



HAL
open science

**Dynamique stochastique des structures élancées
soumises aux charges de vent - Stochastic dynamics of
slender structures subjected to random wind loading**

Christian Soize

► **To cite this version:**

Christian Soize. Dynamique stochastique des structures élancées soumises aux charges de vent - Stochastic dynamics of slender structures subjected to random wind loading. *Revue Française de Mécanique*, 1976, 60 (-), pp.57–65. hal-00770401

HAL Id: hal-00770401

<https://hal.science/hal-00770401>

Submitted on 3 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DYNAMIQUE STOCHASTIQUE DES STRUCTURES ELANCÉES SOUMISES AUX CHARGES DE VENT⁽¹⁾

par

C. SOIZE

On étudie la dynamique stochastique des structures élastiques schématisées par une poutre console soumise aux charges de vent. On se limite, dans cette étude, aux déplacements dans le plan parallèle à la direction moyenne du vent. On considère les structures qui ne sont pas susceptibles d'instabilité aérodynamique ou de phénomènes auto-entretenus. La structure du vent au voisinage du sol est considérée comme celle d'un écoulement d'air turbulent à structure de couche limite. La turbulence est traitée statistiquement.

On a traité les problèmes numériques liés aux calculs des fonctions de répartition des valeurs extrêmes des observations sur une longue période donnée et on a explicité un certain nombre d'expressions, afin de permettre une meilleure compréhension mécanique des phénomènes. On a introduit un cadre fonctionnel qui permet, à partir des approximations numériques déterministes, d'explicitier clairement l'approximation stochastique et d'étudier la convergence.

I. — MODELISATION DU VENT AU VOISINAGE DU SOL ET HYPOTHÈSES UTILISÉES

Soit T la période sur laquelle on moyenne la vitesse du vent (T doit être pris entre 10 minutes et 1 heure, pour les raisons qui sont données dans [1]). On choisit l'axe OX d'un repère orthonormé $OXYZ$ suivant cette direction moyenne. L'axe OZ est vertical. Si l'on néglige le changement de direction de la vitesse moyenne entre le sol et la hauteur de gradient (il y a environ 10^0 entre 10 m et 200 m), la vitesse moyenne n'est plus fonction que de la cote Z . Des mesures effectuées au voisinage du sol [2] montrent que les écarts types des composantes suivant OY et OZ des fluctuations du champ de vitesse autour de la moyenne pendant T sont petits devant l'écart type de la composante suivant OX . Dans notre modèle, on ne gardera que la composante des fluctuations suivant OX . Le champ de vitesse en un point $M(X, Y, Z)$ de l'espace n'a qu'une composante suivant OX et s'écrit :

$$V(M, t) = \underline{V}(Z) + v(M, t) \quad (1)$$

$\underline{V}(Z)$ est le profil de la vitesse moyenne,
 $v(M, t)$ est le terme de fluctuation dû à la turbulence au point M .

Dans la suite, on considère que la face de la structure au vent est dans le plan YOZ , ou que les variations géométriques de cette face suivant l'axe OX (qui est placé perpendiculairement) sont faibles par rapport à l'échelle spatiale longitudinale de la turbulence pour la composante v . Par conséquent, pour la description de la turbulence, tout point M sera supposé appartenir au plan YOZ .

I.1. — Profil de la vitesse moyenne

Nous utiliserons la loi empirique proposée par DAVENPORT [1], [3], qui s'écrit :

$$\frac{\underline{V}(Z)}{\underline{V}_{Z_r}} = \left(\frac{Z}{Z_r}\right)^\alpha \quad (2)$$

expression dans laquelle :

\underline{V}_{Z_r} est la vitesse moyenne à la cote de référence Z_r (10 m en général) dans le site considéré,

$\underline{V}(Z)$ est la vitesse moyenne à la cote Z ,

et α est un nombre réel positif sans dimension, qui est fonction de la rugosité du site ($\alpha = 0,16$ pour une région plane et dégagée, $\alpha = 0,28$

pour une région boisée ou suburbaine, $\alpha = 0,40$
pour une région à forte densité de constructions
et d'obstacles de hauteurs différentes).

I.2. — Propriétés de la turbulence

Compte tenu des hypothèses que nous avons prises sur le champ de vitesse, dans l'étude statistique de la turbulence, il ne reste qu'une composante pour le tenseur de corrélation et le tenseur de spectre.

Pendant le temps T et dans l'hypothèse d'une turbulence quasi-homogène, on considère le processus stochastique $v(M, t)$ comme stationnaire, du second ordre, centré et Gaussien (voir, par exemple, VICKERY et DAVENPORT [4]).

• Pour l'écart quadratique moyen σ_v de la composante longitudinale $v(M, t)$, nous utiliserons la relation établie par DAVENPORT [5] :

$$\sigma_v^2 = 6,0 K \underline{V}^2 Z_r = \text{constante} \quad (3)$$

avec K coefficient de traînée moyen du sol, fonction de la rugosité. ($K = 0,005$ pour $\alpha = 0,16$, $K = 0,015$ à $0,02$ pour $\alpha = 0,27$ à $0,31$, $K = 0,05$ pour $\alpha = 0,40$).

L'intensité de la turbulence à la cote Z s'écrit alors :

$$I(Z) = \frac{\sigma_v}{\underline{V}(Z)} = \sqrt{6K} \left(\frac{Z_r}{Z}\right)^\alpha$$

• Pour la fonction spectrale $S_{v11}(M, n)$ de la composante longitudinale v au point M , définie pour la plage de fréquence $[0, +\infty]$, nous utiliserons l'expression de Mikio HINO [6] :

$$\frac{n S_{v11}(M, n)}{\sigma_v^2} = 0,4751 \frac{X}{(1 + X^2)^{5/6}} \quad (4)$$

avec n la fréquence, $X = \frac{n \mathcal{E}_1}{\underline{V} Z_r}$, $\mathcal{E}_1 = \frac{\sigma_v^2 Z_r}{0,0275 \alpha^3 \underline{V}^3 Z_r} \left(\frac{Z}{Z_r}\right)^\alpha$
 $= \frac{(6K)^{3/2} Z_r}{0,0275 \alpha^3} \left(\frac{Z}{Z_r}\right)^\alpha$

• La fonction de densité spectrale transversale $S_{v11}(M, M', n)$ pour deux points situés dans le plan YOZ et distants de $r = \sqrt{(Z - Z')^2 + (y - y')^2}$ est liée à la fonction d'autocorrélation transversale par la relation :

$$S_{v11}(M, M', n) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{v11}(M, M', \tau) e^{-j\pi n \tau} d\tau \quad (5)$$

Dans le cas général, cette fonction est complexe. Sa partie réelle, notée C_{v11} , est la fonction de densité spectrale coïncidente et la partie imaginaire, notée ($-Q_{v11}$), est la fonction quadratique de densité spectrale. Le carré de son module est lié à la fonction de cohérence $v^2_v(M, M', n)$ par la relation :

$$|S_{v11}(M, M', n)|^2 = v^2_{v11}(M, M', n) \frac{S_{v11}(M, n)}{S_{v11}(M', n)} \quad (6)$$

Nous utiliserons comme expression du carré de la fonction de cohérence :

$$\sqrt{v^2_{v11}(M, M', n)} = e^{-\frac{cnr}{\underline{V}(Z)}} \quad (7)$$

avec $Z > Z'$ par convention et c une constante fonction de la rugosité.

