



**HAL**  
open science

# Composantes PRV généralisées et chemins de Littellmann

Pierre-Louis Montagard

► **To cite this version:**

Pierre-Louis Montagard. Composantes PRV généralisées et chemins de Littellmann. 2013. hal-00772167v1

**HAL Id: hal-00772167**

**<https://hal.science/hal-00772167v1>**

Preprint submitted on 10 Jan 2013 (v1), last revised 28 Aug 2013 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Composantes PRV généralisées et chemins de Littelmann

Pierre-Louis Montagard \*

## Abstract

We give a sufficient condition for a Littelmann's path to represent a vector of extremal weight of an irreducible integrable representation of a symmetrisable Kac-Moody algebra. Thanks to this condition, we present an alternative proof of recent result by Boris Pasquier, Nicolas Ressayre and the author of this article on the existence of generalized PRV components.

## Résumé

Nous présentons une condition suffisante pour qu'un chemin de Littelmann représente un vecteur de poids extrémal d'une représentation irréductible et intégrable d'une algèbre de Kac-Moody symétrisable. À l'aide de cette condition, nous donnons une preuve alternative des résultats de Boris Pasquier, Nicolas Ressayre et l'auteur de cet article sur l'existence de composantes PRV généralisées.

## 0 Introduction

La conjecture PRV a été énoncée dans les années 60 dans [PRRV67] par Parthasarathy, Ranga Rao et Varadarajan : soient  $\mu$  et  $\nu$  deux poids dominants d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  et  $v, w$  deux éléments du groupe de Weyl de  $\mathfrak{g}$ , alors si le poids  $\lambda = v\mu + w\nu$  est dominant, la représentation irréductible  $V(\lambda)$  est de multiplicité non nulle dans  $V(\mu) \otimes V(\nu)$ . Cette conjecture a été démontrée simultanément et de façon indépendante par Shrawan Kumar [Kum88] et [Kum89] et Olivier Mathieu [Mat89] dans le contexte plus général des algèbres de Kac-Moody symétrisable. La géométrie, et notamment la géométrie des espaces de drapeaux du groupe algébrique  $G$  associé à  $\mathfrak{g}$  intervient de façon essentielle dans ces deux preuves.

---

\*Université Montpellier II - CC 51-Place Eugène Bataillon - 34095 Montpellier Cedex 5 - France - pierre-louis.montagard@math.univ-montp2.fr

Au début des années 90, Peter Littelmann dans [Lit94] et [Lit95] a introduit la théorie des chemins qui généralise la règle de Littlewood-Richardson au cas des algèbres de Kac-Moody symétrisable. Une application remarquable de cette théorie est une preuve combinatoire et élémentaire de la conjecture PRV, voir [Lit94]

Plus récemment dans [MPR11b] et [MPR11a], Nicolas Ressayre, Boris Pasquier et l'auteur de cette note, dans le contexte d'un groupe algébrique  $G$  réductif et en utilisant des outils géométriques, ont généralisé l'énoncé PRV. À partir d'un couple de poids dominants  $(\mu, \nu)$ , d'un couple d'éléments du groupe de Weyl et d'un ensemble de racines orthogonales deux à deux, il est défini un hyper-rectangle dans la réseau des poids de  $G$ . Les représentations irréductibles associées aux poids dominants de cet hyper-rectangle sont des composantes du produit tensoriel  $V(\mu) \otimes V(\nu)$  (voir 3.1 pour un énoncé plus précis). Ces hyper-rectangles contenant strictement les poids dominants donnés par la conjecture originale PRV, ces composantes sont appelées des composantes PRV généralisées.

Dans cette note, nous allons donner une preuve de l'existence des composantes PRV généralisées en utilisant la théorie des chemins de Littelmann dans le contexte plus général des algèbres de Kac-Moody symétrisable. Pour cela, nous rappelons les résultats essentiels de la théorie des chemins dans la partie 1. Puis dans la partie 2, nous donnons une condition suffisante pour qu'un chemin représente un vecteur de poids extrémal et en utilisant ce critère, nous démontrons l'existence de composantes PRV généralisées dans la partie 3.

## 1 Rappels

Pour fixer les notations nous allons rappeler brièvement les points principaux de la théorie des chemins de Littelmann. Nous renvoyons aux articles originaux de Peter Littelmann [Lit94] et [Lit95] pour les preuves et les détails. Dans tout cet article  $\mathfrak{g}$  désignera une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Nous utiliserons les notations suivantes concernant  $\mathfrak{g}$  :

- $\mathfrak{h}$  : une sous-algèbre de Cartan ;
- $X$  : le réseau des poids ;
- $X_{\mathbb{Q}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et  $X_{\mathbb{R}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  ;
- $S$  : l'ensemble des racines simples ;
- $W$  : le groupe de Weyl ;
- Si  $\beta$  est une racine réelle, nous noterons  $\beta^{\vee} \in X_{\mathbb{R}}^*$  la coracine associée et si  $\chi \in X$  nous noterons  $\langle \chi, \beta^{\vee} \rangle$  l'évaluation  $\beta^{\vee}(\chi)$  ;
- $D$  désignera la chambre dominante et si  $\lambda \in X \cap D$  nous noterons  $V(\lambda)$  la

- représentation irréductible associée ;  
– si  $\alpha \in S$ ,  $s_\alpha$  désigne la réflexion sur  $X_{\mathbb{R}}$  définie par  $s_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$ .

