



**HAL**  
open science

**Vibrations linéaires moyennes fréquences des structures  
élastiques anisotropes - Middle frequency linear  
vibrations of anisotropic elastic structures**

Christian Soize

► **To cite this version:**

Christian Soize. Vibrations linéaires moyennes fréquences des structures élastiques anisotropes - Middle frequency linear vibrations of anisotropic elastic structures. *Compte Rendu à l'Académie des Sciences de Paris - Série II*, 1982, 294 (15), pp.895-898. hal-00770396

**HAL Id: hal-00770396**

**<https://hal.science/hal-00770396>**

Submitted on 3 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES STRUCTURES. — Vibrations linéaires moyennes fréquences des structures élastiques anisotropes.

On propose une méthode constructive pour étudier les vibrations linéaires moyennes fréquences des structures élastiques visqueuses anisotropes, basée sur un principe énergétique. Les grandeurs construites sont toutes déterministes. Elles permettent de caractériser l'état vibratoire par bande de fréquence, d'étudier la réponse à une excitation moyenne fréquence déterministe ou aléatoire stationnaire, d'étudier facilement la propagation spatiale des vibrations dans le milieu élastique, de calculer la densité modale.

STRUCTURE MECHANICS. — Middle Frequency Linear Vibrations of Anisotropic Elastic Structures.

We suggest a constructive method, based on an energetic principle, for studying the linear vibrations of anisotropic viscous elastic structures in the middle frequency range. The model developed is deterministic. It allows one to define the vibratory state by frequency band, to process the response due to any deterministic or stationary random excitation in the middle frequency range, to study with ease the spatial propagation of the vibrations in the elastic medium and to compute the modal density.

I. LE PROBLÈME POSÉ. — On étudie les vibrations linéaires d'un milieu élastique anisotrope visqueux, occupant un domaine  $\Omega$  ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^3$ , dans le domaine des fréquences moyennes, pour lequel les fréquences d'excitation ne sont pas suffisamment élevées pour utiliser des méthodes asymptotiques, mais pour lequel la réponse fait intervenir *a priori* un grand nombre de modes propres, de rang élevé, du système non amorti associé. Pour ce domaine fréquentiel, la discrétisation du milieu en éléments finis conduit à raisonner sur des systèmes ayant beaucoup de degrés de liberté ( $> 10\,000$ ); aussi, l'utilisation des méthodes constructives pour les problèmes basses fréquences, pose, dans ce cas de nombreuses difficultés. Nous proposons ici une méthode constructive basée sur les principes suivants :

1. L'état vibratoire n'est plus caractérisé par valeurs discrètes de la fréquence, mais par bande moyenne fréquence  $B_n$ , de fréquence centrale  $n \Delta\omega$  ( $n$  entier  $\gg 1$ ) et de largeur de bande  $\Delta\omega$ . On associe à toute  $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ , dont la transformée de Fourier  $\hat{f}_n = \mathcal{F} f_n$  est à support compact  $B_n$ , un opérateur nucléaire  $\mathcal{E}^n$  de  $H = (L^2(\Omega))^3$  tel que  $\forall \psi \in H$ ,  $E_c^n(\psi, \psi) = \langle \mathcal{E}^n \psi, \bar{\psi} \rangle_H$  représente l'énergie cinétique totale de la réponse à l'excitation  $f_n \otimes \psi$ . La connaissance de  $\mathcal{E}^n$  permet d'étudier les « résonances » dans  $B_n$ , et de calculer la densité modale.

2. La réponse à l'instant  $t$  d'une observation du système mécanique est remplacée par la réponse moyenne sur la bande  $B_n$ .

II. VIBRATIONS DANS LA BANDE  $B_n$ . — La frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est  $C^0$  et  $C^1$  par morceaux. On note  $x = (x_1, x_2, x_3)$  un point de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial_i$  (resp.  $\partial_j$ ) la dérivée partielle par rapport à  $t$  (resp. à  $x_j$ ). Soit  $u = (u_1, u_2, u_3)$  le champ de déplacement. Sur la partie  $\Gamma_u$  de  $\partial\Omega$ , de mesure  $> 0$ , on impose  $u|_{\Gamma_u} = 0$ . La formulation variationnelle introduit les espaces de Hilbert réels :

$$H = \{u; u_j \in L^2(\Omega)\}, \quad V = \{u; u_j \in H^1(\Omega); u_j|_{\Gamma_u} = 0\}.$$

On a  $V \subset H = H' \subset V'$  avec densité de  $V$  dans  $H$ , l'injection  $V \hookrightarrow H$  étant compacte.