Cette formulation est proche de celles proposées par DAVENPORT et HARRIS. Néanmoins, elle en est différente et on trouvera sa justification dans [7].

• Le processus étant centré, la fonction de corrélation transversale s'écrit :

$$\rho_{v11}(M, M', \tau) = \frac{R_{v11}(M, M', \tau)}{R_{v11}(M, M, 0) R_{v11}(M', M', 0)} \quad (8)$$

Comme nous avons pris la variance σ_v^2 indépendante du point M , on a $\sigma_v^2 = R_{v11}(M, M, 0) = R_{v11}(M', M', 0)$ et le coefficient de corrélation transversale s'écrit :

$$\rho_{v11}(M, M') = \rho_{v11}(M', M', 0) = \frac{R_{v11}(M, M', 0)}{\sigma_v^2} \quad (9)$$

Nous utiliserons l'expression de WYATT et RAZNAHAN [8] :

$$\rho_{v11}(M, M') = e^{-\sqrt{\left(\frac{y-y'}{L_v^y}\right)^2 + \left(\frac{Z-Z'}{L_v^z}\right)^2}} \quad (10)$$

avec $Z \geq Z'$ par convention, L_v^y et L_v^z deux scalaires intégraux d'échelle spatiale de la turbulence qui ont pour expression :

$$L_v^y = 42 \left(\frac{Z}{20}\right)^{0,25} \quad \text{et} \quad L_v^z = \sqrt{37 Z}$$

I.3. — Relation entre champ de vitesse et champ de pression

La pression instantanée résultante $P_r(M, t)$ s'exerçant sur un élément dS , au point M de la surface au vent, s'écrit, pour étudier les vibrations parallèles à la direction moyenne du vent :

$$P_r(M, t) dS = \frac{1}{2} \rho_a C_D \underline{V}^2(Z) dS + \rho_a C_D \underline{V}(Z) v(M, t) dS \quad (11)$$

avec ρ_a la masse volumique de l'air, C_D le coefficient de traînée. Une justification est donnée dans [7]. Elle est fondée sur les hypothèses suivantes :

- Le régime pulsatoire du sillage de la construction est supposé indépendant des caractéristiques dynamiques du vent incident.
- Les termes d'excitation due à ces tourbillons sont inclus dans le coefficient de traînée.
- Pour les constructions envisagées, on s'affranchit du terme dû à l'accélération du fluide si le coefficient de masse inertielle C_m vérifie une certaine expression qui lie principalement C_m , la dimension du solide dans la direction du vent moyen, le coefficient de traînée, la vitesse moyenne. Cette relation est vérifiée dans les cas habituels d'après BEARMAN [9].
- Enfin, on suppose $\left(\frac{v}{\underline{V}}\right)^2$ suffisamment petit pour utiliser une théorie linéaire.

II. — STRUCTURE ÉLANCÉE SOUmise AUX CHARGES DE VENT

La structure élançée est schématisée par une poutre verticale de fibre moyenne OZ, à plan moyen XOZ, de hauteur h , parfaitement encastree à l'origine. Les efforts extérieurs $F(Z, t)$ sont les forces de vent parallèles à l'axe OX et appliqués dans le plan moyen. On ne s'intéresse ici qu'aux vibrations linéaires de flexion dans le plan XOZ. On pose $Z = zh$. La déformation $X(z, t)$ de la fibre moyenne à la cote $z \in I =]0, 1[$ est régie par l'équation aux dérivées partielles :

$$\rho(z) \ddot{X}(z, t) + c(z) \dot{X}(z, t) + (EI(z) X''(z, t))'' = F(z, t) \quad z \in I \quad (12)$$

associée aux conditions initiales : $\dot{X}(z, 0) = X(z, 0) = 0$ et aux conditions aux limites : $X(0, t) = X'(0, t) = X''(1, t) = (EIX'')'(1, t) = 0$.

Avec : $t \in J = (0, T)$; $\rho(z)$, $c(z)$, $EI(z)$, $F(z, t)$ respectivement la masse linéique, l'amortissement, la raideur, la densité d'effort extérieur appliquée; ρ , c et EI ayant des bornes supérieures et inférieures strictement positives. On prend les notations usuelles de dérivation, le « point » indique la dérivée par rapport au temps et le « prime » la dérivée par rapport à z .

Compte tenu de la décomposition (11) du champ de pression, F et X se décomposent en :

$$\begin{aligned} F(z, t) &= \bar{F}(z) + f(z, t) \\ X(z, t) &= \bar{X}(z) + u(z, t) \end{aligned} \quad (13)$$

Le calcul de la réponse moyenne $\bar{X}(z)$ (sur la période J) de cette poutre soumise à un effort moyen statique $\bar{F}(z)$ est très classique. La fluctuation $u(z, t)$ est solution de :

$$\begin{aligned} \rho(z) \ddot{u}(z, t) + c(z) \dot{u}(z, t) + (EI(z) u''(z, t))'' &= f(z, t) \quad z \in I; t \in J \\ u(z, 0) = u_0; \dot{u}(z, 0) = u_1 = 0 & \quad (14) \\ u(0, t) = u'(0, t) = u''(1, t) = (EIu'')'(1, t) = 0 \end{aligned}$$

La relation qui lie v à f est linéaire. Le processus stochastique $f(z, t)$ est donc aussi centré, stationnaire, du second ordre et Gaussien sur la période de temps J . Le problème est de construire la solution stochastique $u(z, t)$ qui vérifie (14). Pour cela, nous allons étudier le modèle déterministe et construire une approximation déterministe. Puis, nous construirons l'approximation stochastique sur le même modèle que l'approximation déterministe. Il faudra, après, montrer que cette approximation stochastique ainsi construite converge bien vers la solution stochastique du problème (14).