**Définition 1.** Un chemin  $\pi$  est une application  $\pi : [0, 1] \rightarrow X_{\mathbb{R}}$  rectifiable telle que  $\pi(0) = 0$  et  $\pi(1) \in X$ . On dit que deux chemins  $\pi$  et  $\pi'$  sont équivalents s'il existe une reparamétrisation  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  croissante, surjective et continue telle que  $\pi = \pi' \circ \phi$ . Nous considérerons l'ensemble  $\Pi$  des classes d'équivalences des chemins.

**Exemples 1.** 1. Soit  $\chi \in X$ , nous noterons  $\pi_\chi$  le chemin défini par  $\pi_\chi(t) = t\chi$ .

2. Si  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont deux chemins, le chemin  $\pi_1 * \pi_2$  est le chemin défini par :

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \pi_1(2t) && \text{pour } t \leq 1/2 ; \\ &= \pi_1(1) + \pi_2(2t - 1) && \text{pour } t > 1/2. \end{aligned}$$

3. Dans la suite, nous considérerons essentiellement des chemins affines par morceaux et tels que les changements de direction se font en des points rationnels. Un tel chemin  $\pi$  s'écrit  $\pi = \pi_{\chi_1} * \pi_{\chi_2} * \dots * \pi_{\chi_p}$  avec  $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p) \in X_{\mathbb{Q}}^p$ .

4. Si  $\pi$  est un chemin, nous noterons  $\pi^*$  le chemin défini par  $\pi^*(t) = \pi(1 - t) - \pi(1)$ .

Pour toute racine réelle  $\alpha$  nous noterons la fonction :  $H_\alpha^\pi(t) = \langle \pi(t), \alpha^\vee \rangle$ . Soit  $m_\alpha^\pi$  le minimum de cette fonction. Nous aurons également besoin des fonctions suivantes :

$$L_\alpha^\pi(t) = \min\{1, (H_\alpha^\pi(s) - m_\alpha^\pi)_{t \leq s \leq 1}\}$$

et

$$R_\alpha^\pi(t) = \max\{0, (m_\alpha - H_\alpha^\pi(s))_{0 \leq s \leq t}\}.$$

**Définition 2.** Soit  $\pi \in \Pi$  et  $\alpha$  une racine simple, alors si  $L_\alpha^\pi(1) < 1$ ,  $f_\alpha\pi$  n'est pas défini, sinon  $f_\alpha\pi(t) := \pi(t) - L_\alpha^\pi(t)\alpha$ .

De même si  $R_\alpha^\pi(1) > 0$  alors  $e_\alpha\pi$  n'est pas défini, sinon  $e_\alpha\pi(t) := \pi(t) - R_\alpha^\pi(t)\alpha$ .

Voici les propriétés élémentaires des opérateurs  $f_\alpha$  et  $e_\alpha$  :

**Proposition 1.1.** Soit  $\pi \in \Pi$  et  $\alpha$  une racine simple ;

1. Si  $f_\alpha\pi$  est défini alors  $f_\alpha\pi(1) = \pi(1) - \alpha$ . De même si  $e_\alpha\pi$  est défini, alors  $e_\alpha\pi(1) = \pi(1) + \alpha$ .

2. Si  $f_\alpha \pi$  est défini, alors  $e_\alpha f_\alpha \pi$  est défini et  $e_\alpha f_\alpha \pi = \pi$ . De même, si  $e_\alpha \pi$  est défini, alors  $f_\alpha e_\alpha \pi$  est défini et  $f_\alpha e_\alpha \pi = \pi$ .
3. Si  $e_\alpha \pi$  est défini, alors  $f_\alpha \pi^*$  est défini et  $f_\alpha \pi^* = (e_\alpha \pi)^*$ . De même, si  $f_\alpha \pi$  est défini, alors  $e_\alpha \pi^*$  est défini et  $e_\alpha \pi^* = (f_\alpha \pi)^*$ .
4. Soit  $m$  (resp  $n$ ), maximal tel que  $f_\alpha^m \pi$  (resp.  $e_\alpha^n \pi$ ) soit défini, alors  $n - m = \langle \pi(1), \alpha \rangle$ ,  $m = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq \langle \pi(1), \alpha^\vee \rangle - m_\alpha^\pi\}$  et  $n = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq |m_\alpha^\pi|\}$ .
5. Si  $e_\alpha \pi$  (resp.  $f_\alpha \pi$ ) est défini alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_\alpha^n(n\pi)$  (resp.  $f_\alpha^n(n\pi)$ ) est défini et on a :  $e_\alpha^n(n\pi) = n e_\alpha \pi$  (resp.  $f_\alpha^n(n\pi) = n f_\alpha \pi$ ).

