



HAL
open science

Calcul des structures à barres soumises au vent aléatoire - Design of lattice structures subjected to gusty wind loads

Christian Soize

► **To cite this version:**

Christian Soize. Calcul des structures à barres soumises au vent aléatoire - Design of lattice structures subjected to gusty wind loads. *Revue Construction Métallique*, 1977, 14 (1), pp.44–58. hal-00770399

HAL Id: hal-00770399

<https://hal.science/hal-00770399>

Submitted on 3 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CALCUL DES STRUCTURES A BARRES SOUMISES AU VENT ALÉATOIRE

par C. SOIZE

L'étude et l'analyse des structures soumises à des processus aléatoires (vent, houle, séismes...) ont pris une importance considérable au cours de cette dernière décennie, en raison du développement d'ouvrages de plus en plus complexes (immeubles de grande hauteur, pylônes, plates-formes offshore...).

Ainsi nous est-il apparu opportun, à propos d'une action particulière comme le vent, de publier cette approche de manière aussi complète et précise que possible; elle est reconnue formellement comme la seule qui permette de déterminer les sollicitations dans une structure soumise à un processus aléatoire. Par ailleurs, il est important de savoir que l'on dispose, d'une part de méthodes élaborées applicables au calcul de structures le justifiant, d'autre part d'un outil de détermination des coefficients applicables en sécurité pour des calculs simplifiés, comme le coefficient d'amplification dynamique.

Bien que le formalisme mathématique des processus aléatoires soit connu depuis longtemps, il se peut que l'ingénieur non averti soit rebuté par la terminologie et les méthodes de calcul utilisées dans ce texte et nous ne saurions trop l'encourager à se familiariser avec ces notions [3, 25].

1. — INTRODUCTION

Généralement les constructions sont soumises aux effets du vent et le constructeur doit connaître les effets engendrés dans les structures pour les dimensionner. Pour cela, il dispose d'un certain nombre de moyens. Le premier est la réglementation et les codes de charges. En France, les **Règles NV 65** sont très utilisées à cet effet. Dans des cas particuliers, comme les structures exceptionnelles, on peut avoir recours à des essais en soufflerie et à des études mathématiques spécifiques.

Depuis une quinzaine d'années, de nombreuses études théoriques et expérimentales ont été réalisées pour mieux connaître la structure fine du vent au voisinage du sol. D'un point de vue physique, dans la couche limite planétaire, le vent est un écoulement d'air turbulent à structure de couche limite. **A. G. Davenport** [1] a été le premier à ajuster un modèle du champ de vitesse du vent en tenant compte de la complexité du phénomène et à l'appliquer pour déterminer les effets du vent sur les structures élastiques. Le principe de la méthode consiste à traiter statistiquement la turbulence, c'est-à-dire à considérer les fluctuations de la vitesse du vent comme une grandeur aléatoire. Depuis, de nombreuses études ont été entreprises dans ce domaine sur le plan international, études qui confirment et affinent ces premiers résultats.

A l'heure actuelle, on possède donc des moyens de calcul des structures soumises au vent basés sur cette théorie encore nouvelle. Bien que les **Règles NV 65** aient des qualités réelles (la principale étant l'existence même du document qui permet de calculer d'une manière relativement simple les effets du vent sur les constructions), elles sont dépassées car leur conception même reflète assez mal la nature physique du phénomène réel. Cela vient du fait que lorsque ces règles ont été établies on ne disposait pas des connaissances actuelles. Du reste, sur le plan national et international, des projets de code vent, fondés sur les théories modernes de modélisation du vent, sont en cours d'élaboration. Il y a lieu de penser qu'à court et moyen termes les nouveaux codes se substitueront aux anciens.

L'introduction de ces méthodes a permis de résoudre **deux types de problèmes** qui sont liés :

- **le premier** est la détermination des sollicitations dans une structure soumise au vent aléatoire,
- **le second** est un problème plus général concernant l'approche probabiliste de la sécurité des constructions.

Il est bien évident que l'on ne peut pas résoudre ce deuxième problème si les actions sollicitant les constructions sont mal connues.

Les méthodes probabilistes appliquées aux constructions, en utilisant des modélisations par variables aléatoires, ont été largement développées. Néanmoins, certaines actions très fluctuantes peuvent avoir des effets dynamiques et ne peuvent pas être modélisées par variables aléatoires. C'est le cas du vent qu'il faut, de par sa nature physique, modéliser par processus stochastiques. P. Krée [2, 3 et 4] a développé une méthode probabiliste en incluant des modélisations par processus. Des applications numériques, basées sur cette méthode, ont été faites sur des structures réelles par C. Trézos [6].

Nous nous intéresserons ici au premier problème, à savoir : comment calculer les sollicitations d'une structure soumise aux effets du vent aléatoire. Nous avons étudié dans [7 et 8] la dynamique stochastique des structures élastiques soumises aux charges de vent aléatoire et réalisé un programme de calcul automatique permettant de traiter les structures élancées. Dans ces calculs, le champ de pression est linéarisé en fonction du champ de vitesse. E. Simiu et D. Lozier [10] ont également établi un programme de calcul automatique par lequel on calcule les effets du vent sur les structures en linéarisant le champ de pression, mais en tenant compte de la corrélation entre les paramètres des zones amont et aval de l'écoulement autour de la construction. Dans la référence [9], nous avons développé des méthodes qui permettent de ne pas linéariser le champ de pression, mais il reste encore à faire des applications numériques.

Nous présenterons ici un programme de calcul automatique qui rend possible le calcul des structures à barres soumises au vent aléatoire; nous en avons déjà développé la théorie dans [7]. Cependant, nous la rappellerons afin de bien comprendre qu'elles sont les hypothèses utilisées et les bases sur lesquelles le programme de calcul est fondé.

D'un point de vue pratique, ce programme de calcul permet à l'utilisateur de déterminer les effets statiques et dynamiques du vent aléatoire sur les structures modélisées par des systèmes à barres. Donnons quelques exemples d'application : halle industrielle lourde dont la stabilité transversale est assurée par de grands portiques, poutre continue intervenant comme élément de stabilité aux effets du vent, château d'eau de grande dimension, tour herztienne, pylone, mât, pont, tout élément de contreventement constitué d'un système à barres, etc.

Pour plus de compréhension, nous redonnons la description mathématique de la modélisation du vent. Nous terminerons cette étude par des exemples numériques et des commentaires.

2. - QUELQUES RAPPELS SUR LA MODÉLISATION DU VENT AU VOISINAGE DU SOL

Les mesures expérimentales sur site pour l'étude de la structure fine du vent au niveau du sol (0 à 300 m) ont été entreprises sur le plan international depuis une quinzaine d'années. Actuellement, de telles mesures ont été faites dans des sites de type différent que l'on peut classer de la manière suivante :

- site très peu rugueux (vent de mer),
- site peu rugueux (rase campagne),
- site moyennement rugueux (zone sub-urbaine),
- site très rugueux (centre des villes).

Ainsi, un nombre important de résultats expérimentaux a été obtenu par Mackey [11], Davenport [1], Duchêne-Marullaz [12], Ishizaki [13], Shiotani [14], Harris [15], pour ne citer qu'eux.

On peut dire que toutes ces mesures réalisées sur site ainsi que leur traitement ont considérablement fait progresser la connaissance de la structure fine du vent. A l'heure actuelle, on dispose de modèles ajustés sur ces données, reconnus comme étant suffisamment bons pour pouvoir être appliqués dans le domaine de la construction en représentant d'une manière très correcte le phénomène physique relativement complexe.

L'enregistrement de la vitesse du vent sur une longue période de temps montre que les composantes horizontales et verticales sont très fluctuantes, mais que l'on peut décrire par des lois statistiques la fréquence d'occurrence de chaque composante de la vitesse. L'étude de la vitesse du vent montre qu'il y a des fluctuations sur de longues périodes de temps (1 an, par exemple) et des fluctuations rapides, c'est-à-dire qu'à deux instants voisins il peut y avoir en un point de l'espace des variations importantes de vitesse. Le spectre de la vitesse sur une longue période de temps présente un pic d'énergie pour une période d'environ 1 an, un à 4 jours, un autre à 1 jour et un pour 1 minute. Il y a un trou d'énergie entre 20 minutes et 1 heure. Le champ de vitesse $\vec{U}(M, t)$ du vent (M étant un point de l'espace et t le temps) peut donc être décrit par :

- une vitesse moyenne $\vec{U}(M)$ (moyenne sur un temps T qui doit être compris entre 10 minutes et 1 heure), qui reflète les larges fluctuations ;

- le vent de rafale $\vec{V}(M, t)$, qui représente la fluctuation rapide de \vec{U} autour de la moyenne ;

par conséquent :

$$\vec{U}(M, t) = \vec{U}(M) + \vec{V}(M, t) \quad (1)$$

et la connaissance de la structure du vent au voisinage sur sol nécessite de connaître :

- la loi du champ moyen en fonction de la hauteur et de la rugosité du site,

- la description de \vec{V} , qui représente la turbulence traitée statistiquement et qui est modélisée par un champ stochastique.

Les hypothèses généralement utilisées pour la modélisation sont les suivantes. On considère un écoulement horizontal homogène à structure de couche limite. A une hauteur suffisamment grande au-dessus du sol, où les effets de friction du sol deviennent négligeables (hauteur du vent de gradient), l'écoulement est horizontal homogène. Le terrain est supposé horizontal, bien que certains modèles aient été développés pour des terrains en pente afin de tenir compte de l'effet de collines. La rugosité du terrain est uniforme sur une surface suffisamment grande. Il faut aussi remarquer que ces modèles sont valables pour une turbulence quasi homogène et ne peuvent être appliqués à une turbulence locale créée par le sillage d'un corps.