II.1. — Étude d'un modèle déterministe

On étudie la solution du problème (14) en supposant momentanément $f(z, t)$ déterministe. Nous allons introduire un cadre fonctionnel qui nous permettra

de résoudre rapidement les problèmes de convergence et d'unicité. Soit $L^2(I) = H$ l'espace des classes des fonctions u de carré sommable sur I et tel que : $\|u\|_H = \left(\int_0^1 u^2 dz \right)^{1/2}$. Le produit scalaire associé sur H s'écrit :

$$(u, v) = \int_0^1 uv dz$$

Soient u' et u'' les dérivées premières et secondes de u au sens des distributions sur I et $H^2(I)$ l'espace fonctionnel (SOBOLEV d'ordre 2) sur I défini par :

$$H^2(I) = \{u, u', u'' \in H\}$$

et muni de la norme :

$$\|u\|_{H^2(I)} = (\|u\|_H^2 + \|u'\|_H^2 + \|u''\|_H^2)^{1/2}$$

On définit le sous-espace V de H^2 tel que :

$$V = \{v \in H^2(I); v(0) = v'(0) = 0\}$$

On identifie H et son dual. On note V' le dual de V et l'on montre que l'on a les inclusions $V \subset H \subset V'$ avec V séparable, réflexif, dense dans H et injection continue de V dans H . Compte tenu de ces inclusions, si $f \in V'$ et $v \in V$, on note encore (f, v) le produit scalaire.

On pose :

$$\|u\|_V = \left(\int_0^1 u''^2 dz \right)^{1/2}$$

On montre alors que, sur V , les normes $\|u\|_{H^2(I)}$ et $\|u\|_V$ sont équivalentes. Enfin, si X est un espace de HILBERT, on désignera par $L^2(0, T; X)$ l'espace des classes de fonctions f mesurables de $(0, T)$ à valeurs dans X et tel que l'on ait :

$$\left(\int_0^T \|f\|_X^2 dt \right)^{1/2} < \infty$$

a) EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION DÉTERMINISTE

Soit A l'opérateur linéaire continu de V dans V' , associé à la forme bilinéaire :

$$a(u, v) = (Au, v) = \int_0^1 EI(z) u'' v'' dz$$

La forme bilinéaire ainsi définie est symétrique, continue et coercive sur V car $a(u, u) \geq A_K \int_0^1 u''^2 dz \geq A_K \|u\|_V^2$.

A_K est tel que : $0 < A_K \leq EI(z)$ pour $z \in [0, 1]$.

Compte tenu de ces dernières propriétés et moyennant les hypothèses supplémentaires suivantes : $EI(z)$ indéfiniment différentiable sur I et A elliptique dans \bar{I} , l'interprétation du problème stationnaire associé à (14) :

$$\forall v \in V; a(u, v) = (f, v) \text{ pour } f \text{ donné dans } V'$$

permet d'écrire le problème d'évolution (14) sous la forme équivalente :

$$\left. \begin{aligned} \rho(z) \ddot{u}(z, t) + c(z) \dot{u}(z, t) + Au(z, t) \\ = f(z, t) \quad z \in I; \quad t \in J \\ \text{avec les données de CAUCHY :} \\ u(z, 0) = u_0(z); \quad \dot{u}(z, 0) = u_1(z) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Au problème (15) on ajoute les hypothèses sur les données :

$$f \in L^2(0, T; H); \quad u_0 \in V \quad \text{et} \quad u_1 \in H \quad (16)$$

Le problème (15) (16) est voisin de celui traité dans [10], pour lequel ρ et c sont constantes. À l'aide d'une démonstration similaire, on montre l'existence et l'unicité de la solution u telle que :

$$\left. \begin{aligned} u \in L^2(0, T; V) \\ \dot{u} \in L^2(0, T; H) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Nous ne donnerons pas la démonstration, mais nous rappellerons les grandes lignes, car nous nous servirons des résultats pour construire l'approximation numérique.

• Dans une première partie, on fait des calculs formels sur la forme variationnelle du problème :

$$\forall v \in V; \quad (\rho \ddot{u}, v) + (c \dot{u}, v) + a(u, v) = (f, v) \quad (18)$$

pour obtenir des estimations a priori de $\|u\|_H^2$ et $\|\dot{u}\|_V^2$.

• Dans une deuxième partie, à l'aide des estimations a priori, on montre l'existence d'une solution par la méthode de GALERKIN.

— dans un premier temps, on montre l'existence d'une solution approchée de la manière suivante : V est séparable, réflexif. Il existe une base $\{W_i\}$ dans V , telle que le sous espace V_m de V engendré par $\{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ soit dense dans V . On dit que $u_m(z, t)$ est solution approchée du problème (15) (16) si, pour tout $i \in \{1, m\}$, on a :

$$(\rho \ddot{u}_m, W_i) + (c \dot{u}_m, W_i) + a(u_m, W_i) = (f, W_i) \quad (19)$$

On cherche une solution de la forme : $u_m(z, t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) W_j(z)$ et nous posons :

$$g_{im}(0) = \xi_{im}; \quad \dot{g}_{im}(0) = \eta_{im} \quad \text{pour} \quad i \in \{1, m\}$$

alors :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \xi_{im} W_i \rightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad V$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \eta_{im} W_i \rightarrow u_1 \quad \text{dans} \quad H.$$

En substituant l'expression de la solution approchée u_m dans (19), on obtient un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants que l'on

représente matriciellement dans la base canonique de \mathbb{R}^m :

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} M \ddot{g} + C \dot{g} + K g &= F \\ g(0) &= g_0; \quad \dot{g}(0) = 0 \end{aligned} \right. \\ \text{avec :} \\ \left\{ \begin{aligned} M_{ij} &= M_{ji} = (\rho W_i, W_j) \\ C_{ij} &= C_{ji} = (c W_i, W_j) \\ K_{ij} &= K_{ji} = (EI W_i'', W_j'') \\ F_i &= (f, W_i) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Ce système admet une solution unique et sa résolution permet de construire une solution approchée de (15) (16).

— Dans un deuxième temps, on montre, à l'aide des estimations a priori, que cette solution approchée converge vers la solution du problème (15) (16) quand $m \rightarrow \infty$.

• Dans une troisième partie on montre l'unicité.

b) CONSTRUCTION PRATIQUE DE LA SOLUTION APPROCHÉE

Pour obtenir une solution approchée u_m , il suffit de résoudre le système (20) d'ordre m , en prenant pour les W_i des fonctions qui répondent aux conditions. Pour cela, on prend les fonctions propres de l'opérateur $\frac{d^4 \Phi}{dz^4}$ associé aux conditions aux limites homogènes :

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(1) = \Phi'''(1) = 0$$

(en toute rigueur, il n'est pas nécessaire d'inclure les conditions $\Phi''(1) = \Phi'''(1) = 0$, car il suffit que les fonctions $\Phi \in V$. Le choix est fait pour augmenter la rapidité de convergence).