Si  $\pi \in \Pi$ , nous noterons  $B(\pi)$  l'ensemble des chemins obtenus en appliquant à  $\pi$  les opérateurs  $e_\alpha$  et  $f_\alpha$  (pour  $\alpha \in S$ ). Si  $B$  est un sous-ensemble de  $\Pi$ , nous définirons  $\text{car } B = \sum_{\pi \in B} e^{\pi(1)}$ ; nous dirons que  $B$  est entier si pour tout  $\pi \in B$  et pour toute racine  $\alpha \in S$ , le minimum  $m_\alpha^\pi$  est un entier. Enfin nous dirons qu'un chemin  $\pi$  est dominant si son image est contenue dans la chambre dominante  $D$  et nous noterons  $\Pi^+$  l'ensemble des chemins dominants.

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats fondamentaux de P. Littelmann.

**Théorème 1.2.** *Soit  $\pi \in \Pi$  dominant, alors on a les résultats suivants : L'ensemble  $B(\pi)$  est entier,  $\pi$  est l'unique chemin dominant de  $B(\pi)$  et  $\text{car } B(\pi) = \text{car } V(\pi(1))$ .*

Si  $B$  et  $B'$  sont deux sous-ensemble de  $\Pi$  nous noterons  $B * B'$  l'ensemble des concaténations

$$B * B' := \{\pi * \pi' \mid \pi \in B, \pi' \in B'\}.$$

**Théorème 1.3.** *Soit  $\pi$  et  $\pi'$  deux chemins dominants, alors l'ensemble  $B(\pi) * B(\pi')$  est entier et se décompose en union disjointe :*

$$B(\pi) * B(\pi') = \bigcup_{\pi * \eta \in \Pi^+, \eta \in B'(\pi)} B(\pi * \eta).$$

Enfin, on a la conséquence suivante qui permet de décomposer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{g}$ .

**Théorème 1.4.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Kac-Moody,  $\mu$  et  $\nu$  deux poids dominants. Soit  $\pi$  un chemin dominant (resp  $\pi'$ ) tel que  $\pi(1) = \mu$  (resp  $\pi'(1) = \nu$ ), alors on a la décomposition suivante comme  $\mathfrak{g}$ -module :*

$$V(\mu) \otimes V(\nu) = \bigoplus_{\pi * \eta \in \Pi^+, \eta \in B'(\pi)} V(\mu + \eta(1)).$$

## 1.1 L'action du groupe de Weyl

Les opérateurs  $e_\alpha$  et  $f_\alpha$  permettent de définir une actions du groupe de Weyl sur  $\Pi$ . Pour cela définissons pour tout  $\pi \in \Pi$  et pour toute racine simple  $\alpha \in S$  :

$$\tilde{s}_\alpha(\pi) := \begin{cases} f_\alpha^n(\pi); & \text{si } n = \langle \pi(1), \alpha^\vee \rangle \geq 0 \\ e_\alpha^{-n}(\pi); & \text{sinon} \end{cases}$$

**Théorème 1.5.** *L'application  $s_\alpha \mapsto \tilde{s}_\alpha$  s'étend en une action de  $W$  sur  $\Pi$ .*

## 1.2 Exemples

Pour pouvoir utiliser le théorème 1.4, il faut avoir une description explicite de  $B(\pi)$ . Pour  $\pi = \pi_\lambda$  le chemin direct entre 0 et  $\lambda$ , l'ensemble des chemins de  $B(\pi_\lambda)$  sont appelés chemins de Lakshmibai-Seshadri et admettent une description combinatoire explicite donnée par Littelmann [Lit94]. Nous n'allons pas ici rappeler cette description, mais simplement remarquer la propriété élémentaire suivante qui nous sera utile dans la suite.

**Proposition 1.6.** *Soit  $\lambda$  un poids dominant et  $w \in W$  un élément du groupe de Weyl, alors le chemins  $\pi_{w\lambda}$  appartient à  $B(\pi_\lambda)$ .*

PREUVE. On vérifie que si  $\alpha \in S$  et  $w \in W$ , alors  $\tilde{s}_\alpha \pi_{w\lambda} = \pi_{s_\alpha w\lambda}$ . La proposition s'en déduit immédiatement.  $\square$

## 2 Chemins extrémaux

Rappelons que si  $V(\lambda)$  est une représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$ , alors pour tout  $w \in W$ , le poids  $w\lambda$  est un poids de multiplicité un de  $V(\lambda)$  appelé poids extrémal de  $V(\lambda)$ . Nous allons maintenant définir la notion de chemin extrémal.

