



HAL
open science

Sur la dynamique stochastique des structures élastiques - Comments on stochastic dynamics of elastic structures

Christian Soize

► **To cite this version:**

Christian Soize. Sur la dynamique stochastique des structures élastiques - Comments on stochastic dynamics of elastic structures. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Série A, Sciences mathématiques, 1975, 280 (25), pp.1765–1766. <hal-00770404>

HAL Id: hal-00770404

<https://hal.science/hal-00770404v1>

Submitted on 3 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

MÉCANIQUE DES STRUCTURES. — *Sur la dynamique stochastique des structures élastiques.* Note de M. **Christian Soize**

Étude de dynamique stochastique des structures élastiques schématisées par poutre console et des structures spatiales à barres soumises aux effets du vent. L'utilisation de méthodes d'analyse fonctionnelle permet d'explicitier clairement la construction des approximations numériques déterministes et d'exposer rigoureusement à partir de celles-ci le problème de dynamique stochastique, la construction et la convergence des approximations stochastiques. Méthode de calcul numérique du moment d'ordre 2 de la mesure spectrale d'une observation scalaire.

La déformation $X(z, t)$ de la fibre moyenne à la cote $z \in I =]0, 1[$ due aux vibrations linéaires de flexions autour d'une position d'équilibre prise comme référence des structures élastiques schématisées par une poutre console verticale que l'on considère, s'écrit :

$$(1) \quad \rho(z) \ddot{X}(z, t) + c(z) \dot{X}(z, t) + (EI(z) X''(z, t))'' = F(z, t),$$

$$(2) \quad \begin{cases} X(z, 0) = X_0(z); & \dot{X}(z, 0) = X_1(z); \\ X(0, t) = X'(0, t) = X''(1, t) = (EIX''(1, t))' = 0, \end{cases}$$

avec $t \in J = (0, T)$; $\rho(z)$, $c(z)$, $EI(z)$, $F(z, t)$, respectivement la masse linéique, l'amortissement, la raideur, la densité d'effort extérieure appliquée, ces quatre grandeurs ayant des bornes supérieures et inférieures strictement positives.

Soit V le sous-espace de $H^2(I)$ formé des fonctions v telles que

$$v(0) = v'(0) = 0.$$

Posons

$$H = L^2(I), \quad B = L^2(0, T; H), \quad G = (X \in L^2(0, T; V), \dot{X} \in B).$$

Soit $A \in \mathcal{L}(V; V')$ associé à la forme bilinéaire symétrique coercive

$$\int_0^1 EI(z) u'' v'' dz \quad \text{sur } V.$$

Alors, le problème (1)-(2) s'écrit :

$$(3) \quad \begin{cases} \rho(z) \ddot{X}(z, t) + c(z) \dot{X}(z, t) + AX(z, t) = F(z, t), & \forall z \in I \text{ et } t \in J, \\ X(z, 0) = X_0(z); & \dot{X}(z, 0) = X_1(z), \end{cases}$$

et il est voisin de celui traité dans ⁽¹⁾ pour lequel ρ et c sont constants. A l'aide d'une démonstration analogue, on montre l'existence et l'unicité d'une solution déterministe $X \in G$ pour tout $(F, X_0, X_1) \in B \times V \times H$. La solution approchée de la méthode de Galerkin fournit l'approximation numérique X^m de la solution située dans un sous-espace de V qui est engendré par les m premières fonctions propres de l'opérateur d^4/dz^4 pour les

mêmes conditions aux limites. Cette construction assure une convergence rapide. On note $Z = L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ l'espace des observations et δ l'opérateur des observations $\in \mathcal{L}(G; Z)$.

1. DYNAMIQUE STOCHASTIQUE. — Soit (Ω, \mathcal{B}, P) l'espace probabilisé. On observe le vecteur a de Z sur J . La structure est soumise aux charges de vent modélisées par un écoulement d'air turbulent homogène à structure de couche limite. On ne conserve que la composante longitudinale du champ de vitesse du vent que l'on décompose en une vitesse moyenne sur J (dont on connaît le profil caractérisé par la rugosité et la vitesse moyenne de référence \underline{U}) et une fluctuation X_t autour de la moyenne. On peut alors ⁽²⁾ représenter la fluctuation d'effort F par un processus stochastique réel, continu, du second ordre, stationnaire, centré et gaussien dont les trajectoires appartiennent à B . Ce processus est décrit par ses fonctions de densité spectrale, de cohérence et de corrélation transversale dont on connaît les expressions en fonction de \underline{U} et de la rugosité du site. Comme on s'intéresse à la solution stationnaire, les conditions initiales n'interviennent pas. Pour montrer l'existence, l'unicité et la convergence de l'approximation stochastique, on représente F_t par la mesure de probabilité μ sur B qui est l'image de P par l'application $\omega \rightarrow (t \rightarrow F_t)$ de Ω dans B . Sa moyenne est nulle, ses opérateurs de covariance Λ_μ et de corrélation sont confondus. On prend $\Omega = B$; soit Y le processus linéaire du second ordre basé sur le dual B' de B et représenté par μ sur B . On a le schéma :

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\beta} & G & \xrightarrow{\delta} & Z \\ & & \uparrow \Lambda_\mu & & \uparrow \Lambda_\nu \\ L^2(\Omega) & \xleftarrow{Y} & B' & \xleftarrow{\beta'} & G' & \xleftarrow{\delta'} & Z' \end{array}$$

L'application $\delta \circ \beta$ est un isomorphisme de Z sur B . On en déduit l'existence et l'unicité de la solution stochastique représentée par ν de type 2 sur Z et telle que : $\Lambda_\nu = (\delta \circ \beta) \Lambda_\mu (\delta \circ \beta)'$.