Ce problème est classique et conduit aux fonctions :

$$W_i(z) = \cos k_i z - \operatorname{ch} k_i z + \begin{pmatrix} \sin k_i - \operatorname{sh} k_i \\ \cos k_i + \operatorname{ch} k_i \\ \sin k_i z - \operatorname{sh} k_i z \end{pmatrix} \quad (21)$$

avec : k_i solution de : $1 + \cos k_i \operatorname{ch} k_i = 0$.

Ces fonctions forment une base complète et sont orthogonales au sens de H : $(W_i, W_j) = \delta_{ij}$. Elles répondent aux conditions générales :

— les W_i appartiennent à V , car W_i dans H^2 et $W_i(0) = W_i'(0) = 0$,
— les W_i sont indépendants et denses dans V ,
— les W_i forment une base de V .

Remarquons que nous aurions pu prendre n'importe quelles fonctions vérifiant (22), par exemple $W_i = z^{i+1}$, mais, à part W_1 , les autres fonctions sont éloignées des modes propres de déformation du système réel. Dans les applications $\rho(z)$ et $EI(z)$ varient suffisamment peu pour que les modes propres soient voisins du système à paramètre mécanique constant. En prenant pour W_i l'expression (22), on obtient alors une convergence rapide.

La résolution de (20) est classique et nous opérons de la manière suivante : M et K sont deux matrices symétriques, définies, positives. Il existe un change-

ment de base $g = \Phi\eta$ qui diagonalise simultanément M et K . Dans le cadre des applications, on ne connaît pas, en général, l'amortissement C . Par contre, on connaît mieux le taux d'amortissement critique pour chaque mode propre de vibrations. Par conséquent, nous considérons l'équation :

$$M\ddot{g} + Kg = F$$

et nous introduisons dans les équations découplées, pour chaque mode, un amortissement C_i égal à une fraction de l'amortissement critique du mode i . On pose :

$$q_i(z) = \sum_{j=1}^m \Phi_{ji} W_j(z) \quad (23)$$

qui est le $i^{e\text{me}}$ mode normal.

La solution approchée d'ordre m du problème (15) (16) s'écrit :

$$u_m(z, t) = \sum_{j=1}^m \eta_j(t) q_j(z) \text{ avec } \eta_j \text{ solution de :} \quad (24)$$

$$M_i \ddot{\eta}_i + c_i \dot{\eta}_i + w_i^2 \eta_i = (f, q_i)$$

$$\eta_i(0) = \eta_{i0}; \quad \dot{\eta}_i(0) = 0$$

c) SCHÉMA DE LA SOLUTION DÉTERMINISTE

On pose :

$$B = L^2(O, T; H); \quad G = \{u \in L^2(0, T; V); \quad \dot{u} \in B\}$$

Soit $Z = L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ l'espace des observations (contraintes, sollicitations, déplacements, etc...). Le vecteur observation $a \in Z$ est lié à $u \in G$ par un opérateur linéaire continu $\delta \in \mathcal{L}(G; Z)$.

D'où le schéma :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & G \xrightarrow{\delta} Z \\ f \rightarrow u & = \beta(f) \rightarrow a = \delta(u) \end{array} \quad (25)$$

Nous avons vu que l'approximation numérique consiste à construire la suite d'opérateurs β^m linéaires, continus, de rang fini, qui converge simplement vers β .

D'où le schéma :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & G^m \xrightarrow{\delta} Z \\ f \rightarrow u^m & = \beta^m(f) \rightarrow a^m = \delta(u^m) \end{array} \quad (26)$$

II.2. — Solution stochastique

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) l'espace probabilisé dans lequel Ω représente le hasard, \mathcal{F} la tribu des événements et P une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) . On définit un processus linéaire Y du second ordre, basé sur un espace vectoriel topologique B' , et relatif à Ω , comme une application linéaire de B' , dans l'espace des variables aléatoires du second ordre sur Ω .

Dans la suite, on se limite au cas des processus décomposés par une variable aléatoire ρ , c'est-à-dire que l'on a :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\rho} & B \\ L^2(\Omega) & \xleftarrow{Y} & B' \\ Y\xi & = & \xi \rho \end{array}$$

Du point de vue probabiliste, ceci revient à remplacer B par Ω et à travailler sur B muni de la mesure de probabilité $\mu = \rho(P)$.

a) LES DONNÉES DU PROBLÈME STOCHASTIQUE

La relation qui lie v à f s'écrit :

$$f(z, t) = \int_0^{b(z)} \rho_a C_D(z) \underline{V}(z) v(Y, z, t) dY \quad (27)$$

avec :

$b(z)$ la largeur de la face au vent à la cote z ,
 ρ_a, C_D, V, v les grandeurs définies en I.

Cette relation est linéaire. Compte tenu des hypothèses sur v , on en déduit que f_i est un processus stochastique continu, du second ordre, stationnaire, centré et Gaussien. Comme le processus v_i est entièrement décrit par les expressions (2) à (10), on peut aisément construire les fonctions équivalentes pour f . Comme nous nous intéressons à la solution stationnaire, les conditions initiales n'interviennent pas.

Pour montrer l'existence, l'unicité et la convergence de l'approximation stochastique, on représente f par un processus linéaire Y basé sur B' . À l'aide de la théorie des processus linéaires et du théorème de Fubini, on montre que les trajectoires sont presque sûrement dans L^2 . Par conséquent, l'application $\rho : w \rightarrow (t \rightarrow f_t)$ appartient à $L^2(\Omega, B)$. Cette application décompose le processus linéaire Y qui est représenté sur B par la mesure de probabilité μ image de P par ρ . Concrètement, on remplace Ω par B et on tire au hasard dans B les trajectoires suivant la loi μ . Ceci explique aussi pourquoi les trajectoires sont des éléments de $L^2(I; H)$. Y est de type 2, de moyenne nulle, ses opérateurs de covariance $\Delta\mu$ et de corrélation sont confondus.

b) EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION STOCHASTIQUE

La solution est représentée par v de type 2 sur Z . On a le schéma :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\rho} & G \xrightarrow{\delta} Z \\ \uparrow \Delta\mu & & \uparrow \Delta\nu \\ L^2(\Omega) & \xleftarrow{Y} & B' \leftarrow G' \leftarrow Z' \end{array}$$

