



HAL
open science

A propos des sphères sous-riemanniennes

Ludovic Rifford

► **To cite this version:**

Ludovic Rifford. A propos des sphères sous-riemanniennes. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin, 2006, 13 (3), pp.521-526. hal-00769092

HAL Id: hal-00769092

<https://hal.science/hal-00769092>

Submitted on 28 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

À PROPOS DES SPHÈRES SOUS-RIEMANNIENNES

L. RIFFORD

ABSTRACT. Nous démontrons qu'en l'absence de courbe minimisante singulière, la fonction distance sous-riemannienne, localement lipschitzienne hors de la diagonale, vérifie un théorème de Sard. On en déduit que les sphères sous-riemanniennes sont des hypersurfaces lipschitziennes pour presque tout rayon dans $d_{SR}(q_0, Q)$.

ABSTRACT. We prove that, in absence of singular minimizing curve, the sub-riemannian distance function is locally Lipschitz outside the diagonal and satisfies Sard's theorem. Hence we deduce that the spheres are Lipschitz hypersurfaces for almost every radius in $d_{SR}(q_0, Q)$.

1. INTRODUCTION

Nous avons démontré récemment dans [6] que pour toute variété riemannienne lisse et tout point fixé sur celle-ci, presque toutes les sphères géodésiques centrées en ce point sont des hypersurfaces lipschitziennes de la variété ; l'objectif de cette note est de montrer que, sous de bonnes hypothèses, ce résultat reste vrai dans le cas sous-riemannien.

2. PRÉLIMINAIRES

Pour tout complément sur les notions introduites dans ces préliminaires, on renvoie le lecteur aux deux textes [4] et [5].

2.1. Structures sous-riemanniennes. Soit Q une variété connexe C^∞ de dimension n . Une structure sous-riemannienne sur Q correspond à la donnée d'un couple (\mathcal{D}, g) , où \mathcal{D} est une distribution satisfaisant la condition du rang, et où g est une métrique riemannienne sur \mathcal{D} .

On rappelle qu'une distribution sur Q est un sous-fibré vectoriel de classe C^∞ de TQ , et que celle-ci satisfait la condition du rang si, pour tout $q \in Q$,

$$\text{Lie}(\mathcal{D})[q] = T_q Q.$$

2.2. Courbes horizontales. Une courbe horizontale (sur $[0, 1]$) est une courbe absolument continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow Q$ telle que pour presque tout $t \in [0, 1]$, $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}[\gamma(t)]$. Pour chaque point q_0 fixé dans Q , l'ensemble des courbes horizontales γ valant q_0 pour $t = 0$ et dont la norme L^2 , définie par

$$\|\gamma\|_2^{g, q_0} := \sqrt{\int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt}$$

est finie, est une variété hilbertienne de classe C^∞ ; on la note Ω_{q_0} .

Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France (Courriel: ludovic.rifford@math.u-psud.fr).

2.3. L'application entrée-sortie $E^{q_0,1}$. On appelle application entrée-sortie au point q_0 et en temps 1, l'application définie par

$$\begin{aligned} E^{q_0,1} : \Omega_{q_0} &\longrightarrow Q \\ \gamma &\longmapsto \gamma(1). \end{aligned}$$

Cette application est de classe C^∞ sur Ω_{q_0} . Le théorème de Chow-Rashevsky peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème 2.1. *Si \mathcal{D} est une distribution satisfaisant la condition du rang, alors pour tout $q_0 \in Q$, l'application $E^{q_0,1}$ est ouverte.*

Il n'est pas difficile de déduire de ce résultat que si la distribution \mathcal{D} satisfait la condition du rang, alors pour tout couple de points (q_0, q_1) dans Q , il existe une courbe $\gamma \in \Omega_{q_0}$ telle que $\gamma(0) = q_0$ et $\gamma(1) = q_1$.

Une courbe $\gamma \in \Omega_{q_0}$ sera dite singulière s'il s'agit un point critique de l'application entrée-sortie $E^{q_0,1}$, c'est à dire si l'application linéaire $T_\gamma E^{q_0,1} : T_\gamma \Omega_{q_0} \rightarrow T_{\gamma(1)} Q$ n'est pas surjective.

