



**HAL**  
open science

## Troisième coefficient du viriel du gaz de Bose unitaire

Yvan Castin, Felix Werner

► **To cite this version:**

Yvan Castin, Felix Werner. Troisième coefficient du viriel du gaz de Bose unitaire. *Revue canadienne de physique*, 2013, 91, pp.382. 10.1139/cjp-2012-0569 . hal-00768677

**HAL Id: hal-00768677**

**<https://hal.science/hal-00768677>**

Submitted on 22 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Troisième coefficient du viriel du gaz de Bose unitaire

Yvan Castin<sup>1</sup> and Félix Werner<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire Kastler Brossel, École Normale Supérieure,  
CNRS et UPMC, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France*

Nous entendons par gaz de Bose unitaire un système composé de bosons sans spin interagissant dans l'onde  $s$  par un potentiel de longueur de diffusion infinie et de portée (réelle ou effective) presque négligeable, système pour l'instant abstrait mais dont la tentative de réalisation avec des atomes froids est en cours. À partir de la solution analytique connue du problème à trois corps dans un piège harmonique, et de méthodes précédemment développées pour des fermions, nous déterminons le troisième cumulatif  $b_3$ , puis le troisième coefficient du viriel  $a_3$  de ce gaz, dans le cas spatialement homogène, en fonction de sa température et du paramètre à trois corps  $R_t$  caractérisant l'effet Efimov. Un point marquant est qu'en convertissant des séries en des intégrales (par une méthode des résidus inverse), puis en utilisant un petit paramètre inattendu, l'angle de masse  $\nu = \pi/6$  des trois bosons, on peut pousser l'estimation complètement analytique de  $b_3$  et de  $a_3$  jusqu'à une erreur en pratique négligeable.

PACS numbers: 67.85.-d

## I. INTRODUCTION

Le domaine des gaz quantiques a pris, depuis une dizaine d'années, un tournant décisif, celui des interactions fortes, grâce à la possibilité de donner à la longueur de diffusion dans l'onde  $s$  des valeurs arbitrairement grandes (en valeur absolue) par la technique des résonances de Feshbach magnétiques [1, 2]. Ceci ouvre l'étude d'un objet fascinant, le gaz unitaire, dans lequel les interactions entre particules ont une longueur de diffusion infinie dans l'onde  $s$  et une portée négligeable. L'amplitude de diffusion à deux corps dans l'onde  $s$  atteint alors le module maximal autorisé par l'unitarité de la matrice  $S$ , et le gaz est en interaction maximale.

Pour les gaz de fermions de spin 1/2, la réalisation et la caractérisation expérimentales du régime d'interaction forte ont été un plein succès [3, 4], culminant récemment avec la mesure de l'équation d'état du gaz unitaire, aussi bien à haute qu'à basse température  $T$  [5–7]. Dans le cas non polarisé de spin, ceci a permis une comparaison très fine avec les approches théoriques, elles-mêmes poussées dans leurs retranchements. À température nulle, en pratique  $T/T_F \ll 1$ , où  $T_F$  est la température de Fermi, les mesures ont confirmé la précision des plus récents calculs variationnels à surface nodale fixée, pour ce qui est du nombre universel  $\xi = \mu/(k_B T_F)$ ,  $\mu$  étant le potentiel chimique du gaz [8]. Pour la transition de phase superfluide, les expériences confirment la classe d'universalité attendue et trouvent une valeur de la température critique  $T_c$  qui corrige légèrement le résultat des premiers calculs de Monte-Carlo quantique [9] et confirme celui des plus récents [10]. Au-dessus de  $T_c$ , les mesures du MIT sont en accord remarquable avec la méthode de Monte-Carlo diagrammatique [11]. Finalement, dans le régime non dégénéré  $T > T_F$ , les expériences à l'ENS ont pu confirmer la valeur du troisième coefficient du viriel  $a_3$  du gaz spatialement homogène, déjà déduite théoriquement [13] de la solution analytique du problème à trois corps dans un piège harmonique [14] et reproduite depuis par

une méthode diagrammatique [15]; ces expériences devancent même la théorie en obtenant la valeur de  $a_4$ , non encore extraite théoriquement de façon fiable du problème à quatre corps [16].

En ce qui concerne les gaz de bosons sans spin en interaction forte, les études expérimentales sont moins avancées, à cause de l'effet Efimov [17] : l'attraction effective à trois corps prédite par Efimov, et à l'origine des ses fameux trimères faiblement liés dont on a désormais une signature expérimentale [18], exalte les pertes d'atomes dans les gaz, dues aux collisions à trois corps avec formation très exothermique de dimères fortement liés. Dans la limite unitaire, on ne peut pour l'instant préparer un gaz de Bose stable et à l'équilibre thermique que dans le régime non dégénéré  $\rho\lambda^3 \ll 1$  [19], où  $\rho$  est la densité du gaz et  $\lambda = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$  la longueur d'onde thermique de de Broglie : le taux de collision élastique à deux corps, en  $\frac{\hbar}{m}\rho\lambda$ , l'emporte alors sur le taux de pertes à trois corps, en  $\frac{\hbar}{m}\rho\lambda^4$  [20] [51]. Il existe heureusement quelques pistes à explorer pour réduire les pertes, comme la mise à profit dans un réseau optique de l'effet Zénon quantique qu'elles induisent [22] ou simplement l'utilisation de résonances de Feshbach étroites [23, 24].

D'un point de vue théorique, l'étude du gaz de Bose unitaire en est elle-même à ses prémices. La plupart des travaux ne prennent pas en compte de manière exacte les corrélations à trois corps et plus [25–27]; ils ne peuvent donc rendre compte quantitativement du fait que les interactions entre bosons à résonance mettent en jeu le paramètre à trois corps  $R_t$ , une longueur donnant l'échelle d'énergie globale dans le spectre des trimères d'Efimov (que ne peut ici fournir la longueur de diffusion puisqu'elle est infinie). Aussi les différentes phases quantiques sous lesquelles le système de Bose unitaire pourrait exister à l'équilibre thermique, en fonction de la température, restent-elles encore à explorer. À température nulle, l'ajout d'une interaction de cœur dur à trois corps, qui permet d'ajuster la valeur de  $R_t$  et empêche aussi l'effondrement du système sur lui-même, a conduit à mon-

trer, par des calculs numériques limités à une dizaine de particules, que les bosons forment un état lié à  $N$  corps, dont l'énergie semble varier linéairement en  $N$  [28], ce qui suggère une phase à densité plafonnée à grand  $N$ , par exemple une phase liquide. À haute température (plus précisément à basse densité  $\rho\lambda^3 \rightarrow 0$ ), l'angle d'attaque naturel est celui du développement du viriel [29], dont nous rappelons ici la forme pour le gaz spatialement homogène [30] :