L'application $\delta \circ \beta$ est un isomorphisme de Z sur B' . On en déduit immédiatement l'existence et l'unicité de la solution stochastique et l'on a :

$$\begin{array}{l} v = (\delta \circ \beta)(\mu) \\ \Delta\nu = (\delta \circ \beta) \Delta\mu (\delta \circ \beta)' \end{array} \quad (28)$$

c) CONSTRUCTION DE L'APPROXIMATION STOCHASTIQUE

La construction de l'approximation de la solution stochastique consiste à prendre le même modèle que celui de l'approximation déterministe. On a alors :

$$\begin{array}{l} v^m = (\delta \circ \beta^m)(\mu) \\ \Delta\nu^m = (\delta \circ \beta^m) \Delta\mu (\delta \circ \beta^m)' \end{array} \quad (29)$$

Mais il faut alors montrer que cette solution approchée converge bien vers la solution stochastique (28).

d) CONVERGENCE DE L'APPROXIMATION STOCHASTIQUE (29) VERS LA SOLUTION EXACTE (28)

La théorie que nous avons utilisée permet de conclure immédiatement. Il suffit d'appliquer le lemme de convergence de P. KREE [11] qui assure la convergence de l'approximation stochastique (29) vers la solution stochastique (28).

e) CONSTRUCTION EFFECTIVE DE L'APPROXIMATION STOCHASTIQUE

On est ramené au cas classique des processus vectoriels de dimension finie. Le processus vectoriel d'entrées \mathcal{F}^m a pour i^{eme} composante $\mathcal{F}_i^m = (f, q_i)$. Le schéma (26) peut être décomposé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f &\rightarrow \mathcal{F}^m = \pi_q^m(f) \\ \mathcal{F}^m &\rightarrow \gamma^m = \mathcal{K}(\mathcal{F}^m) \end{aligned}$$

\mathcal{K} est tel que, pour chaque composante : $\gamma_i = h_i \star \mathcal{F}_i^m$, h_i étant la réponse impulsionnelle du i^{eme} filtre linéaire (24)

$$\gamma^m \rightarrow a^m = A(\gamma^m) = \delta(q^{mT} \gamma^m)$$

L'opérateur δ permet de calculer des grandeurs mécaniques et cinématiques (accélération). La représentation matricielle de A peut s'écrire :

$$A = \left\| \begin{array}{c} \Phi_1 \\ \Phi_2 \frac{d^2}{dt^2} (\cdot) \end{array} \right\|$$

avec Φ_1 et Φ_2 deux opérateurs linéaires dans le but. D'où :

$$\delta \circ \beta^m = A \circ \mathcal{K} \circ \pi_q^m$$

Les opérateurs \mathcal{K} et A sont déterministes, réels, linéaires, continus. Les processus vectoriels γ_i^m et a_i^m sont continus, réels, stationnaires, du second ordre et gaussiens. On a alors la relation classique qui lie les mesures spectrales de \mathcal{F}_i^m et a_i^m :

$$\frac{\mu_a(n)}{a} = \widehat{A} H_\mu(n) \overline{H} \widehat{A}^T$$

$$\text{avec : } \widehat{A} = \left\| \begin{array}{c} \Phi_1 \\ -(2\pi n)^2 \Phi_2 \end{array} \right\|$$

H est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux H_i sont les transformées de FOURIER des réponses impulsionnelles h_i (ce sont les fonctions de transfert) et qui ont pour expression :

$$H_i(n) = \frac{1}{w_i^2 \left[1 - \left(\frac{n}{n_i}\right)^2 + j2\xi_i \left(\frac{n}{n_i}\right) \right]}$$

avec : $n_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{w_i^2}{M_i}}$ et $\xi_i = \frac{c_i}{2\sqrt{w_i^2 M_i}}$ = fraction de l'amortissement critique.

Les mesures spectrales admettent des densités. La relation entre les matrices de densité spectrale s'écrit :

$$S_a(n) = \widehat{A}(n) H(n) S_{\mathcal{F}}(n) \overline{H}(n) \widehat{A}^T(n) \quad (30)$$

Nous utiliserons les expressions de $S_{\mathcal{F}}(n)$ et $S_a(n)$ définies pour les fréquences $(0, +\infty)$. La variance de la i^{eme} observation a_i est donnée par :

$$\sigma_{a_i}^2 = \int_0^{+\infty} S_{a_{ii}}(n) dn \quad (31)$$

La partie réelle de l'élément ij de la matrice $S_{\mathcal{F}}$ s'écrit [7] :

$$\text{Ré}(S_{\mathcal{F}_{ij}}(n)) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{b(z)} \int_0^{b(z')} \lambda_i(z, n) \lambda_j(z', n) e^{-\frac{cn}{z} \sqrt{(z-z')^2 h^2 + (y-y')^2}} dy dy' dz dz'$$

avec : $\chi = \underline{V}(z) = \underline{V}_h z^x$ si $z \geq z'$ et $\chi = \underline{V}(z')$ si $z < z'$

$$\lambda_i(z, n) = \rho_a C_{D}(z) \underline{V}_h z^x q_i(z) \sqrt{S_{e11}(z, n)}$$

Pour le cas particulier où $b(z) = b(z') = b$, on peut transformer cette intégrale quadruple en intégrale triple.

Il est intéressant de faire apparaître la contribution des différents modes de vibration ainsi que les corrélations entre modes. L'élément ij de la matrice S_a s'écrit, d'après (30) :

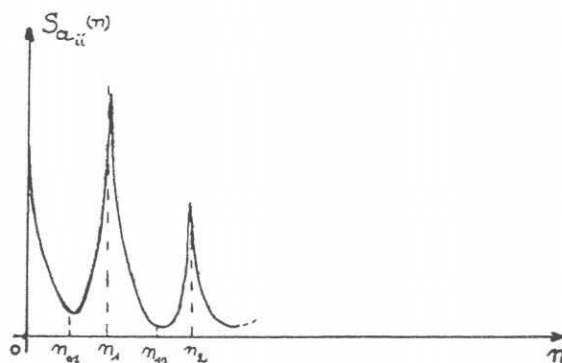
$$S_{a_{ij}} = \sum_{\alpha=1}^P C_{a_{ij}}^\alpha + \sum_{\substack{\beta, \alpha=1 \\ \alpha < \beta}}^P C_{a_{ij}}^{\alpha\beta} \quad (32)$$

avec P le nombre de modes considérés, $C_{a_{ij}}^\alpha$ la contribution du mode α et $C_{a_{ij}}^{\alpha\beta}$ la contribution des corrélations entre les modes α, β et β, α .