Dans toute la suite, on considérera un repère orthonormé $OXYZ$, tel que OZ soit vertical descendant, l'origine au niveau du sol, OX dirigé suivant la direction moyenne du vent. Soit M un point de l'espace se trouvant dans un plan perpendiculaire à OX . Sans restriction de généralité, on suppose que ce plan est le plan YOZ .

TABLEAU I

	I	II	III	IV	V
Site	mer, océan	rase campagne aéroports	zones faiblement urbanisées banlieues lointaines des villes	- banlieues des grandes villes - zones urbaines - zones industrielles - forêts	centre des grandes villes
Z ₀ (m)	0,005	0,07	0,30	1	2,5

2.1. — Profil de la vitesse moyenne en stabilité neutre

A l'aide de considérations théoriques et expérimentales, on montre que pour de grandes vitesses de vent, le profil de la vitesse moyenne, dans la couche limite d'un écoulement homogène horizontal, peut être décrit par la relation :

$$\underline{U}(M) = 2,5 U_* \log \left[\frac{Z - Z_d}{Z_0} \right] \quad (2)$$

où $\underline{U}(M)$ est la vitesse moyenne au point M à la cote Z au-dessus du sol, Z_d la cote du plan de référence, Z_0 la hauteur des rugosités et U_* la vitesse de friction dans le site considéré, qui est donnée par :

$$U_* = \frac{\underline{U}(M_R)}{2,5 \log \left[\frac{Z_R - Z_d}{Z_0} \right]} \quad (3)$$

avec M_R qui représente un point du plan de référence se trouvant à la cote de référence Z_R (10 mètres en général). Z_0 prend différentes valeurs qui sont données dans le **tableau 1** d'après [24].

En rase campagne, on peut prendre $Z_d = 0$. Dans un site, dont la hauteur moyenne des obstacles est \bar{h} , on prend : $Z_d = 0,75 \bar{h}$. En outre, l'expression (2) permet de décrire assez bien les couches limites internes qui se développent dans une zone proche d'un changement brusque de la rugosité. On peut aussi utiliser une autre représentation du profil de la vitesse moyenne pour un terrain homogène horizontal. C'est la loi en puissance, loi empirique, développée par **Davenport** et qui s'écrit pour les grandes vitesses de vent de la façon suivante :

$$\underline{U}(M) = \underline{U}(M_R) \left(\frac{Z}{Z_R} \right)^\alpha \quad (4)$$

expression dans laquelle Z_R est la cote de référence et α un paramètre qui est fonction de la rugosité (**tableau 2** d'après [24]).

TABLEAU II

Site	I	II	III	IV	V
α	0,10	0,15	0,20	0,25	0,35

2.2. — Propriétés de la turbulence en stabilité neutre

Dans ce qui suit, nous développons les propriétés de la composante longitudinale (suivant OX) des fluctuations V du champ de vitesse. En effet, pour la plupart des structures, ce sont les effets de cette composante qui sont prépondérants.

D'autre part, nous nous intéressons ici aux effets du vent dans un plan parallèle à la direction moyenne du vent.

Soient $\sigma_V(M)$ l'écart-type, $G_V(M, n)$ la fonction de densité spectrale définie pour les fréquences $(0, + \infty)$ et $R_V(M, \tau)$ la fonction d'autocorrélation de la composante longitudinale V en un point M de l'espace. Sur la période T , V est modélisé par un champ stochastique gaussien, centré, stationnaire en temps. Ces hypothèses sont vérifiées expérimentalement dans le cas d'une turbulence quasi homogène [16].

2.2.1. — Écart quadratique moyen

Sous certaines hypothèses, la théorie montre que σ_V n'est pas fonction de l'altitude mais uniquement de la rugosité. Il semble que ce résultat se confirme pour les hauteurs au-dessus du sol qui n'exèdent pas 50 à 60 m. Pour des hauteurs plus importantes et une rugosité donnée, σ_V décroît avec l'altitude. Néanmoins, pour les hauteurs au-dessus du sol, qui intéressent généralement le constructeur, cette variation peut être considérée comme faible. **Davenport** [17] propose :

$$\sigma_V^2(M) = k U_*^2 = \text{constante} \quad (5)$$

avec $k = 6$.

Actuellement, des études expérimentales en cours sur la mesure de la structure fine du vent (par exemple : **CSTB** de Nantes, France) devraient permettre d'améliorer ce point, car il semble que k soit fonction de la rugosité et de la cote du point M .

2.2.2. — Fonction de densité spectrale de V

Plusieurs auteurs ont donné des expressions analytiques de G_V . Elles résultent de considérations théoriques et de mesures sur site qui ont permis de faire les ajustements. Il est à noter que tous ces spectres proposés sont voisins et donnent des résultats comparables. Rappelons l'expression empirique de **Davenport** :

$$\frac{n G_V(M, n)}{U_*^2} = \frac{4 X^2}{(1 + X^2)^{4/3}} \quad (6)$$

avec n la fréquence, $X = \frac{1200 n}{\underline{U}(M_R)}$ et $\underline{U}(M_R)$ qui doit être exprimé en mètre par seconde.

Les autres expressions de G_V , qui sont utilisées, sont celles de **Harris** [18], qui propose une formulation identique à celle de **von Karman**, celle de **Mikio Hino** [19] et celle de **Simiu** [20], ces deux dernières tenant compte du profil du vent moyen en fonction de la rugosité.

2.23. — Fonction de cohérence spatiale de la composante longitudinale V

Davenport a ajusté une expression sur des mesures in situ de la racine carrée de la fonction de cohérence, qu'il écrit de la façon suivante :

$$\sqrt{\gamma_V^2(M, M', n)} = \exp \left\{ \frac{-2n [C_Z^2(Z - Z')^2 + C_Y^2(Y - Y')^2]^{1/2}}{\underline{U}(M) + \underline{U}(M')} \right\} \quad (7)$$

où Y, Z et Y', Z' sont les coordonnées des points M et M' , C_Z et C_Y des coefficients sans dimensions tels que C_Z soit de l'ordre de 7 à 10 et C_Y de 8 à 16, suivant la rugosité du site.

Connaissant la fonction de densité spectrale $G_V(M, n)$ et la fonction de cohérence $\gamma_V^2(M, M', n)$, on peut calculer la fonction de densité spectrale transversale de V notée $G_V(M, M', n)$ et que l'on confond avec la fonction de densité spectrale coincidente (cela revient à négliger la fonction quadratique de densité spectrale car le déphasage entre deux points de cote différente est généralement faible) :

$$G_V(M, M', n) \simeq \{ \gamma_V^2(M, M', n) G_V(M, n) G_V(M', n) \}^{1/2} \quad (8)$$

Harris [18] propose une fonction de cohérence tirée de la théorie de von Karman et qui est aussi très proche des courbes expérimentales.

2.24. — Coefficients de corrélation transversale

Dans le cadre de la théorie HIT (turbulence homogène isotrope), le coefficient de corrélation pour une séparation verticale est une expression des fonctions de Bessel de deuxième espèce d'ordre 1/3 et 2/3 mais, comme pour la cohérence, on peut faire une approximation par une exponentielle. Wyatt [21] a amélioré cette approximation en tenant compte de la suppression de l'hypothèse HIT par l'analyse d'un grand nombre de résultats expérimentaux.

En posant :

$$\rho_V(M, M') = \frac{R_V(M, M', \tau)}{\sigma_V(M) \sigma_V(M')}$$

avec $R_V(M, M', \tau)$ la fonction d'autocorrélation transversale, Wyatt propose :

$$\rho_V(M, M') = \exp \left\{ - \left[\frac{(Z - Z')^2}{(L_V^Z)^2} + \frac{(Y - Y')^2}{(L_V^Y)^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (9)$$

avec $Z \geq Z', Y, Z$ et Y', Z' les coordonnées des points M et M' appartenant au même plan vertical (plan qui est perpendiculaire à la direction moyenne du vent) et L_V^Y et L_V^Z les deux scalaires intégraux d'échelle spatiale de la turbulence suivant l'axe latéral et l'axe vertical pour la composante longitudinale V tels que :

$$L_V^Y = 42 \left(\frac{Z}{20} \right)^{0,25}, \quad L_V^Z = \sqrt{37 Z} \quad (10)$$

avec Z exprimé en mètre.

3. — DYNAMIQUE ALÉATOIRE
DES CONSTRUCTIONS CONTREVENTÉES
PAR UN SYSTÈME A BARRES
ET SOUMISES AU VENT

On considère une construction soumise aux effets du vent dont la résistance est assurée par une structure à barres, repérée dans le système d'axes orthonormés $OXYZ$ défini précédemment. On suppose la structure élastique, à comportement linéaire, modélisée par un système à N degrés de liberté. Les vibrations linéaires de la structure sont régies par l'équation matricielle suivante :

$$[M][\ddot{\mathcal{D}}(t)] + [C][\dot{\mathcal{D}}(t)] + [K][\mathcal{D}(t)] = [G(t)] \quad (11)$$

avec $[M]$, $[C]$ et $[K]$ les matrices carrées ($N \times N$) symétriques réelles, de masse, d'amortissement et de rigidité; $[\mathcal{D}(t)]$ et $[G(t)]$ les matrices colonnes des déplacements des nœuds et des efforts extérieurs appliqués aux nœuds de composantes $\mathcal{D}_i(t)$ et $G_i(t)$.