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} = \sum_{n \geq 1} a_n (\rho\lambda^3)^n \quad (1)$$

où  $P$  est la pression du gaz. Le coefficient  $a_n$  constitue précisément le  $n^{\text{ième}}$  coefficient du viriel. En pratique, il sera plus commode de déterminer les coefficients  $b_n$  du développement du grand potentiel  $\Omega$  en puissances de la fugacité  $z = e^{\beta\mu}$ , le potentiel chimique  $\mu$  tendant vers  $-\infty$  :

$$\Omega = -\frac{V}{\lambda^3} k_B T \sum_{n \geq 1} b_n z^n, \quad (2)$$

$V$  étant le volume du système et  $\beta = 1/(k_B T)$ . Comme  $-\beta\Omega$  est le logarithme de la fonction de partition grand canonique, il est naturel de baptiser le coefficient  $b_n$   $n^{\text{ième}}$  cumulant. La connaissance de tous les cumulants jusqu'à l'ordre  $n$  inclus permet de déterminer tous les coefficients du viriel jusqu'au même ordre. On notera que  $a_1 = b_1 = 1$  par construction ; les expressions d'ordre supérieur utiles ici se déduisent simplement des relations thermodynamiques  $\Omega = -PV$  et  $N = -\partial_\mu \Omega$  [30] :

$$a_2 = -b_2 \quad \text{et} \quad a_3 = 4b_2^2 - 2b_3. \quad (3)$$

Au contraire du cas fermionique, le cumulant  $b_3$  et le coefficient du viriel  $a_3$  des bosons à la limite unitaire ne sont pas de purs nombres, mais ce sont des fonctions du paramètre à trois corps qui n'ont pas encore été explicitement déterminées. Depuis les études fondatrices [31], il existe certes des expressions formelles de  $b_3$  dans le cas quantique général, mettant en jeu les équations de Faddeev [32], la matrice  $S$  [33], des diagrammes de Mayer [34], un opérateur d'Ursell [30, 35]. La forme la plus opérationnelle semble être celle de [32] écrite en termes d'une amplitude de diffusion à trois corps [36], mais son évaluation pour le gaz de Bose unitaire est, à notre connaissance, purement numérique, et pour trois valeurs différentes de  $R_t$  seulement [36]. Ici, nous montrons au contraire que  $b_3$  peut être obtenu analytiquement, à partir de la solution du problème à trois bosons harmoniquement piégés [12, 14].

Dans la première étape de la résolution, on considère le système à l'équilibre thermique dans le potentiel harmonique  $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ ,  $\omega$  étant donc la pulsation d'oscillation libre, et l'on exprime le troisième cumulant  $B_3(\omega)$  du gaz piégé, défini par le développement (5) à venir, en termes des fonctions de partition des problèmes à  $n$  corps piégés,  $1 \leq n \leq 3$ . En physique théorique, un

“régularisateur harmonique” formel a ainsi déjà été introduit pour obtenir les second [37] et troisième [38, 39] coefficients du viriel d'un gaz d'anyons. La même technique a ensuite été utilisée dans le cas des atomes froids fermioniques [13], pour tirer parti du fait que le problème à trois corps est soluble dans la limite unitaire ; notons qu'il ne s'agit alors plus seulement d'un artifice de calcul puisque ce piégeage est réalisable expérimentalement.

Dans la seconde étape, on fait tendre la raideur du piège vers zéro. Comme le montre l'application de l'approximation de densité locale [13], en fait exacte dans cette limite, les cumulants  $b_n$  du gaz homogène sont alors donnés par [13, 37]

$$\frac{b_n}{n^{3/2}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} B_3(\omega) \equiv B_3(0^+). \quad (4)$$

Dans [13], cette limite est évaluée purement numériquement pour les fermions. Nous nous attacherons ici à montrer qu'il est en fait possible d'aller beaucoup plus loin analytiquement.

## II. EXPRESSION DE $\Delta B_3$ EN TERMES DE FONCTIONS DE PARTITION CANONIQUES

Lorsque le potentiel chimique  $\mu \rightarrow -\infty$  à température fixée, ce qui correspond à une limite de faible densité, le grand potentiel du gaz de Bose unitaire piégé admet le développement

$$\Omega = -k_B T Z_1 \sum_{n \geq 1} B_n z^n \quad (5)$$

où  $Z_N$  est la fonction de partition canonique à  $N$  particules,  $z = \exp(\beta\mu)$  est la fugacité, et  $B_n(\omega)$  est le  $n^{\text{ième}}$  cumulant du gaz piégé. Par construction,  $B_1(\omega) \equiv 1$ . On a aussi, par définition,  $\Omega = -k_B T \ln(1 + \sum_{N \geq 1} Z_N z^N)$ . En identifiant ordre par ordre en  $z$ , comme par exemple dans [13], on trouve

$$B_2 = \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{1}{2}Z_1 \quad \text{et} \quad B_3 = \frac{Z_3}{Z_1} - Z_2 + \frac{1}{3}Z_1^2. \quad (6)$$

En réalité, on souhaite calculer l'écart au gaz parfait,

$$\Delta B_n = B_n - B_n^{(0)} \quad (7)$$

où  $B_n^{(0)}(\omega)$  est le  $n^{\text{ième}}$  cumulant du gaz parfait piégé. On introduit de même  $\Delta Z_N = Z_N - Z_N^{(0)}$ , où l'on notera que  $\Delta Z_1 = 0$ . Comme il y a de plus séparabilité du centre de masse dans un piège harmonique, aussi bien pour le gaz parfait que pour le gaz unitaire, et que le spectre du centre de masse est le même que celui du problème à un corps, on se ramène à des fonctions de partition du mouvement relatif à  $n$  corps, repérées par le sigle “rel” :

$$\Delta B_2 = \frac{\Delta Z_2}{Z_1} = \Delta Z_2^{\text{rel}} \quad (8)$$

$$\Delta B_3 = \frac{\Delta Z_3}{Z_1} - \Delta Z_2 = \Delta Z_3^{\text{rel}} - \Delta Z_2. \quad (9)$$

Il reste à utiliser les expressions du spectre du mouvement relatif, connues à la limite unitaire jusqu'à  $n = 3$  [12, 14].

### A. Cas $N = 2$

Comme les interactions modifient le spectre du mouvement relatif seulement dans le secteur de moment cinétique  $l = 0$ , et qu'à la limite unitaire, leur effet se résume à un décalage vers le bas de  $\hbar\omega$  du spectre non perturbé  $E_{l=0,n}^{(0)} = (2n + 3/2)\hbar\omega$  [40], on trouve

$$\Delta Z_2^{\text{rel}} = (e^x - 1) \sum_{n \geq 0} e^{-x(2n+3/2)} = \frac{e^{-x/2}}{1 + e^{-x}} = \Delta B_2 \quad (10)$$

où l'on a posé  $x = \beta\hbar\omega$ . On en déduit, en utilisant l'équation (8) et  $Z_1 = [e^{-x/2}/(1 - e^{-x})]^3$ , que

$$\Delta Z_2 = \frac{e^{-2x}}{(1 - e^{-x})^2(1 - e^{-2x})}. \quad (11)$$

On en déduit aussi le second cumulant du gaz de Bose unitaire spatialement homogène, en calculant  $B_2^{(0)}(\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \text{ch}(x/2)} \right)^3$  puis en prenant la limite  $\omega \rightarrow 0$  et en utilisant (4) :

$$\frac{b_2}{2^{3/2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4}. \quad (12)$$

### B. Cas $N = 3$

Comme il a été montré dans [14], le problème à trois bosons piégé admet une classe particulière d'états propres, qualifiés dans la suite d'états laughliniens, dont la fonction d'onde s'annule lorsqu'il y a au moins deux particules au même point. Ces états ont donc des énergies indépendantes de la longueur de diffusion  $a$  et ne contribuent pas à  $\Delta Z_3$ . Il reste donc à sommer sur les états propres non laughliniens pour le cas sans interaction ( $a = 0$ ) et pour la limite unitaire ( $1/a = 0$ ).

Dans le cas  $a = 0$ , en utilisant comme dans [13] l'ansatz d'Efimov pour la fonction d'onde à trois corps [52], on trouve les énergies propres non laughliniennes du mouvement relatif :

$$E_{\text{rel}}^{(0)} = (u_{l,n}^{(0)} + 1 + 2q)\hbar\omega \quad \text{de dégénérescence } 2l + 1, \quad (13)$$

où  $l, n, q$  décrivent l'ensemble des entiers naturels,  $l$  quantifiant le moment cinétique et  $q$  l'excitation du mode hyperradial [41]. Les  $u^{(0)} \geq 0$  sont les racines de la fonction  $s \mapsto 1/\Gamma(\frac{l-s}{2} + 1)$  :

$$u_{l,n}^{(0)} = l + 2 + 2n. \quad (14)$$

En réalité, il ne faut garder dans le spectre (13) que les racines physiques, pour lesquelles l'ansatz d'Efimov n'est pas identiquement nul. Les deux racines non physiques

connues sont  $u^{(0)} = 4$  pour  $l = 0$ , et  $u^{(0)} = 3$  pour  $l = 1$ . Mais ceci ne jouera pas de rôle dans la suite.