Soit  $M$  (resp.  $C$ ), l'opérateur linéaire de masse (resp. d'amortissement) continu, symétrique, défini positif de  $H$ . On a :

$$\forall u, v \in H, \quad \langle M u, v \rangle_H = \int_{\Omega} \rho(x) u_j(x) v_j(x) dx,$$

avec :

$$\forall x \in \Omega, \quad 0 < \rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2 < +\infty.$$

Soit  $K$  l'opérateur linéaire de rigidité tel que :

$$\forall u, v \in V, \quad \langle K u, v \rangle_{V', V} = \int_{\Omega} a_{ijkh}(x) \varepsilon_{kh}(x) \varepsilon_{ij}(x) dx,$$

avec  $\varepsilon_{ij}(u) = (\partial_j u_i + \partial_i u_j)/2$ , les constantes d'élasticité  $a_{ijkh}(x)$  vérifiant les propriétés habituelles. Alors  $K$  est continu, symétrique de  $V$  dans  $V'$  et :

$$\forall u \in V, \quad \langle K u, u \rangle_{V', V} \geq \mu \|u\|_V^2, \quad \mu > 0.$$

L'injection de  $\text{Dom } K = \{u \in V, K u \in H\}$  dans  $H$  est de Hilbert Schmidt.

Tous les espaces  $V, H$ , etc. sont complexifiés, mais pour simplifier les notations les complexifiés sont notés  $V, H$ , etc. On se donne des forces d'excitation (surfacique sur  $\Gamma_S = \partial\Omega \setminus \Gamma_u$  et volumique) représentées par l'élément  $f_n \otimes \psi \in L^2(\mathbb{R}, H)$ , la partie spatiale  $\psi$  étant donnée dans  $H$ .

Soit  $i = \sqrt{-1}$ . Vu les hypothèses, on montre [1] que  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ , l'opérateur linéaire  $-\omega^2 M + i\omega C + K$  de  $H$  ayant pour domaine  $\text{Dom } K$ , admet pour inverse l'opérateur de Hilbert Schmidt de  $\mathcal{L}(H, H) : T_\omega = (-\omega^2 M + i\omega C + K)^{-1}$ . On s'intéresse à la vibration moyenne fréquence  $u$  dans la bande  $B_n$ , définie par sa transformée de Fourier  $\hat{u}$  par rapport à  $t : \omega \mapsto \hat{u}(\omega) = (T_\omega \psi) \hat{f}_n(\omega)$ , qui est à support compact  $B_n$ . Cette vibration  $u$  s'interprète comme la solution forcée, associée à  $f_n \otimes \psi$  de :

$$(1) \quad M \partial_t^2 u + C \partial_t u + K u = f_n \otimes \psi,$$

avec  $u \in L^2(\mathbb{R}, V)$ ,  $\partial_t u \in L^2(\mathbb{R}, H)$ .

III. CARACTÉRISATION DES VIBRATIONS DANS LA BANDE  $B_n$ . — On définit « l'énergie » de l'excitation  $f_n \otimes \psi$  par  $e_n = (2\pi)^{-1} \|\psi\|_H^2 \int_{B_n} |\hat{f}_n(\omega)|^2 d\omega$ .

