Sur la dynamique stochastique des structures élastiques - Comments on stochastic dynamics of elastic structures

Christian Soize

MÉCANIQUE DES STRUCTURES. – *Sur la dynamique stochastique des structures élastiques*. Note de M. **Christian Soize**

Étude de dynamique stochastique des structures élastiques schématisées par poutre console et des structures spatiales à barres soumises aux effets du vent. L'utilisation de méthodes d'analyse fonctionnelle permet d'expliciter clairement la construction des approximations numériques déterministes et d'exposer rigoureusement à partir de celles-ci le problème de dynamique stochastique, la construction et la convergence des approximations stochastiques. Méthode de calcul numérique du moment d'ordre 2 de la mesure spectrale d'une observation scalaire.

La déformation $X(z, t)$ de la fibre moyenne à la cote $z \in I =]0,1[$ due aux vibrations linéaires de flexions autour d'une position d'équilibre prise comme référence des structures élastiques schématisées par une poutre console verticale que l'on considère, s'écrit :

$$\rho(z)\ddot{X}(z, t)+c(z)\dot{X}(z, t)+(\mathrm{EI}(z)X''(z, t))'' = F(z, t), \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} X(z, 0) = X_0(z); \quad \dot{X}(z, 0) = X_1(z); \\ X(0, t) = X'(0, t) = X''(1, t) = (\mathrm{EI}X'')'(1, t) = 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

avec $t \in J = (0, T)$; $\rho(z)$, $c(z)$, $\mathrm{EI}(z)$, $F(z, t)$, respectivement la masse linéique, l'amortissement, la raideur, la densité d'effort extérieure appliquée, ces quatre grandeurs ayant des bornes supérieures et inférieures strictement positives.

Soit V le sous-espace de $H^2(I)$ formé des fonctions v telles que

$$v(0) = v'(0) = 0.$$

Posons

$$H = L^2(I), \qquad B = L^2(0, T; H), \qquad G = (X \in L^2(0, T; V), \dot{X} \in B).$$

Soit $A \in \mathscr{L}(V; V')$ associé à la forme bilinéaire symétrique coercive

$$\int_0^1 \mathrm{EI}(z)u''v''\,dz \quad \text{sur V}.$$

Alors, le problème (1)-(2) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(z)\ddot{X}(z, t)+c(z)\dot{X}(z, t)+AX(z, t) = F(z, t), \qquad \forall z \in I \quad \text{et} \quad t \in J, \\ X(z, 0) = X_0(z); \qquad \dot{X}(z, 0) = X_1(z), \end{array}\right. \tag{3}$$

et il est voisin de celui traité dans [1] pour lequel ρ et c sont constants. A l'aide d'une démonstration analogue, on montre l'existence et l'unicité d'une solution déterministe $X \in G$ pour tout $(F, X_0, X_1) \in B \times V \times H$. La solution approchée de la méthode de Galerkin fournit l'approximation numérique X^m de la solution située dans un sous-espace de V qui est engendré par les m premières fonctions propres de l'opérateur d^4/dz^4 pour les mêmes conditions aux limites. Cette construction assure une convergence rapide. On note $Z = L^2(0, T; R^n)$ l'espace des observations et δ l'opérateur des observations $\in \mathscr{L}(G; Z)$.

1. Dynamique stochastique. — Soit $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ l'espace probabilisé. On observe le vecteur a de Z sur J. La structure est soumise aux charges de vent modélisées par un écoulement d'air turbulent homogène à structure de couche limite. On ne conserve que la composante longitudinale du champ de vitesse du vent que l'on décompose en une vitesse moyenne sur J (dont on connait le profil caractérisé par la rugosité et la vitesse moyenne de référence $\underline{U}$) et une fluctuation X_t autour de la moyenne. On peut alors ([2]) représenter la fluctuation d'effort F par un processus stochastique réel, continu, du second ordre, stationnaire, centré et gaussien dont les trajectoires appartiennent à B. Ce processus est décrit par ses fonctions de densité spectrale, de cohérence et de corrélation transversale dont on connait les expressions en fonction de $\underline{U}$ et de la rugosité du site. Comme on s'intéresse à la solution stationnaire, les conditions initiales n'interviennent pas. Pour montrer l'existence, l'unicité et la convergence de l'approximation stochastique, on représente F_t par la mesure de probabilité μ sur B qui est l'image de P par l'application $\omega \to (t \to F_t)$ de Ω dans B. Sa moyenne est nulle, ses opérateurs de covariance Λ_μ et de corrélation sont confondus. On prend $\Omega = B$; soit Y le processus linéaire du second ordre basé sur le dual B′ de B et représenté par μ sur B. On a le schéma :

$$\begin{array}{ccccccc} & & B & \xrightarrow{\beta} & G & \xrightarrow{\delta} & Z \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Lambda\mu} & & & & \uparrow{\scriptstyle \Lambda\nu} \\ L^2(\Omega) & \xleftarrow{Y} & B' & \xleftarrow{\beta'} & G' & \xleftarrow{\delta'} & Z' \end{array}$$

L'application $\delta \circ \beta$ est un isomorphisme de Z sur B. On en déduit l'existence et l'unicité de la solution stochastique représentée par ν de type 2 sur Z et telle que : $\Lambda_\nu = (\delta \circ \beta)\, \Lambda_\mu\, (\delta \circ \beta)'$.