Dans le cas  $1/a = 0$ , on utilise l'ansatz d'Efimov comme dans [14], que l'on soumet aux conditions au contact de Wigner-Bethe-Peierls, ce qui conduit à l'équation transcendante  $\Lambda_l(s) = 0$ , avec [42]

$$\Lambda_l(s) = \cos \nu - (-\sin \nu)^l \frac{\Gamma(\frac{l+1+s}{2})\Gamma(\frac{l+1-s}{2})}{\pi^{1/2}\Gamma(l + \frac{3}{2})} \times {}_2F_1\left(\frac{l+1+s}{2}, \frac{l+1-s}{2}, l + \frac{3}{2}; \sin^2 \nu\right) \quad (15)$$

où  ${}_2F_1$  est la fonction hypergéométrique de Gauss, et l'on a introduit, selon l'habitude, l'angle de masse, qui vaut pour trois bosons

$$\nu = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \quad (16)$$

En pratique, on utilisera aussi la représentation établie dans [43] pour les fermions et aisément transposée au cas bosonique, en termes des polynômes de Legendre  $P_l(X)$  :

$$\Lambda_l(s) \stackrel{l \text{ pair}}{=} \cos \nu - \frac{2}{\sin \nu} \int_0^\nu d\theta P_l\left(\frac{\sin \theta}{\sin \nu}\right) \frac{\cos(s\theta)}{\cos(s\pi/2)} \quad (17)$$

$$\Lambda_l(s) \stackrel{l \text{ impair}}{=} \cos \nu + \frac{2}{\sin \nu} \int_0^\nu d\theta P_l\left(\frac{\sin \theta}{\sin \nu}\right) \frac{\sin(s\theta)}{\sin(s\pi/2)} \quad (18)$$

qui permet d'écrire explicitement  $\Lambda_l(s)$  avec la fonction sinus et des fractions rationnelles en  $s$ .

### C. Voie efimovienne

Dans le secteur de moment cinétique nul,  $l = 0$ ,  $\Lambda_l(s)$  admet une et une seule racine  $u_{0,0} \in i\mathbb{R}^+$  [14], notée habituellement

$$u_{0,0} = s_0 = i|s_0|, \quad |s_0| = 1,006\,237\,825\dots \quad (19)$$

Cette racine donne naissance à la voie efimovienne, dans laquelle les énergies propres  $\epsilon_q(\omega)$  du mouvement relatif sont solutions d'une équation transcendante [12, 14] que l'on peut récrire comme dans [21] pour rendre explicite et univoque la dépendance en le nombre quantique  $q \in \mathbb{N}$  :

$$\text{Im} \ln \Gamma\left(\frac{1 + s_0 - \epsilon_q/(\hbar\omega)}{2}\right) + \frac{|s_0|}{2} \ln\left(\frac{2\hbar\omega}{E_t}\right) + q\pi = 0, \quad (20)$$

la fonction  $\ln \Gamma(z)$  étant prise avec sa détermination standard (ligne de coupure sur  $\mathbb{R}^-$ ). Dans la limite  $\omega \rightarrow 0$  à  $q$  fixé, ceci reproduit la suite géométrique des trimères d'Efimov :

$$\epsilon_q(\omega) \rightarrow \epsilon_q(0^+) = -e^{-2\pi q/|s_0|} E_t, \quad (21)$$

ce qui montre que  $E_t = 2 \exp[\frac{2}{|s_0|} \text{Im} \ln \Gamma(1 + s_0)] \hbar^2 / (mR_t^2)$ ,  $R_t$  étant le paramètre à trois corps suivant la convention de [14]. Dans une limite stricte de

portée nulle,  $q$  décrirait  $\mathbb{Z}$  et le spectre serait non borné inférieurement, ce qui interdirait l'équilibre thermique du système. Cependant, comme l'a noté Efimov [17], dans tout modèle donné d'interaction de portée  $b$  non nulle, y compris dans la réalité expérimentale, la forme géométrique (21) du spectre n'est valable que pour les trimères ayant une énergie de liaison très petite devant  $\hbar^2/(mb^2)$ , d'éventuels autres états trimères plus profondément liés étant hors de la limite unitaire et non universels. Ici, le nombre quantique  $q = 0$  correspond donc simplement au premier état qui atteint (presque) la limite unitaire. Pour qu'une interaction puisse prétendre, à l'équilibre thermique, permettre la réalisation du gaz de Bose unitaire, il est nécessaire que  $q = 0$  corresponde au vrai trimère fondamental, ce qui est bien le cas pour le modèle de [28] et pour la résonance de Feshbach étroite [44–47] : dans ces deux situations, on a en effet  $E_t \simeq e^{-2\pi/|s_0|} \hbar^2/(mb^2) \ll \hbar^2/(mb^2)$  et le spectre des trimères peut être considéré comme *entièrement* efimovien, comme il est supposé dans ce travail.

#### D. Voies universelles

Les racines réelles positives  $(u_{0,n})_{n \geq 1}$  de  $\Lambda_0(s)$ , et les racines  $(u_{l,n})_{n \geq 0}$  de  $\Lambda_l(s)$  pour  $l > 0$ , qui sont toutes réelles [14] et que l'on choisit donc positives, donnent naissance aux états universels, c'est-à-dire non efimoviens, avec des énergies propres du mouvement relatif indépendantes de  $R_t$  :

$$E_{\text{rel}} = (u_{l,n} + 1 + 2q)\hbar\omega \quad \text{de dégénérescence } 2l + 1, \quad (22)$$

où  $(l, n)$  décrit donc  $\mathbb{N}^{2*}$ , et  $q$  décrit  $\mathbb{N}$ , l'étoile indiquant l'exclusion de l'élément nul, ici  $(0, 0)$ . On notera la similitude avec le cas sans interaction (13), le nombre quantique  $q$  ayant la même origine physique [14]. Comme dans le cas sans interaction, il faut éliminer du spectre (22) les racines non physiques, qui donnent un ansatz d'Efimov identiquement nul. Cependant, ces racines non physiques sont exactement les mêmes dans les deux cas [53], ce qui nous autorise à les inclure formellement dans les fonctions de partition  $Z_3$  et  $Z_3^{(0)}$ , leurs contributions (non physiques) se compensant exactement dans  $\Delta Z_3$ . En regroupant les contributions des systèmes avec et sans interaction de mêmes nombres quantiques, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \Delta Z_3^{\text{rel}} &= \sum_{q \geq 0} \left[ e^{-\beta \epsilon_q(\omega)} - e^{-x(u_{0,0}^{(0)} + 1 + 2q)} \right] \\ + \sum_{(l,n) \in \mathbb{N}^{2*}} \sum_{q \geq 0} (2l + 1) &\left[ e^{-x(u_{l,n} + 1 + 2q)} - e^{-x(u_{l,n}^{(0)} + 1 + 2q)} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