Les axes $OXYZ$ sont donnés de telle manière que OX soit perpendiculaire à la face au vent et OZ vertical ascendant; ceci suppose que la direction du vent moyen sur T est dirigée suivant OX . Les seuls efforts extérieurs appliqués à la structure sont ceux du vent. On étudie les vibrations dans le plan parallèle à la direction du vent moyen. Chaque nœud i de la face au vent reprend les efforts de la surface S_i qui lui est associée. On ne considère que les efforts horizontaux suivant OX , on néglige le couple créé par ces forces si le centre de gravité de S_i ne coïncide pas avec le nœud i . Les efforts de traînée sont pris en compte par le coefficient de traînée globale C_D . Pour étudier les vibrations parallèles à la direction moyenne du vent, la pression instantanée résultante, s'exerçant sur un élément dS , au point M de la surface au vent, s'écrit :

$$P_r(M, t) = \underline{P}(M) + P(M, t) \quad (12)$$

$$\underline{P}(M) = \frac{1}{2} \rho_a C_D(M) \underline{U}^2(M) \quad (13)$$

$$P(M, t) = \rho_a C_D(M) \underline{U}(M) V(M, t) \quad (14)$$

où ρ_a représente la masse volumique de l'air. Une justification de ces expressions est donnée à la référence [7]. Cette décom-

position suppose, en outre, que $\left(\frac{V}{\underline{U}}\right)^2$ soit suffisamment petit

pour utiliser une théorie linéaire et que l'effet de masse inertielle soit négligeable. On a donc :

$$G_i(t) = \delta_i \int_{S_i} P_r(M, t) dS \quad (15)$$

avec :

$\delta_i = 1$ si le nœud i appartient à la face au vent et si i correspond à l'indice d'une force suivant OX .

$\delta_i = 0$ dans les autres cas.

Compte tenu des relations (12) et (15), nous considérons naturellement la décomposition ci-après :

$$[G(t)] = [F] + [F(t)] \quad (16)$$

$$\text{avec } \underline{F}_i = \delta_i \int_{S_i} \underline{P}(M) dS \text{ et } F_i(t) = \delta_i \int_{S_i} P(M, t) dS$$

La solution de (11) s'écrit alors :

$$[\mathcal{D}(t)] = [\underline{\mathcal{D}}] + [D(t)] \quad (17)$$

avec :

$$[K][\underline{\mathcal{D}}] = [F] \quad (18)$$

$$[M][\dot{D}(t)] + [C][\dot{D}(t)] + [K][D(t)] = [F(t)] \quad (19)$$

Résoudre la relation (18) revient à calculer la réponse moyenne : c'est un problème de statique. Résoudre (19), lorsque $F(t)$ est un processus vectoriel, c'est résoudre un problème de dynamique stochastique. Nous nous attacherons dans ce qui suit à la résolution de (19). Nous rappellerons simplement les grandes étapes du calcul et renvoyons le lecteur à la référence [7] pour les développements détaillés.

3.1. — Fonction de transfert associée à l'équation (19)

$[M]$ et $[K]$ sont des matrices symétriques réelles inversibles. L'équation matricielle qui régit les vibrations libres non amorties s'écrit :

$$[M][\ddot{D}(t)] + [K][D(t)] = 0 \quad (20)$$

Les pulsations propres $\{\omega_1 \dots \omega_N\}$ des vibrations du système non amorti sont les racines carrées des valeurs propres de $[M]^{-1}[K]$. Le $i^{\text{ème}}$ mode propre de vibration est le vecteur propre de $[M]^{-1}[K]$ associé à la valeur propre $\lambda_i = \omega_i^2$. Soit $[\psi]$ la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de $[M]^{-1}[K]$. On a alors :

$$\left. \begin{aligned} [\psi]^T [M] [\psi] &= [\mathcal{M}] \\ [\psi]^T [K] [\psi] &= [\Omega]^2 [\mathcal{M}] = [\mathcal{K}] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

où $[\mathcal{M}]$, $[\Omega]$ et $[\mathcal{K}]$ sont des matrices diagonales dont les $i^{\text{ème}}$ éléments diagonaux sont notés respectivement m_i , ω_i et k_i . Ils représentent la masse généralisée, la pulsation propre du système non amorti et la raideur généralisée du $i^{\text{ème}}$ mode propre des vibrations. On peut normer $[\psi]$ par rapport à la matrice des masses. Toutes les composantes de la $i^{\text{ème}}$ colonne de $[\psi]$ étant divisées par $\sqrt{m_i}$, on obtient alors une matrice $[\Phi]$ telle que :

$$\left. \begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [K] [\Phi] &= [\Omega]^2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

où $[I]$ est la matrice unité.

Dans la suite, on notera $[\Phi^i]$ la matrice colonne représentant le $i^{\text{ème}}$ mode propre de vibrations normé en masse, associée à la valeur propre $\lambda_i = \omega_i^2$ de $[M]^{-1}[K]$. On supposera, en outre, que la matrice d'amortissement $[C]$ s'écrit sous la forme de **Rayleigh** généralisée :

$$[C] = [M] \sum_k \alpha_k ([M]^{-1}[K])^k$$

c'est-à-dire que $[\Phi]^T [C] [\Phi]$ est une matrice diagonale égale à $[C]$. Généralement, on préfère introduire un taux d'amortissement critique ξ pour chaque mode de vibration. Dans la pratique, pour les structures étudiées on a $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-

dire que les vibrations sont sous-amorties. Dans ce cas, la pulsation propre du $i^{\text{ème}}$ mode propre de vibration du système amorti s'écrit :

$$\omega_{Ai} = \omega_i (1 - \xi_i^2)^{1/2}$$

ξ_i étant petit, on pourra confondre ω_{Ai} avec ω_i .

En faisant le chargement de base, $[D(t)] = [\Phi][Q(t)]$, la relation (19) s'écrit :

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] [\ddot{Q}(t)] + [\Phi]^T [C] [\Phi] [\dot{Q}(t)] + [\Phi]^T [K] [\Phi] [Q(t)] = [\Phi]^T [F(t)]$$

soit d'après (22) :

$$[\ddot{Q}(t)] + [C][\dot{Q}(t)] + [\Omega]^2 [Q(t)] = [\Phi]^T [F(t)] \quad (23)$$

ce qui donne N équations découplées. La réponse du mode de vibration i est régie par l'équation :

$$\ddot{Q}_i(t) + c_{ii} \dot{Q}_i(t) + \omega_i^2 Q_i(t) = ([\Phi]^T [F(t)])_i \quad (24)$$

Soit $H_i(n)$ la fonction de transfert associée au filtre défini par :

$$Q_i \rightarrow \ddot{Q}_i + c_{ii} \dot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i$$

elle s'écrit :

$$H_i(n) = \frac{1}{\omega_i^2 \left[1 - \left(\frac{n}{n_i} \right)^2 + 2j \xi_i \left(\frac{n}{n_i} \right) \right]} \quad (25)$$

avec :

n : la fréquence

$n_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$: la fréquence du mode propre i de vibration

ξ_i : le taux d'amortissement critique du mode i

$j = \sqrt{-1}$

Soit $[H(n)]$ la matrice carrée diagonale, telle que :

$$[H(n)]_{ij} = \delta_{ij} H_i(n) \quad (26)$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. La fonction de transfert associée au filtre définie par :

$$[Q(t)] \rightarrow [\ddot{Q}(t)] + [C][\dot{Q}(t)] + [\Omega]^2 [Q(t)]$$

est la fonction à valeurs matricielles :

$$n \rightarrow [H(n)] \quad (27)$$

3.2. — Solution aléatoire de l'équation (19)

Nous avons vu au paragraphe 2 que $V(M, t)$ est un champ stochastique gaussien centré, stationnaire sur T , à valeurs réelles. Il est du second ordre et on montre qu'il est continu en moyenne quadratique. D'autre part, nous avons :

$$F_i(t) = \delta_i \int_{S_i} \rho_a C_D(M) \underline{U}(M) V(M, t) dS \quad (28)$$

qui est une relation linéaire entre $V(M, t)$ et $F_i(t)$; $V(M, t)$ étant stationnaire, il en sera de même de $F_i(t)$. Soit (\vec{F}_t) le processus vectoriel de composantes $(F_1(t) \dots F_N(t))$. (\vec{F}_t) est donc stationnaire, gaussien, du second ordre et centré.

3.21. — Fonction d'autocorrélation et matrice de covariance du processus (\vec{F}_t)

La fonction d'autocorrélation du processus vectoriel (\vec{F}_t) stationnaire est la fonction à valeur matricielle définie par :

$$\tau \rightarrow [R_{\vec{F}}(\tau)] = \varepsilon \{ [F_{t+\tau}] [F_t]^T \} \quad (29)$$

où ε désigne l'espérance mathématique et $[F_t]^T$ la matrice colonne transposée de $[F_t]$.

L'élément (i, j) de $[R_{\vec{F}}(\tau)]$ s'écrit :

$$[R_{\vec{F}}(\tau)]_{ij} = \varepsilon \{ F_i(t + \tau) F_j(t) \}$$

Compte tenu de (28) et du fait que :

$$R_V(M, M', \tau) = \varepsilon \{ V(M, t + \tau) V(M', t) \},$$

on a :

$$\left. \begin{aligned} [R_{\vec{F}}(\tau)]_{ij} = \delta_i \delta_j \rho_a^2 \int_{S_i} \int_{S_j} C_D(M) C_D(M') \times \\ \times \underline{U}(M) \underline{U}(M') R_V(M, M', \tau) dS dS' \end{aligned} \right\} (30)$$

La corrélation transversale de $V(M, t)$ s'écrit :

$$\rho_V(M, M') = \frac{R_V(M, M', 0)}{\sigma_V(M) \sigma_V(M')}$$

d'où pour $\tau = 0$:

$$\left. \begin{aligned} [R_{\vec{F}}(0)]_{ij} = \delta_i \delta_j \rho_a^2 \int_{S_i} \int_{S_j} C_D(M) C_D(M') \times \\ \times \underline{U}(M) \underline{U}(M') \sigma_V(M) \sigma_V(M') \rho_V(M, M') dS dS' \end{aligned} \right\} (31)$$

Le processus vectoriel (\vec{F}_t) est centré, par conséquent la matrice de covariance $[C_{\vec{F}}]$ de (\vec{F}_t) est égale à $[R_{\vec{F}}(0)]$. Les fonctions $\underline{U}(M)$, $\sigma_V(M)$ et $\rho_V(M, M')$ étant connues (cf. § 2), on peut calculer numériquement $[C_{\vec{F}}]$ à partir de l'expression (31).