2.4. La distance sous-riemannienne $d_{SR}(\cdot, \cdot)$. La longueur d'une courbe $\gamma \in \Omega_{q_0}$ est donnée par

$$\text{long}_{SR}(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \quad (\leq \|\gamma\|_2^{g, q_0} < \infty).$$

Pour tout couple de points (q_0, q_1) dans Q , on définit la distance sous-riemannienne de q_0 à q_1 comme étant l'infimum des longueurs des courbes horizontales appartenant à Ω_{q_0} et valant q_1 pour $t = 1$; on la note $d_{SR}(q_0, q_1)$. D'après le théorème de Chow-Rashevsky, si la distribution \mathcal{D} satisfait la condition du rang, alors la distance est bien-définie et continue sur $Q \times Q$. Dans ce cas, la topologie définie par la distance sous-riemannienne sur Q coïncide avec la topologie de départ sur Q . De plus, si Q munie de cette distance définit un espace complet, alors pour tout couple de points (q_0, q_1) dans Q il existe une courbe $\gamma \in \Omega_{q_0}$ reliant q_0 à q_1 telle que $\text{long}_{SR}(\gamma) = d_{SR}(q_0, q_1)$; une telle courbe est dite minimisante.

On suppose à partir de maintenant que la variété Q est munie d'une structure sous-riemannienne (\mathcal{D}, g) , qu'elle est complète pour la distance sous-riemannienne associée, et qu'aucune courbe minimisante non triviale n'est singulière.

2.5. L'application exponentielle \exp_{q_0} . En fait, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les courbes minimisantes paramétrées par la longueur sont exactement les courbes qui minimisent la norme L^2 . Donc si, pour tout couple de points (q_0, q_1) dans Q , on note par $e_{SR}(q_0, q_1)$ l'infimum des carrés des normes L^2 des courbes horizontales reliant q_0 et q_1 , on a $d_{SR}(\cdot, \cdot) = \sqrt{e_{SR}(\cdot, \cdot)}$.

Comme on suppose qu'il n'y a pas de singulière minimisante, toute courbe minimisante la norme L^2 est la projection d'une extrémale du champ hamiltonien \vec{H} de $H = \frac{1}{2}g^*$, où g^* est la cométrique de g . Ainsi il existe un ouvert \mathcal{P} de $T_{q_0}^* Q$ tel que pour tout $p_0 \in \mathcal{P}$ l'extrémale du champ hamiltonien \vec{H} avec condition initiale (q_0, p_0) est définie sur $[0, 1]$ et tel que si l'on note γ_{p_0}

la projection de cette extrémale sur Q , alors on a

$$\forall q \in Q, \quad d_{SR}(q_0, q) = \min \{ \|\gamma_{p_0}\|_2^{g, q_0} \text{ pour } p_0 \in \mathcal{P} \}.$$

L'application exponentielle $\exp_{q_0} : \mathcal{P} \rightarrow Q$ est définie comme étant l'application qui à $p_0 \in \mathcal{P}$ associe $\exp_{q_0}(p_0) := \gamma_{p_0}(1)$.

3. UN THÉORÈME DE SARD POUR LA DISTANCE SOUS-RIEMANNIENNE

3.1. Gradients généralisés de Clarke. Soit $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne sur Q . D'après le théorème de Rademacher une telle fonction est presque partout différentiable sur Q , notons D_f l'ensemble des points de Q où f est différentiable. Pour tout $q \in Q$, le gradient généralisé de Clarke de f au point q , noté $\partial f(q)$, est défini de la manière suivante :

$$\partial f(q) := \text{conv} \left\{ \lim_{q' \rightarrow q} T_{q'} f \text{ où } q' \in D_f \right\}.$$

Par construction, pour tout $q \in Q$, l'ensemble $\partial f(q)$ est un convexe compact non-vide de T_q^*Q . On appelle point critique de f tout point de Q tel que $0 \in \partial f(q)$ et on note C_f l'ensemble des points critiques de f dans Q . D'après le théorème des fonctions implicites "non-lisse", si q n'est pas un point critique de f alors l'ensemble de niveau $\{q' \in Q \text{ tel que } f(q') = f(q)\}$ est localement une hypersurface lipschitzienne de Q . On renvoie le lecteur au livre [3] pour une étude détaillée du gradient généralisé de Clarke.