Pour le calcul des variances de l'observation a_i , on a :

$$\begin{aligned} C_{a_{ii}} &= \widehat{A}_{ia}^2 |H_x|^2 S_{\mathcal{F}_{xx}} \text{ avec } S_{\mathcal{F}_{xx}} \text{ réel} \\ C_{a_{ii}}^{\alpha\beta} &= 2\widehat{A}_{ix} \widehat{A}_{i\beta} \text{ Ré}(H_x \overline{H}_\beta S_{\mathcal{F}_{x\beta}}) \end{aligned} \quad (33)$$

Il reste à appliquer (31) pour calculer les variances et faire apparaître les différentes contributions. Le graphe de $S_{a_{ii}}(n)$ a l'allure suivante :



L'intégration en fréquence est délicate. Il est nécessaire de faire apparaître les domaines $[0, n_{01}]$, $[n_{01}, n_1]$, $[n_1, n_{12}]$, $[n_{12}, n_2]$, etc... après avoir déterminé les valeurs n_{01} , n_1 , n_{12} , n_2 et d'appliquer sur chaque segment la méthode de GAUSS. Cette méthode est précise, mais elle est assez longue. Une approximation consiste à dire que, pour les basses fréquences $n \in [0, n_{01}]$, la réponse est quasistatique. On écrit alors, pour l'observation a_i :

$$\sigma_{ai}^2 = \sigma_{Qai}^2 + \sigma_{Dai}^2 \quad (34)$$

dans laquelle σ_{Qai}^2 est la contribution quasistatique pour les basses fréquences et σ_{Dai}^2 la contribution dynamique pour les modes de vibrations. Dans cette méthode, il y a une part d'imprécision car l'on ne connaît pas exactement la part contributive de σ_{Qai}^2 . Ainsi, plus la fréquence fondamentale de la structure est basse, plus on obtient une surestimation de σ_{ai}^2 . Le

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{n_\alpha}{n_\beta}\right) \left[\left(\frac{n_\alpha}{n_\beta}\right) \zeta_\alpha + \zeta_\beta \right]}{\left[\left(\frac{n_\alpha}{n_\beta}\right) + 4\zeta_\alpha \zeta_\beta \left(\frac{n_\alpha}{n_\beta}\right)^3 - 2(1 - 2(\zeta_\alpha^2 + \zeta_\beta^2)) \left(\frac{n_\alpha}{n_\beta}\right)^2 + 4\zeta_\alpha \zeta_\beta \left(\frac{n_\alpha}{n_\beta}\right) + 1 \right]}$$

calcul de σ_{Qai}^2 ne fait intervenir que les corrélations spatiales. L'opérateur β est défini par :

$$f \xrightarrow{\beta} u = \beta(f) = h^4 \int_0^z \int_0^z \frac{1-\theta}{EI(\theta)} (y-\theta) f(y, t) dy d\theta \quad (35)$$

La matrice des variances et covariances des observations s'écrit :

$$R_u(0) = \delta R_u(0) \delta^T \quad (36)$$

La fonction d'autocorrélation au point 0 de u $R_u(0)$ s'explique facilement en fonction de $R_f(z, z', 0)$ et l'on a :

$$R_f(z, z', 0) = \int_0^{b(z)} \int_0^{b(z')} \varphi_{\alpha}^2 C_D(z) C_D(z') \underline{V}(z) \underline{V}(z') \sigma_{v\varphi_{v11}}^2(y, z, y', z') dy' dy \quad (37)$$

avec $\varphi_{v11}(y, z, y', z')$ donné par l'expression (10).

On calcule alors simplement les variances quasistatiques données par :

$$\sigma_{Qai}^2 = R_{aii}(0) \quad (38)$$

Nous n'explicitons pas ici ce calcul simple.

Le calcul de la contribution dynamique σ_{Dai}^2 consiste à écrire que le spectre d'entrée du système est constant sur la bande passante du filtre. Les relations (31), (32) et (33) donnent :

$$\sigma_{ai}^2 = \sum_{\alpha=1}^P \int_0^{+\infty} (\widehat{A}_{i\alpha}(n))^2 |H_\alpha(n)|^2 S_{\mathcal{F}\alpha\alpha}(n) dn + \dots + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P \int_0^{+\infty} 2\widehat{A}_{i\alpha}(n) \widehat{A}_{i\beta}(n) \text{Ré}(H_\alpha(n) \overline{H}_\beta(n) S_{\mathcal{F}\alpha\beta}(n)) dn$$

L'approximation consiste alors à écrire :

$$\sigma_{Dai}^2 = \sum_{\alpha=1}^P (\widehat{A}_{i\alpha}(n_\alpha))^2 S_{\mathcal{F}\alpha\alpha}(n_\alpha) \int_0^{+\infty} |H_\alpha(n)|^2 dn + \dots + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P 2\widehat{A}_{i\alpha}(n_\alpha) \widehat{A}_{i\beta}(n_\beta) \int_0^{+\infty} \text{Ré}(H_\alpha(n) \overline{H}_\beta(n) S_{\mathcal{F}\alpha\beta}(n_\alpha)) dn$$

Pour les systèmes faiblement amortis, $\xi < 0,1$, on confond les fréquences propres du système non amorti et les fréquences du système amorti.

D'autre part, on néglige le produit des parties imaginaires et, compte tenu des relations :

$$\int_0^{+\infty} |H_\alpha(n)|^2 dn = \frac{\pi n_\alpha}{4\zeta_\alpha} \frac{1}{w^4_\alpha} \quad \text{Ré} \left\{ \int_0^{+\infty} H_\alpha(n) \overline{H}_\beta(n) dn \right\} = \frac{2\pi n_\alpha}{w^2_\alpha w^2_\beta} \chi_{\alpha\beta}$$

avec $n_\alpha < n_\beta$ par convention

et :

$$\left(\frac{n_\alpha}{n_\beta}\right) \left[\left(\frac{n_\alpha}{n_\beta}\right) \zeta_\alpha + \zeta_\beta \right]$$

d'où :

$$\sigma_{Dai}^2 = \sum_{\alpha=1}^P C_{ai}^\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P C_{ai}^{\alpha\beta} \quad (39)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} C_{ai}^\alpha &= \frac{\pi n_\alpha}{4w^4_\alpha \zeta_\alpha} (\widehat{A}_{i\alpha}(n_\alpha))^2 S_{\mathcal{F}\alpha\alpha}(n_\alpha) \\ C_{ai}^{\alpha\beta} &= \frac{4\pi n_\alpha}{w^2_\alpha w^2_\beta} \chi_{\alpha\beta} \widehat{A}_{i\alpha}(n_\alpha) \widehat{A}_{i\beta}(n_\beta) \text{Ré}(S_{\mathcal{F}\alpha\beta}(n_\alpha)) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

L'application des formules (34), (36), (37), (38), (39), (40) donne une méthode rapide de calcul des variances sans avoir à effectuer des intégrations numériques en fréquence.