3.22. — Fonction de densité spectrale du processus (F_t)

La fonction de densité spectrale, définie pour les fréquences $(-\infty, +\infty)$ du processus vectoriel (\vec{F}_t) , est la fonction à valeurs matricielles :

$$n \rightarrow [S_{\vec{F}}(n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2jn\tau} [R_{\vec{F}}(\tau)] d\tau \quad (32)$$

telle que l'élément (i, j) s'écrit :

$$[S_{\vec{F}}(n)]_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2jn\tau} [R_{\vec{F}}(\tau)]_{ij} d\tau \quad (33)$$

D'autre part, on a :

$$S_V(M, M', n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2jn\tau} R_V(M, M', \tau) d\tau \quad (34)$$

En appliquant (33) à (30) et compte tenu de (34), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} [S_{\vec{F}}(n)]_{ij} = \delta_i \delta_j \rho_a^2 \int_{S_i} \int_{S_j} C_D(M) C_D(M') \underline{U}(M) \times \\ \times \underline{U}(M') S_V(M, M', n) dn \end{aligned} \right\} (35)$$

L'expression (35) permet donc de calculer la matrice $[S_{\vec{F}}(n)]$.

3.23. — Matrice de covariance des déplacements $[D(t)]$

Soit (\vec{D}_t) le processus vectoriel de composante $(D_1(t), \dots, D_N(t))$. L'équation (19) étant linéaire et le processus vectoriel (\vec{F}_t) gaussien, stationnaire, du second ordre, centré, il en sera de même du processus (\vec{D}_t) .

Nous voulons exprimer la matrice de covariance $[C_{\vec{D}}]$ de (\vec{D}_t) . Or, (\vec{D}_t) étant centré, on a :

$$[C_{\vec{D}}] = [R_{\vec{D}}(0)] \quad (36)$$

en notant $[R_{\vec{D}}(\tau)]$, la fonction d'autocorrélation à valeurs matricielles du processus vectoriel stationnaire (\vec{D}_t) .

En inversant (32), on obtient pour (\vec{D}_t) :

$$[R_{\vec{D}}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2jn\tau} [S_{\vec{D}}(n)] dn$$

soit :

$$[R_{\vec{D}}(0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{\vec{D}}(n)] dn \quad (37)$$

3,231. — Fonction de densité spectrale du processus (\vec{D}_t)

Soit (\vec{Q}_t) le processus vectoriel de composantes ($Q_1(t), \dots, Q_N(t)$) défini dans l'expression (23) et (\vec{F}_t) le processus vectoriel de composantes ($F_1(t), \dots, F_N(t)$), tel que : $F_i(t) = ([\Phi]^T [F(t)])_i$. La fonction de densité spectrale du processus vectoriel (\vec{F}_t) stationnaire s'écrit :

$$[S_{\vec{F}}(n)] = [\Phi]^T [S_{\vec{F}}(n)] [\Phi] \quad (38)$$

L'équation (23) s'écrit alors :

$$[\ddot{Q}(t)] + [c][\dot{Q}(t)] + [\Omega]^2 [Q(t)] = [F(t)] \quad (39)$$

et d'après l'expression (27), la fonction de transfert associée à (39) est la fonction à valeur matricielle $n \rightarrow [H(n)]$. $[H(n)]$ étant une matrice diagonale, la fonction de densité spectrale à valeurs matricielles du processus vectoriel (\vec{Q}_t) stationnaire s'écrit :

$$[S_Q(n)] = [H(n)][S_{\vec{F}}(n)][\bar{H}(n)] \quad (40)$$

où $[\bar{H}(n)]$ désigne la matrice complexe conjuguée de $[H(n)]$. D'autre part, nous avons la relation : $[D(t)] = [\Phi][Q(t)]$, par conséquent la fonction de densité spectrale à valeurs matricielles du processus vectoriel (\vec{D}_t) stationnaire s'écrit :

$$[S_{\vec{D}}(n)] = [\Phi][S_Q(n)][\Phi]^T \quad (41)$$

Compte tenu de (38), (40) et (41), on obtient :

$$[S_{\vec{D}}(n)] = [\Phi][H(n)][\Phi]^T [S_{\vec{F}}(n)][\Phi][\bar{H}(n)][\Phi]^T \quad (42)$$

Dans la pratique, on ne prend pas en compte les N modes de vibration mais seulement les premiers. Soit p le nombre de modes considérés (les p premiers). Nous désignerons par les lettres grecques α et β les indices relatifs au numéro des modes. Rappelons que nous avons noté $[\Phi^\alpha]$ comme étant le mode propre de vibration α normé en masse (matrice colonne). L'expression développée de (42) s'écrit :

$$[S_{\vec{D}}(n)]_{ij} = \sum_{\alpha, k, m, \beta=1}^N \Phi_{i\alpha} H_\alpha(n) \Phi_{k\alpha} [S_{\vec{F}}(n)]_{km} \Phi_{m\beta} \bar{H}_\beta(n) \Phi_{j\beta}$$

En faisant apparaître les P premiers modes, on a :

$$[S_{\vec{D}}(n)]_{ij} = \sum_{\alpha, \beta=1}^P \Phi_i^\alpha \Phi_j^\beta H_\alpha(n) \bar{H}_\beta(n) \sum_{k, m=1}^N \Phi_k^\alpha \Phi_m^\beta [S_{\vec{F}}(n)]_{km}$$

or

$$\sum_{k, m} \Phi_k^\alpha \Phi_m^\beta [S_{\vec{F}}(n)]_{km} = [\Phi^\alpha]^T [S_{\vec{F}}(n)] [\Phi^\beta]$$

d'où :

$$[S_{\vec{D}}(n)]_{ij} = \sum_{\alpha, \beta=1}^P \Phi_i^\alpha \Phi_j^\beta H_\alpha(n) \bar{H}_\beta(n) ([\Phi^\alpha]^T [S_{\vec{F}}(n)] [\Phi^\beta]) \quad (43)$$

On écrit :

$$[S_{\vec{D}}(n)]_{ij} = \sum_{\alpha=1}^P [S_{\vec{D}}^\alpha(n)]_{ij} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P [S_{\vec{D}}^{\alpha\beta}(n)]_{ij} \quad (44)$$

où :

$[S_{\vec{D}}^\alpha(n)]$: contribution du mode de vibration α

$[S_{\vec{D}}^{\alpha\beta}(n)]$: contribution des corrélations des modes (α, β) et (β, α).

De (43) et (44) on tire les expressions suivantes :

$$[S_{\vec{D}}^\alpha(n)]_{ij} = \Phi_i^\alpha \Phi_j^\alpha |H_\alpha(n)|^2 ([\Phi^\alpha]^T [S_{\vec{F}}(n)] [\Phi^\alpha]) \quad (45)$$

$$[S_{\vec{D}}^{\alpha\beta}(n)]_{ij} = \left. \begin{aligned} &\Phi_i^\alpha \Phi_j^\beta H_\alpha(n) \bar{H}_\beta(n) ([\Phi^\alpha]^T [S_{\vec{F}}(n)] [\Phi^\beta]) + \\ &+ \Phi_i^\beta \Phi_j^\alpha H_\beta(n) \bar{H}_\alpha(n) ([\Phi^\beta]^T [S_{\vec{F}}(n)] [\Phi^\alpha]) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Dans le cas général : $[S_{\vec{F}}(n)] = [\bar{S}_{\vec{F}}(n)]^T$. Or, nous avons vu au paragraphe 2 que la fonction de densité spectrale transverse de $V(M, t)$ était réelle, par conséquent $[S_{\vec{F}}(n)]$ est réel ; on en déduit que $[S_{\vec{F}}(n)]$ est symétrique. Les expressions (45) et (46) s'écrivent matriciellement :

$$[S_{\vec{D}}^\alpha(n)] = |H_\alpha(n)|^2 \{ [\Phi^\alpha]^T [S_{\vec{F}}(n)] [\Phi^\alpha] \} [\Phi^\alpha] [\Phi^\alpha]^T \quad (47)$$

$$[S_{\vec{D}}^{\alpha\beta}(n)] = \left\{ [\Phi^\alpha]^T [S_{\vec{F}}(n)] [\Phi^\beta] \right\} [H_\alpha(n) \bar{H}_\beta(n) [\Phi^\alpha] [\Phi^\beta]^T] + \left\{ \bar{H}_\alpha(n) H_\beta(n) [\Phi^\beta] [\Phi^\alpha]^T \right\} \quad (48)$$

$$[S_{\vec{D}}(n)] = \sum_{\alpha=1}^P [S_{\vec{D}}^\alpha(n)] + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P [S_{\vec{D}}^{\alpha\beta}(n)] \quad (49)$$

3,232. — Matrice de covariance des contributions dynamiques des déplacements $[D_t]$

