HAL
open science

Paquets stables des séries discrètes accessibles par endoscopie tordue; leur paramètre de Langlands

Colette Moeglin

To cite this version:

Colette Moeglin. Paquets stables des séries discrètes accessibles par endoscopie tordue; leur paramètre de Langlands. 2012. hal-00768206

HAL Id: hal-00768206

https://hal.science/hal-00768206v1

Preprint submitted on 21 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Paquets stables des séries discrètes accessibles par endoscopie tordue; leur paramètre de Langlands

C. Mœglin

1 Introduction

Suite aux travaux de J. Arthur en particulier [6], on sait que la classification de Langlands des représentations tempérées des groupes classiques s'obtient en utilisant l'endoscopie tordue. Ceci est conforme à la philosophie de Langlands, l'endoscopie tordue se comprend via la fonctorialité et elle doit donc respecter les paquets stables de représentations tempérées. Comme l'un des côtés est le groupe $GL(n)$ pour lequel la classification de Langlands est connue, l'autre côté s'exprime avec cette classification et on voit avec de l'algèbre linéaire élémentaire que les groupes endoscopiques tordues se séparent suivant qu'ils sont orthogonaux ou symplectiques et c'est ainsi que [6] obtient la classification de Langlands pour les groupes symplectiques et orthogonaux (du moins le paramètre du paquet et il faut toute l'endoscopie développée en [6] pour avoir tout le paramètre) ; les groupes unitaires se distinguent aussi (avec les fonctions L d'Asai) (les méthodes de [6] sont reprises dans ce cadre par [25]) ; les groupes $GSpin$ s'obtiennent aussi de cette façon (ceci a été expliqué en [4]). Il se peut que d'autres situations avec des changements de base s'obtiennent aussi ainsi et c'est pour cela que l'on veut présenter ici les arguments les plus simples et les plus généraux pour arriver à ce résultat.

La preuve de ce résultat, présentée ici, est essentiellement locale ; la seule partie globale est le fait qu'une identité de caractères entre représentations elliptiques qui est satisfaite pour les fonctions dont les intégrales orbitales sont nulles sur les éléments non elliptiques se prolonge en une identité de caractère (sans restriction de support), résultat démontré dans le cas non tordu en [2]. Ce résultat nécessite la formule des traces simple et sa stabilisation : il faut en effet démontrer qu'une telle identité de caractère se prolonge en une identité de caractère quitte à y ajouter des représentations induites à partir de sous-groupes paraboliques propres, c'est la méthode de [2]. Et c'est à cet endroit qu'on utilise la formule des traces. Ensuite des méthodes locales permettent d'enlever ces représentations supplémentaires. Cette méthode a été expliquée en [32] (reprise en [20]) et on l'écrira en toute généralité pour les besoins de la stabilisation de la formule des traces tordues dans [22]. Un tel résultat est un préliminaire à toute classification à la Langlands des représentations tempérées ([6] et [25] en dépendent) ; et le but de cet article est d'exploiter complètement un tel résultat.

On ne peut pas dire que les méthodes ci-dessous soient réellement différentes de celles de [6] mais elles sont plus axées sur la théorie des représentations et on obtient donc des conséquences plus fines en théorie des représentations.

On a clairement distingué ce qui peut se démontrer avec le résultat de prolongement de l'identité de caractères expliqué ci-dessus et des propriétés à peu près élémentaires de théorie de représentation, de ce qui nécessite l'introduction du L-groupe et qui est surtout de l'algèbre linéaire élémentaire. Le lien entre les deux est la doubling method (cf. ci-dessous) qui elle n'est pas élémentaire. Plus précisément, la classification cherchée peut se décomposer en deux étapes.

Dans la première partie, on démontre qu'étant donné π une série discrète d'un groupe classique, la projection d'un pseudo coefficient (cuspidal) de π sur la partie stable (cf. 2.3) détermine une unique représentation virtuelles du groupe, π_{st}, combinaison linéaire uniquement formée de séries discrètes, stable par construction et que le transfert tordu de cette représentation virtuelle est une représentation irréductible (à un scalaire près), π^{GL} du groupe $GL(n)$ de la situation ; c'est le mot irréductible ici qui est important. Le support cuspidal de cette représentation de $GL(n)$ est l'invariant des paquets stables (cf 4) ; c'est assez agréable car le support cuspidal se contrôle évidemment très bien par induction et restriction et qu'il est déterminé par des propriétés de réductibilité d'induites. On en revient à notre définition des blocs de Jordan, que l'on modifie légèrement à cet endroit par commodité mais on démontre finalement (en 7.2) que l'on n'a en fait pas changé la définition originelle de [19] et [23]

On montre aussi facilement que si π et π' sont des séries discrètes du groupe classique telle que π_{st} n'est pas orthogonal à π'_{st} alors π_{st} est proportionnel à π'_{st} et à un scalaire les représentations π^{GL} et ${\pi'}^{GL}$ coïncide. Réciproquement si π^{GL} est une représentation tempérée (elliptique quand on prend en compte l'automorphisme de la situation) du groupe $GL(n)$ il existe une unique donnée endoscopique ellitpique tel que π^{GL} soit un transfert d'une des représentations π_{st} (à un scalaire près) obtenue par projection d'une série discrète du groupe endoscopique sous-jacent (comme précédemment).

On obtient ainsi une classification des combinaisons linéaires stables de séries discrètes à l'aide des groupes $GL(n)$. En utilisant la correspondance de Langlands pour les groupes $GL(n)$, on a donc associé à toute série discrète d'un groupe classique un morphisme de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans le L-groupe de $GL(n)$.

Dans la deuxième partie de l'article on montre que ce morphisme est à valeurs dans le L-groupe du groupe classique. Et on a donc ainsi une classification à la Langlands des paquets stables.

Le lien entre ces deux parties est la doubling method dont Piatetski-Shapiro a été avec en particulier S. Rallis l'un des concepteurs (rédigé par J. Cogdell dans [10]. La doubling method s'applique à la théorie des représentations et permet de relier les points de réductibilité de certaines induites à des propriétés de fonctions L définies par Shahidi. Et ces fonctions L de Shahidi sont aussi les fonctions L du groupe W_F grâce aux résultats d'Henniart ([16]) ; la preuve de [16] est en grande partie globale, elle utilise l'équation fonctionnelle. Et du côté galoisien la doubling method donne une factorisation des fonctions L qui donne exactement la dichotomie, orthogonal/symplectique, Asai/Asai tordu.

Les pôles des fonctions L gouvernent la factorisation du morphisme de Langlands associé à une représentation d'un groupe général linéaire dans le groupe dual des groupes considérés ici ; c'est évident quand ces fonctions sont des fonctions Sym^2 ou $\wedge^2$ et c'est aussi le cas par exemple pour les fonctions L d'Asai (comme cela introduit des signes moins concrets, on refait en détail les calculs).

Et c'est ce qui fait le lien entre la classification purement en terme de représentations et la construction du morphisme de Langlands associé à un paquet stable de séries discrètres. La première partie se termine en 4.8, la deuxième partie d'algèbre linéaire (fortement axé sur les groupes unitaires) fait l'objet du paragraphe 5 et le lien fourni par la doubling method est le paragraphe 6.

On n'a pas calculé les coefficients dans les formules de transfert alors que [2] et[6] trace la voie pour le faire et le fait pour les groupes orthogonaux et symplectiques ; White ([31]) et Mok [25] ont étendu ces travaux au cas des groupes unitaires. La méthode n'est pas locale, il faut mettre la situation locale dans une situation globale où on connaît les résultats en toutes les places sauf celle qui nous intéresse. En particulier, il faut connaître (dans le point de vue de [6]) les résultats aux places archimédiennes, résultats en cours de démonstration par Mezo ; pour les groupes unitaires les résultats nécessaires aux places archimédiennes sont déjà connus grâce aux travaux de L. Clozel [9].

Nous ne faisons pas non plus la classification fine de Langlands de toutes les séries discrètes ; ceci est uniquement pour ne pas allonger l'article, les méthodes locales que nous avons développées dans [19], [23], [20] et [21] (partiellement en collaboration avec M. Tadic) s'appliquent sans problème. De même on s'est limité au cas des groupes quasi-déployés ce qui n'est pas nécessaire.

Comme on obtient les représentations tempérées comme module de Jacquet de certaines séries discrètes, la classification des séries discrètes est suffisante pour avoir une classification des paquets stables de représentations tempérées ; toutefois le R-groupe joue un rôle important car on ne peut travailler avec les séries discrètes sans travailler avec les représentations elliptiques (qui sont des représentations tempérées, virtuelles défines avec le R-groupe [1]) ; ces R-groupes ont été calculés en particulier en [14] et [11].

Ce fut un réel honneur pour moi d'être invitée à participer au colloque "Legacy of I. I. Piatetski-Shapiro" ayant eu lieu à l'Université de Yale du 6 au 12 Avril 2012. Je remercie très chaleureusement les organisateurs de cette conférence et dédie ce texte à la mémoire de Ilya Piateskii-Shapiro.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Notations et propriétés générales **4**

2.1 Les groupes 4

2.2 Les représentations 5

2.3 Les pseudo-coefficients 6

2.4 Séries discrètes et paquets stables 7
2.5 Notations pour les modules de Jacquet 8
2.6 Modules de Jacquet et transfert 8
2.7 Quelques propriétés générales 10
2.8 Propriétés de la projection endoscopique 11

3 Le cas des représentations cuspidales 12
3.1 Point de réductibilité des induites de cuspidales 12
3.2 Blocs de Jordan des représentations cuspidales 13

4 Support cuspidal étendu 15
4.1 Le cas des séries discrètes strictement positives 16
4.2 Bloc de Jordan des séries discrètes strictement positives 18
4.3 Un lemme de structure des séries discrètes et des représentations tempérées 19
4.4 Sur les points de réductibilité des séries discrètes 20
4.5 Paquet stable de séries discrètes 22
4.6 Support cuspidal étendu et endoscopie 23
4.7 Définition des paquets de Langlands des séries discrètes 26
4.8 Conclusion 26

5 Morphisme dans le L-groupe 27
5.1 Le cas des morphismes irréductibles 27
5.2 Le cas des groupes unitaires et de leur groupe dual 27
5.3 Lien avec les fonctions L d'Asai 30
5.4 Groupes endoscopiques de $GL(n, E).\theta$ et image des paramètres de Langlands autoduaux 31

6 Morphisme de Langlands des paquets stables de séries discrètes 32
6.1 "Doubling method" 32
6.1.1 Le cas des groupes unitaires 33
6.1.2 Le cas où $E = F$ 34
6.2 Morphisme associé à une série discrète θ-stable 35
6.3 Morphisme de Langlands 37

7 R-groupe et cardinal des paquets stables de représentations tempérées 39
7.1 Lien des constructions précédentes avec les R-groupes 39
7.2 Unicité de la définition des blocs de Jordan 42

2 Notations et propriétés générales

2.1 Les groupes

Ici F est un corps p-adique et E est une extension de F soit égale à F soit une extension quadratique de F. On note $\tilde{GL}$ l'un des groupes algébriques

suivant : $GL(n,E)$, $GL(n,F)\times F^*$ et θ l'automorphisme extérieur

$$\theta(g,\lambda) := ({}^t\overline{g}^{-1}, \lambda det\, g),$$

où il n'y a pas de deuxième facteur dans le cas $GL(n,E)$ et où $\overline{g}$ est le conjugué de g si $E\neq F$.

Dans la suite de cet article on note $\underline{G}$ une donnée endoscopique elliptique de la composante non connexe du produit semi-direct de $\tilde{G}$ avec $\{1,\theta\}$. Ce qui nous intéresse est le groupe sous-jacent à cette donnée que l'on note G_n ; on pourra faire disparaîntre l'indice n s'il n'y a pas de confusion possible. Les groupes G que l'on obtient ainsi, sont quasi-déployés et leur ensemble contient la liste : $Sp(n-1,F)$ pour n impair, $SO(n,F)$ et $SO(n+1,F)$ avec n pair (toutes les formes quasi-déployées) , $GSpin_n(F)$ (toutes les formes quasi-déployées) et $GSpin_{n+1}(F)$ avec n pair et $U(n,E/F)$. Les groupes de cette liste sont appelés, les groupes endoscopiques simples. Dans presque tous les cas, le groupe détermine la donnée endoscopique mais ce n'est pas vrai ni pour $Sp(n-1,F)$ ni pour $U(n,E/F)$; le cas de $U(n,E/F)$ est bien connu puisqu'il y a le cas de ce que l'on appelle improprement le changement de base stable et instable. Le cas de $Sp(n-1,F)$ se trouve expliqué dans [6] ; il faut tenir compte de l'action du groupe de Galois qui fournit, en plus, un caractère quadratique non nécessairement trivial.

A cette liste s'ajoute le groupe endoscopique principal pour $\tilde{GL}.\theta$ quand $\tilde{GL}=GL(n,F)\times F^*$ avec n impair ; c'est $Sp(n-1,F)\times F^*$. Et s'ajoute les groupes endoscopiques qui sont des produits de groupes dans la liste précédente.

Une description précise que nous utiliserons se trouve dans [33] dans le cas où $\tilde{GL}$ n'a pas le facteur F^* et ce dernier cas est décrit dans [4].

On notera à quelques endroits $GSpin^*_{2n}(F)$ le groupe non connexe qui est un revêtement du groupe de similitudes orthogonales sur un espace de dimension 2n. C'est naturellement un revêtement de $O(2n,F)$.

2.2 Les représentations

On s'intéresse aux représentations de $\tilde{GL}$ qui sont stables sous θ ; pour simplifier un peu les notations, on fixe un caractère ν de F^*, unitaire, et pour toute représentation π de $GL(n,E)$, on note $\tilde{\pi}$ sa contragrédiente si $E=F$ et son dual hermitien si $E\neq F$. Soit π une représentation de $\tilde{GL}$ telle que $\theta.\pi\simeq\pi$. On suppose que la restriction de π à F^* (quand ce facteur existe) est le caractère ν. La θ invariance se traduit donc par :

$$\tilde{\pi}\otimes\nu\simeq\pi. \tag{1}$$

La notion de séries discrètes est bien connue, la caractérisation utilisée ici est le fait que les exposants sont dans une chambre de Weyl obtuse, ouverte positive. Les représentations tempérées sont celles dont les exposants sont dans une chambre de Weyl obtuse positive fermée. Les représentations elliptiques ont été définies par Harish-Chandra mais on utilise la variante de [1] (premiers paragraphes de cet article). On a besoin de ces notions dans le cas tordu ; cela

est fait en général dans [34] 2.12 mais ici nous n'en avons besoin essentiellement pour $\tilde{GL}.\theta$. La description se fait alors en termes très simples : il n'y a pas de différence entre θ-elliptique et θ-discrète, ce sont des représentations irréductibles θ-invariantes induites de représentations de Steinberg toutes non isomorphes. On dira indifféremment, θ-elliptique ou θ-discrète en préférant la première terminologie.

Très accessoirement, on aura besoin de la notion de représentation elliptique pour les groupes $O(2n, F)$ et $GSpin^*_{2n}(F)$; on l'utilisera dans un cas très simple où on induit à partir du parabolique maximal de Levi isomorphe à $GL(n, F)$ ou $GL(n, F) \times F^*$ une représentation θ invariante. Quelque soit la parité de n, l'induite au groupe non connexe se coupe en deux et la différence des deux représentations est une représentation elliptique pour la composante non neutre de ces groupes.

R. Herb ([14]) a donné une caractérisation des représentations elliptiques dans le cas des groupes que nous généraliserons au cadre tordu dans le cadre de la stabilisation de la formule des traces tordu.

2.3 Les pseudo-coefficients

On appelle fonctions cuspidales sur G une fonction lisse dont les intégrales orbitales pour les éléments semi-simples réguliers hyperboliques (c'est-à-dire inclus dans un sous-groupe parabolique propre de G) sont nuls. Et on note $I_{cusp}(G)$ l'espace des fonctions cuspidales sur G modulo celles dont toutes les intégrales orbitales sur des éléments semi-simples réguliers sont nulles. On adopte la même notation pour $\tilde{G}$ étant entendu que l'on considère là des fonctions sur la composante $\tilde{G}.\theta$; la notation de parabolique est alors remplacée par la notion d'espace parabolique ce qui pompeusement désigne les sous-groupes paraboliques θ-stable de G.

En [2] étendu en [34], paragraphe 7, pour inclure le cas tordu, il est montré que I^G_{cusp} et $I^{\tilde{GL}}_{cusp}$ s'interprètent comme l'espace des pseudo-coefficients des représentations elliptiques de G ou $\tilde{G}$ (pour le cas tordu, [34] 7.2 (1)). On peut stabiliser chacun de ces espaces ([2] pour le cas non tordu et [35] 4.11 (i) de la proposition pour le cas tordu), ce qui permet de définir $I^G_{cusp,st}$ la partie stable et de le faire aussi pour tous les groupes endoscopiques de G ; quand on réalise G comme le groupe dans une donnée endoscopique $\underline{G}$ de $\tilde{GL}.\theta$, il faut aussi tenir compte des automorphismes de cette donnée. On écrit alors $I^{\underline{G},Aut}_{cusp,st}$ pour l'image du transfert de $I^{\tilde{GL}}_{cusp}$. Pour $\tilde{GL}$, on a :

$$I^{\tilde{G}}_{cusp} = \oplus_{\underline{G}} I^{\underline{G},Aut}_{cusp,st}, \tag{1}$$

ici $\underline{G}$ parcourt toutes les données endoscopiques elliptiques de $\tilde{GL}.\theta$ et l'égalité est donnée par la somme des transferts.

Pour G fixé comme ci-dessus, on écrit la stabilisation de [2]

$$I^G_{cusp} = \oplus_{\underline{H}} I^{\underline{H},Aut}_{cusp,st}, \tag{2}$$

qui est l'analogue non tordu de (1) et où $\underline{H}$ parcourt l'ensemble des données endoscopiques elliptiques de G y compris G lui-même.

On dit qu'une représentation virtuelle combinaison linéaire de représentations elliptiques, π de G est stable sur les elliptiques si la combinaison linéaire des pseudo-coefficients dans I^G_{cusp} est en fait un élément de $I^G_{cusp,st}$; on identifie π à cette combinaison linéaire de pseudo-coefficients et donc à un élément de I^G_{cusp}. Cela est équivalent à dire que la distribution $f \in I^G_{cusp} \mapsto tr\,\pi(f)$ est stable.

Soit π un élément de I^G_{cusp} vu comme une représentation virutelle ; en utilisant (2), on détermine pour toute donnée endoscopique elliptique $\underline{H}$ de G, une représentation virtuelle $\pi_{\underline{H},st}$ telles que pour tout $f \in I^G_{cusp}$, on ait l'égalité :

$$tr\,\pi(f) = \sum_{\underline{H}} tr\,\pi_{\underline{H},st}(f^{\underline{H}}), \tag{3}$$

où $f^{\underline{H}}$ est un transfert de f.

Un résultat clé de [2] est de montrer que si π est dans $I^G_{cusp,st}$, alors la distribution $tr\,\pi$ est stable au sens usuel et que, sous les hypothèses de l'égalité (3), alors cette égalité se prolonge à toute fonction lisse f.