1. Relativement à la bande  $B_n$  et à  $f_n$ , et en notant  $T_\omega^*$  l'adjoint de  $T_\omega$  dans  $H$ , on montre que l'opérateur d'énergie  $\mathcal{E}^n$  que nous définissons par :

$$(2) \quad \mathcal{E}^n = \frac{1}{4\pi} \int_{B_n} \omega^2 |\hat{f}_n(\omega)|^2 T_\omega^* M T_\omega d\omega,$$

est un opérateur réel, positif dans  $H$  et nucléaire. L'énergie cinétique totale sur  $B_n$  de la réponse à l'excitation  $f_n \otimes \psi$  s'écrit alors :

$$(3) \quad E_c^n(\psi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle M \partial_t u, \overline{\partial_t u} \rangle_H dt = \langle \mathcal{E}^n \psi, \bar{\psi} \rangle_H$$

et est extrémale lorsque  $\psi$  appartient à un sous espace propre  $X^{(j)}$  de  $H$ , associé à la valeur

propre  $\lambda^{(j)}$  de l'opérateur  $\mathcal{E}^n$ , compté une seule fois si elle est multiple. On a alors pour  $\psi \in X^{(j)}$ ,  $E_c^n(\psi, \psi) = \lambda^{(j)} \|\psi\|_H^2$ . Comme  $\lambda^{(1)} > \lambda^{(2)} > \dots \rightarrow 0$ , on dira qu'il y a « appropriation maximale » du système dans  $B_n$ , si  $\psi$  appartient au sous espace propre  $X^{(1)}$  associé à la valeur propre dominante  $\lambda^{(1)}$  de  $\mathcal{E}^n$ . Si  $\psi$  ne décrit pas tout  $H$ , mais un sous espace vectoriel  $H_1$  de  $H$ , « l'appropriation maximale » relativement à  $H_1$  est obtenue pour  $\psi$  appartenant au sous espace propre dominant de la restriction  $\mathcal{E}_1^n$  à  $H_1$  de  $\mathcal{E}^n$ .

2. Soit  $N_n$  la densité modale prise constante par construction dans la bande  $B_n$ , qui est telle que le nombre de modes propres du système non amorti dans  $B_n$  soit égal à  $N_n \Delta\omega$ . Pour  $\xi \in \mathbb{R}^+$ , on note  $\mathcal{E}_\xi^n$  l'opérateur d'énergie construit avec :

$$C = 2\xi n \Delta\omega M \quad \text{et} \quad f_n(t) = (\pi t)^{-1} \sin(t \Delta\omega/2) \exp(+in \Delta\omega t).$$

Alors en notant  $\text{tr}$  la trace des opérateurs nucléaires de  $H$ , on montre que  $\alpha_n = 16n \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \xi \text{tr}(M \mathcal{E}_\xi^n)$  est fini et que  $a_n \alpha_n < N_n < b_n \alpha_n$  avec  $a_n = (n+1/2)^3 n^{-3}$  et  $b_n = n^3 (n-1/2)^{-3}$ . Numériquement pour  $n \gg 1$ ,  $a_n \sim b_n \sim 1$  et pour  $\xi$  donné  $\ll 1$ , on a :

$$(4) \quad N_n \simeq 8\pi n \xi \left( \text{Arctg} \frac{1}{n \xi} + n \xi \text{Log} \frac{n \xi}{\sqrt{1+n^2 \xi^2}} \right)^{-1} \text{tr}(M \mathcal{E}_\xi^n).$$

3. Soit  $Q$  un opérateur d'observation du système mécanique, linéaire continu de  $H$  dans un espace de Hilbert  $W$ . Sur la bande  $B_n$  et pour une énergie fixée  $e_n$  de l'excitation, la réponse  $\sigma = Qu$  est caractérisée par la racine carré du scalaire :

$$(5) \quad E_Q^n(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \|\sigma\|_W^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{B_n} \|Q u\|_W^2 d\omega.$$

On a une définition analogue pour les dérivées par rapport à  $t$  de l'observation  $\sigma$ . La propagation spatiale des vibrations est obtenue en étudiant des fonctions du type  $x \mapsto E_{\delta_x}^n(\psi)$  définie p. p. sur  $\Omega$ , où  $\delta_x$  est la mesure de Dirac et  $W = \mathbb{C}^3$ . Il est à noter que pour une excitation  $\zeta \otimes \psi$ , avec  $(\zeta(t))_{t \in \mathbb{R}}$  un processus stochastique continu du second ordre, centré, stationnaire sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , dont la mesure spectrale de puissance s'écrit  $|\hat{f}_\zeta(\omega)|^2 d\omega$ , alors  $E_Q^n(\psi) = (2\pi)^{-1} V_\sigma$ , où  $V_\sigma$  est la variance de la variable aléatoire  $\|\sigma(t)\|_W$  pour  $t$  quelconque fixé dans  $\mathbb{R}$ .