Dans les cas pratiques que nous envisageons, l'amortissement est très faible, si bien que les modules des fonctions de transfert $|H_\alpha(n)|$ présentent des pics très aigus. On peut considérer que le spectre d'entrée $[S_{\vec{F}}(n)]$ du système est constant sur la bande passante de ces filtres. Par cette technique, on obtient la matrice de covariance des contributions dynamiques des déplacements pour les différents modes propres de vibration. On la note : $[W_{\vec{D}}]$. D'après les relations (36), (37) et (49) on a :

$$[C_{\vec{D}}] = \sum_{\alpha=1}^P \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{\vec{D}}^\alpha(n)] dn + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{\vec{D}}^{\alpha\beta}(n)] dn \quad (50)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 [W_{\vec{D}}] &= \sum_{\alpha=1}^P \{ [\Phi^\alpha]^T [S_{\vec{F}}(n_\alpha)] [\Phi^\alpha] \} \times \\
 &\times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |H_\alpha(n)|^2 dn \right\} [\Phi^\alpha] [\Phi^\alpha]^T + \\
 &+ \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P \{ [\Phi^\alpha]^T [S_{\vec{F}}(n_\alpha)] [\Phi^\beta] \} \times \\
 &\times \left[\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} H_\alpha(n) \bar{H}_\beta(n) dn \right\} [\Phi^\alpha] [\Phi^\beta]^T + \right. \\
 &\left. + \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}_\alpha(n) H_\beta(n) dn \right\} [\Phi^\beta] [\Phi^\alpha]^T \right] \quad (51)
 \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{n_\alpha}{n_\beta} \\
 \chi_{\alpha\beta} &= \frac{r(r \xi_\alpha + \xi_\beta)}{[r^4 + 4 \xi_\alpha \xi_\beta r^3 - 2(1 - 2(\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2))r^2 + 4 \xi_\alpha \xi_\beta r + 1]} \quad (52)
 \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} H_\alpha(n) \bar{H}_\beta(n) dn &= \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}_\alpha(n) H_\beta(n) dn = \frac{4 \pi n_\alpha}{\omega_\alpha^2 \omega_\beta^2} \chi_{\alpha\beta} \quad (53) \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_\alpha(n)|^2 dn &= \frac{\pi n_\alpha}{2 \xi_\alpha \omega_\alpha^4}
 \end{aligned}$$

Remarquons, enfin, que la fonction de densité spectrale transversale de $V(M, t)$, notée $G_V(M, M', n)$, est définie pour les fréquences $(0, +\infty)$ (cf. § 2). $G_V(M, M', n)$ étant réelle, on montre que $S_V(M, M', n) = \frac{1}{2} G_V(M, M', n)$, car $S_V(M, M', n)$ est définie pour les fréquences $(-\infty, +\infty)$. Par conséquent, on aura $[S_{\vec{F}}(n)] = \frac{1}{2} [G_{\vec{F}}(n)]$ avec $[G_{\vec{F}}(n)]_{ij}$ défini par l'expression (35) en remplaçant $S_V(M, M', n)$ par $G_V(M, M', n)$. Finalement, les formules (51), (52) et (53) permettent d'écrire :

$$[W_{\vec{D}}] = \sum_{\alpha=1}^P [W_{\vec{D}}^\alpha] + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P [W_{\vec{D}}^{\alpha\beta}] \quad (54)$$

$$[W_{\vec{D}}^\alpha] = \left\{ \frac{\pi n_\alpha}{4 \xi_\alpha \omega_\alpha^4} \right\} \{ [\Phi^\alpha]^T [G_{\vec{F}}(n_\alpha)] [\Phi^\alpha] \} [\Phi^\alpha] [\Phi^\alpha]^T \quad (55)$$

$$[W_{\vec{D}}^{\alpha\beta}] = \left\{ \frac{2 \pi n_\alpha}{\omega_\alpha^2 \omega_\beta^2} \chi_{\alpha\beta} \right\} \{ [\Phi^\alpha]^T [G_{\vec{F}}(n_\alpha)] [\Phi^\beta] \} \left\{ [\Phi^\alpha] [\Phi^\beta]^T + [\Phi^\beta] [\Phi^\alpha]^T \right\} \quad (56)$$

3,233. — Matrice de covariance des contributions quasi-statistiques des déplacements $[D(t)]$

Pour les basses fréquences du spectre du vent, pour lesquelles la structure ne répond pas dynamiquement mais statiquement, l'équation (19) s'écrit :

$$[K][D(t)] = [F(t)] \quad (57)$$

$[K]$ étant inversible,

$$[D(t)] = [K]^{-1} [F(t)] \quad (58)$$

Soit $[B_{\vec{D}}]$ la matrice de covariance des contributions quasi-statistiques des déplacements. $[K]^{-1}$ est une matrice symétrique, par conséquent la fonction d'autocorrélation de (\vec{D}_t) définie par (58) s'écrit :

$$[R_{\vec{D}}(\tau)] = [K]^{-1} [R_{\vec{F}}(\tau)] [K]^{-1}$$

(\vec{F}_t) est un processus vectoriel centré et il en sera de même du processus (\vec{D}_t) défini par (58) et :

$$[B_{\vec{D}}] = [R_{\vec{D}}(0)] \quad , \quad [C_{\vec{F}}] = [R_{\vec{F}}(0)]$$

d'où la relation :

$$[B_{\vec{D}}] = [K]^{-1} [C_{\vec{F}}] [K]^{-1} \quad (59)$$

La matrice de covariance $[C_{\vec{F}}]$ du processus vectoriel $[(\vec{F}_t)]$ est calculée à partir de la relation (31).

3,234. — Matrice de covariance des déplacements $[D_t]$

Ayant d'une part la contribution quasistatique et la contribution dynamique, la matrice de covariance des déplacements s'écrit comme leur somme. Ainsi :

$$[C_{\vec{D}}] = [B_{\vec{D}}] + [W_{\vec{D}}] \quad (60)$$

que nous pouvons écrire compte tenu de (54), (55) et (56) :

$$[C_{\vec{D}}] = [B_{\vec{D}}] + \sum_{\alpha=1}^P [W_{\vec{D}}^\alpha] + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^P [W_{\vec{D}}^{\alpha\beta}] \quad (61)$$

La variance du déplacement du degré de liberté i est : $\sigma_{D_i}^2 = [C_{\vec{D}}]_{ii}$ et la covariance des déplacements des degrés de liberté i et j est égale à : $\sigma_{D_i D_j}^2 = [C_{\vec{D}}]_{ij}$. La formulation (61) a l'avantage de faire apparaître, d'une part la contribution quasistatique qui correspond à la réponse statique de la structure pour les basses fréquences, pour lesquelles il n'y a pas d'effets dynamiques ; il n'y a alors que les effets spatiaux de la turbulence, et d'autre part apparaissent la contribution de chaque mode propre de vibration considéré ainsi que la contribution des corrélations entre les modes. Les termes tiennent compte de l'effet spatial de la turbulence et de l'effet temporel qui provoque la réponse dynamique dans les modes propres de vibration.

3,24. — Matrice de covariance des sollicitations dans les barres et des réactions

Considérons une barre l de la structure de nœud origine k et d'extrémité q . Soient $[d^k]$ la matrice colonne des déplacements du nœud k dans le repère général et $[d^q]$ des déplacements du nœud q . On pose $[d^l] = \begin{bmatrix} d^k \\ d^q \end{bmatrix}$. De même, on note $[S^k]$ et $[S^q]$ les matrices colonnes des sollicitations aux extrémités de la barre dans son repère local et $[S^l] = \begin{bmatrix} S^k \\ S^q \end{bmatrix}$. On a la relation classique :

$$[S^l] = [A_l][d^l] \quad (62)$$

où $[A_l]$ est le produit de la matrice de rigidité locale de la barre par la matrice de rotation qui permet de passer des déplacements dans le repère général aux déplacements dans le repère local.

La matrice de covariance de $[S^l]$ s'écrit :

$$[C_{S^l}] = [A_l][C_{S^l}][A_l]^T \quad (63)$$

Connaissant $[C_{S^l}]$, il est facile de construire $[C_{S^k}]$ et donc de calculer $[C_{S^q}]$ pour toutes les barres. La variance de la sollicitation i aux extrémités de la barre l dans le repère local s'écrit :

$$\sigma_{S_i^l}^2 = [C_{S^l}]_{ii} \quad (64)$$

On construira de même la matrice de covariance des réactions.

3,25. — Moyenne des valeurs extrêmes des déplacements, des sollicitations dans les barres et des réactions

Pour une vitesse moyenne de référence $\underline{U}(M_R)$ donnée et dans un site de rugosité donné, la fluctuation de la vitesse longitudinale autour de la moyenne est un champ stochastique stationnaire, gaussien, centré. Pour une observation, par exemple un déplacement, une sollicitation dans une barre, etc., on cherche à calculer la valeur moyenne de ses valeurs extrêmes. Cette valeur sera, en fait, celle qui servira pour le dimensionnement. Notons E une observation, \underline{E} sa moyenne sur T et (e_t) la fluctuation de E autour de \underline{E} . Compte tenu de la linéarité du problème, (e_t) est un processus stationnaire gaussien centré. On a :

$$(E_t) = \underline{E} + (e_t)$$

A. G. Davenport [22] a montré que la moyenne des valeurs extrêmes de (E_t) sur T s'écrivait :

$$\bar{E}_{max} = \underline{E} + g_e \sigma_e \quad (65)$$

où :

σ_e : est l'écart type de (e_t)

$$g_e = \sqrt{2 \text{Log } v_e T} + \frac{0,577}{\sqrt{2 \text{Log } v_e T}} \quad (66)$$

$$v_e = \frac{1}{\sigma_e} \sqrt{\int_0^{+\infty} n^2 G_e(n) dn}$$

$G_e(n)$: est la fonction de densité spectrale de (e_t) pour les fréquences $(0, +\infty)$

T : est le temps sur lequel U est moyenné

\underline{E} : la réponse moyenne sous le vent moyen $\underline{U}(M_R)$

\bar{E}_{max} : la moyenne des valeurs extrêmes de E sur le temps T pour $\underline{U}(M_R)$ fixé.