La généralisation de ces propriétés au cas tordu est un préliminaire à tous les travaux qui établissent les propriétés locales des représentations tempérées ([6],[25]). Généraliser [2] avec les mêmes méthodes est sûrement possible mais il faudrait récrire des centaines de pages écrites par Arthur dans le cas non tordu. En [32] et [20] on a obtenu ces résultats avec une autre méthode. Cela ne couvre pas tous les cas que l'on a en vu ici mais nous avons maintenant vérifié ([22]) que cette autre méthode s'étend en toute généralité au cas tordu ; on admet ici ce résultat (qui sera disponible sous forme de prépublication très prochainement). Donc on admet que si $\pi^{\tilde{G}L} \in I^{\tilde{G}L}_{cusp}$ est écrit suivant la somme directe (1) en $\pi^{\tilde{G}L} = \oplus_{\underline{G}} \pi_{\underline{G},st}$, on a pour toute fonction lisse f sur $\tilde{G}L.\theta$ l'égalité des traces

$$tr\,\pi^{\tilde{G}L}(f) = \sum_{\underline{G}} tr\,\pi_{\underline{G},st}(f^{\underline{G}}).$$

2.4 Séries discrètes et paquets stables

Proposition *Soit π une série discrète de G vue comme un élément de I^G_{cusp} (via un pseudo coefficient cuspidal). Alors la projection de π sur $I^G_{cusp,st}$ est non nulle.*

La démonstration de cette proposition est déjà dans [20] paragraphe 2 et m'a été donnée par Waldspurger : on regarde les germes du caractère au voisinage de l'origine ; ils se développent par degré d'homogénéité et le degré formel est l'un de ces termes. Ce terme est stable et sa projection stable est donc non nulle et il y a donc un germe de la projection de qui est non nul. D'où la non nullité de la projection

Remarque *Dans cet article on montre que la proposition est strictement spécifique aux séries discrètes, c'est-à-dire que la projection sur $I^G_{cusp,st}$ d'une représentation elliptique combinaison linéaire de représentations tempérées dont aucune n'est une série discrète est nulle. Une démonstration a priori de ce résultat simlifierait les démonstrations mais je ne sais pas si une telle propriété est vraie en dehors des groupes considérés ici.*

On appelle paquet stable contenant π la représentation virtuelle, somme de représentations elliptiques, stable et dont l'image dans $I^G_{cusp,st}$ est égale à la projection du pseudo coefficient de π.

2.5 Notations pour les modules de Jacquet

Soit π une représentation de G_n et soit d un entier ; on suppose que G_n contient un sous-groupe parabolique de Levi isomorphe à $GL(d,E) \times G_{n-2d}$ et on fixe ρ une représentation cuspidale unitaire irréductible de $GL(d,E)$. On fixe aussi x un nombre réel et on note $Jac_{\rho|\,|^x}\pi$ la représentation virtuelle dans le groupe de Grothendieck de G_{n-2d} tel que le module de Jacquet de π pour un parabolique de sous-groupe de Levi isomorphe à $GL(d,E) \times G_{n-2d}$ soit la somme de $\rho|\,|^x \otimes Jac_{\rho|\,|^x}\pi$ et de représentation irréductible de la forme $\sigma \otimes \tau$ où σ est une représentation de $GL(d,E)$ non isomorphe à $\rho|\,|^x$.

On adopte une notation analogue pour $\tilde{GL}_n$: ici on fixe un espace parabolique de $\tilde{GL}$, c'est-à-dire un sous-groupe parabolique, P de $\tilde{GL}$ dont le normalisateur dans $\tilde{GL}.\theta$ est non trivial. On fixe alors un espace de Levi, $M, \tilde{M}$ de cet espace parabolique et on suppose que le sous-groupe de Levi sous-jacent est isomorphe à $GL(d,E) \times \tilde{GL}_{n-2d} \times GL(d,E)$; on fixe les notations en fixant w un élément de $\tilde{GL}$ qui laisse stable M et conjugue les deux copies de $GL(d,E)$ et on pose $\theta' := w\theta$. Alors $\tilde{M} = M.\theta'$. Soit π une représentation de $\tilde{GL}_n$ prolongée en $\tilde{\pi}$, à $\tilde{GL}_n.\theta$; on définit le module de Jacquet de $\tilde{\pi}$; c'est aussi le module de Jacquet de π mais il a une action canonique de θ et donc de $GL(d,E) \times \tilde{GL}_{n-2d}.\theta_{n-2d} \times GL(d,E)$, l'espace de Levi. On fixe ρ une représentation de $GL(d,E)$, cuspidal unitaire irréductible et on suppose que $\rho \simeq \tilde{\rho} \otimes \nu$ (cf 2.1 (1)).

On écrit cette représentation comme la somme d'une représentation, π_ρ dont tous les sous-quotients irréductibles comme représentation de $GL(d,E) \times \tilde{GL}_{n-2d} \times GL(d,E)$ sont de la forme $\rho|\,|^x \times \sigma \times \rho|\,|^{-x}$ (où σ est queconque) et une autre dont aucun sous-quotient irréductible n'a cette propriété. On remarque que cette décomposition est stable sous θ' et est canoniquement une représentation de $\tilde{M}$. On note $Jac^{\theta}_{\rho|\,|^x}\pi$ une représentation θ_{n-2d} invariante (vue dans le groupe de Grothendieck) telle que $\rho|\,|^x \otimes Jac^{\theta}_{\rho|\,|^x}\pi \otimes \rho|\,|^{-x}$ et π_ρ ont même trace sur $\tilde{M}$.

2.6 Modules de Jacquet et transfert

Depuis les travaux pionniers de Shelstad, on sait que le tranfert commute à l'induction : quand π est une représentation induite d'une représentation σ, il est facile de calculer la trace de π en fonction de la trace de σ vue comme une

représentation d'un sous-groupe de Levi M. En effet, $tr\,\pi(f) = tr\,\sigma(f_M)$, où f_M est la fonction sur M définie par $f(m) = \int_{K\times N} f(k^{-1}nmk)$ avec les notations usuelles (il faut ajouter un facteur discriminant). On se place dans la situation où $\underline{G}'$ est une donnée endoscopique elliptique de G. On fixe M un sous-groupe de Levi de G qui provient par transfert d'un sous-groupe de Levi $\underline{M}'$ de $\underline{G}'$. Pour savoir que l'induction commute au transfert, il est alors suffisant de vérifier que si f' est un transfert de f alors $f'_{M'}$ est un transfert de f_M ; un calcul élémentaire sur les intégrales orbitales ramènent l'assertion au fait de savoir que les facteurs de transfert pour les éléments de $M, \underline{M}'$ sont les mêmes qu'on les calcule dans $G, \underline{G}'$ ou dans $M, \underline{M}'$ et ceci est fait en [29] 3.4.2 au moins pour les groupes réels. Le cas des groupes p-adiques et de l'induction dans la situation tordue (il faut alors bien évidemment que l'induction se fasse via un parabolique stable) est analogue. Cette propriété relative à l'induction est utilisée partout dans les travaux sur la formule des travaux et en particulier dans [2].

Ici on préfère utiliser le fait que le module de Jacquet commute au transfert ; cela repose sur la même propriété des facteurs de transfert. En effet, la trace sur les modules de Jacquet s'exprime en fonction de la trace sur la représentation en des points tm où t est un élément du centre de M qui contracte suffisamment le radical unipotent du parabolique (cf [24]) 4.2.1. En loc. cite, on ne considérait que des groupes endoscopiques principaux, les facteurs de transfert sont alors égaux à 1 et l'égalité est triviale ; d'autres cas tels que le transfert spectral s'obtient à partir de l'endoscopie principale par torsion par un caractère (le cas du transfert non principal du groupe unitaire par exemple) s'en déduisent aussi. Le cas général vient de l'égalité du paragraphe précédent (la preuve de 6.2.1 de [30] écrit le cas des groupes orthogonaux pairs qui est avec $GSpin_{2n}$ l'unique cas non trivial pour ce que l'on fait ici).

En conclusion, avec les notations du paragraphe précédent, on fixe π^{GL} une représentation de $\tilde{GL}$ et M un espace de Levi de c'est-à-dire un sous-groupe de Levi d'un parabolique θ-stable. On écrit en fonction de 2.3 (1) la projection de la trace tordue de π^{GL} sur chaque $I^{\underline{G},s}_{cusp}$:

$$tr_\theta\,\pi^{GL} = \oplus_{\underline{G}} tr\,\pi_{\underline{G},st}$$

et on fixe M, ρ, x comme dans 2.5

$$Jac^\theta_{\rho|\,|^x}\pi^{GL} = \oplus_{\underline{G}} Jac_{\rho|\,|^x}\pi_{\underline{G},st},$$

et ceci est une égalité de transfert mais dans le terme de droite chaque représentation est une représentation virtuelle d'un sous-groupe de Levi d'un groupe endoscopique elliptique de $\tilde{GL}.\theta$ et certaines se regroupent puisque que plusieurs données endoscopiques elliptiques peuvent avoir même donnée endoscopique pour le sous-groupe de Levi se transférant en M.

On verra au début de la preuve du théorème de 2.8 qu'aucun regroupement n'a lieu si $x > 1/2$.

2.7 Quelques propriétés générales

Proposition *Soit π une série discrète de G ; on fixe ρ une représentation cuspidale unitaire de $GL(d_\rho, E)$ et $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Alors $Jac_{\rho|\,|^x} \circ Jac_{\rho|\,|^x}\pi = 0$.*

Avant de faire la preuve, remarquons que l'hypothèse $x \neq 0$ pourra être enlevée à la fin de l'article mais en ce début d'article, on l'utilise dans la preuve.

On considère la représentation virtuelle elliptique stable contenant π qui est décrite en 2.4, on la note π_{st}. On fixe t maximal avec le fait qu'il existe une représentations irréductible π' intervenant dans ce paquet (soit une série discrète soit une composante d'une représentation elliptique) pour laquelle appliqué t fois $Jac_{\rho|\,|^x}$ donne un résultat non nul. On note π' une telle représentation et il suffit de montrer que $t \leq 1$. Par réciprocité de Frobenius, on sait qu'il existe une représentation irréductible τ' de G_{n-2td_ρ} et une inclusion

$$\pi' \hookrightarrow \rho|\,|^x \times \cdots \times \rho|\,|^x \times \tau'. \tag{1}$$

Par maximalité de t, $Jac_{\rho|\,|^x}\tau' = 0$. Ainsi $Jac_{\rho|\,|^x}$ appliqué t fois à π' donne un multiple de τ'. On vérifie que τ' n'est sous-quotient d'aucun $Jac_{\rho|\,|^x}$ appliqué t fois à l'une des autres séries discrètes intervenant dans le paquet considéré ; en effet si $\pi'' \neq \pi'$ avait cette propriété, on aurait d'abord l'existence de τ'' avec une inclusion analogue à (1) et aussi, par maximalité de t, $Jac_{\rho|\,|^x}\tau'' = 0$. Ainsi nécessairement, parce que $x \neq 0$, $\tau'' \simeq \tau'$ et π'' est aussi un sous-module irréductible de (1). On considère la représentation de $GL(td_\rho, E)$ isomorphe à l'induite irréductible de t facteurs $\rho|\,|^x$ et on la note σ. On remarque que $\sigma \otimes \tau$ a multiplicité un dans le module de Jacquet de π comme quotient irréductible ; cela vient évidemment du fait que $x \neq 0$ et $Jac_{\rho|\,|^x}\tau = 0$. Par réciprocité de Frobenius, cela assure que (1) a un unique sous-module irréductible. Ainsi $\pi'' = \pi'$ et quand on applique t fois $Jac_{\rho|\,|^x}$ à la distribution stable considérée on obtient une représentation virtuelle non nulle, notée $Jac_{\rho|\,|^x, t-fois}\pi_{st}$.

On note π^{GL} le transfert de π_{st}. Alors $Jac_{\rho|\,|^x, t-fois}\pi_{st}$ se transfert en $Jac^{GL}_{\rho|\,|^x}$ appliqué t fois à π^{GL}. Donc ce module de Jacquet doit lui aussi être non nulle mais ceci est impossible si $t > 1$ puisque π^{GL} est une combinaison linéaire de représentations θ-elliptiques irréductibles ; une représentation θ-elliptique irréductible est une induite de représentation de Steinberg pour un sous-groupe de Levi, toutes les représentations de Steinberg étant inéquivalentes. D'où la proposition.

Corollaire *(i) Soit π une composante d'une représentation elliptique intervenant dans un paquet stable et soit $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Soit $Jac_{\rho|\,|^x}\pi = 0$, soit $x > 0$ et $Jac_{\rho|\,|^x}\pi$ est une représentation irréductible.*

(ii) Soient π, π' deux représentations inéquivalentes de G intervenant comme composantes dans un paquet stable de représentations elliptiques et soient ρ, x comme en (i). Alors soit $Jac_{\rho|\,|^x}\pi \neq Jac_{\rho|\,|^x}\pi'$ soit $Jac_{\rho|\,|^x}\pi = Jac_{\rho|\,|^x}\pi' = 0$.

Ce corolaire a été démontré dans la preuve ci-dessus puisque $t = 1$, avec les notations de cette preuve.

2.8 Propriétés de la projection endoscopique

Soit π^{GL} une représentation θ-elliptique irréductible de $\tilde{GL}$; en fixant la donnée endoscopique elliptique $\underline{G}$, on note $\pi^{GL}_{G,st}$ la projection de cette θ-trace sur $I^{G}_{cusp,st}$ (cf. 2.3 (1)).

Théorème *Soit π^{GL} une représentation θ-elliptique, irréductible, de $\tilde{GL}$; on suppose que $\pi^{GL}_{G,st}$ n'est ni nul ni orthogonal à toutes les séries discrètes de G. Alors la θ-trace de π^{GL} est un transfert d'un paquet stable de représentations elliptiques de G ou encore $\pi^{GL}_{H,st} = 0$ pour toute donnée endoscopique elliptique $\underline{H}$ différente de $\underline{G}$.*

On écrit $\pi^{GL} \simeq \times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} St(\rho,a)$ en se souvenant que s'il y a un facteur F^*, il opère par ν. Et on pose $\pi^{GL}_{+} := \times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} St(\rho,a+2)$; c'est une représentation de $\tilde{GL}(n_+,E)$, où $n_+ = n + \sum_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} 2d_\rho$. On décompose la θ-trace de cette représentation comme dans 2.3 (1). Et on calcule $\circ_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} Jac^{GL}_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}$, en ordonnant $\mathcal{E}$ de façon à ce que l'on prenne les $Jac^{GL}_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}$ dans l'ordre croissant sur a ; à chaque étape le résultat est une représentation θ-elliptique irréductible qu'il est facile de calculer. Sa décomposition dans 2.3 (1) se calcule en prenant aussi des modules de Jacquet mais il faut regrouper les données endoscopiques qui contiennent le même sous-groupe de Levi ; si $\underline{G}$ est simple, il faut considérer $\underline{G_{n_+}}$ mais aussi les données composées de la forme $\underline{G_1 \times G_2}$ tel que $G_1 = G_{n+2T}$ et G_2 contient $GL(1/2(n_+ - n) - T, E)$ comme sous-groupe de Levi maximal.

On vérifie que la contribution de ces groupes, si $T \neq (n_+ - n)/2$, est nulle : en effet s'il n'en est pas ainsi, on fixe G_1 et G_2 pour cette valeur de T. Et il existe un paquet stable, τ, de représentations elliptiques de G_2 et un sous-ensemble $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ tel que $\circ_{(\rho',a')\in\mathcal{E}'} Jac_{\rho'|\,|^{(a'+1)/2}}\tau \neq 0$ et :

$$(n_+ - n)/2 - T = \sum_{(\rho',a')\in\mathcal{E}'} d_{\rho'}.$$

Ceci est impossible car τ se transfère alors vers une représentation θ-elliptique, π'^{GL}, de $\tilde{GL}_{(n_+-n)-2T}$ qui doit aussi vérifier :

$$\circ_{(\rho',a')\in\mathcal{E}'} Jac^{GL}_{\rho'|\,|^{(a'+1)/2}}\pi'^{GL} \neq 0.$$

On sait que π'^{GL} est une induite de représentation de Steinberg. On a donc certainement

$$\sum_{(\rho',a')\in\mathcal{E}'} d_{\rho'}(a'+2) \leq (n_+ - n) - 2T$$

et ceci nécessite $a' = 0$ pour tout $(\rho',a') \in \mathcal{E}'$ ce qui est exclu. D'où l'assertion cherchée.

On note $\pi_{G,st}$ la projection de θ-trace de π^{GL} sur $I^{\underline{G_n},st}_{cusp}$ et $\pi_{G_+,st}$ l'analogue pour G_{n_+} ; on sait donc que $\pi_{G,st}$ est un module de Jacquet de $\pi_{G,+}$; soit π_0 une série discrète de G intervenant dans $\pi_{G,st}$ qui existe par hypothèse. Il existe

donc au moins une représentation tempérée $\pi_{0,+}$ intervenant dans $\pi_{+,st}$ et telle que

$$\circ_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}\pi_{0,+}$$

contient π_0 comme sous-quotient ; plus précisément à chaque étape dans le calcul du module de Jacquet, il existe un sous-quotient qui est une représentation tempérée et en continuant la procédure, l'étape finale donne un sous-quotient qui est π_0 ; en fait d'après 2.7, à chaque étape le module de Jacquet est une représentation irréductible et tempérée, la dernière étape donnant une série discrète π_0 ; ceci nécessite qu'à chaque étape la représentation tempérée soit en fait une série discrète. Ainsi $\pi_{0,+}$ est une série discrète.

On met $\pi_{0,+}$ dans un paquet stable comme en 2.4 ; on transfert ce paquet stable en la θ-trace d'une représentation virtuelle combinaison linéaire de représentations θ-elliptiques de $\tilde{G}L(n_+, E)$, noté $\tilde{\pi}^{GL}_{0,+}$ et on recalcule

$$\circ_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}\tilde{\pi}^{GL}_{0,+};$$

le résultat est un transfert d'une représentation virtuelle stable combinaison linéaire de séries discrètes de G_n qui n'est certainement pas nulle car elle contient nécessairement π_0 avec un coefficient non nul (cf. 2.7 (ii)). Mais comme

$$\sum_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} d_\rho(a+2) = n_+,$$

nécessairement $\tilde{\pi}^{GL}_{0,+}$ contient l'induite $(\times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} St(\rho, a+2)) \otimes \nu$ à un scalaire près et le module de Jacquet considéré est π^{GL} (celui de l'énoncé) à un scalaire près. Ainsi π^{GL} est un transfert d'une distribution stable pour $\underline{G}_n$, ce qui est le résultat cherché.

3 Le cas des représentations cuspidales

3.1 Point de réductibilité des induites de cuspidales

Soit π une représentation cuspidale irréductible de G et soit ρ une représentation cuspidale irréductible et unitaire de $GL(d_\rho, F)$ ce qui définit d_ρ.

Théorème *Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que l'induite de la représentation $\rho|\,|^x \times \pi$, qui est une représentation de G_{n+d_ρ} soit réductible, alors $x \in 1/2\mathbb{Z}$ et $x \leq (n/d_\rho+1)/2$.*

On fixe π, ρ, x comme dans l'énoncé ; si $x = 0$, le théorème est clair. Si l'induite tempérée $\rho \times \pi$ est sans entrelacement sous l'action du groupe de Weyl, d'après Harish-Chandra, x ne peut exister. On suppose donc que cette induite a un entrelacement et cela permet de supposer que $x > 0$. On note alors π_+ l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho|\,|^x \times \pi$; c'est une série discrète. Elle appartient à un paquet stable d'après 2.4, noté $\pi_{+,st}$ et il existe donc une représentation virtuelle notée π^{GL}_+ dont la trace tordue par θ est un transfert de $\pi_{+,st}$.