#### E. De commodos réarrangements

Afin de sérier les problèmes dans le passage à la limite  $\omega \rightarrow 0$ , il est commode de décomposer (23) en la somme

d'une contribution purement efimovienne  $S(\omega)$  et d'une contribution purement universelle  $\sigma(\omega)$ , à des restes additifs près  $R(\omega)$  et  $\rho(\omega)$ . On étudiera dans la suite la série efimovienne

$$S(\omega) \equiv \sum_{q \geq 0} \left[ e^{-\beta \epsilon_q(\omega)} - e^{-2qx} \right], \quad (24)$$

qui reproduit la première somme de (23) au reste près

$$R(\omega) = \sum_{q \geq 0} \left[ e^{-2qx} - e^{-x(u_{0,0}^{(0)} + 1 + 2q)} \right] = \frac{1 - e^{-3x}}{1 - e^{-2x}}. \quad (25)$$

On va voir aussi qu'il est doublement astucieux d'introduire la série universelle

$$\sigma(\omega) = \sum_{(l,n) \in \mathbb{N}^{2*}} \sum_{q \geq 0} (2l + 1) \left[ e^{-x(u_{l,n} + 1 + 2q)} - e^{-x(v_{l,n} + 1 + 2q)} \right], \quad (26)$$

où l'on a posé

$$v_{l,n} = l + 1 + 2n. \quad (27)$$

D'abord, comme mis à profit numériquement dans [13],  $v_{l,n}$  n'est autre que l'équivalent de  $u_{l,n}$  à grand  $l$  ou  $n$  introduit dans l'équation (17) de la référence [14] [54], ce qui assure une rapide convergence de la série  $\sigma$ . Ensuite, comme il est apparent sur la forme (15), les  $(v_{l,n})_{n \geq 0}$  sont les pôles positifs de la fonction  $\Lambda_l(s)$ ; l'écriture (26) évoque donc le théorème des résidus, ce que nous exploiterons bientôt. Comme  $v_{l,n} = u_{l,n}^{(0)} - 1$ ,  $\sigma$  reproduit la seconde somme de (23) au reste près

$$\rho(\omega) = \sum_{(l,n) \in \mathbb{N}^{2*}} \sum_{q \geq 0} (2l + 1) \left[ e^{-x(v_{l,n} + 1 + 2q)} - e^{-x(u_{l,n}^{(0)} + 1 + 2q)} \right]. \quad (28)$$

Par la méthode des fonctions génératrices, il vient  $\sum_{l \geq 0} (2l + 1)e^{-lx} = (1 - 2\frac{d}{dx})\frac{1}{1 - e^{-x}} = (1 + e^{-x})/(1 - e^{-x})^2$ . Ceci, habilement joint aux égalités (11) et (25), conduit à  $\rho(\omega) = \Delta Z_2 + 1 - R(\omega)$ , et (9) se réduit à l'écriture limpide

$$\Delta B_3(\omega) = S(\omega) + \sigma(\omega) + 1. \quad (29)$$

Cette équation (29) est l'équivalent bosonique des expressions fermioniques (56,58) de la référence [13], dont elle diffère essentiellement par la contribution  $S(\omega)$  de la voie efimovienne.

### III. TRANSFORMATIONS ANALYTIQUES ET LIMITE $\omega \rightarrow 0$

La quantité physique la plus pertinente étant le troisième cumulant du gaz spatialement homogène, il nous faut maintenant, en vertu de (4), faire tendre la raideur du piège vers zéro. Un calcul explicite pour le gaz parfait piégé donne

$$B_3^{(0)}(\omega) = \frac{1}{3} \left( \frac{e^{-x}(1 - e^{-x})}{1 - e^{-3x}} \right)^3 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{3^4}. \quad (30)$$

Dans le cas unitaire, la méthode de la référence [21] permet de déterminer exactement  $S(0^+)$ ; de plus, comme nous allons le voir, la sommation sur  $n$  dans l'équation (26) et le passage à la limite  $x \rightarrow 0$  peuvent être effectuées analytiquement, et les intégrales résultantes dans  $\sigma(0^+)$ , très simples à évaluer numériquement, peuvent aussi être utilement approchées en prenant l'angle de masse  $\nu$  comme petit paramètre.

### A. Travail sur la contribution efimovienne $S(\omega)$

Un nombre positif  $A$  arbitraire mais  $\gg 1$  étant choisi, nous partageons comme dans [21] les termes de la série (26) en trois classes,  $S = S_1 + S_2 + S_3$ .

Dans la classe numéro 1, dite *quasi-liée*, contenant les états tels que  $\epsilon_q(\omega) < -A\hbar\omega$ , les trois bosons occupent une zone de l'espace petite devant la taille  $[\hbar/(m\omega)]^{1/2}$  du fondamental de l'oscillateur harmonique, si bien que le spectre est proche de celui de l'espace libre (21) :

$$\epsilon_q(\omega) = \epsilon_q(0^+) \left[ 1 - \frac{1 + |s_0|^2}{6} \left( \frac{\hbar\omega}{\epsilon_q(0^+)} \right)^2 + \dots \right] \quad (31)$$

Comme  $\epsilon_q(0^+)$  est une suite géométrique, le remplacement de  $\epsilon_q(\omega)$  par  $\epsilon_q(0^+)$  dans  $S_1$  conduit à une erreur d'ordre celle commise sur le dernier terme, en  $x/A$ , qui tend donc vers zéro. Pour la même raison, l'indice maximal  $q_1$  dans cette classe croît seulement logarithmiquement, en  $\frac{|s_0|}{2\pi} \ln[E_t/(2\hbar\omega)]$ , ce qui autorise à remplacer chaque terme  $e^{-2qx}$  par 1, l'erreur commise sur  $S_1$  tendant là aussi vers zéro, comme  $xq_1^2$ . On garde donc

$$S_1 = \sum_{q=0}^{q_1} \left[ e^{-\beta\epsilon_q(0^+)} - 1 \right] + o(1). \quad (32)$$

La classe numéro 2 est celle des états intermédiaires,  $|\epsilon_q(\omega)| < A\hbar\omega$ . Comme l'espacement entre les  $\epsilon_q(\omega)$  est d'ordre  $\hbar\omega$  au moins [55], cette classe comporte un nombre fini  $O(A)$  de termes, chaque terme tendant vers zéro avec  $\omega$ , si bien que  $S_2 = o(1)$ .

La classe numéro 3, celle des états tels que  $A < \epsilon_q(\omega)$ , reconstruit les états de diffusion efimoviens de l'espace libre lorsque  $\omega \rightarrow 0$ . On dispose pour cette classe d'un développement à grand  $q$ ,

$$\frac{\epsilon_q(\omega)}{\hbar\omega} = 2q + \Delta(\epsilon_q(\omega)) + O(1/q) \quad (33)$$

où la fonction de l'énergie  $\Delta(\epsilon)$ , sans dimension, est donnée par l'équation (C6) de [21]. Dans chaque terme de  $S_3$ , on effectue donc l'approximation  $e^{-2qx} \simeq e^{-\beta\epsilon_q} [1 + x\Delta(\epsilon_q)]$ , et l'on remplace la somme sur  $q$  par une intégrale sur l'énergie, en utilisant la quasi-équidistance des niveaux  $\epsilon_{q+1} - \epsilon_q = 2\hbar\omega [1 + O(\hbar\omega/\epsilon_q)]$  [48], si bien que

$$S_3 = -\frac{1}{2} \int_{A\hbar\omega}^{+\infty} d\epsilon e^{-\beta\epsilon} \beta \Delta(\epsilon) + o(1). \quad (34)$$

En regroupant les trois classes et en explicitant  $\Delta(\epsilon)$  comme dans [21], on obtient finalement pour  $\omega \rightarrow 0$  :

$$S(0^+) = \left\{ \sum_{q \geq 0} \left[ e^{-\beta\epsilon_q(0^+)} - 1 \right] \right\} + \frac{|s_0|}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln(e^\gamma \beta E_t) - \sum_{p \geq 1} e^{-p\pi|s_0|} \operatorname{Re} \left[ \Gamma(-ip|s_0|) (\beta E_t)^{ip|s_0|} \right] \right\}, \quad (35)$$

où  $\gamma = 0,577215\dots$  est la constante d'Euler, et l'énergie des trimères dans l'espace libre  $\epsilon_q(0^+)$  est donnée par (21). Notons que la contribution de ces états liés  $\sum_{q \geq 0} e^{-\beta\epsilon_q(0^+)}$  est divergente, et qu'il est donc nécessaire de la regrouper avec celle du continuum pour obtenir le contre-terme  $-1$  assurant la convergence de la somme dans (35); dans le cas du deuxième coefficient du viriel d'un plasma, les états liés (à deux corps cette fois) ont un spectre hydrogénoïde, et il faut le contre-terme plus élaboré  $-(1 + \beta\epsilon_q)$  pour faire converger la somme [49] [56].