Il est à remarquer que tous les calculs que nous avons faits précédemment et les relations (65) et (66) sont des fonctions de $\underline{U}(M_R)$.

3,251. — Moyenne des valeurs extrêmes des déplacements

En appliquant (65) et (66), on obtient pour les déplacements :

$$\bar{D}_{i,max} = \underline{D}_i + g_{D_i} \sqrt{[C_{D^l}]_{ii}} \quad (67)$$

avec $[C_{D^l}]$ donné par (60), $[\underline{D}]$ par (18) et :

$$g_{D_i} = a + \frac{0,577}{a} \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{2 \text{Log } (v_{D_i} T)} \quad (68)$$

$$v_{D_i} = \left\{ \frac{\sum_{\alpha=1}^P n_\alpha^2 [W_{D^l}^\alpha]_{ii}}{[C_{D^l}]_{ii}} \right\}^{1/2} \quad (69)$$

avec $[W_{D^l}^\alpha]$ donné par (55). On pourra trouver une démonstration de (69) dans [7].

3,252. — Moyenne des valeurs extrêmes des sollicitations dans les barres et des réactions

Nous aurons de même (notations du paragraphe 3,24) :

$$\bar{S}_{i,max}^l = \underline{S}_i^l + g_{S_i^l} \sqrt{[C_{S^l}]_{ii}} \quad (70)$$

avec : $[S^l] = [A_l][d^l]$, $[d^l]$ étant composé d'éléments de $[\underline{D}]$ $[C_{S^l}]$ donné par (63)

$$g_{S_i^l} = a + \frac{0,577}{a} \quad , \quad a = \sqrt{2 \text{Log } (v_{S_i^l} T)} \quad (71)$$

$$v_{S_i^l} = \left\{ \frac{\sum_{\alpha=1}^P n_\alpha^2 [W_{S^l}^\alpha]_{ii}}{[C_{S^l}]_{ii}} \right\}^{1/2} \quad (72)$$

avec : $[W_{S^l}^\alpha] = [A_l][W_{d^l}^\alpha][A_l]^T$ et $[W_{d^l}^\alpha]$ étant composé des éléments de $[W_{D^l}^\alpha]$ donné par (55).

On aura des relations du même type pour les réactions.

4. — PROGRAMME DE CALCUL AUTOMATIQUE ET APPLICATIONS NUMÉRIQUES

4.1. — Description succincte du programme de calcul VBAR

— Analyse dynamique des structures planes à barres soumises au vent aléatoire

Nous avons réalisé un programme de calcul automatique basé sur les développements que nous avons donnés précédemment. Le programme ne traite que des structures planes à barres. Le plan de rigidité ainsi constitué peut être vertical ou horizontal. La description des propriétés géométriques et mécaniques de la structure se fait comme dans les programmes usuels d'analyse des structures à barres. Des encastresments élastiques peuvent être pris en compte.

D'autre part, on entre comme données, les paramètres caractéristiques du vent, c'est-à-dire la rugosité du site, la vitesse moyenne de référence dans le site et la description géométrique de la surface au vent ainsi que les coefficients de traînée. Les efforts dus au vent ramenés aux nœuds sont générés automatiquement par le programme. Si la structure n'est pas susceptible aux effets dynamiques, seule l'analyse quasistatique est effectuée en aléatoire. Si les effets dynamiques sont à prendre en compte, l'utilisation du programme VBAR nécessite une analyse dynamique déterministe préliminaire de la construction pour déterminer les premières fréquences propres de vibration et les modes propres normés en masse associés. Ces résultats sont entrés comme données dans le programme VBAR ainsi que les amortissements critiques. Nous avons prévu des entrées sorties compatibles avec l'analyse dynamique des structures à barres réalisées par STRUDL pour simplifier les manipulations des données relatives aux calculs dynamiques.

Les résultats donnés par le programme sont les suivants :

- impressions des déplacements moyens des nœuds, des sollicitations moyennes aux extrémités des barres et des réactions moyennes ;
- impressions de l'écart type quasistatique des déplacements des nœuds, des sollicitations aux extrémités des barres et des réactions ;
- impressions pour chaque mode de vibration de l'écart type dynamique des déplacements des nœuds, des sollicitations aux extrémités des barres et des réactions ;
- impressions de l'écart type résultant qui tient compte de l'effet quasistatique, des effets dynamiques de chaque mode de vibration considéré et des corrélations entre les modes ;
- impressions des facteurs de rafale ;
- impressions de la moyenne des valeurs extrêmes, des sollicitations aux extrémités des barres, des réactions et des déplacements des nœuds.

Nous donnons ci-après deux exemples numériques.

4.2. — Premier exemple

On étudie la flexion dans le plan horizontal d'un tube métallique soumis aux effets du vent. Le tube est de section constante circulaire, de diamètre extérieur 1 400 mm, d'épaisseur 6 mm et de limite d'élasticité $\sigma_e = 24 \text{ kg/mm}^2$. Il est parallèle au sol à une cote de 30 m, sa portée est de 68 m. Le tube transporte un fluide de densité 0,8. La rigidité de flexion dans le plan vertical est assurée par des suspentes espacées de 4 m, attachées au tube par des cerces ; ces dernières assurent aussi la non ovalisation du tube. On suppose que l'effet du vent sur les suspentes sont négligeables (fig. 1).

La rigidité de flexion dans le plan horizontal est assurée par le tube seul, qui est supposé articulé aux deux extrémités 1 et 9 (fig. 2).

La modélisation adoptée pour le calcul en dynamique aléatoire de la flexion horizontale du tube soumis au vent est donnée sur la figure 3. Le tube est décomposé en 8 barres égales.

Chaque nœud reprend les efforts du vent exercés sur la surface qui lui est associée. Par exemple, la surface associée au nœud 5 est un rectangle centré en ce nœud, de 1 400 mm de hauteur et de 8 500 mm de longueur.

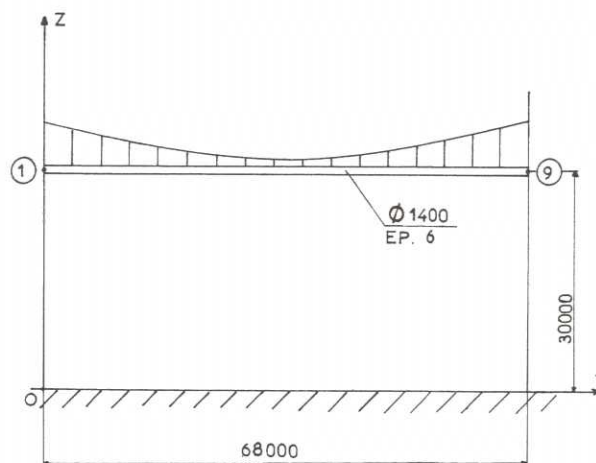


Fig. 1

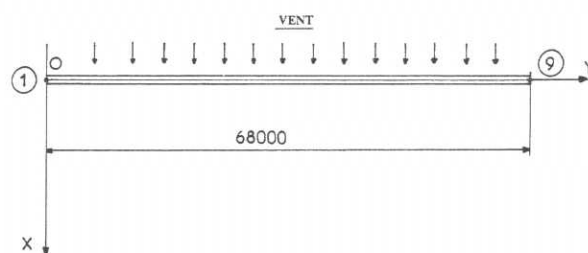


Fig. 2

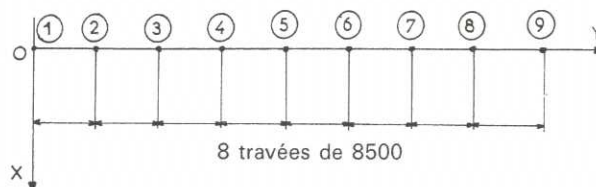


Fig. 3

Les données relatives aux calculs au vent sont les suivantes :

- tube circulaire supposé rugueux,
- coefficient global de traînée $C_t = 0,73$ (suivant les Règles NV 65),
- structure placée dans la région III française, site normal (suivant les Règles NV 65), d'où la vitesse de pointe extrême de référence : $V_p = 50,66$ m/s,
- la vitesse moyenne V_o à la cote de référence (10 m) dans le site II (classification du paragraphe 2,1) associée à V_p est telle que [23] :

$$V_o = V_p/1,55 = 32,68 \text{ m/s}$$

- la vitesse moyenne V_{10} à la cote de référence (10 m) dans un site de rugosité différente de II s'écrit :

$$V_{10} = C_\alpha V_o$$

avec C_α défini au tableau 3 [24]. Nous étudierons cette structure dans des sites de rugosité II, III, IV et V. Les données sur le vent sont exposées dans le tableau 4, où σ_v désigne l'écart type de la fluctuation de la vitesse à la cote de référence 10 m dans les différents sites considérés de rugosité différente et I_{10} l'intensité de la turbulence à 10 m. Les résultats expriment que, pour la même perturbation météorologique dans la région considérée, correspondant à $V_p = 50,66$ m/s, la vitesse moyenne décroît lorsque la rugosité croît, tandis que l'écart type de la fluctuation et l'intensité de la turbulence croissent avec la rugosité.