Pour finir, nous dirons que $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ localement lipschitzienne vérifie le théorème de Sard si l'ensemble $f(C_f)$ est de mesure nulle dans \mathbb{R} .

3.2. Énoncé du théorème.

Théorème 3.1. *Soit Q une variété connexe C^∞ de dimension n munie d'une structure sous-riemannienne (\mathcal{D}, g) pour laquelle elle est complète, et q_0 un point fixé dans Q . Si aucune courbe minimisante issue de q_0 n'est singulière, alors la fonction $d_{SR}(q_0, \cdot)$ est localement lipschitzienne sur $Q \setminus \{q_0\}$ et vérifie le théorème de Sard.*

Par le théorème des fonctions implicites cité plus haut on obtient comme corollaire que, sous les mêmes hypothèses, pour presque tout $r \in d_{SR}(q_0, Q)$ la sphère sous-riemannienne $S_{SR}(q_0, r)$ (c'est à dire l'ensemble des $q \in Q$ tels que $d_{SR}(q_0, q) = r$) est une hypersurface lipschitzienne de Q .

3.3. Preuve du théorème 3.1. Le théorème 3.1 est en fait la conséquence du résultat suivant, corollaire de [6, Theorem 3].

Lemme 3.2. *Soit \mathcal{V} (resp. \mathcal{W}) un ouvert de \mathbb{R}^N (resp. de \mathbb{R}^n). Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ une submersion de classe C^∞ et $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Soit $\Phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathcal{W}, \quad \Phi(x) := \inf \{ g(v) \text{ avec } v \in \mathcal{V} \text{ tel que } f(v) = x \}.$$

Si pour tout $x \in \mathcal{W}$ il existe un voisinage \mathcal{W}_x de x (dans \mathcal{W}) et un compact K_x de \mathcal{V} tel que pour tout $x' \in \mathcal{W}_x$ l'infimum dans la définition de $\Phi(x')$ est atteint sur K_x , alors l'application Φ est localement lipschitzienne sur \mathcal{W} et vérifie le théorème de Sard.

Soit K un sous-ensemble compact de $Q \setminus \{q_0\}$. Appelons \mathcal{K} l'ensemble des $p_0 \in \mathcal{P}$ tels que $\exp_{q_0}(p_0) = q$ et $\|\gamma_{p_0}\|_2^{g, q_0} = d_{SR}(q_0, q)$ pour un certain q dans K . Sous les hypothèses du théorème, il est facile de démontrer que l'ensemble \mathcal{K} est un compact non-vide (voir par exemple [7]).

Quitte à restreindre l'ensemble K et à passer en coordonnées locales le long de chaque courbe minimisante joignant q_0 à un point de K , on peut supposer qu'il existe m champs de vecteurs X_1, \dots, X_m tels que $\mathcal{D}[q] = \text{vect}\{X_1(q), \dots, X_m(q)\}$ pour tout $q \in Q$. En outre, on peut également supposer que la famille $\{X_1, \dots, X_m\}$ est orthonormée pour la métrique g et que chaque champ X_i est complet. Ainsi chaque courbe horizontale $\gamma \in \Omega_{q_0}$ s'associe de manière unique à un contrôle $u \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ tel que $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t)X_i(t)$ pour presque tout $t \in [0, 1]$; ce qui nous permet dorénavant de confondre courbes horizontales et contrôles L^2 .