III. — CALCUL NUMÉRIQUE DES FONCTIONS DE RÉPARTITION

On cherche à exprimer la fonction de répartition des valeurs extrêmes positives d'une observation a_i que l'on notera Q sur une longue période de temps θ (que l'on prend égale à 50 ans, en général, pour les problèmes de sécurité).

La décomposition de la vitesse du vent $V = \underline{V} + v$ entraîne, sur les observations, la décomposition $Q = \underline{Q} + q$. Sur \underline{V} et pour \underline{V} fixé, dans un site donné, la fonction aléatoire q est entièrement décrite et nous savons calculer les paramètres de la loi de probabilité conditionnelle du maximum de q (que l'on note q_{\max}) à l'aide des résultats établis dans II. L'expression

de la probabilité des dépassements d'un haut niveau positif Q^* de Q sur la période θ s'écrit [7] [13] :

$$P[Q > Q^*] = \int_0^{+\infty} P[q_{\max} > (Q^* - k_Q \underline{V}_{Zr}) | \underline{V}_{Zr}] f(\underline{V}_{Zr}) d\underline{V}_{Zr} \quad (41)$$

avec :

- k_Q tel que $\underline{Q} = k_Q \underline{V}_{Zr}^2$ $k_Q > 0$.
- $f(\underline{V}_{Zr})$ la densité de la loi de valeurs extrêmes du vent moyen de référence sur θ . On prend une loi de valeur extrême type I qui s'écrit, pour les grandes valeurs de y positives :

$$P[\underline{V}_{Zr} \leq y] = \text{Exp}(-\text{Exp}(-a(y - U)))$$

Les paramètres a et U doivent être ajustés par des méthodes statistiques.

- Compte tenu des hypothèses suivantes :
 - le processus q_t est gaussien, stationnaire, centré sur T ,
 - la suite des instants d'atteinte d'un haut niveau q tend à devenir Poissonnienne.

La loi conditionnelle des valeurs extrêmes positives s'écrit [12] :

$$P[q_{\max} > (Q^* - k_Q \underline{V}_{Zr}) | \underline{V}_{Zr}] = 1 - \text{Exp} \left\{ -\nu_q T \text{Exp} \left[-\frac{(Q^* - k_Q \underline{V}_{Zr})^2}{2\sigma_q^2} \right] \right\} \quad (43)$$

avec σ_q^2 la variance qui est fonction de \underline{V}_{Zr}

$$\text{et} \quad \nu_q = \frac{1}{\sigma_q} \sqrt{\int_0^{+\infty} n^2 S_q(n) dn} \quad (44)$$

L'intégration de (41) en \underline{V}_{Zr} nécessite, pour chaque \underline{V}_{Zr} et Q^* fixés, de faire un calcul complet de dynamique stochastique, ce qui entraîne des calculs lourds et volumineux.

DAVENPORT [13] donne une expression approchée de l'intégrale (41); malheureusement, son expression ne semble pas utilisable numériquement. Nous utiliserons une autre méthode développée dans [7] et dont nous allons rappeler les principaux résultats.

La fonction de répartition de q_{\max} est étroite et caractérisée par un module W qui est l'abscisse du point d'inflexion. On approche alors la double exponentielle de la loi conditionnelle (43) de q_{\max} par l'expression :

$$\text{Exp}[-\text{Exp}(b(\underline{V}_{Zr} - W))]$$

L'ajustement se fait autour du point W . L'approximation doit être valable quel que soit \underline{V}_{Zr} et pour Q^* fixé. Si l'on fait $\underline{V}_{Zr} = W$, on en déduit que W doit être solution, pour Q^* donné, de l'équation :

$$k_Q W^2 + \sigma_q(W) \sqrt{2 \text{Log} \nu_q(W) T} - Q^* = 0 \quad (45)$$

Le paramètre $b(Q^*)$ associé est donné par la relation :

$$b(Q^*) = \frac{\partial}{\partial \underline{V}_{Zr}} \left[\nu_q(\underline{V}_{Zr}) \text{Te}^{-\left[\frac{(Q^* - k_Q \underline{V}_{Zr})^2}{2\sigma_q^2(\underline{V}_{Zr})} \right]} \right] \underline{V}_{Zr} = W$$

On montre alors que le calcul de (41) se ramène au calcul de l'intégrale suivante, effectué par la méthode de GAUSS-LAGUERRE :

$$P[Q > Q^*] = \int_0^{+\infty} e^{-v} g(v) dv$$

avec :

$$g(v) = 1 - \text{Exp} \left[-\text{Exp} \left\{ b(Q^*) (U - W(Q^*) - \frac{1}{a} \text{Log} v) \right\} \right] \quad (46)$$

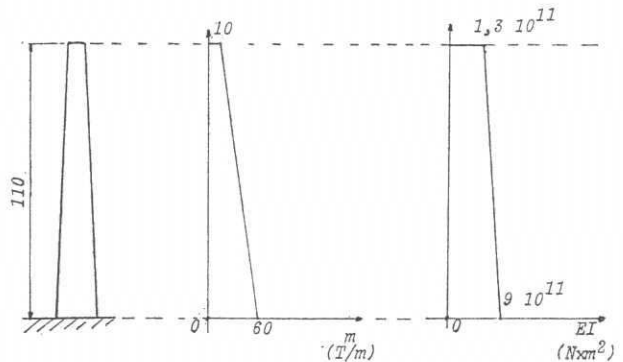
On montre [7] que l'on a une bonne approximation de :

$$k_Q w^2 + \sigma_q(w) \sqrt{2 \text{Log} \nu_q(w) T}$$

par un polynôme $a_1 w^4 + a_2 w^3 + a_3 w^2$ et de $\nu_q(w)$ par $b_1 + b_2 w + b_3 w^2$ avec $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ des constantes indépendantes du niveau Q^* . Il suffit donc de faire seulement trois calculs complets de dynamiques stochastiques, par les méthodes exposées en II, pour déterminer les 6 constantes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Ensuite, des calculs élémentaires permettent de calculer (46) pour chaque niveau Q^* choisi.

IV. — APPLICATION NUMÉRIQUE

On considère une cheminée de 110 mètres de haut, de 17 mètres de largeur à la base et de 7 mètres au sommet. Elle est placée dans un site rugueux $\alpha = 0,35$. L'ajustement statistique des vitesses moyennes horaires de référence sur une loi de valeur extrême type I pour une période θ de 25 ans conduit aux valeurs suivantes : $a = 0,666$ et $U = 15$ m/s. On étudie uniquement les vibrations de flexion dans un plan parallèle à la direction moyenne du vent. La largeur, la masse linéique, la raideur et le coefficient de traînée varient linéairement de la base au sommet. Pour l'analyse stochastique, on considère seulement la contribution des deux premiers modes de vibration.