On sait que $Jac^{GL}_{\rho|\,|^x}\pi^{GL}_+$ est un transfert de $Jac_{\rho|\,|^x}\pi_{+,st}$ du paquet stable précédent (cf la preuve de 2.8) ; ce dernier module de Jacquet contient de façon non trivial la trace de π car il n'y a qu'une représentation irréductible de G_n qui a dans son module de Jacquet cuspidal $\rho|\,|^x \otimes \pi$ et c'est π_+. Ainsi la représentation virtuelle obtenue par module de Jacquet n'est pas nulle donc son transfert n'est pas nulle. Cela force aussi l'inégalité de l'énoncé car on a nécessairement $n + d_\rho \geq d_\rho(2x + 1)$.

On sait que π^{GL}_+ est une combinaison linéaire d'induites de représentations de Steinberg unitaire ; son module de Jacquet $Jac^{GL}_{\rho|\,|^x}(\pi^{GL}_+)$ est non nul et cela force x à être un demi-entier. Cela prouve le théorème.

3.2 Blocs de Jordan des représentations cuspidales

Soit π une représentation cuspidale irréductible de G_n. On définit ici $Jord(\pi)$ comme étant l'ensemble des couples (ρ, a) où ρ est une représentation cuspidale de $GL(d_\rho, F)$ et où a est un entier, $Jord(\pi)$ satisfaisant à

si $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ avec $a > 2$ alors $(\rho, a-2) \in Jord(\pi)$;

$(\rho, a) \in Jord(\pi)$ (avec $a \geq 1$) et pour tout $a' > a$, $(\rho, a') \notin Jord(\pi)$ si et seulement si l'induite $\rho|\,|^{(a+1)/2} \times \pi$ de $G_{n^*+d_\rho}$ est réductible.

On démontrera en 7.2 que cette définition correspond aux définitions de [19] et [23].

Théorème *L'ensemble $Jord(\pi)$ est fini et $\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} ad_\rho = n$. On pose*

$$\pi^{GL} := \times_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} St(\rho, a),$$

cette représentation est θ-invariante et sa trace tordue est un transfert d'une combinaison linéaire finie de traces de séries discrètes de G, l'une d'entre elles étant π (avec un coefficient non nul).

De plus toute combinaison linéaire stable de représentations elliptiques de G contenant π avec un coefficient non nul et se transférant sur la θ-trace d'une représentation irréductible et θ-elliptique de $\tilde{GL}$ se transfère nécessairement sur la représentation π^{GL} qui vient d'être décrite (à un scalaire près).

Avant de faire la démonstration remarquons que ce théorème n'est pas tout à fait ce que l'on veut et c'est ce qui explique sa formulation un peu compliquée ; on veut démontrer et on démontrera que la combinaison linéaire stable dont il est question au début est celle qui est associée à π par 2.4.

Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble fini de $Jord(\pi)$ tel que si $(\rho, a) \in \mathcal{E}$ et $(\rho, a+2) \in Jord(\pi)$ alors $(\rho, a+2) \in \mathcal{E}$. On vérifie la propriété suivante :

il existe une représentation irréductible de $G_{(n+\sum_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} 2d_\rho, F)}$, notée $\pi_\mathcal{E}$ telle que la représentation virtuelle

$$\circ_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}\pi_\mathcal{E}$$

contient π (avec un coefficient non nul), où $\mathcal{E}$ est muni d'un ordre tel que l'on prend $Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}$ avant $Jac_{\rho|\,|^{(a'+1)/2}}$ si $a > a'$. De plus $\pi_\mathcal{E}$ est une série discrète.

Pour cela, on considère la représentation induite

$$\times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}}\rho|\,|^{(a+1)/2}\times\pi.$$

On vérifie que cette induite a un unique sous-module irréductible en utilisant la réciprocité de Frobenius. Ce sous-module irréductible est noté $\pi_{\mathcal{E}}$. Il est facile de calculer le module de Jacquet cuspidal de cette sous-représentation : c'est la somme directe des termes $\otimes_{i\in[1,|\mathcal{E}|]}\rho_i|\,|^{(a_i+1)}\otimes\pi$, où $\{(\rho_i,a_i);i\in[1,|\mathcal{E}|]\}$ est exactement l'ensemble $\mathcal{E}$ ordonné de telle sorte que si pour $i<j$, $\rho_i=\rho_j$ alors $a_i<a_j$. Il est alors clair que $\pi_{\mathcal{E}}$ est une série discrète.

On pose $n_+=n+\sum_{(\rho,a)\in\mathcal{E}}2d_\rho$ et on considère une représentation virtuelle, $\pi_{\mathcal{E}}^{GL}$ de $\tilde{GL}(n_+,E)$ θ invariante qui est un transfert du paquet stable contenant $\pi_{\mathcal{E}}$ tel que défini en 2.4. On calcule le module de Jacquet $\circ_{(\rho,a)\in\mathcal{E}}Jac^{GL}_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}$ comme on l'a fait ci-dessus et on conclut que le résultat est non nul car c'est un transfert d'une représentation virtuelle contenant π avec un coefficient non nul. Ainsi $\pi_{\mathcal{E}}^{GL}$, qui rappelons-le est une représentation virtuelle, contient au moins une représentation induite de représentations de Steinberg vérifiant la non nullité ci-dessus ; il est facile de calculer les modules de Jacquet des représentations de Steinberg. En prenant le premier $Jac^{GL}_{\rho_0|\,|^{(a_0+1)/2}}$ on voit que cette représentation est nécessairement de la forme une induite de représentation $St(\rho_0,a_0+2)$ avec éventuellement une autre représentation tempérée, τ. Le résultat est alors l'induite de $St(\rho,a)$ avec τ et on doit encore avoir la non nullité

$$\circ_{(\rho,a)\in\mathcal{E}-\{(\rho_0,a_0)}Jac^{GL}_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}\neq 0;$$

l'hypothèse sur l'ordre assure que dans l'ensemble restant si $\rho\simeq\rho_0$ alors $a>a_0$. La non nullité porte alors sur le module de Jacquet de τ et on en procédant ainsi on voit que la représentation fixée est une induite de $\times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}}St(\rho,a)$ avec éventuellement encore une représentation tempérée. Mais on a donc nécessairement $\sum_{(\rho,a)\in\mathcal{E}}d_\rho(a+2)\leq n+\sum_{(\rho,a)\in\mathcal{E}}2d_\rho$. D'où $\sum_{(\rho,a)\in\mathcal{E}}ad_\rho\leq n$; comme n est indépendant de $\mathcal{E}$, cela force la finitude de $Jord(\pi)$ et l'inégalité

$$\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)}ad_\rho\leq n.$$

On pose $n_-:=n-\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)}ad_\rho$ et on vient de montrer qu'il existe une représentation virutelle τ_0 de $\tilde{GL}(n_-,E)$ tel que $\times_{(\rho,a)\in Jord(\pi)}St(\rho,a)\times\tau_0$ soit θ-invariante et soit un transfert du paquet stable associé à π dans 2.4.

Pour montrer que $n_-=0$, on procède de façon inverse : on fixe π^{GL} une représentation irréductible et θ-elliptique de $\tilde{GL}(n)$ dont la projection de la θ-trace sur $I^{\underline{G},st}_{cusp}$ est non orthogonale à la trace de π (cf. 2.3 (1)). On définit $Jord(\pi^{GL})$ comme étant l'ensemble des couples (ρ,a) tel que

$$\pi^{GL}=\times_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})}St(\rho,a).$$

On pose $n_+:=n+\sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})2d_\rho}$ et on considère π_+^{GL} la représentation irréductible du groupe $\tilde{GL}(n_+)$ égale à $\times_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})}St(\rho,a+2)$. On note τ_+

la représentation virtuelle de G_{n_+} obtenu par la projection de la θ-trace de cette représentation sur $I_{cusp}^{G_{n_+}}$. On remarque qu'en ordonnant $Jord(\pi_+^{GL})$ de sorte que on prenne d'abord $Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}}^{GL}$ avant de prendre $Jac_{\rho|\,|^{(a'+1)/2}}^{GL}$ pour le même ρ et la même parité de a, a' si $a' > a$, on a

$$\circ_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})} Jac_{\rho|\,|(a+1)/2}^{GL} \pi_+^{GL} = \pi^{GL}.$$

C'est le même argument que celui donné ci-dessus. Puisque le transfert commute au module de jacquet, on a sûrement que $\circ_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})} Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}} \tau_+$ contient π. Ainsi il existe π_+ une série discrète intervenant dans τ_+ et tel qu'à un scalaire près, $\circ_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})} Jac_{\rho|\,|(a+1)/2} \pi_+ = \pi$; on a même un résultat un peu plus précis que l'on n'exprime que dans le cas qui nous intéresse : on fixe ρ_0 une représentation cuspidale unitaire et irréductible, une parité et a_0 maximal avec cette parité fixée tels que $Jord(\pi^{GL})$ contienne (ρ_0, a_0). On note $Jord(\pi^{GL})_-$ l'ensemble $Jord(\pi^{GL})$ privé de (ρ_0, a_0) et on a :

$$\circ_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})} Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}} \tau_+ = Jac_{\rho_0|\,|^{(a_0+1)/2}}^{GL}$$

$$\circ_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})_-} Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}} \tau_+.$$

Or $\circ_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})_-} Jac_{\rho|\,|^{(a+1)/2}} \tau_+$ n'est autre que

$$St(\rho_0, a_0 + 2) \times_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})_-} St(\rho, a).$$

Comme ci-dessus, cela montre qu'il existe une série discrète π_0 de $G_{n+2d_{\rho_0}}$ tel que $Jac_{\rho_0|\,|^{(a_0+1)/2}} \pi_0$ contient π. Ainsi π_0 est un sous-quotient de l'induite $\rho|\,|^{(a_0+1)/2} \times \pi$ et cette induite est réductible. Cela entraîne par définition que $(\rho_0, a_0) \in Jord(\pi)$ et par les propriétés de $Jord(\pi)$ pour tout a' de même parité que a_0 si $(\rho_0, a') \in Jord(\pi^{GL})$ alors $(\rho_0, a') \in Jord(\pi)$. Ainsi on a

$$n = \sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi^{GL})} a d_\rho \leq \sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} a d_\rho = n - n_-.$$

Cela force $n_- = 0$ et $Jord(\pi^{GL}) = Jord(\pi)$. En revenant au début de la preuve, on a en plus montré que $\times_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} St(\rho, a)$ est un transfert d'un élément de $I_{cusp}^{G,st}$ non orthogonal à π. Mais, puisque $Jord(\pi^{GL}) = Jord(\pi)$, $\times_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} St(\rho, a) = \pi^{GL}$ et il n'y a donc qu'une représentation θ-elliptique et irréductible de π^{GL} dont la projection de la θ-trace sur $I_{cusp}^{G,st}$ n'est pas orthogonale à π.

4 Support cuspidal étendu

En 3.2, pour π une représentation cuspidale, on a défini $Jord(\pi)$ et π^{GL} ; on appelle support cuspidal étendu de π le support cuspidal de π^{GL} et on voit ce support cuspidal comme un ensemble de couples (ρ, x), où ρ est une représentation cuspidale unitaire d'un groupe $GL(d_\rho, E)$ et x est un nombre

réel en fait un demi-entier relatif. Cet ensemble est bien défini à permutation près.

On généralise cette définition à toute représentation irréductible :

soit π une représentation irréductible de $\underline{G}$; on écrit π comme sous-quotient d'une représentation induite à partir d'une représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi. Cela définit le support cuspidal usuel de π que l'on écrit comme une collection de couples (ρ, x) et d'une représentation cuspidale π_{cusp} d'un groupe de même type que $\underline{G}$ mais en général de rang plus petit, où les (ρ, x) sont des couples formés d'une représentation cuspidale unitaire ρ et d'un nombre réel x. Alors que π_{cusp} est uniquement déterminé, les couples (ρ, x) sont définis à permutation près et à changement de (ρ, x) en $(\tilde{\rho}, -x)$ où, ici, $\tilde{\rho} := \rho^* \otimes \nu$ si $E = F$ et $\check{\rho}$ si $E \neq F$ où ν est le caractère de 2.1 ; c'est un calcul sur le groupe de Weyl. On définit le support cuspidal étendu de π comme étant l'union du support cuspidal étendu de π_{cusp} avec l'ensemble des couples $(\rho, x), (\tilde{\rho}, -x)$ où (ρ, x) parcourt l'ensemble ci-dessus. Le support cuspidal étendu et donc bien défini à permutation près.

Remarque *Le support cuspidal étendu de π est nécessairement le support cuspidal d'au moins une représentation irréductible de $GL(n, E)$ et d'au plus une représentation tempérée de ce groupe.*

La première assertion vient uniquement d'un calcul de dimension : on note $Supp(\pi)$ le support cuspidal de π sauf π_{cusp} (on fait un choix qui n'aura pas d'importance), on note $Supp_{et}(\pi)$ et $Supp_{et}(\pi_{cusp})$ le support cuspidal étendu de π et π_{cusp} et on a :

$$\sum_{(\rho,x)\in Supp_{et}(\pi)} d_\rho = 2 \sum_{(\rho,x)\in Supp(\pi)} d_\rho + \sum_{(\rho,x)\in Supp_{et}(\pi_{cusp})} d_\rho = n.$$

La deuxième assertion de la remarque vient du fait que le support cuspidal d'une représentation de $GL(n, E)$ est une union de segments centrés en 0 et que la représentation tempérée est uniquement déterminée par cette union de segments ; mais il n'y a au plus qu'une façon d'écrire un ensemble de représentations cuspidales comme union de segments centrés en 0, d'où l'assertion.

Le but de la suite du travail est de montrer que si π est une représentation tempérée, alors le support cuspidal étendu de π est le support cuspidal d'une représentation tempérée et θ-invariante de $GL(n, E)$ et que cette représentation tempérée a sa θ-trace qui est un transfert d'un paquet stable (en fait "du" si ceci est bien défini) de G contenant π.

4.1 Le cas des séries discrètes strictement positives

Une généralisation des représentations cuspidales, pour ce qui est fait ici, est la notion de séries discrètes strictement positives, comme cela avait déjà été le cas en [19]. Par définition une telle série discrète est une représentation irréductible dont les modules de Jacquet cuspidaux sont de la forme $\otimes_{(\rho,x)} \rho|\,|^x \times \pi_{cusp}$,

où (ρ, x) décrit un ensemble de couples formés d'une représentation cuspidale unitaire et d'un nombre réel x strictement positif et où π_{cusp} est une représentation cuspidale d'un groupe de la forme $G_{n'}$ avec $n' \leq n$. Dans le cas où $G = SO(2n, F)$ où $GSpin_{2n}(F)$, il faut considérer simultanément π et $\tilde{\pi}$ l'image de π par l'automorphisme extérieur et demander la même propriété pour ces deux représentations, ou encore ceci revient à travailler avec le groupe non connexe $O(2n, F)$ et son analogue pour $GSpin_{2n}(F)$. Ici on ne classifiera pas ces représentations (cf. [19] qui se généralise cf par exemple [18] et Jang Bogume [8]), les propriétés décrites ci-dessous nous suffisant.

Soit (ρ, x) un couple formé d'une représentation cuspidale unitaire ρ et d'un nombre réel strictement positif x. Et soit π une série discrète fortement positive.

Lemme *(i) On suppose que $Jac_{\rho|\,|^x}\pi \neq 0$; alors $Jac_{\rho|\,|^x}\pi$ est une série discrète strictement positive.*

(ii)Supposons que $x \geq 1$; les sous-quotients irréductibles de l'induite $\rho|\,|^x \times \pi$ sont des séries discrètes fortement positives sauf l'unique quotient irréductible qui peut éventuellement être toute l'induite.

Le (i) est complètement évident. Montrons (ii) ; soit π' un sous-quotient irréductible de l'induite de l'énoncé. Les modules de Jacquet cuspidaux de l'induite sont obtenus en prenant ceux de π et en glissant soit $\rho|\,|^x$ soit $\theta(\rho)|\,|^{-x}$ à n'importe quelle place sauf si $G = SO(2n, F)$ ou $GSpin_{2n}(F)$, où il faut considérer simultanément π et $\tilde{\pi}$ (l'image de π par l'automorphisme extérieur). Supposons que π' ait un module de Jacquet contenant un terme avec $\theta(\rho)|\,|^{-x}$. Par réciprocité de Frobenius on trouve une inclusion :

$$\pi' \hookrightarrow \times_{(\rho', x')} \rho'|\,|^{x'} \times \theta(\rho)|\,|^{-x} \times \tau,$$

où τ est une représentation irréductible convenable ; nécessairement ici $x' \geq 1/2$ d'où $x + x' > 1$ par l'hypothèse sur x' et on peut mettre $\theta(\rho)|\,|^{-x}$ en première position. Et π' est alors le quotient de Langlands de l'induite.

Corollaire *Il existe une unique représentation θ-elliptique de $\tilde{GL}$ qui est irréductible et dont la θ-trace est un transfert d'une combinaison linéaire stable de représentations elliptiques de G contenant π. De plus le support cuspidal de cette représentation de $GL(n, E)$ est exactement le support cuspidal étendu de π.*

L'existence de cette représentation résulte de 2.3 (1) et de 2.8. On démontre l'unicité et sa description par récurrence sur n en initialisant la récurrence avec les représentations cuspidales si $n > 0$; et dans le cas où $n = 0$, le résultat est vide sauf pour $SO(1, F)$ et $GSpin(1, F)$ où il est trivial, toutefois, il faut dans ce cas accepté une petite extension de la formulation du théorème pour que $\tilde{GL}$ existe aussi avec $n = 0$.

Soit π une série discrète strictement positive et soit ρ, x comme dans le lemme (i) ci-dessus. Soit π^{GL} une représentation θ-elliptique irréductible de $\tilde{GL}$ qui est un transfert d'une combinaison linéaire stable de représentations elliptiques de G contenant π (cf. 2.3 (1) et 2.8). Il suffit évidemment de démontrer que le

support cuspidal de π^{GL} coïncide avec le support cuspidal étendu de π et on peut supposer que π n'est pas cuspidal. On fixe (ρ, x) tel que $Jac_{\rho|\,|^x}\pi \neq 0$ et on applique l'hypothèse de récurrence à $\pi_- := Jac_{\rho|\,|^x}\pi$. On note $\tilde{\pi}_{st}$ la combinaison linéaire stable de représentations elliptiques de G contenant π se transférant en la θ-trace de π^{GL}. La représentation $Jac^{GL}_{\rho|\,|^x}(\pi^{GL})$ est un transfert de $Jac_{\rho|\,|^x}\tilde{\pi}_{st}$; comme cette dernière représentation contient une série discrète, π_-, la représentation

$$Jac_{\rho|\,|^x}\tilde{\pi}_{st}$$

ne peut pas être une induite θ-stable à partir d'un espace de Levi de $\tilde{GL}$. Ainsi si l'on écrit π^{GL} comme l'induite $\times_{(\rho',a')\in\mathcal{E}} St(\rho', a')$, nécessairement $(\rho, 2x+1) \in \mathcal{E}$ et $(\rho, 2x-3) \notin \mathcal{E}$; deplus, $St(\rho, a-2) \times_{(\rho',a')\in\mathcal{E};(\rho',a')\neq(\rho,a)} St(\rho', a')$ est un transfert nécessairement d'une combinaison linéaire de représentations elliptiques de G_{n-2d_ρ} (d_ρ est défini par le fait que ρ est une représentation de $GL(d_\rho, E)$) et qui coïncide avec $Jac_{\rho|\,|^x}\tilde{\pi}_{st}$. Cette combinaison linéaire contient donc π_-. Par l'hypothèse de récurrence, le support cuspidal étendu de π_- est exactement le support cuspidal de $Jac^{GL}_{\rho|\,|^x}(\pi^{GL})$. Le support cuspidal de π s'obtient en rajoutant $\rho|\,|^x$ et $\rho|\,|^{-x}$ au support cuspidal étendu de π_- ; c'est la même opération qui fait passer du support cuspidal de de $Jac^{GL}_{\rho|\,|^x}\pi^{GL}$ à π^{GL} d'où le résultat.