L'analyse dynamique déterministe, faite par le programme STRUDL, donne pour les vibrations libres non amorties les résultats contenus dans le tableau 5 (fig. 4).

Pour l'analyse dynamique aléatoire, le taux d'amortissement critique pour chacun de ces modes a été pris égal à 0,01. Nous nous contenterons de donner ci-après les résultats qui concernent les déplacements suivant X du nœud 5 noté D, ainsi que le moment fléchissant en ce même nœud noté M et la réaction du nœud 1 suivant X notée R. Ces résultats sont résumés dans le tableau 6. On note \bar{D} , \bar{M} et \bar{R} la moyenne sur T (égale à 1 heure) de D, M et R; σ_D^Q , σ_M^Q et σ_R^Q l'écart type quasi-statistique de D, M et R; σ_D^D , σ_M^D et σ_R^D l'écart type dynamique du premier mode de D, M et R; g_D , g_M et g_R le facteur de rafale de D, M et R défini au paragraphe 3,25; σ_D , σ_M et σ_R l'écart type résultant de la fluctuation de D, M et R; \bar{D}_{max} , \bar{M}_{max} et \bar{R}_{max} la moyenne des valeurs extrêmes sur T (1 heure). Ces grandeurs sont définies au paragraphe 3,25. Toutes les valeurs données sont les valeurs arrondies de la sortie du programme de calcul. D'autre part, la contribution du deuxième mode est négligeable.

Commentons les résultats pour le moment fléchissant à demi travée. Si les effets dynamiques étaient négligés, on aurait :

$$\bar{M}_{max}^Q = \bar{M} + g_M \sigma_M^Q$$

En tenant compte des effets dynamiques, on trouve \bar{M}_{max} . On peut faire apparaître un coefficient d'amplification dynamique β , tel que :

$$\bar{M}_{max} = \beta \bar{M}_{max}^Q$$

d'où les résultats donnés au tableau 7.

TABLEAU III

Site	α	C_α
II	0,15	1
III	0,20	0,85
IV	0,25	0,67
V	0,35	0,47

TABLEAU IV

Site	α	V_{10} (m/s)	σ_v (m/s)	$I_{10} = \frac{\sigma_v}{V_{10}}$
II	0,15	32,68	5,37	0,164
III	0,20	27,78	6,46	0,233
IV	0,25	21,90	6,57	0,300
V	0,35	15,36	6,87	0,447

TABLEAU V

	Période propre	Fréquence propre
Premier mode de vibration flexion dans le plan XOY	3,06 s	0,327 hertz
Deuxième mode de vibration flexion dans le plan XOY	7,67 s	1,304 hertz

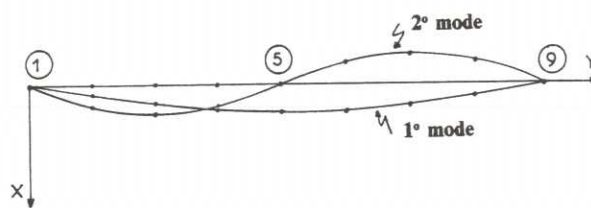


Fig. 4

TABLEAU VII

Site	\bar{M}_{max} (tf. m)	\bar{M}_{max}^Q (tf. m)	β
II	218,9	116,3	1,882
III	211,3	109,6	1,928
IV	161,2	85,8	1,879
V	113,6	63,4	1,792

TABLEAU VI

	Site II	Site III	Site IV	Site V
	$V_{10} = 32,68$ m/s $I_{10} = 0,164$ $\alpha = 0,15$	$V_{10} = 27,78$ m/s $I_{10} = 0,233$ $\alpha = 0,20$	$V_{10} = 21,90$ m/s $I_{10} = 0,300$ $\alpha = 0,25$	$V_{10} = 15,36$ m/s $I_{10} = 0,447$ $\alpha = 0,35$
\underline{D} (cm)	20,9	16,9	11,7	7,2
σ_D^0 (cm)	5,3	5,7	4,9	4,0
$\sigma_D^{D^1}$ (cm)	13,3	13,5	10,4	7,4
σ_D (cm)	14,3	14,6	11,5	8,4
g_D	3,895	3,893	3,889	3,881
\bar{D}_{max} (cm)	76,6	73,8	56,3	39,7
\underline{R} (tf)	3,2	2,6	1,8	1,1
σ_R^0 (tf)	0,81	0,87	0,74	0,61
$\sigma_R^{D^1}$ (tf)	1,7	1,8	1,4	1,0
σ_R (tf)	1,9	2,0	1,6	1,2
g_R	3,889	3,886	3,881	3,871
\bar{R}_{max} (tf)	10,7	10,2	7,8	5,5
\underline{M} (tf. m)	58,2	46,9	32,5	19,9
σ_M^0 (tf. m)	14,9	16,1	13,7	11,2
$\sigma_M^{D^1}$ (tf. m)	38,5	39,0	30,1	21,4
σ_M (tf. m)	41,3	42,2	33,1	24,1
g_M	3,896	3,894	3,890	3,883
\bar{M}_{max} (tf. m)	218,9	211,3	161,2	113,6

Ces facteurs sont légèrement inférieurs au coefficient d'amplification β calculé à partir des Règles NV 65 et qui est de 1,93. Il est à remarquer que σ_M passe par un maximum en site III, cela est normal car σ_M est proportionnelle à $I_{10} \times V_{10}^2$, où I_{10} est l'intensité de la turbulence à la cote de référence (10 m) et V_{10} la vitesse moyenne dans le site de rugosité considéré, à la cote de référence. On remarque dans le cas présent que $I_{10} \times V_{10}^2$ est maximum en site III.

L'application des Règles NV 65 donne, sous le vent extrême, un moment fléchissant à demi travée égale à 172 tf. m. On se rend compte que si la structure est placée dans un site de rugosité II ou III, on trouve un moment supérieur, de l'ordre de 210 tf. m. Cela vient du fait que le coefficient dimension, calculé par les Règles NV 65 et qui est égal à 0,72, est très optimiste pour ces deux rugosités par rapport au calcul aléatoire. Il est en fait de l'ordre de 0,9. Enfin, on remarque qu'il y a un gain substantiel pour le site de rugosité V.

4.3. — Deuxième exemple

On étudie la flexion dans le plan vertical d'une tour hertzienne soumise aux effets du vent. On ne s'intéresse ici qu'aux efforts parallèles à la direction moyenne du vent. Le fût est constitué d'un cylindre creux en béton armé, les plateformes sont métalliques. La géométrie est définie par la figure 5 ainsi que la modélisation pour le calcul en dynamique aléatoire.

Le fût a un diamètre extérieur constant de 7 000, l'épaisseur est constante et égale à 800 jusqu'à la cote 70 000, puis constante et égale à 500 entre la cote 70 000 et 100 000. La passerelle inférieure, pour les effets du vent, est assimilée à un cylindre circulaire de diamètre extérieur 25 000 et de hauteur 10 000. Sa masse est de 350 tonnes. La passerelle supérieure est assimilée à un cylindre circulaire de diamètre extérieur 20 000 et de hauteur 5 000. Sa masse est de 150 tonnes.

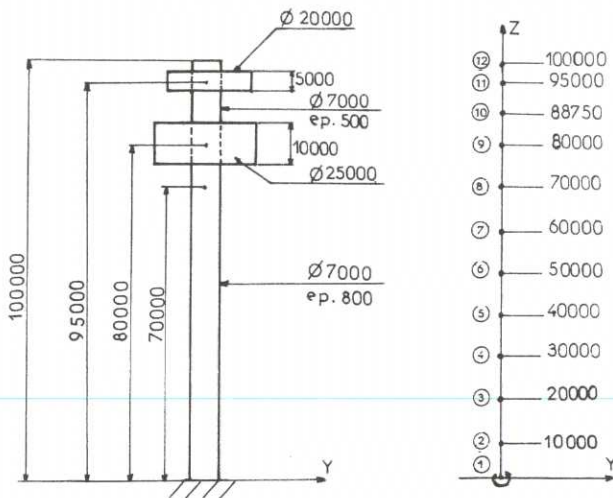


Fig. 5

Pour la modélisation, le fût est découpé en 11 barres. L'encastrement au sol est élastique pour la rotation. Sa constante est $k_M = 2 \cdot 10^8$ tf. m. Le module d'élasticité du fût est $E = 3,2 \cdot 10^6$ tf/m², sa densité est 2,5. Le coefficient global de traînée du fût, entre la cote 0 et la cote 75 000 est $C_t = 0,65$. $C_t = 1$ pour les deux passerelles et les parties du fût comprises entre les cotes 85 000 et 92 500, et 97 500 et 100 000.

La construction est située dans une région dont la vitesse de pointe extrême, de période de retour 50 ans, est $V_p = 44$ m/s. Cette valeur correspond approximativement à la région II des Règles NV 65. La vitesse moyenne V_o à la cote de référence (10 m), dans le site II (classification du paragraphe 2,1), associée à V_p , est telle que [23] : $V_o = V_p/1,55 = 28,38$ m/s. La vitesse moyenne V_{10} à la cote de référence (10 m), dans un site de rugosité différente de II, s'écrit : $V_{10} = C_\alpha V_o$ avec C_α défini au paragraphe 4,2.

Nous étudierons cette structure placée dans des sites de rugosité II, III, IV et V ; les données sur le vent sont résumées dans le tableau 8. Le vent moyen est dirigé suivant OY.

L'analyse dynamique déterministe, faite par le programme STRUDL, donne pour les vibrations libres non amorties les résultats contenus dans le tableau 9. Les modes propres de déformation sont illustrés à la figure 6.