L'amortissement qui a été pris représente 3 % de l'amortissement critique pour chaque mode de vibration. L'écart type de la fluctuation de la vitesse du vent de référence à la cote $Z_r = 10$ mètres vaut 7,10 m/s pour la vitesse moyenne de référence $\bar{V}_{Z_r} = 15,8$ m/s dans le site considéré ($\alpha = 0,35$). Le coefficient C qui apparaît dans la fonction de cohérence est pris égal à 6. L'analyse demandée est du type quasistatique avec deux modes de vibrations (dans cette analyse, la contribution quasistatique et les contributions dynamiques sont calculées séparément).

La fréquence fondamentale de flexion est 0,28 Hertz et la première harmonique 1,31 Hertz.

Nous commentons les résultats pour le moment fléchissant à la base. Le programme de calcul donne :

Pour $\bar{V}_{Z_r} = 15,8$ m/s (moyenne sur une heure)

$$\sigma_v = 7,1 \text{ m/s.}$$

Réponses moyennes : $\underline{M} = 2407 \text{ T} \times \text{m.}$

Écart type quasistatique : $\sigma_{QM} = 890 \text{ T} \times \text{m.}$

Écarts types contribution dynamique :

— Mode numéro 1 $\sigma_{DM}^{(1)} = 1274 \text{ T} \times \text{m.}$

— Mode numéro 2 $\sigma_{DM}^{(2)} = 88 \text{ T} \times \text{m.}$

— Corrélation entre les modes 1 et 2 :

$$\sigma_{(1-2)}^{DM} = (-) 9,3 \text{ T} \times \text{m.}$$

Remarque : Le signe (-) indique une contribution négative de la variance.

Gust Factor : $g_M = 3,838$.

Valeur extrême de la période $T = 3600 \text{ s.}$

$$M_e = 8386 \text{ T} \times \text{m}$$

Remarque : Le calcul de la valeur extrême est fait à partir de l'expression :

$$M_e = \underline{M} + g_M \times \left[\sigma_{QM}^2 + \sigma_{DM}^{(1)2} + \sigma_{DM}^{(2)2} - \sigma_{DM}^{(1-2)2} \right]^{1/2}$$

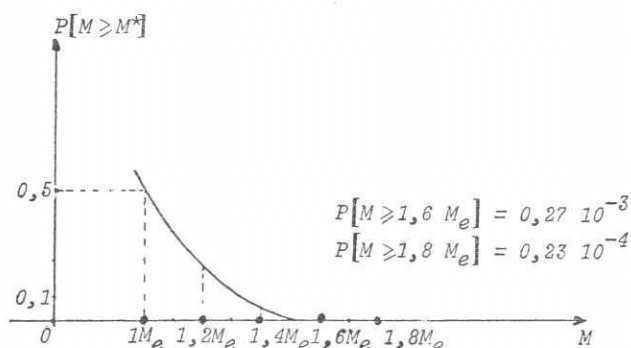
Si l'on n'avait pas tenu compte de la contribution dynamique, on aurait eu :

$$M_{es} = \underline{M} + g_M \sigma_{QM} = 2407 + 3,8 \times 890 = 5789 \text{ T} \times \text{m}$$

En supposant que le « gust factor » soit inchargé, le coefficient d'amplification dynamique est, dans ce cas :

$$\gamma_D = \frac{M_e}{M_{es}} = \frac{8386}{5789} = 1,459$$

Enfin, nous donnons ci-dessous la fonction de répartition pour le moment fléchissant à la base :



CONCLUSION

Le programme de calcul qui a été établi à partir des développements précédents permet d'apprécier la contribution des différents modes de vibrations par rapport à la contribution quasistatique. De plus, la connaissance de la loi de probabilité de dépassement des hauts niveaux de réponse sur une longue période de temps permet d'envisager la combinaison de l'action vent avec d'autres actions. On remarque que, dans l'exemple traité et pour le moment fléchissant à la base, la contribution des modes supérieurs est négligeable et le coefficient d'amplification dynamique est important.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DAVENPORT (A. G.). — The Dependence of Wind Loads on Meteorological Parameters International Research. Seminar on Wind Effects on Buildings and Structures, Ottawa, 1967.
- [2] HARRIS (R. I.). — The Nature of the Wind. Paper 3. A. CIRIA, Seminar on the Modern Design of Wind-Sensitive Structures Londres 18 juin 1970 (CIRIA : Construction Industry Research and Information Association; 6 Storey's Gate, London SW1).
- [3] DAVENPORT (A. G.). — The relationship of Wind Structures to Wind Loading. Paper 2 of « Wind Effects on Buildings and Structures ». Proceedings of the Conference held at the National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex on 26th, 27th and 28th June 1963. volume 1. London: Her Majesty's Stationery Office, 1965.
- [4] DAVENPORT (A. G.) et VICKERY. — A Comparison of Theoretical and Experimental Determination of the Response of Elastic Structures to Turbulent Flow. Paper 26; Ottawa 1967.
- [5] DAVENPORT (A. G.). — The Spectrum of Horizontal Gustness near the Ground in High Winds 1961, Quart. J. Roy. Met. Soc. Vol. 87.
- [6] HINO (Mikio). — Spectrum of Gusty Wind. Wind Effects on Buildings and Structures. Colloque de Tokyo 1971.
- [7] SOIZE (Ch.). — Dynamique stochastique des structures élastiques soumises aux charges de vent. Thèse de docteur de 3^e cycle soutenue, le 17 juin 1975, à l'Université de Paris-VI.
- [8] WYATT (T. A.) et RAZNAHAN (M.). — Effects of Wind. CECM Committee XIII-1; Working Group on Preparation of Draft Specification Discussion Paper for Meeting in Amsterdam, Imperial College, June 1974.
- [9] BEARMAN (P. W.). — Wind Loads on Structures in Turbulent Flow. Paper 4, CIRIA Seminar on the Modern Design of Wind. Sensitive Structures, London, June 1970.
- [10] LIONS (J. L.) et MACENES (E.). — Problèmes aux limites non homogènes et applications. Tome 1. Dunod.
- [11] KREE (P.). — Équations linéaires à coefficients aléatoires. Symposia Mathematica, Instituto Nazionale di alta Mathematica, B, Volume VII, Bologna 1971.
- [12] DAVENPORT (A. G.). — Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading. ICE, June 1964, volume 28.
- [13] DAVENPORT (A. G.). — On the Statistical Prediction of Structural Performance in the Wind Environment Proceedings of Seminar: Wind Loads on Structures, October 1970, Arthur NL. CHIV.
- [14] BENDAT (Julius S.) et PIERSON (Allan). — Random Data: Analysis and Measurement Procedures. Wiley Interscience, 1971.