4.2 Bloc de Jordan des séries discrètes strictement positives

Soit π une série discrète strictement positive ; on lui a associé dans le corollaire de 4.1 une unique représentation tempérée π^{GL} de $\tilde{GL}(n, E)$. Ici on prend comme définition de $Jord(\pi) := \{(\rho, a)\}$ de telle sorte que

$$\pi^{GL} \simeq \times_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} St(\rho, a);$$

on vérifiera dans la remarque de 7 que cette définition est bien analogue à celle donnée en [21]. Mais ici on démontre le résultat technique dont nous aurons besoin : soit $\ell \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [1, \ell]$ la donnée d'un couple $\rho_i, x_i \geq 1$ et d'une série discrète strictement positive π_i vérifiant inductivement que π_i est un sous-quotient de l'induite $\rho_i|\,|^{x_i} \times \pi_{i-1}$, où l'on a posé $\pi_0 = \pi$ et $x_i > x_{i-1}$ avec $x_0 = 1/2$.

Lemme *Pour une telle suite, l'ensemble $\{(\rho_i, 2x_i - 1); i \in [1, \ell]\}$ est un sous-ensemble de $Jord(\pi)$.*

On fixe $i \in [1, \ell]$; on admet par récurrence que $Jord(\pi_{i-1})$ s'obtient à partir de $Jord(\pi)$ en remplaçant les blocs $(\rho_j, 2x_j - 1); j \in [1, i[$ par les blocs $(\rho_j, 2x_j + 1)$, cette assertion est vraie pour $i = 0$ et on la démontre pour le i fixé ; on sait que le support cuspidal étendu de π_i est celui de π_{i-1} auquel on ajoute $(\rho_i, x_i), (\tilde{\rho}_i, -x_i)$ (où $\tilde{\rho} \simeq \rho^* \otimes \nu$ ou $\check{\rho}$ (cf. 2.1)). Mais d'autre part, comme π_i est par hypothèse une série discrète strictement positive, son support cuspidal étendu est une union de segment ; comme $x_i > 1/2$ la seule possibilité est que $\rho_i \simeq \tilde{\rho}_i$ et que l'on rajoute (ρ_i, x_i) à l'extrémité d'un des segments du support cuspidal étendu de

π_{i-1} ; il faut donc que $(\rho_i, 2x_i - 1) \in Jord(\pi_{i-1})$. On utilise alors l'hypothèse que $x_i < x_j$ pour tout $j \in [1, i[$ ce qui force que $(\rho_i, 2x_i - 1) \in Jord(\pi)$ et c'est alors ce couple qui devient $(\rho_i, 2x_i + 1)$ dans $Jord(\pi_i)$. D'où le lemme.

4.3 Un lemme de structure des séries discrètes et des représentations tempérées

Soit ρ une représentation cuspidale de $GL(d_\rho, E)$. Soit d, f des nombres réels tel que $d + f \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. On note $\langle d, -f\rangle_\rho$ l'unique sous-représentation de $GL((d+f+1)d_\rho, F)$ incluse dans l'induite $\times_{i\in[d,-f]}\rho|\,|^i$; c'est une série discrète tordu par un caractère non unitaire.

Lemme *Soit π une représentation irréductible de G. Il existe un ensemble, $\mathcal{T}$ de triplets (ρ, d, f) ordonné et une série discrète strictement positive, $\pi_{>0}$ tels que l'on ait une inclusion*

$$\pi \hookrightarrow \times_{(\rho,d,f)\in\mathcal{T}}\langle d, -f\rangle_\rho \times \pi_{>0}$$

et tels que $f \geq 0$ pour tout $(\rho, d, f) \in \mathcal{T}$ et $f \geq f'$ si le triplet (ρ, d, f) précède le triplet (ρ', d', f') dans l'ordre de $\mathcal{T}$.

Précisons la situation des groupes $SO(2n, F)$ et $GSpin_{2n}(F)$; on ne voit les représentations qu'à conjugaison près par l'automorphisme extérieur ; donc dans le lemme, il faut éventuellement remplacer π par son conjugué par cet automorphisme.

On fixe une inclusion de π dans une représentation induite à partir d'une représentation cuspidale : ci-dessous $\ell \in \mathbb{N}$, pour $i \in [1, \ell]$, les ρ_i sont des représentations cuspidales unitaires, les x_i sont des nombres réels et π_{cusp} est une représentation cuspidale d'un groupe $G_{n_{cusp}}$, pour n_{cusp} convenable :

$$\pi \hookrightarrow \times_{i\in[1,\ell]}\rho_i|\,|^{x_i} \times \pi_{cusp}; \tag{1}$$

Le terme de droite de (1) n'est évidemment pas uniquement déterminé et on fait un choix de telle sorte que le nombre de $min_{i\in[1,\ell]}x_i$ soit minimal pour tous les choix possibles. Ainsi si dans (1) aucun des x_i n'est inférieur ou égal à 0, π est une série discrète strictement positive (par réciprocité de Frobenius aucun terme du module de Jacquet cuspidal ne contient de termes "négatifs").

On suppose donc qu'il existe $x_i \leq 0$ dans le terme de droite de (1) ayant la propriété de minimalité précédente et on note ℓ_1 le plus petit indice tel que x_{ℓ_1} soit minimal dans (1). On pose $f_1 := -x_{\ell_1}$; on peut modifier le terme de droite de (1) uniquement en permutant éventuellement les termes x_i pour $i \leq \ell_1$ de sorte que $\rho_{\ell_1}|\,|^{x_{\ell_1}}$ soit le plus à gauche possible. On est alors sûr que pour tout $i \leq \ell_1$, $\rho_i \simeq \rho_{\ell_1}$ et il existe un sous-quotient τ_1 de l'induite de $GL(d_{\rho_{\ell_1}}\ell_1, E)$ $\times_{i\in[1,\ell_1]}\rho_{\ell_1}|\,|^{x_1}$ tel que l'inclusion (1) se factorise en

$$\pi \hookrightarrow \tau_1 \times_{i>\ell_1} \rho_i|\,|^{x_i} \times \pi_{cusp}. \tag{2}$$

La minimalité de ℓ_1 assure alors que $\tau_1 = \langle x_1, -f_1\rangle_{\rho_{\ell_1}}$. On peut encore factoriser l'inclusion (2) en

$$\pi \hookrightarrow \tau_1 \times \pi',$$

où π' est une représentation convenable. On applique le lemme à π' et on obtient le lemme pour π en remarquant que l'inégalité du lemme est bien satisfaite par minimalité de x_{ℓ_1}.

Remarque *On suppose que π est une représentation tempérée (resp. une série discrète) ; alors dans le lemme ci-dessus, on a en plus nécessairement pour tout (ρ, d, f), $d - f \geq 0$ (resp. $d - f > 0$).*

Raisonnons par l'absurde, on suppose qu'avec les notations du lemme précédent, il existe un des triplets (ρ, d, f) tel que $d - f < 0$ et on fixe un tel triplet le plus à gauche possible ; il ne peut être en première position car cela contredirait le critère de Casselman. Pour tout triplet (ρ', d', f') plus à gauche $f' \leq d'$ (par minimalité) et donc nécessairement $d' - f' \geq 0 > d - f$ et $f - f' > d - d'$; par les inégalités sur les extrémités f, on a aussi $f' \geq f$ d'où aussi $d' \geq d$ et le segment $[d, -f]$ est inclus dans le segment $[d', -f']$. Ainsi l'induite pour le bon groupe $GL(n, E)$: $\langle d', -f'\rangle_{\rho'} \times \langle d, -f\rangle_\rho$ est irréductible et on peut donc commuter les deux facteurs. En agissant ainsi de proche en proche, on ramène $\langle d, -f\rangle_\rho$ en première position et on a une contradiction avec le critère de Casselman.

4.4 Sur les points de réductibilité des séries discrètes

Soit π une représentation tempérée irréductible ; on note $Red(\pi)$ l'ensemble des suites finies de triplets $\{(\rho_i, x_i, \pi_i), i \in [1, \ell]\}$ telle que ℓ est un entier, pour tout $i \in [1, \ell], x_i \in \mathbb{R}_{>1/2}$ et π_i une représentation tempérée irréductible qui vérifie inductivement que $\pi_i \hookrightarrow \rho_i|\,|^{x_i} \times \pi_{i-1}$ avec $\pi_0 = \pi$. On remarque que contrairement au cas des séries discrètes strictement positives (paragraphe 4.1), on demande vraiment que π_i soit un sous-module et pas seulement un sous-quotient. On demande encore que $x_i \geq x_{i+1}$ pour tout $i \in [1, \ell[$.

On fixe aussi une inclusion comme dans 4.3 ; donc on a $Jord(\pi_+)$ et les triplets (ρ, d, f), ensemble de triplets que l'on note $\mathcal{T}$.

Lemme *Soit $\{(\rho_i, x_i, \pi_i); i \in [1, \ell]\}$ un élément de $Red(\pi)$. Alors pour tout $i \in [1, \ell]$, il existe soit $(\rho, a) \in Jord(\pi_+)$ tel que $\rho_i \simeq \rho$ et $a = 2x_i - 1$ soit il existe $(\rho, d, f) \in \mathcal{T}$ tel que soit $\rho_i \simeq \rho$ et $x_i = d + 1$ soit $\theta(\rho_i) \simeq \rho$ et $x_i = f + 1$.*

On peut ajouter que, pour tout $i \in [1, \ell]$, π_i vérifie une inclusion comme dans 4.3 en remplaçant dans celle-ci certains (ρ, d, f) par $(\rho, d + 1, f)$ ou $(\rho, d, f + 1)$ et/ou en remplaçant π_+ par une série discrète totalement positive $\pi_{i,+}$ ayant comme blocs de Jordan ceux de π_+ mais certains d'entre eux passant de (ρ, a) à $(\rho, a + 2)$. Comme cela et en tenant compte des inégalité $x_j \geq x_{j+1}$, il suffit de faire la preuve avec $\ell = 1$. On a par hypothèse :

$$\pi_1 \hookrightarrow \rho_1|\,|^{x_1} \times \pi \hookrightarrow$$

$$\rho_1|\,|^{x_1} \times_{(\rho,d,f)\in\mathcal{T}} \langle d,-f\rangle_\rho \times \pi_+.$$

On déplace $\rho_1|\,|^{x_1}$ vers la droite ; c'est toujours possible par isomorphisme au-dessus d'une représentation $\langle d,-f\rangle_\rho$ si l'une au moins des deux conditions suivantes n'est pas satisfaite : $\rho_1 \simeq \rho$ et $x_1 = d+1$. Si les deux conditions sont satisfaites (c'est une des éventualités du lemme) on a deux cas possibles : soit π_1 est inclus dans l'induite obtenue en remplaçant $\langle d,-f\rangle_\rho$ par $\langle d+1,-f\rangle_\rho$, soit on peut quand même faire commuter $\langle d,-f\rangle_\rho$ et $\rho_1|\,|^{x_1}$ en gardant l'inclusion. Le premier cas, termine la preuve et dans le deuxième on continue : si on arrive jusqu'à

$$\pi_1 \hookrightarrow \times_{(\rho,d,f)\in\mathcal{T}}\langle d,-f\rangle_\rho \times \rho|\,|^{x_1} \times \pi_+,$$

on peut remplacer $\rho|\,|^{x_1} \times \pi_+$ par un sous-quotient irréductible. Tous les sous-quotients irréductibles sont des séries discrètes positives sauf celui qui est inclus dans $\theta(\rho_1)|\,|^{-x_1}\times\pi_+$. Sauf le dernier cas, on est encore dans l'une des éventualités du lemme grâce à 4.1. Reste le dernier cas, où on pousse $\theta(\rho_1)|\,|^{-x_1}$ vers la gauche ; on obtient soit l'un des cas restant du lemme, soit

$$\pi_1 \hookrightarrow \theta(\rho)_1|\,|^{-x_1} \times_{(\rho,d,f)\in\mathcal{T}} \langle d,-f\rangle_\rho \times \pi_+.$$

Ceci est impossible car π_1 est supposée une représentation tempérée.

Corollaire *Soit π une représentation tempérée irréductible et soit $\{(\rho_i,x_i,\pi_i);\ i\in[1,\ell]\}$ un élément de $Red(\pi)$. Alors $\sum_{i\in[1,\ell]} d_{\rho_i}(2x_i-1)\le n$; supposons que l'on ait l'égalité et que pour tout $i\in[1,\ell]$, $\rho_i\simeq\theta(\rho_i)$ et x_i est un demi-entier, alors le support cuspidal étendu de π est le support cuspidal de la représentation tempérée $\times_{i\in[1,\ell]}St(\rho_i,2x_i-1)$ de $GL(n,E)$.*

En tenant compte du lemme précédent (cf. aussi la preuve de ce lemme), on a

$$\sum_{i\in[1,\ell]} d_{\rho_i}(2x_i-1) \le \sum_{(\rho,d,f)\in\mathcal{T}} d_\rho(2d+1+2f+1) + \sum_{(\rho,a)\in Jord(\pi_+)} d_\rho a.$$

Evidemment $2d+1+2f+1 = 2(d+f+1)$ vaut 2 fois la longueur du segment $[d,-f]$ et le terme de droite vaut donc exactement n. L'égalité force le fait que pour tout $(\rho,d,f)\in\mathcal{T}$, il existe $i\in[1,\ell]$ tel que $\rho_i\simeq\rho$ et $x_i=d+1$ et il existe $j\in[1,\ell]$ tel que $\rho_j\simeq\theta(\rho_j)=\rho$ et $x_j=f+1$ et que pour tout $(\rho,a)\in Jord(\pi_+)$ il existe $i'\in[1,\ell]$ tel que $\rho_{i'}\simeq\rho$ et $2x_{i'}-1=a$. Ce qui nous intéresse, avec les hypothèses de la fin du lemme est que cela force tout triplet $(\rho,d,f)\in\mathcal{T}$ de vérifier $\rho\simeq\theta(\rho)$ et $d,f\in 1/2\mathbb{Z}_{\ge 0}$ puisque le suppose que les $\rho_i\simeq\theta(\rho_i)$ et $x_i\in 1/2\mathbb{N}$ et $x_i>1/2$. Par définition du support cuspidal étendu, celui de π est l'union pour $(\rho,d,f)\in\mathcal{T}$ des ensembles $\rho|\,|^x; x\in[d,-f]$ et $\theta(\rho)|\,|^{-x}; x\in[d,-f]$ auquel on ajoute le support cuspidal étendu de π_+. On peut donc récrire les ensembles ci-dessus sous la forme $\rho|\,|^x$ avec $x\in[d,-d]\cup[f,-f]$. Ceci est le support cuspidal de la représentation tempérée $St(\rho,2d+1)\times St(\rho,2f+1)$. Comme on sait déjà que le support cuspidal étendu de π_+ est celui d'une représentation tempérée, cela conclut la preuve du lemme.

4.5 Paquet stable de séries discrètes

Théorème *Soit π une série discrète de G ; soit aussi π^{GL} une représentation θ-elliptique de $\tilde{GL}$ dont la θ-trace a une projection sur $I_{cusp}^{G,st}$ qui n'est pas orthogonale à π. Alors le support cuspidal de π^{GL} coïncide avec le support cuspidal étendu de π.*

On va démontrer en même temps le complément important suivant :

Proposition *Soit π une représentation elliptique de G dont la projection de la trace sur $I_{cusp}^{G,st}$ n'est pas nulle alors π est une série discrète.*

On procède ainsi : on fixe une représentation θ-elliptique de $\tilde{GL}(n,E)$ que l'on note π^{GL} ; on suppose que la θ-trace de π^{GL} a une projection non nulle sur $I_{cusp}^{G,st}$ et on montre que toute représentation elliptique intervenant dans cette θ trace est une série discrète et que le support cuspidal étendu de cette série discrète est le support cuspidal de π^{GL}.

On écrit π^{GL} sous la forme $\times_{(\rho_i,a_i)\in i\in[1\ell]}St(\rho_i,a_i)$ et on suppose que pour $i\in[1,\ell[$, $a_i\leq a_{i+1}$. On fixe π une représentation tempérée irréductible qui compose une des représentations elliptiques intervenant dans la projection sur $I_{cusp,st}^{G}$ de cette θ-trace. On va montrer que pour tout $i\in[1,\ell]$, il existe une représentation tempérée irréductible π_i tel que $\{(\rho_i,(a_i+1)/2,\pi_i); i\in[1,\ell]$ soit dans $Red(\pi)$. Vérifions que cela suffira : on sait par construction que

$$\sum_{i\in[1,\ell]} d_{\rho_i}a_i = n.$$

Ainsi le support cuspidal étendu de π est le support cuspidal de π^{GL} ; comme π^{GL} est elliptique tous les (ρ_i,a_i) sont distincts avec $\rho_i\simeq\theta(\rho_i)$ pour tout i ; et π est nécessairement une série discrète : en effet une représentation tempérée qui n'est pas une série discrète vérifie une inclusion comme en 4.3 (1) mais avec un des triplets (ρ,d,f) vérifiants $d=f$; cela force l'existence de $i\neq i'\in[1,\ell]$ avec $\rho_i\simeq\rho$ et $a_i=2d-1$ et $\theta(\rho_{i'})=\rho$ avec $a_{i'}=f+1$, d'où $\rho_i=\rho_{i'}$ et $a_i=a_{i'}$ ce qui a été exclu.

Il reste donc à construire les π_i pour $i\in[1,\ell]$; on procède de façon descendante. On pose $n_+:=n+\sum_{i\in[1,\ell]}2d_{\rho_i}$ et on note π_+^{GL} la représentation de $GL(n_+,E)$ égale à $\times_{i\in[1,\ell]}St(\rho_i,a_i+2)$. On considère la projection de la θ-trace de π_+^{GL} sur $I_{cusp}^{G_{n_+},st}$; on sait d'après 2.6 qu'en appliquant

$$\circ_{i\in[\ell,1]}Jac_{\rho_i|\,|^{(a_i+1)/2}}$$

à cette projection, on trouve la projection de la θ-trace de π^{GL} sur $I_{cusp}^{G_n,st}$. En tenant maintenant compte de 2.7, on voit qu'il existe une représentation notée π_ℓ tempérée irréductible qui est composante d'une représentation elliptique intervenant dans la projection de π_+^{GL} sur I_{cusp}^{G} et telle que

$$\circ_{i\in[\ell,1]}Jac_{\rho_i|\,|^{(a_i+1)/2}}\pi_\ell=\pi.$$

On pose, pour tout $i \in [1, \ell[$, $\pi_i = \circ_{j\in[\ell,i+1]} Jac_{\rho_j|\,|^{(a_j+1)/2}}\pi_\ell$. La représentation π_i est nécessairement tempérée car elle intervient dans la projection de

$$\times_{j\in[1,i]} St(\rho_i, a_i+2) \times_{j\in[i+1,\ell]} St(\rho_i, a_i)$$

sur $I_{cusp}^{G_{n+2\sum_{i\in[1,i]} d_{\rho_i}},st}$ et on a inductivement

$$Jac_{\rho_{i+1}|\,|^{(a_i+1)/2}}\pi_{i+1} = \pi_i.$$

Ainsi π_{i+1} est un sous-module irréductible de l'induite $\rho_{i+1}|\,|^{(a_{i+1}+1)/2} \times \pi_i$. Avec 2.7, on sait que

$$Jac_{\rho_{i+1}|\,|^{(a_{i+1}+1)/2},\rho_{i+1}|\,|^{(a_{i+1}+1)/2}}\pi_{i+1} = 0$$

et donc que $Jac_{\rho_{i+1}|\,|^{(a_{i+1}+1)/2}}\pi_i = 0$. Ainsi par réciprocité de Frobenius l'induite $\rho_{i+1}|\,|^{(a_{i+1}+1)/2} \times \pi_i$ a un unique sous-module irréductible qui est nécessairement π_{i+1}. On a donc toutes les propriétés souhaitées.