**Définition 3.** Soit  $\pi$  un chemin, et soit  $\eta$  l'unique chemin dominant tel que  $\pi \in B(\eta)$ , on dit que  $\pi$  est un chemin extrémal si le poids  $\pi(1)$  est un poids extrémal de la représentation irréductible  $V(\eta(1))$ .

*Remarque.* Si  $\lambda$  est dominant, alors d'après la proposition 1.6, les chemins extrémaux de  $B(\pi_\lambda)$  sont exactement les  $\{\pi_{w\lambda} \mid w \in W\}$ . Mais si  $\pi$  est un chemin dominant quelconque on ne sait pas, en général, déterminer les chemins extrémaux de  $B(\pi)$ .

Nous pouvons maintenant énoncer un critère qui assure qu'un chemin est extrémal.

**Théorème 2.1.** Soit  $\pi$  un chemin tel que pour toute racine positive réelle  $\beta$  :

- si  $H_\beta^\pi(1) \geq 0$  alors la fonction  $H_\beta^\pi$  est positive ;
- si  $H_\beta^\pi(1) < 0$ , alors il existe un réel  $t_\beta^\pi$  tel que la fonction  $H_\beta^\pi$  soit positive ou nulle pour  $t \leq t_\beta^\pi$  et strictement négative et décroissante pour  $t > t_\beta^\pi$ , alors  $\pi$  est un chemin extrémal.

PREUVE. Soit  $\pi$  vérifiant l'hypothèse du théorème. Choisissons  $w \in W$  tel que  $w\pi(1)$  soit dominant et tel que la longueur de  $w$  soit minimale. Nous allons faire une récurrence sur la longueur de  $w$  pour montrer que  $\mu$  est un poids extrémal. S'il existe  $w$  de longueur 0, alors  $\pi(1)$  est un poids dominant. Par hypothèse, pour tout racine positive réelle  $\beta$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H_\beta^\pi(t) \geq 0$ , et  $\pi$  est un chemin dominant, donc extrémal.

Si  $l(w) > 0$ , alors il existe  $\alpha$  une racine simple telle que  $H_\alpha^\pi(1) < 0$ ; nous allons montrer que  $\pi' = \tilde{s}_\alpha\pi$  vérifie l'hypothèse du théorème ce qui nous permettra de conclure puisque par construction  $ws_\alpha\pi'(1)$  est dominant et  $l(ws_\alpha) < l(w)$ .

Quitte à reparamétriser  $\pi$  on peut supposer que  $t_\alpha^\pi = 1/2$ . Définissons  $\pi_1(t) = \pi(t/2)$  et  $\pi_2(t) = \pi((t+1)/2) - \pi(1/2)$ . Par définition on a  $\pi = \pi_1 * \pi_2$ . On vérifie que  $\tilde{s}_\alpha\pi = \pi_1 * s_\alpha(\pi_2)$ . Si  $\gamma$  est une racine réelle, alors un simple calcul montre que :

$$\begin{aligned} H_\gamma^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) &= H_\gamma^\pi(t) & \text{si } t \leq 1/2 ; \\ &= H_{s_\alpha\gamma}^\pi(t) & \text{si } t \geq 1/2. \end{aligned}$$

Remarquons que les deux expressions ci-dessus coïncident en  $t = 1/2$  puisque  $H_\alpha^\pi(1/2) = 0$ .

Soit  $\gamma$  une racine positive réelle telle que  $H_\gamma^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1) \geq 0$ , alors ou bien  $\gamma = \alpha$  et dans ce cas pour  $t \leq 1/2$ , on a  $H_\alpha^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_\alpha^\pi(t)$  qui est positive et pour  $t > 1/2$ , on a  $H_\alpha^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = -H_\alpha^\pi(t)$  qui est également positive.

Si  $\gamma \neq \alpha$ , alors il existe une racine positive réelle  $\beta$  telle que  $s_\alpha(\beta) = \gamma$ . Remarquons que comme  $H_\beta^\pi(1) = H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1)$ , pour tout  $t \in [0, 1]$  la fonction  $H_\beta^\pi(t)$  est positive. Donc pour  $t \geq 1/2$ ,  $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_\beta^\pi(t)$  est positive.

Si  $t \leq 1/2$ , alors

$$H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_{s_\alpha\beta}^\pi(t) = H_\beta^\pi(t) - H_\alpha^\pi(t)\langle \alpha, \beta^\vee \rangle.$$

Si  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \leq 0$ , alors l'expression ci-dessus est bien positive. Et si  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$ , on vérifie que  $\langle \pi(1), s_\alpha\beta \rangle$  est positif et donc par hypothèse, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H_{s_\alpha\beta}^\pi(t) \geq 0$ .