Pour l'analyse dynamique aléatoire, le taux d'amortissement critique pour chacun de ces modes a été pris égal à 0,03. Nous donnons au tableau 10 les résultats concernant le déplacement suivant OY du nœud 12 noté D, la réaction suivant OY au nœud 1 notée R et le moment en ce même nœud noté M. Les notations sont identiques à celles employées dans le premier exemple. La contribution du deuxième mode est négligeable.

Déterminons le coefficient d'amplification dynamique pour le moment de flexion à la base. On raisonne de la même manière que pour le premier exemple au paragraphe 4,2 (tableau 11).

L'application des Règles NV 65 aboutit à un coefficient d'amplification dynamique $\beta = 1,63$ à la cote 10 m, $\beta = 1,420$ à la cote 100 m et un coefficient β pour le moment de flexion à la base égal à 1,46. Dans ce cas, on voit que le coefficient d'amplification dynamique calculé à partir des Règles NV 65 est très pessimiste. D'autre part, l'application des Règles NV 65 donne sous le vent extrême un moment à la base de 12 860 tf. m.

Par rapport au dimensionnement NV 65, on gagne 30 % pour un site de rugosité II et 55 % pour un site de rugosité V. Cette différence vient du fait que, dans ce cas, les effets dynamiques et les effets de dimension sont mal pris en compte par les Règles NV 65.

TABLEAU VIII

Site	α	C_α	V_{10} (m/s)	σ_v (m/s)	$I_{10} = \frac{\sigma_v}{V_{10}}$
II	0,15	1	28,38	4,66	0,164
III	0,20	0,85	24,12	5,60	0,233
IV	0,25	0,67	19,01	5,70	0,300
V	0,35	0,47	13,34	5,97	0,447

TABLEAU IX

	Période propre	Fréquence propre
Premier mode de vibration flexion dans le plan YOZ	2,41 s	0,414 hertz
Deuxième mode de vibration flexion dans le plan YOZ	0,381 s	2,62 hertz

TABLEAU XI

Site	\bar{M}_{max} (tf. m)	\bar{M}_{max}^Q (tf. m)	β
II	8 950,2	8 001,2	1,119
III	8 870,0	7 934,8	1,118
IV	7 197,0	6 527,2	1,103
V	5 823,5	5 377,5	1,083

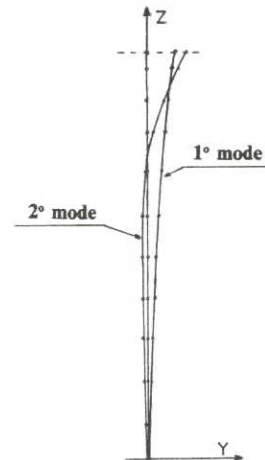


Fig. 6

TABLEAU X

	Site II	Site III	Site IV	Site V
	$V_{10} = 28,38$ m/s $I_{10} = 0,164$ $\alpha = 0,15$	$V_{10} = 24,12$ m/s $I_{10} = 0,233$ $\alpha = 0,20$	$V_{10} = 19,01$ m/s $I_{10} = 0,300$ $\alpha = 0,25$	$V_{10} = 13,34$ m/s $I_{10} = 0,447$ $\alpha = 0,35$
\underline{D} (cm)	5,5	4,9	3,7	2,8
σ_D^0 (cm)	1,13	1,3	1,15	1,1
$\sigma_D^{D^1}$ (cm)	0,88	0,92	0,73	0,56
σ_D (cm)	1,44	1,6	1,36	1,2
g_D	3,848	3,835	3,814	3,782
\bar{D}_{max} (cm)	11	10,9	8,9	7,3
\underline{R} (tf)	64,3	55,8	41,7	30,1
σ_R^0 (tf)	12,8	14,3	12,6	11,2
$\sigma_R^{D^1}$ (tf)	9,8	10,3	8,2	6,3
σ_R (tf)	16,1	17,6	15	12,8
g_R	3,875	3,863	3,842	3,811
\bar{R}_{max} (tf)	126,6	123,8	99,3	78,9
\underline{M} (tf. m)	4 468,5	3 950,4	3 006,6	2 228,9
σ_M^0 (tf. m)	917,1	1 037,6	922,0	831,2
$\sigma_M^{D^1}$ (tf. m)	715,8	751,5	595,0	457,8
σ_M (tf. m)	1 163,4	1 281,3	1 097,3	949,0
g_M	3,852	3,840	3,819	3,788
\bar{M}_{max} (tf. m)	8 950,2	8 870,0	7 197,0	5 823,5

5. - CONCLUSIONS

Les développements que nous avons faits permettent de calculer les effets du vent, parallèlement à la direction moyenne du vent, sur des structures à barres, en tenant compte des recherches récentes sur la structure du vent au voisinage du sol. Par ce type de calcul, on met en évidence la réponse moyenne de la structure, l'effet quasistatique de la turbulence ainsi que les effets dynamiques. Le programme de calcul donne les déplacements des nœuds, les sollicitations dans les barres et les réactions qui doivent être prises en compte pour la justification de la structure soumise aux effets du vent. En tout état de cause, il permet de déterminer un coefficient d'amplification dynamique en utilisant une modélisation du vent qui reflète bien la complexité du phénomène réel. Nous avons établi deux exemples numériques simples, néanmoins on peut appliquer le programme à toutes les structures dont les plans de contreventement sont des systèmes plans à barres et tenir compte des effets de plusieurs modes propres de vibrations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. G. Davenport : *The dependence of wind loads on meteorological parameters*. International Research, Seminar on wind effects on buildings and structures. Ottawa 1967.
- [2] P. Krée : *Deux approches différentes de la sécurité*. Note du 10 juin 1976, CTICM.
- [3] P. Krée : *Cours de sécurité*. Université Paris VI, 1972-1973 (disponible au CTICM).
- [4] P. Krée : *Utilisation des probabilités et des statistiques pour l'évaluation de la sécurité des ouvrages*. Édition Eyrolles dans « La sécurité des constructions », p. 42-133, Paris 1976.

- [5] **P. Krée et P. N. Met** : *Probabilités de ruine des structures élastiques*. Construction Métallique, n° 4-1973.
- [6] **C. Trézou** : *Rapport préliminaire sur l'étude probabiliste de la sécurité*. CTICM n° 7001-9, juillet 1976.
- [7] **C. Soize** : *Dynamique stochastique des structures élastiques soumises aux charges de vent*. Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI, juin 1975.
- [8] **C. Soize** : *Dynamique stochastique des structures élastiques soumises aux charges de vent*. Revue française de la mécanique, 1^{er} trimestre 1977 (à paraître).
- [9] **C. Soize** : *Transformation quadratique d'un processus gaussien et application à la dynamique stochastique*. Journal de Mécanique, vol. 15, n° 5, décembre 1976.
- [10] **E. Simiu et D. Lozier** : *The Buffeting of tall structures by strong winds*. U.S. Department of Commerce/National Bureau of Standards, NBS Building Science series 74, Washington 1975.
- [11] **R. I. Mackey** : *Études de la turbulence atmosphérique en rapport avec le calcul dynamique des bâtiments*. Construction Métallique, n° 1-1971.
- [12] **Ph. Duchêne-Marullaz** : *Structure du vent en zone suburbaine — Rugosité et corrélation latérale*. CSTB Nantes, EN. CLI 76-2, juin 1976.
- [13] **H. Ishizaki** : *Effects of wind pressure fluctuations on structures*. Proceedings wind effects on building and structure, vol. 1, p. 265 à 278, Ottawa 1967.
- [14] **M. Shiotani** : *Lateral structures of pressure in high winds*. Proceedings wind effects on buildings and structures, vol. 1, p. 535-556, Ottawa 1967.
- [15] **R. J. Harris** : *Measurements of wind structure at heights up to 598 ft above ground level*. Proceedings of a symposium on wind effects on buildings and structures, tome 1, Loughborough 1968.
- [16] **A. G. Davenport et Vickery** : *A comparison of theoretical and experimental determination of the response of elastic structures to turbulent flow*. Paper 26, p. 705-738, Ottawa 1967.
- [17] **A. G. Davenport** : *The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high winds*. Quart. J. Roy. Met. Soc., vol. 87, p. 194-211, 1961.
- [18] **R. I. Harris** : *The nature of the wind*. Paper 3, A. CIRIA Seminar on the modern design of wind sensitive structures, Londres 18 juin 1970.
- [19] **M. Hino** : *Spectrum of gusty wind*. Wind effects on buildings and structures, colloque de Tokyo, p. 69-74, 1971.
- [20] **E. Simiu** : *Wind spectrum and dynamic along wind response*. Journal of the structural division, p. 1897-1903, septembre 1974.
- [21] **T. A. Wyatt** : *A proposal european code of practice : current work of the ECCS towards specification of the effect of wind on structures*. Fourth international conference on wind effects on buildings and structures, Londres, 8 au 12 septembre 1975.
- [22] **A. G. Davenport** : *Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading*. ICE, vol. 28, p. 187-195, juin 1964.
- [23] **J. Biétry** : *Relation entre les distributions statistiques de la vitesse moyenne et de la vitesse de pointe*. Coefficient de rafale. CSTB Nantes, EN D 75-2, 1975.
- [24] **J. Biétry, C. Sacre et E. Simiu** : *Mean wind profiles and charge of terrain roughness*. Document de travail préparé pour ISO/TC 98/SC 3/WG 2, 1976 (à paraître).
- [25] **J. S. Bendat et A. G. Piersol** : *Random data : analysis and measurement procedures*. Wiley-Interscience New York, London, Sydney, Toronto, 1968.