Corollaire *Soit π une série discrète de G. Il existe une unique combinaison linéaire de toutes les séries discrètes de G ayant même support cuspidal étendu que π qui soit stable et cette combinaison linéaire se transfère en l'unique représentation θ-elliptique de $\tilde{GL}(n, E)$ ayant pour support cuspidal le support cuspidal étendu de π. De plus $I_{cusp}^{G,st}$ est engendré comme espace vectoriel par ces combinaisons linéaires stables.*

On fixe π ; on a donc le support cuspidal étendu de π d'où l'existence d'une unique représentation θ-elliptique de $\tilde{GL}$ ayant pour support cuspidal le support cuspidal étendu de π ; on la note π^{GL}. On sait que π^{GL} est un transfert d'une représentation virtuelle stable π_{st} de G_n ; π_{st} est orthogonal à toute série discrète n'ayant pas même support cuspidal étendu que π d'après le théorème précédent ; cette combinaison linéaire ne peut être orthogonale à une série discrète, π', ayant même support cuspidal étendu que π car sinon π' aurait une projection nulle sur $I_{cusp}^{\underline{G},st}$ ce qui a été exclu en 2.4.

4.6 Support cuspidal étendu et endoscopie

Théorème *Soit $\underline{H}$ une donnée endoscopique elliptique de G et $\Pi_{\underline{H},st}$ une combinaison linéaire stable de séries discrètes de $\underline{H}$ ayant toutes même support cuspidal étendu ; on suppose que cette combinaison linéaire se transforme sous les automorphismes du groupe endoscopique suivant le caractère déterminé par G (le caractère trivial, ici). Le transfert endoscopique de cette distribution stable est une combinaison linéaire de représentations elliptiques de G dont toutes les composantes irréductibles ont pour support cuspidal étendu l'image (cf. la preuve) du support cuspidal étendu des représentations de $\underline{H}$ dont on est parti.*

Le lemme 2.7 n'est pas exact pour une représentation elliptique ; dans cet énoncé on prenait comme hypothèse que la représentation elliptique apparaît

dans une combinaison linéaire stable de représentations elliptiques ; or nous avons vu en 4.5 que cette hypothèse n'est pas satisfaite en général. Il faut à la place utiliser le lemme suivant, pour éviter des annulations dans le calcul de modules de Jacquet :

Lemme *Soit π une représentation tempérée irréductible composante d'une représentation elliptique de G. Et soit ρ une représentation cuspidale unitaire de $GL(d_\rho, E)$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors $Jac_{\rho|\,|^x} \circ Jac_{\rho|\,|^x}\pi$ est soit nul soit est une représentation irréductible, π', et on a alors que π est l'unique sous-représentation irréductible de l'induite $\rho|\,|^x \times \rho|\,|^x \times \pi'$.*

Il existe nécessairement une donnée endoscopique elliptique $\underline{H}$ de G (qui peut être G lui-même) et une combinaison linéaire stables de séries discrètes de $\underline{H}$, $\Pi_{\underline{H},st}$, vu comme un élément de $I_{cusp}^{\underline{H},st}$, se transformant correctement sous les automorphismes de la donnée endoscopique, dont le transfert à G a π comme l'une de ses composantes.

En procédant comme dans la preuve de 2.7, on note t le plus grand entier tel qu'il existe τ une composante du transfert tel que $Jac_{\rho|\,|^x} \circ \cdots \circ Jac_{\rho|\,|^x}\tau$ est non nul où il y a t facteurs $Jac_{\rho|\,|^x}$. On vérifie ici que t est inférieur ou égal au plus grand entier t' tel que $Jac_{\rho|\,|^x} \circ \cdots \circ Jac_{\rho|\,|^x}\Pi_{\underline{H},st}$ soit non nul, où il y a t' facteur $Jac_{\rho|\,|^x}$. On calcule t' en utilisant 2.7 ; t' vaut au plus 2, puisque $\underline{H}$ est un produit d'au plus deux groupes. D'où $t \leq 2$. Le cas $t = 2$ est tout à fait possible. La suite du lemme est comme en 2.7.

On définit ici $Red(\pi)$ comme étant l'ensemble des suites, de la forme

$$(\rho_i, x_i, \pi_i); i \in [1, \ell]$$

(ℓ dépend de la suite) tel que pour tout $i \in [1, \ell]$ $x_i \geq x_{i+1} > 1/2$, π_i est une représentation tempérée (on pose $\pi_0 = \pi$) telle que $\pi_{i+1} = \pi_i$ si $(\rho_i, x_i) = (\rho_{i+1}, x_{i+1})$ et $\pi_i \hookrightarrow \rho_i|\,|^{x_i} \times \pi_{i-1}$ si $(\rho_i, x_i) \neq (\rho_{i+1}, x_{i+1})$ et dans le cas restant :

$$\pi_{i+1} = \pi_i \hookrightarrow \rho_i|\,|^{x_i} \times \rho_i|\,|^{x_i} \times \pi_{i-1}.$$

Ensuite on démontre comme dans 4.4 que pour tout élément comme ci-dessus de $Red(\pi)$, on a $\sum_{i\in[1,\ell]} d_{\rho_i}(2x_i - 1) \leq n$. La fin du corollaire de loc. cite est aussi exacte, c'est-à-dire que l'égalité couplée avec le fait que les x_i sont des demi-entiers et $\rho_i \simeq \theta(\rho_i)$ entraînent que le support cuspidal de π est le support cuspidal de la représentation tempérée $\times_{i\in[1,\ell]} St(\rho_i, 2x_i - 1)$.

On démontre maintenant le théorème ; on va le spécialiser au cas du groupe unitaire car c'est dans ce cas que l'image des groupes endoscopiques fait intervenir quelques torsions. On fixe donc une décomposition $n = n_1 + n_2$ et $\underline{H}$ la donnée endoscopique associé (cf[33] 1.8) ; pour nous, on voit $\underline{H}$ comme un produit de groupes unitaires, $H := U(n_1, E/F) \times U(n_2, E/F)$ et la donnée de deux caractères de E^*, ω_i pour $i = 1, 2$ tel que pour $i = 1, 2$, la restriction de ω_i à F^* vaut le caractère quadratique associé à l'extension E de F si $n - n_i$ est impaire et est le caractère trivial sinon. On suppose que $\omega_1 = \omega_2$ si $n_1 = n_2$. Il

y a un automorphisme non trivial de la donnée endoscopique que si $n_1 = n_2$ et l'automorphisme non trivial échange de façon évidente les deux facteurs.

Un paquet stable de séries discrètes, pour $U(n_1, E/F) \times U(n_2, E/F)$ est associé à certaines représentations tempérées de $GL(n_1, E) \times GL(n_2, F)$ que l'on a donc le droit d'écrire sous la forme

$$\times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}_1} St(\rho \otimes \omega_1, a) \times \times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}_2} St(\rho \otimes \omega_2, a). \tag{1}$$

En ayant ainsi glissé les torsions dans la définition de $\mathcal{E}_i$ pour $i = 1, 2$ l'image du support cuspidal pour $GL(n, E)$ est tout simplement le support cuspidal de la représentation $\times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2} St(\rho, a)$.

Le paquet (1) n'est stable sous l'automorphisme non trivial quand il existe que si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ et si cette condition est vérifiée, la distribution stable associée au paquet de séries discrètes de $U(n/2, E/F) \times U(n/2, E/F)$ ayant comme support cuspidal étendu le support cuspidal de (1) est nécessairement invariant par l'automorphisme par unicité. Dans les autres cas, il faut éventuellement sommer deux paquets de représentations.

Le transfert entrelace $Jac_{\rho|\,|^x}$ avec $Jac_{\rho\otimes\omega_1|\,|^x} \otimes Id \oplus Id \otimes Jac_{\rho\otimes\omega_2|\,|^x}$. C'est là que l'on voit que comme $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ peut avoir de la multiplicité 2, on peut très bien avoir $t' = 2$ avec les notations du début de la preuve.

On fixe $\mathcal{E}_i$ pour $i = 1, 2$ comme dans (1) et on démontre le théorème pour la distribution stable associée rendue, si nécessaire, invariante sous le groupe d'automorphisme de la donnée endoscopique. On pose $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ et on ordonne $\mathcal{E}$ en notant ℓ le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ en prenant en compte les multiplicités éventuelles et en écrivant :

$$\mathcal{E} = \{(\rho_i, a_i); i \in [1, \ell]\},$$

l'ordre véfiiant : s'il existe $i \neq j \in [1, \ell]$ tel que $\rho_i = \rho_j$ et $a_i = a_j$ alors $|i-j| = 1$ et $a_1 \geq \cdots \geq a_\ell$.

On considère $n_+ = n + 2\sum_{i\in[1,\ell]} d_{\rho_i}$ et pour $i = 1, 2$,

$$n_{i,+} = n_i + 2 \sum_{(\rho,a)\in\mathcal{E}_i} d_\rho.$$

Pour la donnée endoscopique $U(n_{1,+}, E/F) \times U(n_{2,+}, E/F)$ de $U(n_+, E/F)$ on considère la distribution stable combinaisons linéaires de séries discrètes associée (par le corollaire 4.5) à $\mathcal{E}_{1,+} \times \mathcal{E}_{2,+}$ où pour $i = 1, 2$, on obtient $\mathcal{E}_{i,+}$ en remplaçant (ρ, a) par $(\rho, a + 2)$ dans $\mathcal{E}_i$. On rend éventuellement invariant ce paquet par l'automorphisme de la donnée endoscopique et on le transfère ; la situation de départ s'obtient à partir de cette situation en appliquant $\circ_{i\in[1,\ell]} Jac_{\rho_i|\,|^{(a_i+1)/2}}$ à un scalaire près (qui dépend des multiplicités) mais qui n'importe pas. Ainsi, en tenant compte du lemme ci-dessus, dans ce transfert, il existe une composante π_+ tel qu'à un scalaire près :

$$\pi = \circ_{i\in[1,\ell]} Jac_{\rho_i|\,|^{(a_i+1)/2}} \pi_+.$$

Ensuite on termine la démonstration comme dans le cas des séries discrètes.

4.7 Définition des paquets de Langlands des séries discrètes

Théorème *Le support cuspidal étendu est l'invariant déterminant les paquets de Langlands. Ou encore, la combinaison linéaire stable de série discrète décrite dans le corollaire 4.5 est la projection de la trace de π sur $I_{cusp}^{\underline{G},st}$.*

Remarque *Soit π une représentation elliptique de G et soit $\underline{H}$ une donnée endoscopique elliptique G ; alors la projection de la trace de π sur $I_{cusp}^{\underline{H},st}$ est soit 0 soit exactement (à un scalaire près) le paquet invariant sous le groupe d'automorphisme de $\underline{H}$ porté par les séries discrètes de $\underline{H}$ dont l'image du support cuspidal étendu est exactement le support cuspidal étendu de π.*

La remarque est plus générale que le théorème c'est donc elle que nous allons montrer mais en fait elle n'apporte pas grand chose car dans l'énoncé on peut très certainement enlever le "est soit 0" et ajouter à la fin quand un tel paquet existe. On ne démontre pas ce résultat plus général ici car la démonstration potentielle doit imiter celle d'Arthur et en même temps calculer les coefficients de ces projections ; cela nécessite de repasser à une situation globale et donc dépasse le cadre de ce travail ; le cas des groupes orthogonaux et symplectiques est fait par [6] et celui des groupes unitaires est dans [31] et [25].

On fixe une représentation elliptique de G. Pour toute donnée endoscopique elliptique $\underline{H}$ (prise à équivalence près) de G on note $\pi^{H,st}$ la projection de la trace de π sur $I_{cusp}^{\underline{H},st}$ et on décompose $\pi^{H,st}$ en $\pi_0^{H,st} + \pi_1^{H,st}$, où $\pi_1^{H,st}$ est la projection de $\pi^{H,st}$ sur l'espace orthogonal à toute trace de série discrète de $\underline{H}$ dont le support cuspidal étendu n'est pas celui de π ; ainsi $\pi_i^{H,st}$ est invariant par le groupe d'automorphisme de $\underline{H}$ pour $i = 0, 1$. On sait avec 4.6 que le transfert de $\oplus_{\underline{H}} \pi_1^{H,st}$ est un élément de I_{cusp}^{G} orthogonal à la trace de π. Donc la trace de π est le transfert de $\oplus_{\underline{H}} \pi_0^{H,st}$ et le résultat.

4.8 Conclusion

Etant donné une série discrète π de G, on a associé à π deux distributions stables : l'une est obtenue naturellement en projetant un pseudocoefficient cuspidal de π dans $I_{cusp}^{G,st}$ (2.3) et l'autre en considérant l'unique élément de $I_{cusp}^{G,st}$ non orthogonal à π et dont le transfert à $I_{cusp}^{\vec{GL}}$ est une représentation irréductible. Le théorème ci-dessus montre que ces deux définitions coïncident. On définit ainsi le paquet de Langlands de π comme l'ensemble des séries discrètes π' de G qui constituent la distribution stable précédente ; ce sont précisément les séries discrètes ayant le même support cuspidal étendu que π. Ainsi tous les paquets de Langlands sont disjoints.

On étend ces définitions aux cas des représentations tempérées en utilisant le fait que l'induction commute au transfert.

5 Morphisme dans le L-groupe

Maintenant que l'on a démontré que les paquets de Langlands des séries discrètes de G sont paramétrés par certaines représentations tempérées de $\tilde{GL}(n,E)$, on peut associer à un tel paquet le morphisme de Langlands de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe de $GL(n,E)$ vu comme groupe défini sur F (si $E \neq F$). Le but de cette partie est de démontrer que l'image, à conjugaison près, se factorise par le L-groupe de G. Cet aspect est fait dans [6] en quelques pages et il est tout à fait exact qu'il n'y a rien de profond dans la démonstration ; toutefois la démonstration utilise elle un résultat profond qui est l'égalité des fonctions L dites d'Artin (qui ont été définies par Shahidi) avec les fonctions L que l'on obtient via la correspondance de Langlands. Ce résultat est dû à Hénniart en [16] et utilise les résultats de Shahidi [28].

5.1 Le cas des morphismes irréductibles

Proposition *Soit π^{GL} une série discrète irréductible de $\tilde{GL}$ qui est θ invariante. Alors il existe un unique sous-groupe endoscopique elliptique simple tel que le paramètre de Langlands de π^{GL} se factorise, à conjugaison près, par son L-groupe*

Le cas de $GL(n,F)$ et de son automorphisme extérieur est bien connu : un tel morphisme est soit orthogonal, soit symplectique, cela se voit sur l'existence ou non de pôle à la fonction $L(\pi^{GL},r,s)$ en $s=0$ pour r soit la représenation $Sym^2\mathbb{C}^n$ soit la représentaiton $\wedge^2\mathbb{C}^n$ de $GL(n^*,\mathbb{C})$; un pôle à la fonction L associé à Sym^2 ne suffit pas pour déterminer le L groupe, ce qui est bien connu depuis longtemps : l'existence du pôle assure que le morphisme se factorise par $O(n,\mathbb{C})$. En composant avec le déterminant, on obtient un caractère quadratique qui, si n est pair, détermine le discriminant du groupe orthogonal (et donc l'action du groupe de Galois, pour le L-groupe) et si n est impair est le caractère χ de [33] 1.8. Cela se généralise (cf. [4] paragraphe 2, page 68) au cas de $GL(n,F) \times GL(1,F)$.

Le cas moins connu est celui où E est une extension quadratique de F donnant lieu aux fonctions L d'Asai. Et on va le traiter ici mais le résultat n'est évidemment pas nouveau, bien au contraire (cf. par exemple [26],[7]).

5.2 Le cas des groupes unitaires et de leur groupe dual

Pour la commodité du lecteur on récrit ici le formalisme de Langlands concernant les groupes unitaires.

Soit π une représentation de $GL(n,E)$; on lui associe, via la fonctorialité de Langlands, un morphisme de $W_E \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $GL(n,\mathbb{C})$. On note $\psi_{\pi,E}$ le morphisme ainsi associé.

Remarque *On suppose que π est une série discrète autocontragrédiente ; alors il existe un signe λ_π tel que pour tout $\sigma \in W_F - W_E$, il existe $\alpha \in GL(n,\mathbb{C})$ tel*

que

$$\psi_{\pi,E}(\sigma^2) = \lambda_\pi \, {}^t\alpha^{-1} \, \alpha \tag{1}$$

$$\forall w \in W_E \times SL(2,\mathbb{C}), \psi_{\pi,E}(\sigma^{-1} w \sigma) = \alpha^{-1} \, {}^t\psi_{\pi,E}(w)^{-1}\alpha. \tag{2}$$

On vérifie d'abord que si λ_π existe tel que (1) et (2) sont vérifiés pour un choix de σ alors, pour ce λ_π, (1) et (2) sont vérifiés pour tout choix de σ, bien sûr α dépend lui de σ. L'unicité de λ_π est aussi claire car par hypothèse π est une série discrète et $\psi_{\pi,E}$ définit donc une représentation irréductible de W_E ; ainsi α en (2) est déterminé à un scalaire près.

Montrons l'existence de λ_π. On fixe donc σ et α tel que (2) soit vérifié, ce qui est possible puisque π est supposé autocontragrédiente. On pose $\beta := \psi_{\pi,E}(\sigma^2)$. En remplaçant dans (2), w par $\sigma^{-1} w \sigma$, on obtient, pour tout $w \in W_E \times SL(2,\mathbb{C})$:

$$\beta^{-1}\psi_{\pi,E}(w)\beta = \alpha^{-1} \, {}^t\psi_{\pi,E}(\sigma^{-1} w \sigma)^{-1}\alpha$$

et en appliquant encore (2), cela vaut : $\alpha^{-1} \, {}^t\alpha \psi_{\pi,E}(w) \, {}^t\alpha^{-1}\alpha$. Par irréductibilité de $\psi_{\pi,E}$, il existe donc un scalaire λ tel que

$$\beta = \lambda \, {}^t\alpha^{-1}\alpha.$$

On applique (2) à $w = \sigma^2$ et on obtient $\beta = \alpha^{-1} \, {}^t\beta^{-1}\alpha$ et en remplaçant β par la valeur déjà trouvée :

$$\lambda \, {}^t\alpha^{-1}\alpha = \lambda^{-1} \, \alpha^{-1}\alpha \, {}^t\alpha^{-1}\alpha;$$

c'est-à-dire $\lambda^2 = 1$. Et λ satisfait (1).