Soit  $\gamma$  une racine réelle et positive telle que  $H_\gamma^{s_\alpha\pi}(1) < 0$ . Alors il existe une racine réelle positive  $\beta$  telle que  $s_\alpha\beta = \gamma$ . Comme  $H_\beta^\pi(1) = H_{s_\alpha\beta}^{s_\alpha\pi}(1)$ , il existe  $t_\beta^\pi$  tel que pour  $t \geq t_\beta^\pi$ ,  $H_\beta^\pi(t)$  est décroissante et strictement négative. Si

$H_{s_{\alpha\beta}}^{\pi}(1) \geq 0$ , ou si  $H_{s_{\alpha\beta}}^{\pi}(1) < 0$  et  $t_{s_{\alpha\beta}}^{\pi} \geq 1/2$ , alors  $H_{s_{\alpha\beta}}^{\tilde{s}_{\alpha}\pi}(1/2) = H_{s_{\alpha\beta}}^{\pi}(1/2) \geq 0$ . Alors  $t_{\beta}^{\pi} \geq 1/2$  et comme pour  $t \geq 1/2$ ,  $H_{s_{\alpha\beta}}^{\tilde{s}_{\alpha}\pi}(t) = H_{\beta}^{\pi}(t)$ ,  $H_{s_{\alpha\beta}}^{\tilde{s}_{\alpha}\pi}(t)$  est positive ou nulle pour  $t \leq t_{\beta}^{\pi}$  et décroissante et strictement négative pour  $t > t_{\beta}^{\pi}$ .

Si  $t_{s_{\alpha\beta}}^{\pi} < 1/2$ , alors on a  $H_{s_{\alpha\beta}}^{\tilde{s}_{\alpha}\pi}(1/2) = H_{s_{\alpha\beta}}^{\tilde{s}_{\alpha}\pi}(1/2) = H_{\beta}^{\pi}(1/2) < 0$ , et donc  $t_{\beta}^{\pi} \leq 1/2$  et la fonction  $H_{s_{\alpha\beta}}^{\tilde{s}_{\alpha}\pi}(t)$  est positive ou nulle pour  $t \leq t_{s_{\alpha\beta}}^{\pi}$  et strictement négative et décroissante pour  $t > t_{s_{\alpha\beta}}^{\pi}$ .  $\square$

Nous allons exprimer le critère ci-dessus lorsque  $\pi$  est un chemin affine par morceaux.

**Corollaire.** *Soit  $\pi$  un chemin tel qu'il existe des poids  $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p) \in X_{\mathbb{Q}}^p$  tels que  $\pi = \pi_{\chi_1} * \pi_{\chi_2} * \dots * \pi_{\chi_p}$ ; si pour toute racine réelle positive  $\beta$  on a :*

$$\forall j \in \{1, \dots, p-1\} \text{ tel que } \langle \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_j, \beta^{\vee} \rangle < 0 \Rightarrow \langle \chi_{j+1}, \beta^{\vee} \rangle \leq 0,$$

*alors  $\pi$  est extrémal.*

*Remarques.* 1. Il est facile de vérifier que le critère du théorème 2.1 n'est pas une condition nécessaire pour qu'un chemin  $\pi$  soit extrémal. Nous donnons un exemple en type  $A_2$  dans la figure 1 :  $\pi$  est extrémal puisque  $s_{\alpha_1}\pi$  est un chemin dominant mais ne vérifie pas le critère du théorème 2.1; nous utilisons dans cette figure les notations et conventions de [Bou02].

2. Il est également facile de vérifier que si  $\pi$  est extrémal alors  $\pi$  vérifie la condition suivante : pour toute racine réelle positive  $\beta$ ,

- (a) si  $H_{\beta}^{\pi}(1) \geq 0$  alors pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H_{\beta}^{\pi}(t) \geq 0$ ;
- (b) si  $H_{\beta}^{\pi}(1) < 0$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H_{\beta}^{\pi}(t) \geq \langle \pi(1), \beta^{\vee} \rangle$ .

Mais cette condition n'est pas une condition suffisante, comme le montre l'exemple dans la figure 2 :  $\pi$  vérifie les conditions ci-dessus, mais n'est pas extrémal puisque  $\tilde{s}_{\alpha_2}\pi$  n'est pas un chemin dominant, bien que le poids  $\tilde{s}_{\alpha_2}\pi(1)$  soit dominant.

3. Dans un travail en cours de rédaction, nous donnons un critère d'extrémalité plus général que celui donné dans le théorème 2.1.

### 3 Les composantes PRV généralisées

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de cette note.

