1. Comme nous l'avons vu au cours de la preuve, le point (3) du corollaire précédent est vrai pour tout *et*-champ dérivé X . De même, le point (4) est vrai pour tout *et*-champ tronqué X .

2. Le point (4) peut aussi s'exprimer sous la forme $\mathbb{R}^i f_*(G) = 0$, pour tout $i > 1$, et tout schéma en groupes plats localement de présentation finie G , et où $f : Af f_k^{\sim, fppf} \longrightarrow Af f_k^{\sim, et}$ est le morphisme géométrique de passage de la topologie *fppf* à la topologie étale.

Pour terminer, signalons aussi le corollaire suivant.

Corollaire 3.4 Soit A un anneau local hensélien de corps résiduel k . Supposons que A soit un anneau excellent. Soit G un espace algébrique en groupes abéliens, plat et localement de présentation finie sur $Spec A$, de fibre spéciale $G_0 := G \otimes_A k$. Alors, le morphisme de restriction

$$H_{fppf}^i(Spec A, G) \longrightarrow H_{fppf}^i(Spec k, G_0)$$

est surjectif pour $i = 1$, et un isomorphisme pour tout $i > 1$. Si le groupe G est de plus lisse sur $Spec A$, alors ce morphisme est aussi un isomorphisme pour $i = 1$ et surjectif pour $i = 0$.

Preuve: On travaille dans $St(A)$, la catégorie des champs (disons $fppf$) sur $Spec A$. Commençons par montrer que les morphismes en question sont surjectifs. Pour cela, on considère le i -champ $K_{fppf}(G, i)$, pour un $i \geq 1$. On sait, d'après le corollaire précédent que c'est un champ géométrique et lisse sur $Spec A$. Ainsi, pour montrer que le morphisme induit

$$H_{fppf}^i(Spec A, G) \simeq [Spec A, K_{fppf}(G, i)] \longrightarrow [Spec k, K_{fppf}(G, i)] \simeq H_{fppf}^i(Spec k, G)$$

est surjectif il suffit de montrer le lemme plus général suivant.

Lemme 3.5 *Soit F un (i -)champ géométrique et lisse sur $Spec A$. Alors le morphisme naturel*

$$F(A) \longrightarrow F(k)$$

induit une application surjective sur les ensembles de composantes connexes.

Preuve du lemme: Soit \widehat{A} le complété de A le long de $A \rightarrow k$, et fixons $x \in F(k)$ un k -point. Comme le champ F est géométrique le morphisme naturel

$$F(\widehat{A}) \longrightarrow Holim_k(F(A_k))$$

est une équivalence (on note $A_k = A/m^k$, où m est l'idéal maximal de A). On commence par remarquer, par récurrence sur k , que le morphisme

$$F(A_k) \longrightarrow F(A_{k-1})$$

est surjectif sur les composantes connexes. En effet, l'obstruction au fait que la fibre homotopique d'un élément $x \in F(A_{k-1})$ soit non-vide vit dans le groupe

$$Ext_{A_{k-1}}^1(\mathbb{L}, m^{k-1}/m^k),$$

où \mathbb{L} est le complexe cotangent du morphisme $F \rightarrow Spec A$ pris au point $x : Spec A_{k-1} \rightarrow F$. Or, comme ce morphisme est lisse, \mathbb{L} est d'amplitude positive, et donc $Ext_{A_{k-1}}^1(\mathbb{L}, m^{k-1}/m^k) = 0$ (voir par exemple [HAGII, 1.4.2, 2.2.5]). Ceci montre que toutes les fibres homotopiques de

$$F(A_k) \longrightarrow F(A_{k-1})$$

sont non vides, et donc que ce morphisme est surjectif sur les composantes connexes. En passant à la limite sur k , on trouve donc que

$$F(\widehat{A}) \longrightarrow F(k)$$

est aussi surjectif sur les composantes connexes.