### B. Travail sur la contribution universelle $\sigma(\omega)$

Isolons dans la définition (26) de  $\sigma(\omega)$  la contribution du moment cinétique  $l$  et effectuons la somme sur  $q$ , pour obtenir

$$\sigma = \sum_{l \geq 0} \sigma_l, \quad \text{avec} \quad \sigma_l = \frac{l + \frac{1}{2}}{\operatorname{sh} x} \sum_{n \geq \delta_{l,0}} \left( e^{-xu_{l,n}} - e^{-xv_{l,n}} \right). \quad (36)$$

Or la fonction  $\Lambda_l(s)$  admet une racine simple [57] en  $u_{l,n}$  et un pôle simple [58] en  $v_{l,n}$ , ce qui fait que sa dérivée logarithmique admet un pôle en ces deux points, avec un résidu égal à  $+1$  et  $-1$ , respectivement. Par application inverse du théorème des résidus, on trouve donc pour  $l > 0$  que

$$\sigma_l(\omega) \stackrel{l \geq 0}{=} \frac{l + \frac{1}{2}}{\operatorname{sh} x} \int_C \frac{dz}{2i\pi} \frac{\Lambda'_l(z)}{\Lambda_l(z)} e^{-xz} \quad (37)$$

où l'intégrale de chemin est prise sur le contour  $C$  venant de  $z = +\infty + i\eta$  ( $\eta > 0$ ), longeant l'axe réel par au-dessus, le traversant près de l'origine puis tendant vers  $z = +\infty - i\eta$  en longeant l'axe réel par en dessous. Ce contour enferme en effet toutes les racines positives  $(u_{l,n})_{n \geq 0}$  et tous les pôles positifs  $(v_{l,n})_{n \geq 0}$  de la fonction  $\Lambda_l(z)$ . Comme  $\Lambda_l(z)$  ( $l > 0$ ) n'a pas d'autres racines ou pôles dans le demi-plan  $\operatorname{Re} z \geq 0$ , on peut déplier  $C$  autour de l'origine et le rabattre sur l'axe imaginaire pur  $z = iS$  :

$$\sigma_l(\omega) \stackrel{l \geq 0}{=} \frac{l + \frac{1}{2}}{\pi \operatorname{sh} x} \int_0^{+\infty} dS \frac{\Lambda'_l(iS)}{\Lambda_l(iS)} i \sin(xS) \quad (38)$$

où l'imparité de  $\Lambda'_l(iS)/\Lambda_l(iS)$  justifie l'omission de la contribution en  $\cos(xS)$  et permet de limiter l'intégrale à  $S > 0$ . Prendre la limite  $x \rightarrow 0$  est alors élémentaire,

et une simple intégration par parties conduit au joli résultat :

$$\sigma_l(0^+) \stackrel{l \geq 0}{=} -\frac{2l+1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dS \ln \left( \frac{\Lambda_l(iS)}{\cos \nu} \right). \quad (39)$$

D'après la forme (17,18), la fonction  $\Lambda_l(iS)/\cos \nu$  tend exponentiellement vers 1 à l'infini, si bien que l'intégrale dans (39) est rapidement convergente.

Le cas  $l = 0$  nécessite un petit ajustement du raisonnement précédent. D'une part, le pôle  $v_{0,0}$  de la fonction  $\Lambda_0(s)$  ne contribue pas à  $\sigma(\omega)$ , puisque le couple  $(l, n) = (0, 0)$  est dans la voie efimovienne. D'autre part, l'existence des zéros efimoviens  $\pm i|s_0|$  de  $\Lambda_0(s)$  empêche le rabattement du contour  $C$  sur l'axe imaginaire pur. Ces deux problèmes sont résolus en considérant la fonction  $\frac{s^2 - v_{0,0}^2}{s^2 - s_0^2} \Lambda_0(s)$  plutôt que la fonction  $\Lambda_0(s)$  elle-même : le préfacteur rationnel supprime les pôles  $\pm v_{0,0}$  et les zéros  $\pm s_0$  sans compromettre l'utile invariance par parité. Dans la limite  $\omega \rightarrow 0$ , ceci conduit à [59]

$$\sigma_0(0^+) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dS \ln \left( \frac{S^2 + 1}{S^2 - |s_0|^2} \frac{\Lambda_0(iS)}{\cos \nu} \right). \quad (40)$$

À partir de l'écriture (17,18) des fonctions  $\Lambda_l(s = iS)$ , on obtient en quelques minutes, avec les outils d'intégration numérique des logiciels de calcul formel, la valeur du terme constant dans  $\Delta B_3(0^+)$  :

$$1 + \sigma(0^+) = 1 - 0,364\,037\dots = 0,635\,962\dots \quad (41)$$

On constate que  $(\sigma_l(0^+))_{l \geq 1}$  forme une suite alternée de module (rapidement) décroissant, l'erreur commise dans une troncature sur  $l$  étant donc bornée par la valeur absolue du premier terme négligé. Analytiquement, on peut d'ailleurs obtenir le bel équivalent [60]

$$\sigma_l(0^+) \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} \left( \frac{l}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(-\tan \frac{\nu}{2})^l}{\cos \frac{\nu}{2} (\cos \nu)^{3/2}}, \quad (42)$$

où  $\nu$  est l'angle de masse (16).

### C. Une évaluation entièrement analytique

L'intéressante propriété de décroissance rapide de  $\sigma_l(0^+)$  avec le moment cinétique, à défaut d'explication physique, peut être comprise par le fait que, pour  $l > 0$ , les écarts à 1 de  $\Lambda_l(iS)/\cos \nu$  tendent vers zéro en  $-(-\nu)^l$ , comme il est apparent sur l'écriture (15) :

$$\delta_l(S) \equiv \frac{\Lambda_l(iS)}{\cos \nu} - 1 \underset{\nu \rightarrow 0}{=} O(\nu^l). \quad (43)$$

Comme  $\nu = \pi/6$ , on trouve déjà pour  $l = 1$  que la valeur maximale de  $|\delta_l(S)|$ , atteinte en  $S = 0$  et  $\simeq 0,273$ , est petite. Ceci donne l'idée de traiter chaque  $\delta_l$  (pour  $l > 0$ ) comme un infiniment petit d'ordre  $l$ . Le développement en série de  $\ln[1 + \delta_l(S)]$  en puissances de  $\delta_l$  dans (39)

est convergent et génère un développement convergent de  $\sigma_l(0^+)$  :

$$\sigma_l(0^+) \stackrel{l \geq 0}{=} \sum_{n \geq 1} \sigma_l^{(n)}, \quad \text{où } \sigma_l^{(n)} = (2l+1) \frac{(-1)^n}{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{dS}{4\pi} [\delta_l(S)]^n. \quad (44)$$