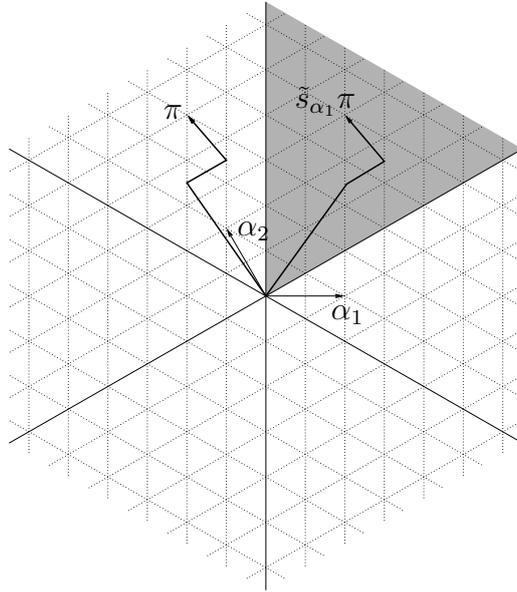


FIGURE 1 –

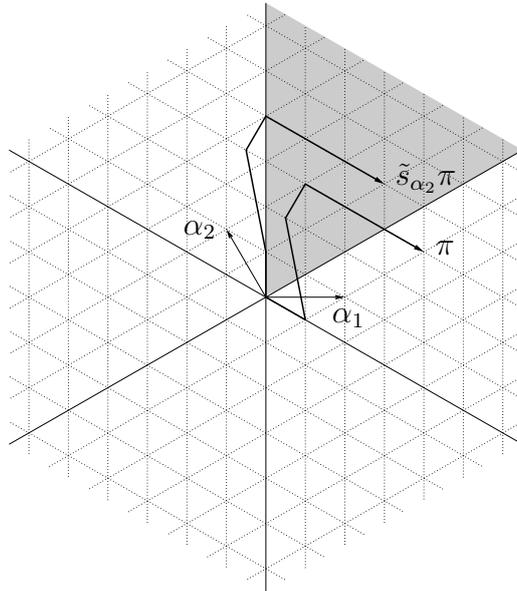


FIGURE 2 –

**Théorème 3.1.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Kac-Moody symétrisable, soient  $\mu, \nu$  deux poids dominants de  $\mathfrak{g}$ ,  $(v, w) \in W^2$ , et  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ ,  $p$  racines réelles orthogonales deux à deux. Supposons qu'il existe  $u \in \{v, w\}$  tel que pour tout

$i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $u^{-1}\beta_i$  soit simple ; pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  soit

$$K_i = \{0, 1, \dots, \min\{\langle v\mu, \beta_i^\vee \rangle, \langle w\nu, \beta_i^\vee \rangle\}\}$$

et soit  $R$  l'hyper-rectangle

$$R = \left\{ \lambda \mid \exists (k_1, k_2, \dots, k_p) \in \prod_{i=1}^p K_i \quad \lambda = v\mu + w\nu - \sum_{i=1}^p k_i \beta_i \right\}$$

alors si  $\lambda \in R \cap D$ , la représentation  $V(\lambda)$  est une composante de  $V(\mu) \otimes V(\nu)$ .

PREUVE. En permutant éventuellement les couples  $(v, \mu)$  et  $(w, \nu)$ , on peut supposer que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $\alpha_i = v^{-1}\beta_i$  est une racine simple. Soit  $\lambda \in R$  dominant ; alors pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  il existe  $k_i \in K_i$  tels que :  $\lambda = v\mu + w\nu - \sum_{i=1}^p k_i \beta_i$ . On peut en fait supposer que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $k_i \leq \frac{\langle v\mu, \beta_i^\vee \rangle}{2}$ . En effet, si ce n'est pas le cas, en ré-ordonnant  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ , il existe  $p' \in \{1, 2, \dots, p\}$  tels que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, p'\}$ ,  $k_i > \frac{\langle v\mu, \beta_i^\vee \rangle}{2}$ . Comme les  $s_{\alpha_i}$  commutent deux à deux, on peut alors écrire :

$$\lambda = v s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_{p'}} \mu + w\nu + \sum_{i=1}^{p'} k'_i$$

avec  $k'_i = \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle - k_i$  si  $i \leq p'$  et  $k'_i = k_i$  sinon. Comme  $k'_i \leq k_i$  on a également  $k'_i \leq \langle w\nu, \beta_i^\vee \rangle$ , et on est bien ramené au cas où  $k'_i \leq \frac{\langle v\mu, \beta_i^\vee \rangle}{2}$ .

D'après le théorème 1.4, pour compléter la preuve il suffit de construire un chemin de  $B(\mu) * B(\nu)$  de poids  $v^{-1}\lambda$  et extrémal.

Pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  posons  $l_i := \langle w\nu, \beta_i^\vee \rangle = \langle v^{-1}w\nu, \alpha_i^\vee \rangle$ . Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , on a  $0 \leq k_i \leq l_i$  et donc le chemin  $f_{\alpha_i}^{k_i} \pi_{v^{-1}w\nu}$  est défini. Comme les  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont deux à deux orthogonales, il en est de même des  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$  et donc pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  les opérateurs  $f_{\alpha_i}$  commutent deux à deux et le chemin  $\pi := f_{\alpha_1}^{k_1} f_{\alpha_2}^{k_2} \dots f_{\alpha_s}^{k_s} \pi_{v^{-1}w\nu}$  est défini. Définissons  $a_0 = 0, a_{s+1} = 1$  et pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $a_i = \frac{k_i}{l_i}$ . Si on suppose qu'on a ordonné les  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq p}$  de sorte que :  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p$ , alors le chemin  $\pi$  s'écrit :

$$\pi_{a_1 s_{\alpha_p} \dots s_{\alpha_1} v^{-1}w\nu} * \pi_{(a_2 - a_1) s_{\alpha_p} \dots s_{\alpha_2} v^{-1}w\nu} * \dots * \pi_{(a_p - a_{p-1}) s_{\alpha_p} v^{-1}w\nu} * \pi_{(1 - a_p) v^{-1}w\nu}.$$