Définition *Soit π une représentation θ-elliptique de $GL(n,E)$; ainsi π est une induite de séries discrètes, chaque série discrète étant elle-même autocontragrédiente et n'intervenant qu'une fois. On parle donc du signe attaché à chaque série discrète composant π.*

Proposition *Soit π une représentation θ elliptique de $GL(n,E)$. Alors le paramètre de Langlands de π se factorise, à conjugaison près, par le L groupe de $U(n,E/F)$ si et seulement si le signe associé à chaque série discrète composant π vaut $(-1)^{n-1}$.*

On note σ_0 l'élément non trivial du groupe de Galois de E/F et θ^* l'automorphisme dual de θ.

On commence par rappeler que le L-groupe de $GL(n,E)$ vu comme F-groupe est isomorphe à

$$(GL(n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C})) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F), \tag{1}$$

où σ_0 agit en permutant les deux facteurs. L'action de θ^* est alors donnée par :

$$\theta^*(g,g') = (J \, {}^t g'^{-1} J^{-1}, J \, {}^t g^{-1} J^{-1}),$$

où J est la matrice antidiagonale ayant alternativement des 1 et des -1 ; en particulier $J^{-1} =^t J = (-1)^{n-1}J$.

Le groupe dual de $U(n, E/F)$ est exactement l'ensemble des éléments invariants par θ^* ; il est isomorphe à $GL(n, \mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$ où σ_0 agit sur $GL(n, \mathbb{C})$ par $\sigma_0(g) = J\,{}^t g^{-1} J^{-1}$, par l'isomorphisme, valant l'identité sur $Gal(E/F)$ et vérifiant

$$g \in GL(n, \mathbb{C}) \mapsto (g, J^t g^{-1} J^{-1}).$$

On associe à π son paramètre de Langlands $\psi_{\pi,E}$. On suppose d'abord que toute série discrète constituant π a pour signe $(-1)^{n-1}$ et on va montrer que le paramètre de Langlands de π se factorise, à conjugaison près, par le L-groupe de $U(n, E/F)$.

On note $\psi_{\pi,E}$ le morphisme de Langlands associé à π vu comme morphisme de $W_E \times SL(2, \mathbb{C})$ dans $GL(n, \mathbb{C})$. Pour écrire le morphisme de Langlands de π quand on voit $GL(n, E)$ comme un groupe sur F, on fixe σ un élément de $W_E - W_F$ et on note $\psi_{\pi,F}$ le morphisme de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans (1) :

$$\psi_{\pi,F}(w) = (\psi_{\pi,E}(w), \psi_{\pi,E}(\sigma^{-1} w \sigma)),$$
$$\psi_{\pi,F}(\sigma) = \sigma_0(1, \psi_{\pi,E}(\sigma^2)).$$

Pour éviter des erreurs on fait les vérifications usuelles :

$$\psi_{\pi,F}(\sigma)^{-1}\psi_{\pi,F}(w)\psi_{\pi,F}(\sigma) = (1, \psi_{\pi,E}(\sigma^{-2}))(\psi(\sigma^{-1}w\sigma), \psi_{\pi,E}(w))(1, \psi_{\pi,E}(\sigma^2))$$
$$= (\psi_{\pi,E}(\sigma w \sigma^{-1}), \psi_{\pi,E}(\sigma^{-2} w \sigma^2)) = \psi_{\pi,F}(\sigma^{-1} w \sigma);$$
$$\psi_{\pi,F}(\sigma)^2 = (\psi_{\pi,E}(\sigma^2), \psi_{\pi,E}(\sigma^2)) = \psi_{\pi,F}(\sigma^2).$$

De plus le choix de σ n'influe qu'à conjugaison près.

On écrit π comme une induite de série discrète ; donc le paramètre de π est la somme directe des paramètres de chacune de ces séries discrètes. On applique la remarque précédente à chaque série discrète d'où une matrice α de $GL(n, \mathbb{C})$ obtenue en prenant la somme directe de celles convenant pour chaque série discrète. Ici on suppose uniquement que le signe associé à chaque série discrète ne dépend que de π et on le note λ_π. D'où

$$\forall w \in W_E \times SL(2, \mathbb{C}), \psi_{\pi,F}(w) = (\psi_{\pi,E}(w), \alpha^{-1}\,{}^t\psi_{\pi,E}(w)\alpha),$$
$$\psi_{\pi,F}(\sigma) = \sigma_0(1, \lambda_\pi^t \alpha^{-1}\alpha).$$

On calcule le conjugué $\psi'_{\pi,F} := (1, J\alpha)\psi_{\pi,F}(1, \alpha^{-1}J^{-1})$ et on a :

$$\forall w \in W_E \times SL(2, \mathbb{C}), \psi_{\pi,F}(w) = (\psi_{\pi,E}(w), J^t\psi_{\pi,E}(w)^{-1}J^{-1}); \tag{2}$$
$$\psi'_{\pi,F}(\sigma) = \sigma_0(J\alpha, 1)(\psi_{\pi,E}(\sigma^2), 1)(1, \alpha^{-1}J^{-1}) =$$
$$\sigma_0(J\alpha, \lambda_\pi^t \alpha^{-1} J^{-1}). \tag{3}$$

On remarque que les éléments de (2) sont bien invariants sous θ^*. Pour (3), on remarque d'abord que

$$J\,{}^t(J\alpha)^{-1}J^{-1} = (J\,{}^tJ^{-1})^t\alpha^{-1}J^{-1} = (-1)^{n-1}({}^t\alpha^{-1}J^{-1}).$$

Ainsi (3) est dans le commutant de θ^* si et seulement si $\lambda_\pi = (-1)^{n-1}$.

Pour la réciproque, on procède en sens inverse. Cela termine la preuve.

5.3 Lien avec les fonctions L d'Asai

On rappelle la definition de la fonction L d'Asai (cf. [17]) : un peu plus généralement on fixe d un entier et un signe η et on considère la représentation $Asai_\eta$ de $(GL(d,\mathbb{C}) \times GL(d,\mathbb{C})) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$ dans $\mathbb{C}^{d^2}$ définie par :

$$\forall A \in End(\mathbb{C}^d), \forall g, g' \in GL(d,\mathbb{C}) Asai_\eta(g,g')(A) = gA\,{}^t g'$$

et pour σ_0 l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et A comme ci-dessus

$$Asai_\eta(\sigma_0)A = \eta\,{}^t A.$$

Corollaire *Soit π une représentation θ-elliptique de $GL(n,E)$; on écrit $\pi = \times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} St(\rho,a)$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble de couples formés d'une représentation cuspidale ρ de $GL(d_\rho,E)$ et d'un entier a. Le paramètre de π se factorise (à conjugaison près) par le L-groupe de $U(n,E/F)$ si et seulement si pour chaque couple $(\rho,a) \in \mathcal{E}$, la fonction $L(\sigma,\rho_\eta,s)$ a un pôle en $s=0$, pour $\eta = (-1)^{n-1}$ si a est impair et $\eta = (-1)^n$ si a est pair.*

Pour ce corollaire on utilise le fait que la fonction L d'Asai définie par Shahidi et par la classification de Langlands sont les mêmes d'après [16]. Ici on pourrait formuler le lemme en restant uniquement du côté galoisien mais le corollaire nous servira en utilisant l'égalité des fonctions L.

Etant donné la proposition de 5.2 déjà montrée, il suffit de considérer le cas où π est une série discrète.

Pour démontrer le corollaire, on écrit π sous la forme $St(\rho,a)$ et on montre que $\lambda_\pi = (-1)^{a-1}\lambda_\rho$. On garde les notations de 5.2 ; on écrit le paramètre de ρ :

$$\psi_{F,\rho} : W_F \to (GL(d_\rho,\mathbb{C}) \times GL(d_\rho,\mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(E/F),$$

associé au morphisme $\psi_{E,\rho}$ donné par la correspondance de Langlands.

La représentation de dimension a de $SL(2,\mathbb{C})$ donne lieu à un morphisme $\psi_a : SL(2,\mathbb{C}) \to GL(a,\mathbb{C})$. On obtient le morphisme associé à π, $\psi_{E,\pi}$ en faisant le produit tensoriel, $\psi_{E,\rho} \otimes \psi_a$ suivi de l'inclusion de $GL(d_\rho,\mathbb{C}) \times GL(a,\mathbb{C})$ dans $GL(ad_\rho,\mathbb{C})$. Ainsi on fixe un élément, α_1 de $GL(d_\rho,\mathbb{C})$ qui conjugue $\psi_{E,\rho}$ et son transconjugué et élément α_2 de $GL(a,\mathbb{C})$ qui conjugue ψ_a et ${}^t\psi_a^{-1}$. L'élément noté α dans la remarque de 5.2 peut être choisi comme valant $\alpha_1 \times \alpha_2$ vu comme un élément de $GL(d_\rho,\mathbb{C}) \times GL(a,\mathbb{C}) \hookrightarrow GL(ad_\rho,\mathbb{C})$.

On a donc $\psi_{E,\pi}(\sigma_0^2) = \lambda_\pi\,{}^t\alpha^{-1}\alpha$ et

$${}^t\alpha^{-1}\alpha = {}^t\alpha_1^{-1}\alpha_1 \times {}^t\alpha_2^{-1}\alpha_2.$$

Mais ψ_a est orthogonal si a est impair et symplectique sinon, et donc ${}^t\alpha_2^{-1}\alpha_2 = (-1)^{a-1}$. De plus par définition de λ_ρ, on a

$$\psi_{E,\rho}(\sigma_0^2) = \lambda_\rho\,{}^t\alpha_1^{-1}\alpha_1.$$

Comme $\psi_{E,\pi}(\sigma_0^2) = \psi_{E,\rho}(\sigma_0^2)$, on en déduit :

$$\lambda_\pi\,{}^t\alpha_1^{-1}\alpha_1(-1)^{a-1} = \lambda_\rho\,{}^t\alpha_1^{-1}\alpha_1.$$

D'où $\lambda_\pi = \lambda_\rho(-1)^{a-1}$ comme cherché.

Il reste à montrer que pour ρ une représentation cuspidale autocontragrédiente, $L(\rho, Asai_\eta, s)$ a un pôle en $s = 0$ exactement quand $\eta = \lambda_\rho$. On a décrit le morphisme de W_F dans $(GL(n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C})) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$ associé à ρ dans la remarque de 5.2. On reprend les notations de loc. cite en remplaçant π par ρ et on montre $Asai_{\lambda_\rho} \circ \psi_{\rho,F}$ laisse la matrice ${}^t\alpha^{-1}$ invariante. Pour cela on rappelle que pour tout $w \in W_E$

$$\psi_{\rho,F}(w) = (\psi_{\rho,E}(w), \alpha^{-1}\, {}^t\psi_{\rho,E}(w)^{-1}\alpha)$$

et $Asai_{\lambda_\rho}(\psi_{\rho,F}(w))\,({}^t\alpha^{-1}) = {}^t\,\alpha^{-1}$ de façon évidente. On a pour $\sigma \in W_F - W_E$ fixé comme en loc. cite (une différence de choix fait varier α), on a

$$Asai_{\lambda_\rho}(\psi_{\rho,F}(\sigma))\,({}^t\alpha^{-1}) = Asai_{\lambda_\rho}(\sigma_0)({}^t\alpha^{-1}\, {}^t(\psi_{\rho,E})(\sigma^2)) =$$

$$\lambda_{rho} Asai_{\lambda_\rho}(\sigma_0)(\alpha^{-1}) = {}^t\,\lambda^{-1}.$$

Ainsi $L(\rho, Asai_{\lambda_\rho}, s)$ a un pôle en $s = 0$. De plus

$$L(\rho \times \theta(\rho), s) = L(\rho, Asai_+, s)L(\rho, Asai_-, s)$$

et le premier terme n'a qu'un pôle d'ordre 1 en $s = 0$. Ainsi $L(\rho, Asai_{-\lambda_\rho}, s)$ n'a pas de pôle en $s = 0$. Cela termine la preuve.

5.4 Groupes endoscopiques de $GL(n,E).\theta$ et image des paramètres de Langlands autoduaux

L'inclusion du L-groupe d'un groupe endoscopique de $U(n, E/F)$ dans celui de $U(n, E/F)$ tient compte des différences de parité (cf. par exemple [33]) et, pour étudier les groupes unitaires, il faut donc choisir un caractère de E^* dont la restriction à F^* est le caractère quadratique correspondant à l'extension E de F ; on note ω un tel caractère. Ce caractère ω sert aussi à décrire l'inclusion des L-groupes des groupes endoscopiques de $GL(n,E).\theta$ dans celui de $GL(n,E)$ (cf. aussi [33]) et il n'intervient pas dans les énoncés quand on les formule correctement.

La proposition ci-dessous revient au cas général considéré dans cet article.

Proposition *Soit π une représentation θ-elliptique de $\tilde{GL}$.*

(i) Il existe un unique sous-groupe endoscopique elliptique de $\tilde{GL}.\theta$ tel que le paramètre de π se factorise par l'image de son L-groupe.

(ii)On suppose que l'unique groupe endoscopique elliptique défini en (i) est simple. Alors π n'est pas une série discrète si et seulement si le paramètre de π se factorise par l'image du L-groupe d'un sous-groupe endoscopique propre de ce groupe.

Cette proposition est de l'algèbre linéaire dans le L-groupe ; elle ne pose aucun problème pour les groupes orthogonaux ou symplectiques ni pour les groupes

de similitudes (cf [4] paragraphe 2). On fait ici le cas des groupes unitaires à cause des signes.

On suppose donc que $\tilde{GL} = GL(n, E)$ avec E/F une extension quadratique. On considère les L groupes comme des extensions par W_F et pas seulement par $\mathrm{Gal}(E/F)$ mais les formules déjà donnés par exemple pour $\psi_{\pi,E}$, $\psi_{\pi,F}$ s'étendent sans problème. Dans ce lemme π n'intervient que via son paramètre.

Supposons d'abord que $\psi_{\pi,F}$ se factorise par l'image du L-groupe d'un groupe endoscopique elliptique de $GL(n, E).\theta$. On a donc une décomposition $n = n_1 + n_2$, le couple (n_1, n_2) est ordonné ; et $\psi_{\pi,E}$ est la somme directe (ou produit) $\times_{i=1,2}\psi_{i,E}$ où $\psi_{i,E}$ est à valeurs dans $GL(n_i, \mathbb{C})$. Pour $i = 1, 2$, à $\psi_{i,E}$ on associe $\psi'_{i,E}$ qui est le produit tensoriel de $\psi_{i,E}$ avec un caractère de W_E correspondant si $i = 1$ à ω^{n-n_1} et si $i = 2$ à ω^{n-n_2+1}. Et $\psi'_{i,E}$ devient un morphisme de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans le L-groupe de $GL(n_i, E)$ vu comme groupe sur F qui se factorise par le L-groupe de $U(n_i, E/F)$. Les signes associés aux composantes de $\psi'_{i,E}$ sont donc $(-1)^{n_i-1}$. Quand on revient à $\psi_{i,E}$, on voit que si $i = 1$ les signes sont $(-1)^{n-1}$ tandis que si $i = 2$ ils valent $(-1)^n$: en effet avec les notations de 5.2, les α ne changent pas mais $\psi_{i,E}(\sigma^2) = \psi'_{i,E}(\sigma^2)\omega^\delta(\sigma^2)$, où δ est convenable et $\omega(\sigma^2) = -1$ par définition.

On peut renverser les arguments grâce à 5.2 pour montrer que $\psi_{\pi,F}$ se factorise effectivement par le groupe endoscopique déterminé par les signes des composantes irréductible de $\psi_{\pi,E}$. Et cela démontre (i).

(ii) : l'hypothèse de cette partie du lemme est exactement que les signes des composants de π sont tous égaux ; le fait que π soit une série discrète revient exactement à dire que $\psi_{\pi,E}$ est irréductible. Si $\psi_{\pi,E}$ est irréductible, il n'y a pas de factorisation par l'image d'un L groupe d'un groupe endoscopique propre. Par contre si $\psi_{\pi,E}$ n'est pas irréductible, n'importe quelle factorisation $\psi_{\pi,E} = \psi_{1,E} \oplus \psi_{2,E}$ donne lieu à une factorisation par l'image du L-groupe d'un groupe endoscopique propre : la démonstration de (i) explique comment les signes des composants se transforment : par exemple dans le cas non principal où les signes valent $(-1)^n$ ils sont multipliés par en $(-1)^{n-n_i+1}$ et deviennent donc $(-1)^{n_i-1}$ pour $i = 1, 2$.

6 Morphisme de Langlands des paquets stables de séries discrètes

6.1 "Doubling method"

La doubling method a été initiée dans le lectures notes de Gelbart, Piatetski-Shapiro et Rallis en particulier dans la première partie de ce LN rédigée par Cogdell [10]. Depuis elle a été utilisée à de nombreuses reprise et dans des situations très variées. Elle est déjà utilisée avec ce même point de vue qu'ici dans [6] preuve de 6.8.1.

6.1.1 Le cas des groupes unitaires

On commence par le cas des groupes unitaires.

Lemme *Soit π une représentation cuspidale de $GL(n,E)$ autocontragrédiente. On suppose que le paramètre de π se factorise par le L-groupe du groupe endoscopique principal (resp. anti-principal) de $GL(n,E).\theta$ alors le paramètre de π se prolonge en un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe du groupe endoscopique anti-principal (resp. principal) de $GL(2n,E).\theta$. En terme de pôle de fonctions L, l'hypothèse se produit exactement quand $L(\pi, Asai_{(-1)^{n-1}}, s)$ (resp. $Asai_{(-1)^n}$) a un pôle en $s=0$. De plus $Asai_{(-1)^{n-1}}$ (resp. $Asai_{(-1)^n}$) est la représentation du groupe dual de $\tilde{GL}(n,E)$ dans le radical nilpotent du sous groupe parabolique dual du sous-groupe parabolique du groupe endoscopique anti-principal (resp. principal) de $GL(2n,E).\theta$ de sous-groupe de Levi $GL(n,E)$.*

On fixe l'espace vectoriel V défini sur F avec une structure de E-espace vectoriel. On suppose que V est muni d'une forme hermitienne et on pose $W := V \oplus V'$ où V' est l'espace V muni de la forme "opposée". Ainsi W est naturellement un espace hermitien quasi-déployé. Ce qui nous intéresse d'abord est $GL(W)$ qui double $GL(V)$.

On pose $\theta(g) := (J\,{}^t\overline{g}^{-1}J^{-1})$ pour tout $g \in GL(W)$, où J est la matrice antidiagonale avec des 1 et des -1 qui alternent. Ainsi θ laisse invariant le sous-groupe parabolique de $GL(W)$ qui stabilise l'espace V. Dualement θ^* agit dans le radical unipotent du parabolique "dual" : le sous-groupe parabolique a pour Levi le groupe isomorphe au produit de 4 copies de $GL(n,\mathbb{C})$ produit semi-direct avec $\mathrm{Gal}(E/F)$; pour σ_0 l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$, on a

$$\sigma_0(g,g',g_1,g_1') = (g_1,g_1',g,g').$$

Le radical nilpotent de l'algèbre de Lie de ce sous-groupe parabolique est isomorphe à $End(\mathbb{C}^n) \times End(\mathbb{C}^n)$ avec comme action de σ_0 :

$$\sigma_0(h,h') = (h',h).$$

De plus θ^* agit aussi, en notant J_n la matrice antidiagonale nxn qui a aussi des 1 et des -1 qui alternent (il n'est jamais important de savoir si l'on commence par un 1 ou un -1) par :

$$\theta^*(g,g',g_1,g_1') = (J_n^{-1}\,{}^t{g_1'}^{-1}J, J_n^{-1}\,{}^tg_1^{-1}J, J_n^{-1}\,{}^t{g'}^{-1}J, J_n^{-1}\,{}^tg^{-1}J),$$

pour tout $g,g',g_1,g_1' \in GL(n,\mathbb{C})$ et

$$\theta^*(h,h') = (-J_n^{-1}h'J_n, -J_n^{-1}hJ_n),$$

pour tout $h,h' \in End(\mathbb{C}^n)$.