L'intégrale correspondante peut être calculée en principe analytiquement par la méthode des résidus, pour  $0 < \nu < \pi/2$ , qui conduit à des séries exprimables en termes des fonctions de Bose  $g_\alpha(z) = \sum_{k \geq 1} z^k/k^\alpha$ , encore appelées polylogarithmes, mais ceci devient rapidement fastidieux à grand  $l$  ou  $n$ . Nous nous limitons donc aux infiniment petits d'ordre 3 inclus. Pour  $n \leq 2$ , il est en fait plus simple de calculer directement la somme sur tous les  $l \geq 1$  de  $\sigma_l^{(n)}$ , notée  $\sigma_{1:\infty}^{(n)}$ . Nous retenons finalement

$$\sigma(0^+) \approx \sigma_0(0^+) + \sigma_{1:\infty}^{(1)} + \sigma_{1:\infty}^{(2)} + \sigma_1^{(3)}. \quad (45)$$

Les deuxième et troisième termes de l'approximation (45) peuvent être exprimés simplement pour  $\nu$  quelconque [61] :

$$\sigma_{1:\infty}^{(1)} = \frac{1}{\pi \cos \nu (1 + \sin \nu)} - \frac{\operatorname{argth}(\sin \nu)}{\pi \cos \nu \sin \nu} \quad (46)$$

$$\sigma_{1:\infty}^{(2)} = \frac{2\nu}{\pi^2 \sin \nu \cos^3 \nu} - \frac{4[\frac{7}{8}\zeta(3) - \operatorname{Re} C_3 - \nu \operatorname{Im} C_2]}{(\pi \sin \nu \cos \nu)^2} \quad (47)$$

avec  $\zeta$  la fonction de Riemann et  $C_\alpha = g_\alpha(e^{2i\nu}) - \frac{1}{2^\alpha} g_\alpha(e^{4i\nu})$ . Pour  $\nu = \pi/6$ , on a plus simplement  $\operatorname{Re} C_3 = \frac{7}{18}\zeta(3)$  et  $\operatorname{Im} C_2 = \frac{\sqrt{3}}{72}[\psi'(\frac{1}{6}) - \psi'(\frac{5}{6})]$ , où  $\psi$  est la fonction digamma et  $\psi'$  sa dérivée première. Par concision, nous donnons la valeur du dernier terme de (45) seulement pour  $\nu = \pi/6$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(3)} = & \frac{64}{\pi^3 \sqrt{3}} \left( \frac{17D_3}{432} - \frac{14\zeta(3)}{3} - \frac{403\zeta(5)}{27} + 2 \right) \\ & + \frac{16}{9\pi^2} \left( \frac{17D_3}{54} + 5D_1 - \frac{322\zeta(3)}{3} - 36 \right) \\ & + \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \left( \frac{5D_1}{9} - \frac{112\zeta(3)}{27} + \frac{8}{3} - 2 \ln 3 \right), \quad (48) \end{aligned}$$

avec  $D_k = \psi^{(k)}(\frac{1}{3}) - \psi^{(k)}(\frac{2}{3})$ ,  $\psi^{(k)}$  étant la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de la fonction digamma, voir relation 8.363(8) de la référence [50].

Il reste à approcher analytiquement le premier terme de (45), soit la contribution universelle à moment cinétique nul  $\sigma_0(0^+)$  donnée par (40). Comme le développement en série du logarithme autour de 1 est inadapté à ce cas, on effectue un développement direct au second ordre en puissances de l'angle de masse [62] : d'après (17),

$$\frac{\Lambda_0(iS)}{\cos \nu} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}(S\pi/2)} - \frac{4}{3} \nu^2 \frac{1 + S^2/4}{\operatorname{ch}(S\pi/2)} + O(\nu^4). \quad (49)$$

Ceci permet d'abord d'approcher la racine efimovienne

$$|s_0| = \theta + \frac{8\nu^2}{3\pi\sqrt{3}}(1 + \theta^2/4) + O(\nu^4) \quad (50)$$

où  $\theta = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccosh} 2 = 0,838\,401\dots$ , d'une façon qui reproduit (pour  $\nu = \pi/6$ ) sa valeur exacte (19) à un pour mille près. Ensuite, après quelques applications du théorème des résidus, on obtient l'approximation désirée jusqu'à l'ordre 3 inclus :

$$\sigma_0(0^+) \simeq -\frac{1+\theta^2}{8} - \frac{2\nu^2}{9\pi\sqrt{3}}\theta(1+\theta^2/4). \quad (51)$$

Pour  $\nu = \pi/6$ , notre approximation analytique (45) conduit alors à

$$1 + \sigma(0^+) \simeq 1 - 0,364\,613\dots = 0,635\,386\dots \quad (52)$$

qui reproduit la valeur exacte (41) à un pour mille près. Cette précision semble en pratique bien suffisante, compte tenu de l'incertitude actuelle des mesures de l'équation d'état des gaz atomiques froids [5–7] et du fait que  $b_3$  est le coefficient d'un terme qui doit rester petit dans un développement à basse densité.

#### IV. CONCLUSION

Nous avons montré qu'il est possible de déterminer de façon entièrement analytique le troisième cumulant  $b_3$  du gaz de Bose unitaire spatialement homogène, de paramètre à trois corps  $R_t$  et de longueur d'onde thermique de de Broglie  $\lambda$ , en ce sens que le résultat [63]

$$b_3 = 3\sqrt{3}[S(0^+) + C] \quad \text{avec } C = 0,648\dots \quad (53)$$

est somme d'une fonction  $S(0^+)$  de  $\lambda/R_t$  donnée exactement par l'équation (35), et d'une constante  $C$  dont une originale représentation intégrale, non contente d'en trivialisier l'évaluation numérique, autorise le développement perturbatif à un ordre arbitraire, poussé ici jusqu'à trois, avec l'angle de masse  $\nu = \pi/6$  comme petit paramètre. Ceci donne accès au troisième coefficient du viriel  $a_3$  du gaz de Bose unitaire, par combinaison des relations (3) et (12).

Comme le montre la figure, notre résultat a physiquement l'intérêt de couvrir la transition entre deux régimes extrêmes, celui de basse température,  $k_B T \ll E_t$ , où  $b_3$  est dominé par la contribution du trimère fondamental d'énergie  $-E_t$  :

$$b_3 \simeq 3\sqrt{3} e^{\beta E_t}, \quad (54)$$

avec  $E_t \propto \hbar^2/(mR_t^2)$ , et le régime  $k_B T \gg E_t$ , où les trimères sont presque complètement dissociés :

$$b_3 \simeq 3\sqrt{3} \frac{|s_0|}{2\pi} \ln(e^{\gamma+2\pi C/|s_0|} \beta E_t). \quad (55)$$

L'approximation exponentielle (54) est en accord avec l'expression (193) de la référence [31], déduite très simplement de la condition d'équilibre chimique du gaz.

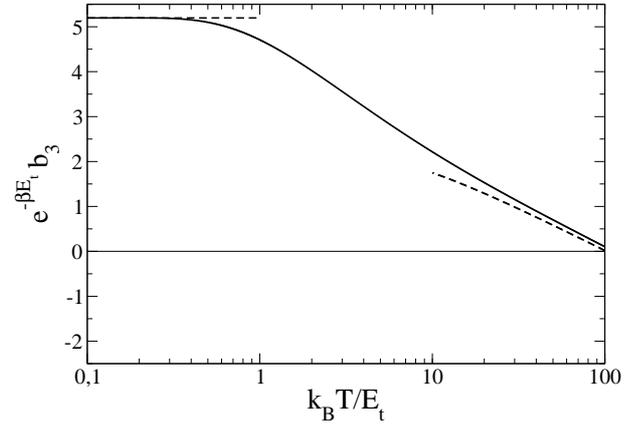


FIGURE 1: Troisième cumulant  $b_3$  du gaz de Bose unitaire spatialement homogène :  $b_3$  est multiplié par  $e^{-\beta E_t}$  puis représenté en fonction de la température  $T$  par un trait continu. Les lignes tiretées à gauche et à droite correspondent respectivement aux approximations (54) et (55), multipliées elles aussi par  $e^{-\beta E_t}$ . ( $-E_t$ ) est l'énergie du trimère (efimovien) fondamental, et  $\beta = 1/(k_B T)$ .