Nous aurons besoin du calcul de  $\pi(a_i)$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

$$\begin{aligned} \pi(a_i) &= \sum_{j=1}^i (a_j - a_{j-1}) s_{\alpha_p} s_{\alpha_{p-1}} \dots s_{\alpha_j} v^{-1}w\nu \\ &= \sum_{j=1}^i \sum_{m=j}^p (a_j - a_{j-1}) v^{-1}w\nu - l_m \alpha_m \\ &= a_i v^{-1}w\nu - \left( \sum_{j=1}^i \sum_{m=j}^p a_j l_m \alpha_m - \sum_{j=1}^i \sum_{m=j}^p a_{j-1} l_m \alpha_m \right) \\ &= a_i v^{-1}w\nu - \sum_{j=1}^i a_j l_j \alpha_j - a_i \sum_{m=i+1}^p l_m \alpha_m \\ &= a_i (v^{-1}w\nu - \sum_{j=i+1}^p l_j \alpha_j) - \sum_{j=1}^i k_j \alpha_j. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant montrer que le chemin  $\pi_\mu * \pi$  est extrémal grâce à la proposition 2. Les points de changements de direction de  $\pi_\mu * \pi$  sont inclus dans l'ensemble :  $\{\mu, \mu + \pi(a_1), \dots, \mu + \pi(a_s)\}$ . Soit  $\beta$  une racine réelle positive ; remarquons d'abord que comme  $\mu$  est dominant, on ne peut pas avoir  $\langle \mu, \beta^\vee \rangle < 0$ .

D'autre part, s'il existe  $m \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que  $\beta = \alpha_m$  alors  $\langle \mu + \pi(a_i), \alpha_m \rangle \geq 0$ . En effet si  $m \leq i$  alors :

$$\langle \mu + \pi(a_i), \alpha_m \rangle = \langle \mu, \alpha_m^\vee \rangle + a_i l_m - 2k_m = (\langle \mu, \alpha_m^\vee \rangle - k_m) + (a_i l_m - k_m)$$

les deux termes sont positifs : le premier par hypothèse et le deuxième car  $a_i \geq a_m$ . Si  $m > i$ , alors :

$$\langle \mu + \pi(a_i), \alpha_m \rangle = \langle \mu, \alpha_m^\vee \rangle + a_i l_m - 2a_i l_m \geq \langle \mu, \alpha_m^\vee \rangle - a_m l_m = \langle \mu, \alpha_m^\vee \rangle - k_m.$$

Ce dernier terme est bien positif par hypothèse.

Supposons maintenant que  $\beta \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$  et que  $\langle \mu + \pi(a_i), \beta^\vee \rangle < 0$ , soit

$$\langle \mu - \sum_{j=1}^i k_j \alpha_j, \beta^\vee \rangle + a_i \langle v^{-1} w \nu - \sum_{j=i+1}^p l_m \alpha_m, \beta^\vee \rangle < 0.$$

En utilisant que pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $k_j \leq \langle v\mu, \beta \rangle / 2 = \langle \mu, \alpha_j \rangle / 2$ , on vérifie que pour toutes racine simple  $\alpha$ , on a  $\langle \mu - \sum_{j=1}^i k_j \alpha_j, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ , et  $\mu - \sum_{j=1}^i k_j \alpha_j$  est donc un poids dominant. On en déduit :

$$\langle v^{-1} w \nu - \sum_{j=i+1}^p l_m \alpha_m, \beta^\vee \rangle < 0.$$

or  $v^{-1} w \nu - \sum_{j=i+1}^p l_m \alpha_m = s_{\alpha_p} s_{\alpha_{p-1}} \dots s_{\alpha_{i-1}} v^{-1} w \nu$  et le critère est vérifié.  $\square$

*Remarques.* 1. Nous n'obtenons pas complètement les résultats obtenus dans [MPR11a]. En effet dans le cadre des groupes algébriques, le théorème 3.1 est vrai également lorsque la famille  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une famille de racines *simples* deux à deux orthogonales. Dans [MPR11a], il est montré que ce cas est équivalent au cas où les  $(v^{-1} \beta_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont simples mais la démonstration utilise l'existence d'un élément de plus grande longueur  $w_0 \in W$ . L'auteur ne sait pas si ce cas est vrai en général dans le contexte des algèbres de Kac-Moody.