Soit maintenant $x \in F(k)$, et choisissons $\widehat{x} \in F(\widehat{A})$ un relevé. Comme A est excellent, le morphisme $A \rightarrow \widehat{A}$ est régulier, et il s'écrit donc comme une colimite filtrante de morphismes lisses $A \rightarrow B_\alpha$. Comme A est hensélien, il existe, pour tout α , une rétraction $r_\alpha : B_\alpha \rightarrow A$, au-dessus de k . De plus, comme F est localement de présentation finie sur $Spec A$, il existe un α assez grand tel que \widehat{x} se factorise par un point $x_\alpha \in F(B_\alpha)$ au-dessus de x . En composant avec la rétraction r_α on trouve $x' \in F(A)$, qui est un relèvement de x . Ceci termine la preuve du lemme. \square

Le lemme implique donc que

$$H_{fppf}^i(Spec A, G) \longrightarrow H_{fppf}^i(Spec k, G_0)$$

est surjectif pour $i > 0$. Supposons maintenant que $i > 1$. Soit $x, y \in H_{fppf}^i(Spec A, G)$ avec une même image dans $H_{fppf}^i(Spec k, G_0)$. On représente x et y par deux morphismes

$$x, y : Spec A \longrightarrow K_{fppf}(G, i),$$

et on considère alors le champ sur $\text{Spec } A$ des équivalences entre x et y

$$Eq(x, y) := \text{Spec } A \times_{K_{fppf}(G, i)}^h \text{Spec } A.$$

Le champ $Eq(x, y)$ est un champ géométrique sur $\text{Spec } A$. Il est de plus localement équivalent, pour la topologie $fppf$, à $K_{fppf}(G, i-1)$. Comme $i > 1$, le champ $K_{fppf}(G, i-1)$ est lisse, ce qui montre que $Eq(x, y)$ est un champ géométrique et lisse sur $\text{Spec } A$. De plus, par hypothèse $Eq(x, y)(k)$ est non vide, et le lemme 3.5 implique alors que $Eq(x, y)(A)$ est aussi non vide. En d'autres termes les deux morphismes

$$x, y : \text{Spec } A \longrightarrow K_{fppf}(G, i)$$

sont égaux dans la catégorie homotopique des champs, et donc $x = y$ dans $H_{fppf}^i(\text{Spec } A, G)$.

Pour terminer, le même argument que précédemment montre que $H_{fppf}^1(\text{Spec } A, G) \longrightarrow H_{fppf}^1(\text{Spec } k, G_0)$ est injectif lorsque G est lisse (car on peut l'appliquer au cas $i = 1$). \square

Références

- [Ba] C. Balwe, *Motivic integration on Artin n -stacks*, thèse, accessible à <http://d-scholarship.pitt.edu/2408/>
- [Du] D. Dugger, *Combinatorial model categories have presentations*, Adv. Math. **164** (2001), no. 1, 177–201.
- [EGAIV-3] A. Grothendieck, *Elements de géométrie algébrique IV: Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie*, Publication Mathématique de l'IHES **28** (1966), 5–255.
- [Gr] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer III*, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 88–188, North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968.
- [La-Mo] *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics **39**. Springer-Verlag, Berlin, 2000. xii+208 pp.
- [Lu] J. Lurie, *Derived algebraic geometry*, thèse.
- [Si] C. Simpson, *Algebraic (geometric) n -stacks*, alg-geom/9609014.
- [HAGI] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I: Topos theory*, Adv. Math. **193** (2005), no. 2, 257–372.
- [HAGII] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry II: Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224 pp.
- [To-Ve] B. Toën, G. Vezzosi, *∞ -Catégories monoïdales rigides, traces et caractère de Chern*, arXiv:0903.3292.
- [To1] B. Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1, 435–487, Proc. Sympos. Pure Math., **80**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [To2] B. Toën, *Derived Hall algebras*, Duke Math. J. **135** (2006), no. 3, 587–615.
- [To3] B. Toën, *Anneaux de Grothendieck des n -champs d'Artin*, math.AG/0509098.