Ainsi on identifie les éléments du sous-groupe de Levi invariant sous θ^* au groupe dual de $GL(n,E)$ par :

$$(g,g') \in GL(n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C}) \mapsto (g, J_n^{-1}\,{}^t{g'}^{-1}J_n, g', J_n^{-1}\,{}^tg^{-1}J_n),$$

ce qui est compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(E/F)$. Dans cette identification, une représentation π de $GL(n,E)$ donne lieu à la représentation $\pi \otimes \check{\pi}$ du sous-groupe de Levi $GL(n,E) \times GL(n,E)$.

On décompose l'action de θ^* sur le radical nilpotent de l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique en la somme de l'espace propre pour la valeur propre $+1$ et de l'espace propre pour la valeur propre -1, en remarquant que l'espace propre pour la valeur propre $\lambda = \pm$ est l'espace vectoriel engendré par les éléments : $(h, -\lambda J_n^{-1}\, {}^t h J_n)$, où h parcourt $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$.

Ainsi chacun de ces espaces est isomorphe à $End(\mathbb{C}^n)$ par l'isomorphisme :

$$h \in End(\mathbb{C}^n) \mapsto (hJ_n, (-1)^n \lambda\, {}^t h J_n)$$

le signe vient de ce que $J_n^{-1} = {}^t J_n = (-1)^{n-1} J_n$. Dans ces idenfications, l'action du groupe dual de $GL(n,E)$ est la représentation :

$$(g,g').h = gh\, {}^t g', \qquad \sigma_0.h = (-1)^n \lambda\, {}^t h.$$

On reprend l'astuce de [3] : dans cet article, Arthur a remarqué, bien plus généralement que dans le cas qui nous préoccupe, que la décomposition en espace propre sous θ^* est en fait une décomposition de la fonction L associé à π pour l'action du L groupe de $GL(n,E)$ dans le radical nilpotent du sous-groupe parabolique ; en effet on fixe z_0 un élément du centre de $GL(n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C})$ qui agit par -1 sur le radical nilpotent ; on prend l'élément $(-1,1)$. L'espace propre pour la valeur propre $+1$ est exactement le radical nilpotent du sous-groupe parabolique du groupe endoscopique associé au centralisateur de θ^* et de sous-groupe de Levi $GL(n,E)$ tandis que l'autre espace propre est le radical nilpotent de l'analogue mais pour le centralisateur de $z_0\theta^*$. En on obtient la décomposition :

$$L(\pi \times \check{\pi}, s) = L(\pi, Asai_+, s) L(\pi, Asai_-, s),$$

mais plus précisément on a une interprétation des fonctions L du membre de droite : supposons que pour $\lambda' \in \{\pm 1\}$ la fonction $L(\pi, Asai_{\lambda'}, s)$ a un pôle en $s = 0$, alors le paramètre de Langlands de π à valeurs dans le L-groupe de $GL(n,E)$ est dans le commutant d'un élément nilpotent du L-groupe du groupe endoscopique associé au centralisateur de θ^* si $\lambda' = (-1)^n$ et de $z_0\theta^*$ si $\lambda' = (-1)^{n-1}$. Ainsi, si $\pi \simeq \check{\pi}$ le paramètre de π se factorise par le L groupe du groupe endoscopique principal si et seulement si $L(\pi, Asai_{(-1)^{n-1}}, s)$ a un pôle en $s = 0$; et on vient de voir ci-dessus que le paramètre de π se prolonge en un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le groupe endoscopique principal de $GL(2n,E).\theta_{2n}$ si et seulement si $L(\pi, Asai_{(-1)^n}, s)$ a un pôle en $s = 0$. Cela prouve le lemme.

6.1.2 Le cas où $E = F$

Le lemme précédent est aussi vrai pour un groupe quelconque considéré ici à la différence près qu'il n'y a pas que deux groupes endoscopiques elliptiques

simples, la dichotomie se fait entre le groupe orthogonal (et ses variantes) et le groupe symplectique. Soit π une représentation cuspidale irréductible de $GL(n,F) \times F^*$ que l'on suppose isomorphe à son image sous θ. Le lemme précédent devient de façon ici évidente :

on suppose que le paramètre de π se factorise par un groupe orthogonal (ou de similitudes orthogonales) alors ce paramètre se prolonge en un paramètre de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $GL(2n,\mathbb{C})$ qui est symplectique (resp. de similitude symplectique) ;

on suppose que le paramètre de π se factorise par le groupe symplectique, ce qui nécessite que n soit pair, alors ce paramètre se prolonge en un paramètre de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $GL(2n,\mathbb{C})$ qui se factorise par le groupe $SO(2n,\mathbb{C})$. Et une assertion analogue avec le groupe des similitudes symplectiques.

6.2 Morphisme associé à une série discrète θ-stable

Proposition *Soit ρ une représentation cuspidale irréductible de $GL(n,E)$ isomorphe à $\theta(\pi)$ et soit $a \in \mathbb{N}$. La trace tordue de la représentation $St(\rho,a)$ est un transfert d'un paquet de séries discrètes du groupe endoscopique elliptique simple de $\tilde{GL}_{an}$ si et seulement si le paramètre de Langlands de $St(\rho,a)$ se factorise par le L-groupe de ce groupe endoscopique.*

Sous les hypothèses de [6], cet énoncé est 6.8.1 de [6] et sans surprise c'est la même démonstration que nous reprenons.

On traite d'abord le cas où $a = 1$ ou 2 et le cas des groupes unitaires. On fixe ρ une représentation cuspidale de $\tilde{GL}(d_\rho,E)$. Par autocontragrédience, on sait qu'il existe $\delta = 0,1$ tel que la fonction $L(\rho, Asai_{(-1)^{n-1+\delta}}, s)$ a un pôle en $s = 0$. Le paramètre de ρ se factorise par le L-groupe du groupe endoscopique principal de $\tilde{GL}.\theta$ si $\delta = 0$ et par le groupe endoscopique antiprincipal sinon (cf. le lemme 6.1.1) ; avec la même référence on sait que $St(\rho,2)$ de $\tilde{GL}(2n,E)$ a un paramètre qui se factorise par le L-groupe du groupe endoscopique antiprincipal de $\tilde{GL}(2n,E).\theta_{2n}$ si $\delta = 0$ et principal sinon. Pour $i' = p$ ou np on note $G_{n,i'}$ et $G_{2n,i'}$ les groupes endoscopique principaux ($i' = p$) ou antiprincipaux ($i' = np$). Et on pose $i = p$ si $\delta = 0$ et $i = np$ si $\delta = 1$.

On considère l'induite de ρ d'une part à $G_{2n,i'}$ pour $i' = p$ ou np. Ces induites vérifient la condition de ramification d'Harish-Chandra et l'on sait donc que l'induite de $\rho|\,|^s$ à $G_{2n,p}$ et à $G_{2n,np}$ est réductible en un point $s = s_0 \in \mathbb{R}$, point qui dépend évidemment du groupe. D'après les résultats d'Harish-Chandra et l'interprétation qu'en a donné Shahidi, ce point est $s_0 = 0$ pour le groupe $G_{2n,i'}$ où i' est tel que $L(\rho, r_{\theta,i}, s)$ n'a pas de pôle en $s = 0$ [28] où $r_{\theta,i'}$ est la représentation décrite dans le lemme 6.1.1. Ainsi $i' = i$. Alors, dans $G_{2n,i}$, l'induite de ρ est semi-simple de longueur 2 et la différence des deux sous-représentations est une représentation elliptique. La trace de cette représentation elliptique définit un élément de $I_{cusp}^{G_{2n,i}}$ et a donc une projection non nulle sur l'un des $I_{cusp}^{H,st}$ de 2.3 (2) pour au moins un groupe endoscopique elliptique de $G_{2n,i}$. On remarque d'abord que l'on a déjà prouvé que la projection de cette trace sur $I_{cusp}^{G_{2n,i},st}$ vaut 0 (cf. la proposition de 4.5). Ainsi H est un

groupe endoscopique elliptique propre. Par un argument par récurrence (par exemple) on vérifie que H est nécessairement de la forme $G_{n,i'} \times G_{n,i'}$. Le problème est de déterminer i'. On a posé $\delta = 0$ si $i = p$ et $\delta = 1$ si $i = np$ et on définit de la même façon δ' en utilisant i'. L'inclusion des L-groupes des groupes endoscopiques des groupes unitaires est décrite par exemple en [33] : $G_{2n,i}$ a pour groupe endoscopique $G_{n,i'} \times G_{n,i'}$ exactement quand $n - 1 + (2n - n) + \delta' \equiv 2n - 1 + \delta[2]$, où δ' vaut 0 si $i' = p$ et 1 sinon, c'est-à-dire exactement $\delta' = \delta$, ce qui est l'assertion cherchée. Il faut encore comprendre quelle représentation (a priori virtuelle) de $G_{n,i} \times G_{n,i}$ se transfère en la représentation elliptique fixée de $G_{2n,i}$.

On fait la même construction en remplaçant ρ par $St(\rho, 3)$; on trouve encore que l'induite de $St(\rho, 3)$ à $G_{6n,i}$ est réductible nécessairement semi-simple et de longueur deux et on l'écrit donc sous la forme $\pi_{1,+} \oplus \pi_{2,+}$; on remarque que pour $j = 1, 2, Jac_{\rho|\,|} Jac_{\rho|\,|}(\pi_{j,+})$ est le double de l'un des sous-module irréductible de l'induite de ρ (uniquement déterminé par j) en particulier est non nul mais cela montre aussi que $Jac_{\rho|\,|} Jac_{\rho|\,|}(\pi_{1,+} - \pi_{2,+})$ est un multiple de la représentation elliptique considérée dans le paragraphe précédent .

On écrit $\pi_{1,+} - \pi_{2,+}$ comme transfert de paquet stable de séries discrètes de groupes endoscopiques elliptiques de $G_{6n,i}$. En tenant compte de 2.3 (2), il existe au moins un groupe endoscopique nécessairement produit $H_1 \times H_2$ et une représentation virtuelle $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ de ce groupe, nécessairement combinaison linéaire de séries discrètes (cf. la proposition de 4.5) dont le transfert est $\pi_{1,+} - \pi_{2,+}$. On utilise la compatibilité du transfert au module de Jacquet et 2.7 qui force les non nullités $Jac_{\rho|\,|}\Pi_1 \neq 0$ et $Jac_{\rho|\,|}\Pi_2 \neq 0$; en tenant compte de 4.6, cela force $H_1 = H_2 = G_{3n,i}$ et on vérifie encore que le transfert de $Jac_{\rho|\,|}\pi_1 \otimes Jac_{\rho|\,|}\pi_2$ est nécessairement, à un scalaire près, une représentation elliptique de la forme $\pi_1 \ominus \pi_2$ de $G_{n,i}$ où $\pi_1 \oplus \pi_2$ est précisément l'induite de ρ. On retrouve le paquet de séries discrètes du paragraphe précédent mais maintenant on sait en plus que $Jac_{\rho|\,|}\Pi_1$ est un paquet stable de série discrète de $G_{n,i}$ de support cuspidal étendu exactement égal à ρ. Ce qui est l'assertion cherchée.

Le cas de $St(\rho, 2)$ est beaucoup plus facile : ici on est dans le cas où (avec les notations précédentes) $L(\rho, Asai_{(-1)^{n-1+\delta}}, s)$ a un pôle en $s = 0$ et où l'induite de $\rho|\,|^{s_0}$ à $G_{2n,i'}$ (avec $i' \neq i$) est réductible en un point $s_0 \neq 0$; dans l'induite, il y a une série discrète notée π. On note Π la représentation de $\tilde{GL}(2n, E)$ dont la trace tordue est un transfert du paquet stable contenant Π. Comme $Jac_{\rho|\,|^{s_0}}\pi \neq 0$, on a vu (2.6) que $Jac^{GL}_{\rho|\,|^{s_0}}\Pi \neq 0$; cela force $s_0 = 1/2$ et $\Pi = St(\rho, 2)$. C'est exactement ce que l'on cherchait à montrer.

On considère maintenant une série discrète autoduale de $GL(n, E)$, $St(\rho, a)$. On note $G_{an,i}$ le groupe endoscopique elliptique de $GL(an, E).\theta_{an}$ qui contient un paquet stable de série discrète se transférant en la trace tordue de $St(\rho, a)$ ou $i = p$ ou np comme dans la démonstration précédente. En prenant des modules de Jacquet, on vérifie que si a est impair, la trace tordue de ρ est un transfert d'un paquet de séries discrètes de $G_{n,i}$ tandis que si a est pair $St(\rho, 2)$ est un

transfert d'un paquet de séries discrètes de $G_{2n,i}$. On vient alors de montrer que dans le cas où a est impair le paramètre de ρ se factorise par le L-groupe du groupe endoscopique elliptique $G_{n,i}$ et i est déterminé par le fait que $\lambda_\rho = (-1)^{n-1+\delta}$ avec $\delta = 0$ si $i = p$ et $\delta = 1$ si $i = np$; comme a est supposé impair $(-1)^{an-1+\delta} = (-1)^{n-a+\delta}$ et le paramètre de $St(\rho, a)$ se factorise par le groupe dual de $G_{an,i}$ (d'après la proposition de 5.2). Si a est pair, on a vu que le paramètre de $St(\rho, 2)$ se factorise par le groupe dual de $G_{2n,i}$, c'est-à-dire que $\lambda_\rho = (-1)^{2n-1+\delta} = (-1)^{an-1+\delta}$ et le paramètre de $St(\rho, a)$ avec a pair se factorise par le groupe dual de $G_{an,i}$. Cela termine la preuve dans le cas des groupes unitaires.

On considère maintenant le cas $E = F$ et où $\tilde{GL} = GL(n, F)$ avec n impair. Ainsi$L(\rho \times \nu, Sym^2, s)$ a un pôle en $s = 0$, où $Sym^2 \otimes r_1$ est la représentation de $GL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ dans $GL(n(n+1)/2, \mathbb{C})$. Dans ce cas, le paramètre de π se factorise par le groupe des similitudes orthogonales qui est isomorphe à $SO(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$. Le morphisme qui se déduit de W_F dans $\mathbb{C}^*$ donne un caractère qui permet de tordre ρ pour la rendre autodual, c'est évidemment le caractère $\omega_\rho \nu^{-(n-1)/2}$ où ω_ρ est le caractère central de ρ. On pose $\rho' := \rho \otimes \omega_\rho^{-1} \nu^{(n-1)/2}$; on montre que ρ' un transfert d'un groupe symplectique avec la doubling method comme ci-dessus. Et on conclut ; c'est la même démonstration si il n'y a pas de facteur $\mathbb{C}^*$, le caractère est d'ordre 2 mais existe aussi (c'est le caractère central de ρ).

Quand n est pair, la démonstration est la même que dans le cas des groupes unitaires, il y a une dichotomie entre le fait que la fonction $L(\rho \times \nu, \wedge^2 \otimes r_1, s)$ et la fonction $L(\rho \times \nu, Sym^2 \otimes r_1, s)$ ait un pôle en $s = 0$. Dans le deuxième cas, le paramètre de ρ se factorise par le groupe de similitude symplectique ; il faut alors démontrer que ρ est un transfert du groupe $GSpin_{2n+1}$ tandis que dans le premier cas le paramètre de ρ se factorise par le groupe non connexe $GO(2n, \mathbb{C})$; ici on doit montrer que ρ est un transfert d'une des formes de $GSpin_{2n}$ (et on a un automorphisme extérieur dans ce cas) ; la forme de $GSpin_{2n}$ qui intervient est totalement fixée par le caractère

$$W_F \mapsto GO(2n, \mathbb{C}) \mapsto GO(2n, \mathbb{C})/GO(2n, \mathbb{C})^0 \simeq \{\pm 1\},$$

où l'exposant 0 indique la composante neutre comme en [6] 6.8.1. Ensuite le fait de savoir si ρ est un transfert du "bon" groupe endoscopique, c'est-à-dire celui de son paramètre ou du "mauvais" groupe endoscopique est la doubling method développée dans le cas des groupes unitaires.

6.3 Morphisme de Langlands

Théorème *La trace tordue d'une représentation θ-elliptique de $\tilde{GL}$ est un transfert d'un paquet stable de séries discrètes d'un groupe endoscopique elliptique de $\tilde{GL}.\theta$ si et seulement si le paramètre de la représentation de $\tilde{GL}$ se factorise par l'image du groupe dual de ce groupe endoscopique.*

Théorème *Les paquets stables de série discrète du groupe G sont exactement classifiées par les morphismes de Langlands de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans le L-groupe*

de G dont le centralisateur est un groupe fini ; si $G = SO(2n, F)$ ou $GSpin_{2n}(F)$ ce sont les orbites sous l'automorphisme extérieur dont nous montrons qu'elles satisfont cette bijection.

Le deuxième théorème résulte du premier. On démontre donc le premier. La stratégie est la suivante : on fixe une représentation, π^{GL} θ-elliptique de $\tilde{GL}$ et on fixe le groupe endoscopique elliptique $\underline{H}$ par lequel le paramètre de π^{GL} se factorise (cf. 5.4). Et on va montrer que ce groupe H a au moins une représentation elliptique dont le support cuspidal étendu est, via l'application fixée par $\underline{H}$, le support cuspidal de π^{GL} ; cela suffira en vertu de 4.7. On distingue trois cas :

1e cas : on suppose que H est un produit de groupes ; on applique alors le deuxième théorème par récurrence.

2e cas : on suppose que H est un groupe simple. Si π^{GL} est une série discrète, on a déjà démontré le théorème. Sinon, on considère la décomposition du paramètre de π^{GL} vu comme représentation de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ en sous-représentation irréductible ; on factorise cette décomposition en somme de 2 sous-représentations donnant lieu à une factorisation de ce paramètre par un sous-groupe de H , à une exception près (qui fera l'objet du 3e cas) si cette décomposition est la somme de deux représentations orthogonales (ou de similitude orthogonales) de dimension impaire ; ce sous-groupe fait partie d'une donnée endoscopique elliptique $\underline{H}'$ de H.il existe alors au moins une donnée endoscopique elliptique $\underline{H}'$ de $\underline{H}$. On applique l'hypothèse de récurrence à $\underline{H}'$, d'où un paquet stable de série discrète de $\underline{H}'$ dont le support cuspidal étendu est par construction le support cuspidal de π^{GL}. On transfère ce paquet de séries discrètes à $\underline{G}$ et l'image est une combinaison linéaire de séries elliptiques qui ont pour support cuspidal étendu l'image du support cuspidal étendu du paquet stable de série discrètes de $\underline{H}'$ d'après 4.6 et c'est donc bien des représentations elliptiques ayant le support cuspidal cherché.