L'approximation déterministe consiste à construire la suite d'opérateur β^m linéaires, continus, de rang fini, qui converge simplement vers β. La solution stochastique consiste à prendre $\nu^m = (\delta \circ \beta^m)(\mu)$. On en déduit :

$$\Lambda_{\nu^m} = (\delta \circ \beta^m)\, \Lambda_\mu\, (\delta \circ \beta^m)'.$$

Compte tenu du lemme de convergence de ([3]) la solution stochastique approchée converge cylindriquement vers la solution du problème stochastique. La construction pratique de la solution numérique stochastique consiste alors à calculer la matrice spectrale de a connaissant la mesure spectrale de F et l'opérateur linéaire de rang fini β^m. Ce problème est classique. Remarquons enfin que l'approximation numérique d'ordre m déterministe et stochastique [solution interne du problème (1)-(2)] est équivalent dans sa résolution à la solution déterministe et stochastique d'une structure spatiale à barres ayant pour l'ensemble de ses noeuds m degrés de liberté. Ceci revient à faire une discrétisation du système et par conséquent envisager la solution externe.

2. Calcul approché du moment d'ordre 2 de la mesure spectrale d'une observation scalaire. — Il s'écrit :

$$m_2 = \int_0^{+\infty} n^2\, S(n)\, dn, \qquad \text{avec} \quad m_2 < \infty \quad \text{et} \quad S(n),$$

la densité de la mesure spectrale de l'observation scalaire. La quadrature pour obtenir m_2 nécessite le calcul de $S(n)$ pour de nombreuses valeurs de n et ne peut être envisagé surtout pour les structures à barres lorsque m est grand (ainsi une structure à barre ayant 100 nœuds sur la paroi au vent nécessite pour chaque $\underline{U}$ fixé et pour chaque pas de fréquence n le calcul de 10 000 intégrales quadruples pour former $S(n)$ dans le cas le plus défavorable). Le calcul montre qu'une expression approchée de m_2 est suffisante, et que l'on peut négliger dans l'expression de $S(n)$ la contribution des corrélations entre les modes propres de vibration. On a alors :

$$S(n) = \sum_{i=1}^{p} C^i(n),$$

avec p le nombre de mode considéré $\leqq m$; $C^i(n) = K_i(n) \, | H_i(n) |^2$ la contribution du i-ième mode; $H_i(n)$ la fonction de transfert du i-ième mode de vibration caractérisé par le taux d'amortissement critique ζ_i ; la fréquence du système non amorti n_i, la raideur généralisée ω_i^2 ; $K_i(n)$ une expression fonction de la mesure spectrale de F, des modes propres de déformation et de δ. On a alors :

$$m_2 = \sum_{i=1}^{p} \int_0^{+\infty} K_i(n) \, n^2 \, | H_i(n) |^2 \, dn.$$

Pour $\zeta_i < 1/\sqrt{2}$ (structure faiblement amortie), $(n^2 \, | H_i(n) |^2)$ est équivalent à un filtre de bande passante très étroite centrée en n_i. $K_i(n)$ peut être considéré constant sur cette bande, d'où :

$$m_2 = \sum_{i=1}^{p} K_i(n_i) \int_0^{+\infty} n^2 \, | H_i(n) |^2 \, dn.$$

On montre par un calcul de résidu que :

$$\int_0^{+\infty} n^2 \, | H_i(n) |^2 \, dn = n_i^2 \int_0^{+\infty} | H_i(n) |^2 \, dn.$$

Par conséquent :

$$m_2 = \sum_{i=1}^{p} K_i(n_i) \, n_i^2 \int_0^{+\infty} | H_i(n) |^2 \, dn.$$

On pose

$$\mathscr{C}^i = K_i(n_i) \int_0^{+\infty} | H_i(n) |^2 \, dn = K_i(n_i) \frac{\pi \, n_i}{4 \, \omega_i^4 \zeta_i} ;$$

qui représente la contribution dynamique du mode i dans la variance de l'observation. On obtient alors sans calcul supplémentaire :

$$m_2 = \sum_{i=1}^{p} n_i^2 \, \mathscr{C}^i.$$

(1) J.-L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, I, Dunod, Paris, 1968.

(2) Ch. Soize, *Dynamique stochastique des structures élancées et des structures spatiales à barres soumises aux effets du vent* (*Thèse de 3e cycle*, à soutenir).

(3) P. Krée, *Équations linéaires à coefficients aléatoires*, Istituto nazionale di alta matematica (*Symposia Mathematica*, VII, Bologna, 1971).

(4) A. G. Davenport, *On the Statistical Prediction of Structural Performance in the Wind Environment* (*Proceedings of Seminar: Wind Loads on Structure*, october 1970, Arthur NL Chiu).