2. Nous illustrons le théorème 2.1 dans un cas où  $\mathfrak{g}$  est de type  $G_2$ . Nous reprenons les notations de [Bou02]. En prenant  $\mu = \varpi_1 + 2\varpi_2$ ,  $\nu = 2(\varpi_1 + \varpi_2)$ ,  $v^{-1} w = w_0$ ,  $p = 1$ ,  $\beta$  la plus grande racine (égale à  $\varpi_2$ ) et  $k = 1$ , on obtient  $\lambda = 2\varpi_1$  et donc  $V(2\varpi_1)$  est une composante de

$V(\mu) \otimes V(\nu)$ . Sur la figure 3, nous avons représenté le chemin extrémal  $\pi = \pi_\mu * f_{\alpha_2} \pi_{w_0\nu}$  ainsi que les chemins extrémaux intermédiaires entre  $\pi$  et le chemin dominant  $\eta$  tel que  $\eta(1) = \lambda$ .

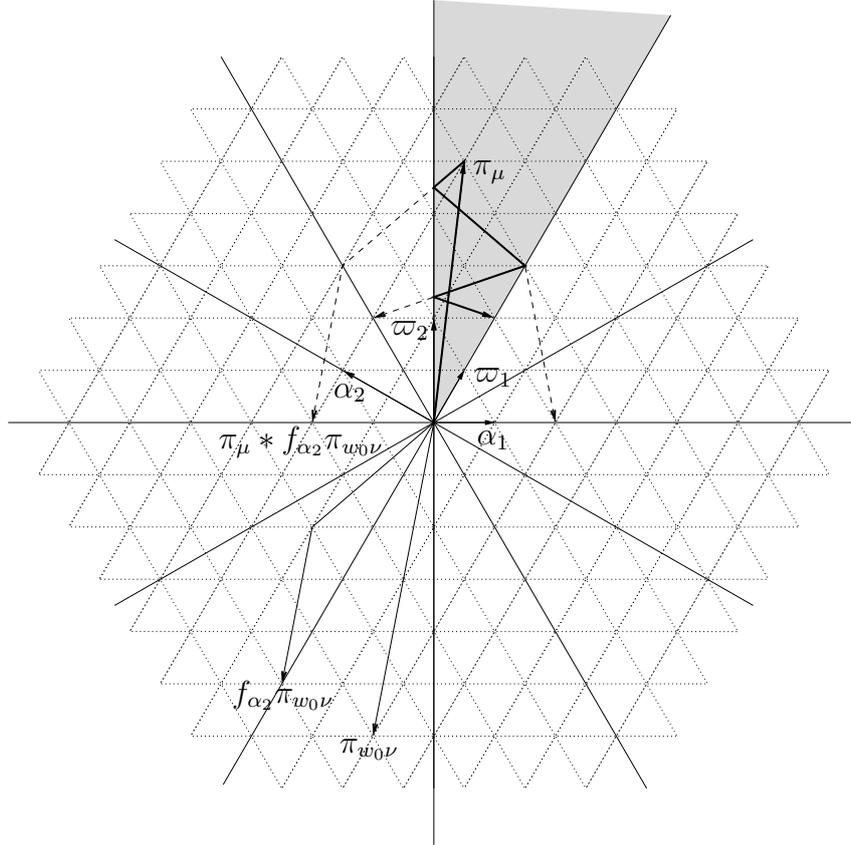


FIGURE 3 –

## Références

- [Bou02] Nicolas Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2002, Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.
- [Kum88] Shrawan Kumar, *Proof of the Parthasarathy-Ranga Rao-Varadarajan conjecture*, Invent. Math. **93** (1988), no. 1, 117–130.
- [Kum89] ———, *Existence of certain components in the tensor product of two integrable highest weight modules for Kac-Moody algebras*, Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), Adv. Ser. Math. Phys., vol. 7, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989, pp. 25–38. MR 1026944 (91m :17040)
- [Lit94] Peter Littelmann, *A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras*, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 329–346. MR 1253196 (95f :17023)
- [Lit95] ———, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. of Math. (2) **142** (1995), no. 3, 499–525. MR 1356780 (96m :17011)
- [Mat89] Olivier Mathieu, *Construction d’un groupe de Kac-Moody et applications*, Compositio Math. **69** (1989), no. 1, 37–60.
- [MPR11a] P.-L. Montagard, B. Pasquier, and N. Ressayre, *Generalizations of the PRV conjecture, II*, ArXiv e-prints (2011).
- [MPR11b] Pierre-Louis Montagard, Boris Pasquier, and Nicolas Ressayre, *Two generalisations of the PRV conjecture*, Compositio Math. **147** (2011), no. 4, 1321–1336.
- [PRRV67] K. R. Parthasarathy, R. Ranga Rao, and V. S. Varadarajan, *Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras*, Ann. of Math. (2) **85** (1967), 383–429. MR 0225936 (37 #1526)