3e cas : on suppose que H est le groupe $SO(2n, F)$ ou $GSpin(2n, F)$ et que le paramètre de π^{GL} est la somme de deux représentations irréductibles chacune de dimension impaire. En prenant des modules de Jacquet, on se ramène au cas où $\pi^{GL} = (\rho \times \rho') \times \nu$, où ρ et ρ' sont des représentations cuspidales unitaires de $GL(d_\rho, F)$ et $GL(d_{\rho'}, F)$ avec $d_\rho + d_{\rho'} = 2n$ et $d_\rho, d_{\rho'}$ des entiers impairs. Pour traiter ce cas, on reprend la preuve de 6.2 : on considère l'induite de la représentation $(\rho \times \rho') \times \nu$ de $GL(2n, F) \times F^*$ à chacun des groupes endoscopiques elliptiques simples de $GL(4n, F) \times F^*$. L'induite à $GSpin(4n, F)$ est réductible par les résultats d'Harish-Chandra ; en effet dans ce cas, le R-groupe est nécessairement non trivial (cf. pour le cas de $SO(4n, F)$, le travail de Goldberg [12] d'où vient cette remarque) car le R-groupe est le quotient du sous-groupe du groupe de Weyl stabilisant la représentation par un sous-groupe nécessairement engendré par des symétries élémentaires. Mais la condition de parité entraîne qu'aucune symétrie élémentaire ne stabilise la représentation que l'on induit. L'induite est alors de dimension 2 et la différence des deux sous-modules irréductibles est une représentation elliptique. Ensuite on conclut comme dans la preuve de 6.2 pour montrer que la trace de cette représentation

est un transfert d'un paquet de séries discrètes de $GSpin(2n, F)$ qui ont le bon support cuspidal étendu.

7 R-groupe et cardinal des paquets stables de représentations tempérées

7.1 Lien des constructions précédentes avec les R-groupes

La détermination des R-groupes a fait l'objet de nombreux articles, en particulier leur détermination explicite avec les travaux de R. Herb et D. Goldberg [11]. Dans le théoème et la remarque suivante, on inclut bien le cas des groupes orthogonaux pairs et de $GSpin^*_{2n}$, c'est-à-dire les groupes non connexes.

Théorème *([6], pour certains groupes) Soit π une série discrète irréductible de G et $Jord(\pi)$ son ensemble de bloc de Jordan.*

(i) Le nombre d'élément du paquet de Langlands contenant π est exactement $2^{|Jord(\pi)|-1}$.

(ii) Soit ρ une représentation irréductible cuspidale et unitaire de $GL(d_\rho, E)$ et soit a un entier. L'induite $St(\rho, a) \times \pi$ est réductible, nécessairement de longueur deux, si et seulement si

$\rho \simeq \theta(\rho)$, $(\rho, a) \notin Jord(\pi)$ et $L(\rho, r_G, s)$ a un pôle en $s = 0$ si a est pair et n'en a pas si a est impair.

Montrons le théorème.

Pour (i), on a montré que l'endoscopie respecte le support cuspidal étendu. Pour $\underline{H}$ une donnée endoscopique elliptique de la composante neutre de G, on note $I^{\underline{H},st}_{cusp,Jord(\pi)}$ l'espace des combinaisons linéaires stables basées formés de représentation ayant pour support cuspidal étendu d'image $Jord(\pi)$ dans $GL(n, \mathbb{C})$. Et on note $I^0_{cusp,Jord(\pi)}$ le sous-espace vectoriel de I_{cusp} engendré par les traces des séries discrètes dans le paquet de Langlands de π ; pour le cas de $O(2n, F)$ et $GSpin^*_{2n}(F)$, on considère le groupe connexe, $SO(2n, F)$ et $GSpin_{2n}(F)$. On a donc

$$dim\, I^0_{cusp,Jord(\pi)} = \sum_{\underline{H}/\simeq} dim\, I^{\underline{H},st,Aut(\underline{H})}_{cusp,Jord(\pi)},$$

avec les notations de 2.3.

On a vu que $dim\, I^{G,st,Aut(G)}_{cusp,Jord(\pi)} = 1$ (4.7). On fixe $\underline{H}$ une donnée endoscopique elliptique propre et on utilise la description de [33] : le groupe sous-jacent est le produit de deux groupes du type de ceux que l'on étudie ici (ou de leur composante connexe). Ils ont des paquets stables de série discrètes de support cuspidal étendu (d'image) $Jord(\pi)$ si et seulement si $Jord(\pi)$ se découpe en deux sous-ensembles relatifs chacun à l'un des groupes.

Dans le cas des groupes unitaires en dimension impair, il n'y a pas de groupes d'automorphisme d'une donnée endoscopique. On termine ce cas : pour chaque découpage de $Jord(\pi)$ en deux sous-ensembles non ordonné et propre, il existe

exactement un couple de données endoscopiques, conjuguée l'une de l'autre par un automorphisme ayant un paquet stable de représentation avec ce support cuspidal étendu. En ajoutant le couple formé de G lui-même et de l'ensemble vide, on voit que le cardinal cherché est exactement le nombre de découpage de $Jord(\pi)$ en deux sous-ensemble non ordonné mais dont l'un peut être l'ensemble vide. Cela est exactement $2^{|Jord(\pi)|-1}$.

Dans le cas des groupes unitaires en dimension paire et des groupes orthogonaux ou de similitude $GSpin$ en dimension impaire, il n'y a d'automorphismes que si les deux groupes sont égaux (ceci ne pouvait pas se produire dans l'exemple précédent). On raisonne comme dans le cas précédent, tout découpage de $Jord(\pi)$ en deux sous-ensemble dont aucun n'est vide, détermine un couple de données endoscopiques, ici non nécessairement distincts, qui sont conjugué l'une de l'autre par automorphisme non trivial ; si les données sont confondus, le découpage de $Jord(\pi)$ se fait quand même en deux ensembles évidemment distincts et donne lieu à un espace de dimension un puisque le découpage est fait à l'ordre près. On a donc le même calcul que ci-dessus.

Il reste le cas des groupes symplectiques traité par [6], on ne revient donc pas dessus et des groupes orthogonaux ou $GSpin$ en dimension paire. Le cas des groupes orthogonaux est totalement dû à [6] dont en particulier le chapitre 8 spécifique à ce cas. On donne un argument légèrement différent en montrant la remarque ci-dessous qui est aussi dans [6] ; dans la remarque ci-dessous G est le groupe non connexe $O(2n, F)$ ou $GSpin^*(2n, F)$:

Remarque *Soit τ une série discrète de G, la restriction de τ à la composante neutre de G est irréductible sauf exactement quand $Jord(\tau)$ n'a que des couples (ρ', a') tels que $a'd_{\rho'}$ soit pair.*

En effet, les séries discrètes de $GSpin^*_{2n}(F)$ et $O(2n, F)$ qui interviennent dans l'endoscopie tordue de $GSpin^*_{2n}(F)$ et $O(2n, F)$ sont exactement celles dont la restriction à la composante neutre reste irréductible. Les groupes endoscopiques pour cette endoscopie tordue ont un groupe dual dont la composante neutre est un produit de groupes orthogonaux impairs ; cette endoscopie tordue respectent elle aussi le support cuspidal étendu. Ainsi toute série discrète tel que $Jord(\pi)$ ne contient que des couples (ρ', a') avec $a'd_{\rho'}$ pair, n'est pas la restriction d'une série discrète irréductible du groupe non connexe.

La preuve de la remarque sera terminée ci-dessous mais on termine, dans ce cas, la preuve du théorème : on suppose que $Jord(\pi)$ a la propriété de parité ci-dessus et il en est donc ainsi pour toutes les représentations intervenant dans $I^{\underline{H},st}_{cusp,Jord(\pi)}$. Ainsi $I^{0,G,st}_{cusp,Jord(\pi)}$ est de dimension 2. Les automorphismes entre les données endoscopiques inclus l'échange des deux facteurs et l'action du produit des automorphismes extérieurs non triviaux. Et on trouve alors que $dim\, I^0_{cusp,Jord(\pi)}$ vaut deux fois le nombre de découpage de l'ensemble $Jord(\pi)$ en deux sous-ensembles non ordonnés dont l'un peut être vide, c'est-à-dire vaut $2^{|Jord(\pi)|}$. Quand on repasse au groupe non connexe, d'après ce que l'on vient de voir le cardinal est divisé par deux et on trouve l'énoncé du théorème.

On suppose maintenant que $Jord(\pi)$ contient au moins un couple (ρ, a) tel que ad_ρ est impair. On note m_i le nombre d'éléments de $Jord(\pi)$ ayant cette propriété de parité et m_p le nombre d'éléménts de $Jord(\pi)$ ayant la parité opposée. On va utiliser le fait que le nombre de découpage d'un ensemble ayant un nombre, m_0, pair d'éléménts en deux sous-ensemble non ordonné ayant un nombre impair d'éléments est 2^{m_0-1}. Alors l'endoscopie pour le groupe non connexe montre que $dim\, I^0_{cusp,Jord(\pi)} = 2x + 2^{m_p}2^{m_i-1}/2$, où x est le nombre de séries discrètes de G, associé à $Jord(\pi)$, dont la restriction à G^0 se coupe en deux et où la division par 2 vient des automorphismes (comme plus haut) pour l'endoscopie de G.

On admet le résultat par récurrence sur le rang de G pour les groupes endoscopiques propres de la composante neutre de G. Ainsi pour une telle donnée endoscopique propre, l'action du produit des automorphismes extérieurs non triviaux sur $I^{\underline{H},st}_{cusp,Jord(\pi)}$ est trivial sur au moins un des facteurs, le support cuspidal cuspidal contenant au moins un (ρ', a') avec $a'd_{\rho'}$ impair et que la dimension des invariants sous ce groupe est exactement le nombre de découpage de $Jord(\pi)$ adapté à $\underline{H}$. On obtient donc

$$dim\, I^0_{cusp,Jord(\pi)} = y + 2^{m_p}2^{m_i-1}/2,$$

où y vaut 0 si la remarque est vraie, c'est-à-dire si la distribution stable associée à G ne se coupe pas en restriction à G^0 et 1 sinon. En comparant, on trouve $y = 2x$ et par parité cela force, $y = x = 0$, d'où la remarque. Et on trouve ici que le nombre de séries discrètes de G^0 avec le support cuspidal fixé est $2^{|Jord(\pi)|-2}$; et il y a évidemment deux séries discrètes de G ayant même restriction à G^0, elles se déduisent par un caractère signe d'où le (i) du théorème.

Montrons le (ii) du théorème : la condition $\rho \simeq \theta(\rho)$ est nécessaire pour avoir réductibilité : dans le cas où G est connexe, c'est la condition d'Harish-Chandra, dans le cas où G n'est pas connexe, c'est soit la condition d'Harish-Chandra, soit la condition de Mackey ; on suppose donc dans la suite que $\rho \simeq \theta(\rho)$.

On fixe (ρ, a) comme dans l'énoncé mais on ne fixe pas π, on fixe uniquement $Jord(\pi)$ que l'on note $\mathcal{E}$. On considère l'ensemble des représentations induites $St(\rho, a) \times \pi'$, où π' est une série discrète telle que $Jord(\pi') = \mathcal{E}$. Cette induite est réductible si et seulement si elle a deux sous-modules irréductible dont la différence est une représentation elliptique ; il faut donc ici compter le nombre de représentations elliptiques dont le support cuspidal étendu est $\mathcal{E} \cup \{(\rho, a), (\rho, a)\}$. Si G est connexe, il faut sommer $dim\, I^{\underline{H},st}_{cusp,\mathcal{E}\cup\{(\rho,a),(\rho,a)\}}$ pour toute donnée endoscopique elliptique $\underline{H}$ de G prise à automorphisme près Pour cela il faut que dans l'ensemble $\mathcal{E} \cup \{(\rho, a), (\rho, a)\}$, (ρ, a) qui intervient avec multiplicité au moins 2 n'intervienne pas avec multiplicité 3 ; d'où la nécessité de la condition $(\rho, a) \notin Jord(\pi)$; on trouve aussi la nécessité de la dernière condition. Si ces conditions sont satisfaites, on vérifie comme ci-dessus, que le nombre de représentations elliptiques cherchées est exactement le nombre de découpage de $\mathcal{E}$ en deux sous-ensembles non ordonnées. Ainsi les conditions sont aussi suffisantes.

On considère maintenant le cas où G est non connexe : si ad_ρ est pair, la démonstration est analogue à celle que l'on vient de faire. On suppose donc que ad_ρ est impair.

On regarde d'abord le cas où la restriction de π au groupe connexe et la somme $\pi_1 \oplus \pi_2$ de deux représentation. D'après ce que l'on a vu ci-dessus, c'est exactement le cas quand tout élément de $Jord(\pi)$ est formé de termes (ρ', a') avec $a'd_{\rho'}$ pair. Ainsi toutes les conditions de l'énoncé sont automatiquement satisfaites et il faut donc démontrer que la représentation induite $St(\rho, a) \times \pi$ est réductible.

D'après les résultats généraux sur le R-groupe d'Harish-Chandra, les induites, pour $i = 1, 2$, $St(\rho, a) \times \pi_i$ sont irréductibles mais elles sont conjuguées l'une de l'autre par un élément de $G^0_{n+2ad_\rho}$, la composante neutre ; elles sont donc isomorphes. Ainsi l'induite de $St(\rho, a) \times \pi_1$ à G_{n+2ad_ρ} est $St(\rho, a) \times \pi$ et en restriction à la composante neutre est la somme de deux représentations isomorphes. Cela prouve que $St(\rho, a) \times \pi$ est la somme de deux représentations irréductibles qui diffèrent par le caractère signe ; on a bien montré la réductibilité.

On considère maintenant le cas où la restriction de π au groupe connexe est irréductible. On note encore $\mathcal{E} := Jord(\pi)$. On compte le nombre de représentations elliptiques de la composante neutre de G ayant pour support cuspidal étendu $\mathcal{E} \cup \{(\rho, a), (\rho, a)\}$; on trouve que cela vaut exactement le nombre de découpage de $\mathcal{E}$ en deux sous-ensemble non ordonné et dont chacun contient un nombre impair de termes (ρ', a') avec $a'd_{\rho'}$ impair. C'est donc exactement le nombre de séries discrète de la composante neutre de G ayant comme support cuspidal étendu $\mathcal{E}$. Ainsi pour toute série discrète π_0 de la composante neutre de G, l'induite $St(\rho, a) \times \pi_0$ est réductible ; l'induite de cette représentation à G n'est autre que $St(\rho, a) \times \pi$ qui est donc aussi nécessairement réductible. Cela termine la démonstration.

7.2 Unicité de la définition des blocs de Jordan

Remarque *Le théorème précédent montre que les blocs de Jordan tel que définis ici sont bien ceux de [19], [23], [21]. On a aussi la caractérisation suivante suggérée par M. Tadic : $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ si et seulement si $St(\rho, a) \times \pi$ est irréductible mais il existe un entier b de même parité que a tel que la représentation induite $St(\rho, b) \times \pi$ est réductible.*

Références

[1] J. Arthur *On elliptic tempered characters,* Acta. Math. 171 (1993), pp. 73-138

[2] J. Arthur *On local character relations*, Selecta Math., 2 (1996), no. 4 , pp. 501-579

[3] J. Arthur *Endoscopic L-functions and a combinatorial identity*, Dedicated to. H.S.M. Coxeter, Canad. J. Math., 51 (1999), pp. 1135-1148

[4] J. Arthur *Automorphic Representations of GSp(4)*, In Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory (Shalika volume) edited by H. Hida, D. Ramakr- ishnan, and F. Shahidi, pages 65-81. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.

[5] J. Arthur *A note on L-packets*, Pure and applied math. quarterly, 2 (special issue : in honor of J. H. Coates, part 1 of 2), 2006, pp. 199-217

[6] J. Arthur *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic Groups*, http ://www.claymath.org/cw/arthur/

[7] J. Bellaiche, G. Chenevier *The sign of Galois representations attached to automorphic forms for unitary groups*, Compositio Math. 147 (2011) pp. 1337-1352

[8] J. Bogume *communication privée*, 2012

[9] L. Clozel *Changement de base pour les représentaitons tempérées des groupes réductifs réels,* Annales de l'ENS, 15 (1982) numéro 1, pp. 45-115

[10] S. Gelbart, I. Piatetski-Shapiro, S. Rallis *Explicit Constructions of Automorphic L-functions*Springer Verlag, LN 1254, 1987

[11] D. Goldberg *Some results on reducibility for unitary groups and local Asai L-functions* Journal de Crelle, 448 (1994) pp. 65-95

[12] D. Goldberg *Reducibility of induced representations for Sp(2n) and SO(n)*, Amer. J. Math., 116 (1994) pp.1101-1151

[13] D. Goldberg *R-Groups and elliptic representations for similitude groups*, Math. Ann., 307 (1997) pp. 569-588

[14] R.A. Herb *Elliptic representations for Sp(2n) and SO(n)* , Pacific J. Math. 161 (1993), pp. 347-358

[15] R.A. Herb *Supertempered virtual characters,* Compositio Math., 93 (1994), pp. 139-154

[16] G. Henniart, *Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés exérieur et symétrique*, IMRN, 4 (2010) pp. 633-673

[17] G. Henniart, L. Lomeli, *Characterization of γ-factors : the Asai case*,IMRN, published on line, July 2012

[18] Y. Kim *Langlands Shahidi L-functions for GSpin Groups and the generic Arthur L-packet conjecture*,prépublication 2012

[19] C. Mœglin *Classification des séries discrètes : paramètres de Langlands et exhaustivité,* JEMS, 4, 143-200, 2002

[20] C. Mœglin *Classification et Changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires p-adiques,* Pacific J. of Math., 233 (2007) pp. 159-204

[21] C. Mœglin *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques,* in On Certain L-Functions, Clay Math. Proceedings, vol 13, in honor of F. Shahidi, (2011) pp. 333-374

[22] C. Mœglin *Représentation supertempérée et prolongement des caractères* en cours de rédaction

[23] C. Mœglin, M. Tadic *Construction of discrete series for classical p-adic groups,* journal de l'AMS, volume 15, 2002, pp 715-786

[24] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, *Sur le transfert des traces dun groupe classique p-adique un groupe linaire tordu,* Selecta Math. 12 (2006), no. 3-4, pp. 433-515

[25] C. P. Mok *Endoscopic classification of representations of representations of quasi-split unitary groups I et II*, prépublications 2012

[26] J.Rogawski *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of math. studies 123, Princeton University Press (1990)

[27] F. Shahidi *On certain L-functions*, Amer. J. Math. 103 (1981), 297-355

[28] F. Shahidi *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures ; complementary series for p-adic groups* Ann. of Math. 132 (1990), pp. 273-330.

[29] D. Shelstad, *L-Indistinguishability for real groups Math. Ann, 259 (1982) pp. 385-430*

[30] O. Taibi, *Eigenvarieties for classical groups and complex conjugations in Galois representations,* prépublication, 2012,

[31] P. J. White *Tempered automorphic representations of the unitary group*, prépublication 2012

[32] J.-L. Waldspurger *Le groupe GL_N tordu sur un corps p-adique, 1e et 2e partie,* Duke math. Journal, 137, 2007, pp. 185-336

[33] J.-L. Waldspurger *Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire* Manuscripta Math., 133, Numbers 1-2 (2010), pp. 41-82,

[34] J.-L. Waldspurger *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012, arXiv :1205.1100

[35] J.-L. Waldspurger, *Endoscopie tordue sur un corps local* , prépublication 2012