L'approximation déterministe consiste à construire la suite d'opérateur β^m linéaires, continus, de rang fini, qui converge simplement vers β . La solution stochastique consiste à prendre $\nu^m = (\delta \circ \beta^m)(\mu)$. On en déduit :

$$\Lambda_{\nu^m} = (\delta \circ \beta^m) \Lambda_\mu (\delta \circ \beta^m)'$$

Compte tenu du lemme de convergence de ⁽³⁾ la solution stochastique approchée converge cylindriquement vers la solution du problème stochastique. La construction pratique de la solution numérique stochastique consiste alors à calculer la matrice spectrale de a connaissant la mesure spectrale de F et l'opérateur linéaire de rang fini β^m . Ce problème est classique. Remarquons enfin que l'approximation numérique d'ordre m déterministe et stochastique [solution interne du problème (1)-(2)] est équivalent dans sa résolution à la solution déterministe et stochastique d'une structure spatiale à barres ayant pour l'ensemble de ses noeuds m degrés de liberté. Ceci revient à faire une discrétisation du système et par conséquent envisager la solution externe.

2. CALCUL APPROCHE DU MOMENT D'ORDRE 2 DE LA MESURE SPECTRALE D'UNE OBSERVATION SCALAIRE. — Il s'écrit :

$$m_2 = \int_0^{+\infty} n^2 S(n) dn, \quad \text{avec } m_2 < \infty \text{ et } S(n),$$

la densité de la mesure spectrale de l'observation scalaire. La quadrature pour obtenir m_2 nécessite le calcul de $S(n)$ pour de nombreuses valeurs de n et ne peut être envisagé surtout pour les structures à barres lorsque m est grand (ainsi une structure à barre ayant 100 nœuds sur la paroi au vent nécessite pour chaque \underline{U} fixé et pour chaque pas de fréquence n le calcul de 10 000 intégrales quadruples pour former $S(n)$ dans le cas le plus défavorable). Le calcul montre qu'une expression approchée de m_2 est suffisante, et que l'on peut négliger dans l'expression de $S(n)$ la contribution des corrélations entre les modes propres de vibration. On a alors :

$$S(n) = \sum_{i=1}^p C^i(n),$$

avec p le nombre de mode considéré $\leq m$; $C^i(n) = K_i(n) |H_i(n)|^2$ la contribution du i -ième mode; $H_i(n)$ la fonction de transfert du i -ième mode de vibration caractérisé par le taux d'amortissement critique ζ_i ; la fréquence du système non amorti n_i , la raideur généralisée ω_i^2 ; $K_i(n)$ une expression fonction de la mesure spectrale de F , des modes propres de déformation et de δ . On a alors :

$$m_2 = \sum_{i=1}^p \int_0^{+\infty} K_i(n) n^2 |H_i(n)|^2 dn.$$

Pour $\zeta_i < 1/\sqrt{2}$ (structure faiblement amortie), $(n^2 |H_i(n)|^2)$ est équivalent à un filtre de bande passante très étroite centrée en n_i . $K_i(n)$ peut être considéré constant sur cette bande, d'où :

$$m_2 = \sum_{i=1}^p K_i(n_i) \int_0^{+\infty} n^2 |H_i(n)|^2 dn.$$

On montre par un calcul de résidu que :

$$\int_0^{+\infty} n^2 |H_i(n)|^2 dn = n_i^2 \int_0^{+\infty} |H_i(n)|^2 dn.$$

Par conséquent :

$$m_2 = \sum_{i=1}^p K_i(n_i) n_i^2 \int_0^{+\infty} |H_i(n)|^2 dn.$$

On pose

$$\mathcal{C}^i = K_i(n_i) \int_0^{+\infty} |H_i(n)|^2 dn = K_i(n_i) \frac{\pi n_i}{4 \omega_i^4 \zeta_i};$$

qui représente la contribution dynamique du mode i dans la variance de l'observation. On obtient alors sans calcul supplémentaire :

$$m_2 = \sum_{i=1}^p n_i^2 \mathcal{C}^i.$$

(¹) J.-L. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, I, Dunod, Paris, 1968.

(²) CH. SOIZE, *Dynamique stochastique des structures élancées et des structures spatiales à barres soumises aux effets du vent* (Thèse de 3^e cycle, à soutenir).

(³) P. KRÉE, *Équations linéaires à coefficients aléatoires*, Istituto nazionale di alta matematica (*Symposia Mathematica*, VII, Bologna, 1971).

(⁴) A. G. DAVENPORT, *On the Statistical Prediction of Structural Performance in the Wind Environment* (*Proceedings of Seminar: Wind Loads on Structure*, october 1970, Arthur NL Chiu).