IV. CONSTRUCTION DE LA SOLUTION. — Dans ce paragraphe on donne les résultats qui permettent la mise en œuvre numérique de la méthode énergétique proposée.

Soit  $f_0(t) = f_n(t) \exp(-in \Delta\omega t)$ . Alors la solution forcée  $u$  de (1) associée à l'excitation moyenne fréquence  $f_n \otimes \psi$  sur la bande  $B_n$ , s'écrit  $u(t) = u_0(t) \exp(in \Delta\omega t)$  avec  $u_0$  la solution forcée de :

$$(6) \quad M \partial_t^2 u_0 + (C + 2in \Delta\omega M) \partial_t u_0 + (K + in \Delta\omega C - (n \Delta\omega)^2 M) u_0 = f_0 \otimes \psi,$$

associée à l'excitation basse fréquence  $f_0 \otimes \psi$  définie par sa transformée de Fourier  $\omega \mapsto \hat{u}_0(\omega) = (T_\omega + n \Delta\omega \psi) \hat{f}_0(\omega)$  qui est à support compact  $B_0 = (-\Delta\omega/2, \Delta\omega/2)$ . On pose  $\omega_L = \Delta\omega/2$ ,  $\tau_L = \pi/\omega_L$ . Soit  $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  la famille de fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que :

$$\varphi_m(t) = (\pi\omega_L)^{-1/2} (t - m \tau_L)^{-1} \sin \omega_L (t - m \tau_L).$$

Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la solution forcée  $u$  de (1) s'écrit :

$$(7) \quad u(t) = \tau_L^{1/2} \exp(in \Delta \omega t) \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_0(m \tau_L) \varphi_m(t),$$

avec  $u_0$ , la solution forcée basse fréquence de (6), et l'on a :

$$(8) \quad E_Q^n(\psi) = \tau_L \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle Q u_0(m \tau_L), \overline{Q u_0(m \tau_L)} \rangle_W.$$

Si  $u_{0j}$ ,  $j \in \{1, 2\}$  est la solution forcée de (6) associée à l'excitation  $f_0 \otimes \psi_j$ ,  $\psi_j \in H$ , alors :

$$(9) \quad E_C^n(\psi_1, \psi_2) = \langle \mathcal{E}^n \psi_1, \overline{\psi_2} \rangle_H = \frac{1}{2} \tau_L \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle M z_1(m \tau_L), \overline{z_2(m \tau_L)} \rangle_H,$$

avec  $z_j = \partial_t u_{0j} + in \Delta \omega u_{0j}$ .

Ces résultats montrent que toutes les grandeurs caractéristiques définies au paragraphe 3 se calculent facilement si l'on sait construire la solution forcée  $u_0$  de (6) associée à l'excitation  $f_0 \otimes \psi$ . Pour cela on utilise la méthode des éléments finis pour construire une approximation des opérateurs  $M$ ,  $C$  et  $K$ . Puis l'équation (6) est résolue, avec des données initiales nulles, par intégration numérique directe dans le temps avec un algorithme pas à pas implicite inconditionnellement stable (par exemple  $\theta$ -Wilson [6]), ce qui ne pose pas de problème car  $u_0(t)$  est un signal basse fréquence. De plus la méthode des éléments finis qui conduit à des structures bandes pour les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, préserve la structure bande des matrices des opérateurs de l'équation (6).

- [1] P. KRÉE et C. SOIZE, *Mécanique aléatoire*, Dunod, Paris, 1982 (à paraître).
- [2] G. DUVAUT et J.-L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [3] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer Verlag, 1980.
- [4] P. GERMAIN, *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1973.
- [5] L. SCHWARTZ, *Produits tensoriels topologiques*, Séminaire, 1953/1954.
- [6] K. BATHE et E. WILSON, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, 1976.