L'approximation logarithmique (55) peut, elle aussi, à un facteur constant près à l'intérieur du logarithme, être déduite d'un calcul complètement différent du nôtre, celui du coefficient de perte à trois corps  $L_3$  déduit de la diffusion inélastique de trois bosons dans l'espace libre [19], en le combinant à l'équation (25) de [21] qui relie, par des arguments généraux,  $\partial b_3/\partial(\ln R_t)$  à  $L_3$  dans la limite de faible inélasticité de cette diffusion.

En pratique, dans le régime de température où l'approximation logarithmique (55) reproduit bien nos valeurs de  $b_3$ , il sera certainement difficile d'assurer que la limite unitaire est atteinte, c'est-à-dire que les effets de portée (réelle ou effective) du potentiel d'interaction sont négligeables. En particulier, il n'est pas garanti que le changement de signe de  $b_3$  à haute température, prédit par la théorie efimovienne de portée nulle utilisée ici [64], puisse être observé sur un modèle plus réaliste comme ceux des références [28, 44–46], ou dans une expérience d'atomes froids. La réponse à cette question nécessite l'étude d'un modèle spécifique d'interaction, et doit donc être réservée à un travail ultérieur.

#### Remerciements

Ce travail a été effectué dans le cadre du projet FER-LODIM financé par le Conseil Européen de la Recherche. Nous remercions nos collègues de l'équipe des fermions froids du LKB, en particulier Nir Navon, ainsi que Xavier Leyronas du LPS, pour d'utiles discussions sur le gaz de Bose unitaire et les coefficients du viriel.

- [1] J.M. Vogels *et al.*, Phys. Rev. A **56**, R1067 (1997).
- [2] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
- [3] K.M. O'Hara *et al.*, Science **298**, 2179 (2002); T. Bourdel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003);
- [4] *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, LNIP 836, édité par W. Zwerger (Springer, Berlin, 2012).
- [5] S. Nascimbène *et al.*, Nature **463**, 1057 (2010).
- [6] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, C. Salomon, Science **328**, 729 (2010).
- [7] Mark J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, Science **335**, 563 (2012).
- [8] M. M. Forbes, S. Gandolfi, A. Gezerlis, Phys. Rev. Lett. **106**, 235303 (2011).
- [9] E. Burovski, N. Prokof'ev, B. Svistunov, M. Troyer, Phys. Rev. Lett. **96**, 160402 (2006).
- [10] O. Goulko, M. Wingate, Phys. Rev. A **82**, 053621 (2010).
- [11] K. Van Houcke *et al.*, Nature Phys. **8**, 366 (2012).
- [12] S. Jonsell, H. Heiselberg, C.J. Pethick, Phys. Rev. Lett. **89**, 250401 (2002).
- [13] Xia-Ji Liu, Hui Hu, P. D. Drummond, Phys. Rev. Lett. **102**, 160401 (2009); Phys. Rev. A **82**, 023619 (2010).
- [14] F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. Lett. **97**, 150401 (2006).
- [15] X. Leyronas, Phys. Rev. A **84**, 053633 (2011).
- [16] D. Rakshit, K. M. Daily, D. Blume, Phys. Rev. A **85**, 033634 (2012).
- [17] V. Efimov, Sov. J. Nucl. Phys. **12**, 589 (1971).
- [18] F. Ferlaino, A. Zenesini, M. Berninger, B. Huang, H.-C. Ngerl, R. Grim, Few-Body Syst. **51**, 113 (2011).
- [19] B. S. Rem *et al.*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00768038>
- [20] J. P. D'Incao, H. Suno, B. D. Esry, Phys. Rev. Lett. **93**, 123201 (2004).
- [21] F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A **86**, 053633 (2012).
- [22] A. J. Daley *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 040402 (2009).
- [23] J. Levinsen, T.G. Tiecke, J.T.M. Walraven, D.S. Petrov, Phys. Rev. Lett. **103**, 153202 (2009).
- [24] Yujun Wang, J. P. D'Incao, B.D. Esry, Phys. Rev. A **83**, 042710 (2011).
- [25] S. Cowell *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 210403 (2002).
- [26] J. M. Diederix, T. C. F. van Heijst, H. T. C. Stoof, Phys. Rev. A **84**, 033618 (2011).
- [27] Weiran Li, Tin-Lun Ho, Phys. Rev. Lett. **108**, 195301 (2012).
- [28] J. von Stecher, J. Phys. B **43**, 101002 (2010).
- [29] E. Beth, G.E. Uhlenbeck, Physica III 8, 729 (1936); Physica IV 10, 915 (1937).
- [30] K. Huang, in *Statistical Mechanics*, p. 427 (Wiley, New York, 1963).
- [31] A. Pais, G.E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **116**, 250 (1959).
- [32] W.G. Gibson, Phys. Letters **21**, 619 (1966); A.S. Reiner, Phys. Rev. **151**, 170 (1966).
- [33] R. Dashen, Shang-keng Ma, H.J. Bernstein, Phys. Rev. **187**, 345 (1969); S. Servadio, Il Nuovo Cimento **102**, 1 (1988).
- [34] A. Royer, J. Math. Phys. **24**, 897 (1983).
- [35] P. Grüter, F. Lalöe, J. Physique I **5**, 181 (1995).
- [36] P.F. Bedaque, G. Rupak, Phys. Rev. B **67**, 174513 (2003).
- [37] A. Comtet, Y. Georgelin, S. Ouvry, J. Phys. A **22**, 3917 (1989).
- [38] J. McCabe, S. Ouvry, Phys. Lett. B **260**, 113 (1990).
- [39] J. Law, Akira Suzuki, R.K. Bhaduri, Phys. Rev. A **46**, 4693 (1992).
- [40] T. Busch, B.G. Englert, K. Rzazewski, M. Wilkens, Found. Phys. **28**, 549 (1998).
- [41] F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A **74**, 053604 (2006).
- [42] G. Gasaneo, J.H. Macek, J. Phys. B **35**, 2239 (2002); M. Birse, J. Phys. A **39**, L49 (2006).
- [43] Y. Castin, E. Tignone, Phys. Rev. A **84**, 062704 (2011).
- [44] D.S. Petrov, Phys. Rev. Lett. **93**, 143201 (2004).
- [45] A.O. Gogolin, C. Mora, R. Egger, Phys. Rev. Lett. **100**, 140404 (2008).
- [46] L. Pricoupenko, Phys. Rev. A **82**, 043633 (2010).
- [47] R. Schmidt, S.P. Rath, W. Zwerger, Eur. Phys. J. B **85**, 386 (2012).
- [48] F. Werner, thèse de doctorat, Université Paris 6 (2008), <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00285587>
- [49] A.I. Larkin, Sov. Phys. JETP **11**, 1363 (1960).
- [50] I.S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, in *Tables of Integrals, Series, and Products*, 5ème édition, édité par A. Jeffrey (Academic Press, San Diego, 1994).
- [51] Ceci est vrai à un facteur sans dimension près fonction périodique de  $\ln(R_t/\lambda)$  [19, 21], où  $R_t$  est le paramètre à trois corps.
- [52] En effet, les états non laughliens du gaz parfait sont la limite pour  $a \rightarrow 0^-$  des états non laughliens du cas avec interaction, pour lesquels un ansatz de type Faddeev sur la fonction d'onde est justifié,  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = (1 + P_{13} + P_{23})\mathcal{F}(r, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{C})$ , où  $P_{ij}$  transpose les particules  $i$  et  $j$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $\boldsymbol{\rho} = (2\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\sqrt{3}$  et  $\mathbf{C} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/3$ . Ceci se voit en intégrant formellement l'équation de Schrödinger pour une interaction en  $\delta$  régularisé, en termes de la fonction de Green du Hamiltonien à trois corps sans interaction.
- [53] Si  $a = 0$ , on impose que la fonction d'onde  $\psi$  ne diverge pas en  $1/r$  lorsque  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ . Si  $1/a = 0$ , on impose que  $\psi$  n'a pas de terme en  $r^0$  dans le développement en puissances de  $r$  (à  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_3$  fixés). Lorsque  $\psi \equiv 0$ , les deux contraintes sont satisfaites simultanément, auquel cas  $u^{(0)}$  et  $u$  coïncident.
- [54] Cette équation (17) pour  $l < 2$  contient d'ailleurs une erreur, induite par une mauvaise numérotation des racines non physiques.
- [55] En effet, la dérivée par rapport à  $\epsilon_q/(\hbar\omega)$  du membre de gauche de l'équation (20) est uniformément bornée, d'après la relation 8.362(1) de la référence [50].
- [56] Le changement de  $R_t$  en  $\tilde{R}_t = e^{-\pi/|s_0|} R_t$ , d'après (20), a comme seul effet sur le spectre efimovien de rajouter un état " $q = -1$ ", si bien que  $\tilde{S}(0^+) = \exp(\beta E_t e^{2\pi/|s_0|}) + S(0^+)$ . Cette propriété fonctionnelle détermine  $S(0^+)$  [et reproduit donc les deux premières contributions de (35)] à une fonction inconnue additive près de  $\ln(\beta E_t)$  de période  $2\pi/|s_0|$ .
- [57] Pour démontrer par l'absurde l'absence de racine multiple, il faut rappeler que la partie hyperangulaire de l'ansatz d'Efimov est  $\Phi(\boldsymbol{\Omega}) = (1 + P_{13} + P_{23}) \frac{\varphi(\alpha)}{\sin 2\alpha} Y_l^{m_l}(\boldsymbol{\rho}/\rho)$ , où l'on a ajouté aux notations de la note [52] la variable  $\alpha = \text{atan}(r/\rho)$ , l'harmonique sphérique  $Y_l^{m_l}$ , l'ensemble  $\boldsymbol{\Omega}$  des cinq hyperangles et une fonction  $\varphi(\alpha)$  s'annulant en  $\pi/2$ . L'équation de Schrödinger impose alors  $(4 - s^2 - \Delta_{\boldsymbol{\Omega}})\Phi = 0$ , où  $\Delta_{\boldsymbol{\Omega}}$  est le laplacien sur l'hypersphère,