Soit $p_0 \in \mathcal{K}$; appelons u^{p_0} le contrôle associé à la courbe horizontale γ_{p_0} . Par hypothèse, il existe $v_1^{p_0}, \dots, v_n^{p_0}$ dans L^2 tels que l'application linéaire $T_{u^{p_0}}E^{q_0, 1} : \text{Vect}\{v_1^{p_0}, \dots, v_n^{p_0}\} \rightarrow T_{\exp_{q_0}(p_0)}Q$ est surjective. De plus, comme l'application $E^{q_0, 1}$ est de classe C^1 , il existe $\epsilon_{p_0} > 0$ tel que $T_u E^{q_0, 1} : \text{Vect}\{v_1^{p_0}, \dots, v_n^{p_0}\} \rightarrow T_{E^{q_0, 1}(u)}Q$ est surjective pour tout $u \in L^2$ vérifiant $\|u - u^{p_0}\|_2 < \epsilon_{p_0}$. Par ailleurs, comme l'application $p_0 \mapsto u^{p_0}$ est continue, il existe $\mu_{p_0} > 0$ tel que $\|u^{p'_0} - u^{p_0}\|_2 < \epsilon_{p_0}/2$, pour tout $p'_0 \in B(p_0, \mu_{p_0})\mathcal{P}$. Par compacité de \mathcal{K} , il existe un entier N et $p_0^1, \dots, p_0^N \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} \subset \cup_{k=1}^N B(p_0^k, \mu_{p_0^k})$. Posons $\mathcal{Z} := (\mathbb{R}^n)^N \times \mathcal{P}$ et définissons l'application $U : \mathcal{Z} \rightarrow L^2$ par

$$U(q_1^{p_0^1}, \dots, q_n^{p_0^1}, \dots, q_1^{p_0^N}, \dots, q_n^{p_0^N}, p_0) := \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n q_j^{p_0^k} v_j^{p_0^k} + u^{p_0}.$$

Par construction, on a

$$e_{SR}(q_0, q) = \inf\{\|U(Z)\|_2^2 \text{ avec } Z \in \mathcal{Z} \text{ tel que } E^{q_0, 1}(U(Z)) = q\}.$$

Quitte à changer les $v_j^{p_0^k}$ (par exemple de manière à ce qu'il existe des temps distincts $t_{j,k}$ dans $[0, 1]$ tels que chaque $v_j^{p_0^k}$ est C^∞ sur $[0, 1] \setminus \{t_{j,k}\}$ et non différentiable en $t_{j,k}$), on a que pour tout $q \in K$ l'infimum dans la formule ci-dessus est forcément atteint pour $Z \in \{0_{nN}\} \times \mathcal{K}$. Donc si l'on pose

$$V := \max\left\{\|v_j^{p_0^k}\|_2 \text{ pour } j = 1, \dots, n \text{ et } k = 1, \dots, N\right\} \text{ et } \epsilon := \min_{k=1, \dots, N} \epsilon_{p_0^k},$$

et si l'on note par \mathcal{V} l'ouvert de \mathcal{Z} constitué des couples (q, p_0) tels que $|q_j^{p_0^k}| < \frac{\epsilon}{2nNV}$ pour tout $j = 1, \dots, n$ et $k = 1, \dots, N$, et tels que $p_0 \in \cup_{k=1}^N B(p_0^k, \mu_{p_0^k})$, alors l'application $E^{q_0, 1} \circ U$ est une submersion de classe C^∞ sur \mathcal{V} qui contient l'ensemble $\{0_{nN}\} \times \mathcal{K}$. On peut donc appliquer le lemme 3.2.

4. REMARQUES

En fait, Baryshnikov a démontré (sous des hypothèses un peu plus fortes) dans [1] que les petites sphères sous-riemaniennes sont homéomorphes à la sphère euclidienne de dimension n . Par ailleurs, le résultat obtenu ici dans

le cas de la fonction distance peut très bien se démontré pour d'autres types de fonctions valeurs (voir [2]).

REFERENCES

- [1] Yu. Baryshnikov. On small Carnot-Carathéodory spheres. *Geom. Funct. Anal.*, 10(2):259–265, 2000.
- [2] P. Cannarsa and L. Rifford. Semiconcavity results for optimal control problems admitting no singular minimizing controls. En préparation.
- [3] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, and P.R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 178. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] I. Kupka. Géométrie sous-riemannienne. *Astérisque*, (241):Exp. No. 817, 5, 351–380, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96.
- [5] R. Montgomery, A tour of sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications, Math. Surveys and Monographs 91, American Math. Soc., Providence, 2002.
- [6] L. Rifford. A Morse-Sard theorem for the distance function on Riemannian manifolds. *Manuscripta Math.*, 113:251–265, 2004.
- [7] E. Trélat. Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost. *J. Dynam. Control Systems*, 6(4):511–541, 2000.