donc  $-\varphi'' + \frac{l(l+1)}{\cos^2 \alpha} \varphi = s^2 \varphi$ . Les conditions au contact de Wigner-Bethe-Peierls pour  $1/a = 0$  imposent de plus la condition aux limites  $\varphi'(0) + \frac{4(-1)^l}{\cos \nu} \varphi(\frac{\pi}{2} - \nu) = 0$ , qui est essentiellement l'équation transcendante  $\Lambda_l(s) = 0$  [voir la note [58]]. Si  $s > 0$  en est une racine double,  $\psi(\alpha) = \partial_{s^2} \varphi(\alpha)$  obéit aux mêmes conditions aux limites que  $\varphi(\alpha)$ , avec  $-\psi'' + \frac{l(l+1)}{\cos^2 \alpha} \psi = s^2 \psi + \varphi$ . Alors  $\Psi(\mathbf{\Omega}) \equiv (1 + P_{13} + P_{23}) \frac{\psi(\alpha)}{\sin 2\alpha} Y_l^{m_l}(\boldsymbol{\rho}/\rho)$  obéit aux conditions au contact de Wigner-Bethe-Peierls pour  $1/a = 0$ , et à l'équation inhomogène  $(4 - s^2 - \Delta_{\mathbf{\Omega}})\Psi = \Phi$ , dont le produit scalaire à gauche avec  $\Phi$  conduit à l'absurdité  $0 = \int d^5 \Omega |\Phi(\mathbf{\Omega})|^2$ , par hermiticité du laplacien à conditions au contact fixées.

- [58] Pour des valeurs particulières de  $\nu$  autres que  $\pi/6$ , par exemple  $\nu = \pi/5$ , la fonction  ${}_2F_1$  dans (15) s'annule en  $s = v_{l,n}$ , auquel cas  $v_{l,n}$  n'est pas un pôle de  $\Lambda_l(s)$ . Cependant, la véritable forme de l'équation transcendante sur  $s$ , donnée dans la note [57] et dont les  $u_{l,n}$  doivent être solution, est  $\Lambda_l(s)/[\Gamma(\frac{l+1+s}{2})\Gamma(\frac{l+1-s}{2})] = 0$ ; on a alors une racine parfaitement acceptable  $u_{l,n} = v_{l,n}$ , qui n'est cependant pas racine de  $\Lambda_l(s)$  et qui a donc été "oubliée" par la forme (15). Comme ces racines et pôles "fantômes" de  $\Lambda_l(s)$  sont confondus, ils ne contribuent pas à  $\sigma_l(\omega)$ .
- [59] Une variante de cette intégrale apparaît dans l'équation (87) de [43], ce qui établit un lien inattendu entre  $b_3$  et la valeur de  $R_t/R_*$  sur une résonance étroite (de longueur de Feshbach  $R_*$ ).
- [60] Dans (15), on explicite  ${}_2F_1$  par l'habituelle série, disons

sur  $k \in \mathbb{N}$ , voir la relation 9.100 de la référence [50]. On prend la limite  $l \rightarrow +\infty$  à  $y \equiv k/l$  et  $\tau \equiv S/l^{1/2}$  fixés, on approxime chaque terme par son équivalent de Stirling, et l'on remplace la somme sur  $k$  par une intégrale sur  $y$ . L'intégrand obtenu contient un facteur  $e^{lu(y)}$ , où  $u(y) = 2(y + \frac{1}{2}) \ln(y + \frac{1}{2}) - (y + 1) \ln(y + 1) - y \ln y + 2y \ln(\sin \nu)$ , ce qui permet de faire usage de la méthode de Laplace et conduit à  $\delta_l(S) \sim \frac{(-1)^{l+1} 2^{1/2}}{l \cos \nu \cos \frac{\nu}{2}} (\tan \frac{\nu}{2})^l \exp(-\frac{1}{2} \tau^2 \cos \nu)$  [quantité définie dans (43)], dont le report dans (39) donne (42).

- [61] Ceci résulte entre autres de l'équation (35) de [43] adaptée au cas bosonique. Dans (46), elle a permis d'exprimer  $\sigma_l^{(1)}$  en termes de la fonction de Legendre associée  $Q_l(X)$ , à écrire sous la forme 8.821(3) de [50] pour pouvoir sommer sur  $l$ . Dans (47), on l'a combinée à l'identité de Parseval-Plancherel (pour intégrer sur  $S$ ) et au fait que les polynômes  $(l + \frac{1}{2})^{1/2} P_l(X)$  forment une base orthonormale de l'espace des fonctions  $L_2([-1, 1])$  (pour sommer sur  $l$ ).
- [62] ce qui est justifié même sous le signe somme, puisque l'intégrale sur  $S$  dans (40) converge sur une distance d'ordre unité.
- [63] En effet,  $C = 1 + \sigma(0^+) + B_3^{(0)}(0^+)$ , voir (7), (29), (30) et (41).
- [64] À partir de l'expression complète (53), on trouve que  $b_3 = 0$  pour  $k_B T/E_t \simeq 112, 56$ .