



**HAL**  
open science

# Une généralisation sur les conditions suffisantes de détectabilité de défauts multidimensionnels par ACP

Baligh Mnassri, El Mostafa El Adel, Mustapha Ouladsine

## ► To cite this version:

Baligh Mnassri, El Mostafa El Adel, Mustapha Ouladsine. Une généralisation sur les conditions suffisantes de détectabilité de défauts multidimensionnels par ACP. Conférence Méditerranéenne sur l'Ingénierie sûre des Systèmes Complexes, May 2011, Agadir, Maroc. pp.1-5. hal-00767432

**HAL Id: hal-00767432**

**<https://hal.science/hal-00767432v1>**

Submitted on 19 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une généralisation sur les conditions suffisantes de détectabilité de défauts multidimensionnels par ACP

Baligh MNASSRI<sup>1</sup>, El Mostafa EL ADEL<sup>1</sup>, Mustapha OULADSINE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes – UMR CNRS 6168  
Domaine Universitaire de Saint-Jérôme  
Avenue Escadrille Normandie-Niemen, 13397 Marseille Cedex 20, France

{baligh.mnassri, mostafa.eladel, mustapha.ouladsine}@lsis.org  
<http://www.lsis.org>

*Résumé*— Dans ce papier, nous avons étudié les conditions suffisantes de détectabilité de défauts multidimensionnels. Pour cela, nous avons établi une expression unifiée de la condition de détectabilité des indices ayant une forme quadratique. Partant de l'idée que la distance combinée est la somme de deux indices de détection (SPE et T2 de Hotelling), nous avons analysé sa performance de détectabilité vis-à-vis de ces deux derniers. Nous avons montré théoriquement que si un défaut est garanti détectable par la distance combinée, il n'est pas forcément garanti détectable par les indices T2 de Hotelling et SPE.

*Mots-clés*— ACP, Détectabilité, Distance combinée, SPE, T2 de Hotelling

## I. INTRODUCTION

L'analyse en composantes principales (ACP) est une technique descriptive permettant d'étudier les relations qui existent entre les variables, sans tenir compte a priori d'une quelconque structure. Son but est d'identifier la structure de dépendance entre des observations multivariées afin d'obtenir une description ou une représentation compacte de ces dernières. L'utilisation de cette méthode a été restreinte à la projection des données sur les différents axes factoriels et au calcul de distances par rapport à ces axes comme outil de détection de défauts [2], [3], [6]. Depuis les années 70, de nombreux travaux ont proposé d'utiliser l'ACP comme un outil de modélisation des processus à partir duquel un modèle peut être obtenu. Ce modèle permet d'estimer les variables ou les paramètres du processus à surveiller.

L'ACP est une technique de projection orthogonale linéaire qui projette les observations multidimensionnelles représentées dans un espace de dimension égale au nombre de variables à surveiller sur un sous-espace de dimension inférieure en maximisant les variances des projections. L'ACP linéaire est un outil de modélisation des relations linéaires entre les différentes variables représentant le comportement d'un processus quelconque. L'estimation des paramètres du modèle ACP est réalisée par calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice de corrélation des données. Cependant, pour la détermination de la structure du modèle, il faut déterminer le nombre optimal de composantes utiles pour sa construction. En effet, plusieurs critères de sélection du nombre optimal de composantes principales (CPs) sont présentés dans la littérature [4]. Nous

citons que la variance de l'erreur de reconstruction est le critère le plus efficace [4], [9], [10], [11].

La modélisation est la première étape d'une démarche de diagnostic de défauts par l'ACP. Le reste des étapes sont principalement la détection, l'identification puis l'isolation de défauts [2], [3]. Pour le suivi ou la surveillance du processus, plusieurs indices donnant la possibilité de détecter l'existence de défauts sont proposés. Ils sont calculés dans le sous-espace principal ou le sous-espace résiduel ou le combiné des deux sous-espaces. Ainsi, ces statistiques de détection sont généralement la distance T2 de Hotelling, le carré de l'erreur de prédiction (SPE), le carré de l'erreur pondérée ou la distance de Hawkins (SWE) et la distance combinée. La principale étape qui suit est l'isolation ou bien la localisation de variables en défauts. A ce stade, deux approches sont abordées dans la littérature. La première est basée sur le principe de la contribution [7], [8]. Tandis que, la deuxième approche est la reconstruction de défauts [2], [3], [4], [5], [6].

L'existence de défauts dans des variables n'implique pas nécessairement leurs détections par les indices de contrôle utilisés. Pour cette raison, une condition suffisante pour garantir la détectabilité de défauts avec seulement l'indice SPE a été proposée dans la littérature. Puisque ces indices de détection peuvent se représenter sous une forme quadratique unique [7], nous proposons dans cet article d'étendre l'étude de détectabilité et de la généraliser pour tout indice quadratique. Nous montrons théoriquement qu'un défaut peut ne pas être garanti détectable ni par l'indice SPE ni par la distance T2 de Hotelling mais garanti détectable par la distance combinée.

Ce papier est organisé comme suit : la section 2 présentera un rappel du principe de l'analyse en composantes principales. Une unification des indices de détection ayant une forme quadratique ainsi que leurs limites de contrôle est établi dans la troisième section. Dans la section 4, nous allons unifier la condition de détectabilité de défaut afin d'étendre sa validité à n'importe quel indice quadratique. Dans le but de dévoiler les avantages de la distance combinée, une analyse de sa détectabilité de défaut versus celle de l'indice SPE et de T2 est réalisée au niveau de la cinquième section. La section 6 présentera une conclusion.

## II. PRINCIPE DE L'ACP

L'intérêt majeur de l'ACP est d'offrir la meilleure visualisation possible des données multivariées. L'ACP consiste à remplacer une famille de variables par de nouvelles variables de variance maximale non corrélées deux à deux. Les nouvelles variables sont des combinaisons linéaires des variables originelles. Elles sont appelées composantes principales (CPs). Ainsi, elles définissent des plans factoriels qui servent de base à une représentation graphique plane de ces variables originelles.

Les variables d'un produit sont généralement exprimées par des unités de mesures et dans des échelles différentes. Pour cela, il est préférable d'abord une étude ACP sur une matrice de données  $X$  centrée et réduite (colonnes de moyennes nulles et écarts-types unités). L'espace orthogonal défini par l'ACP est engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_a$  de la matrice de corrélation  $\Sigma$  de  $X$ .

Considérons  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  un vecteur de données aléatoires constitué de  $m$  variables. Ainsi,  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la matrice de données de vecteurs lignes  $\mathbf{x}^T$  qui rassemble les  $n$  mesures sur les  $m$  variables. L'ACP détermine une transformation optimale (vis-à-vis d'un critère de variance) et linéaire de la matrice de données  $X$  comme suit :

$$X = TP^T \quad (1)$$

avec  $T = [t_1 \cdots t_a \cdots t_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $a \in \{1 \dots m\}$ . Les vecteurs  $t_a$  sont appelés scores ou CPs.  $P = [p_1 \cdots p_a \cdots p_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice orthonormée où les vecteurs orthogonaux  $p_a$  sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_a$  de la matrice de corrélation  $\Sigma$  de  $X$  :

$$\Sigma = P\Lambda P^T \quad \text{avec} \quad PP^T = P^T P = I_m \quad (2)$$

où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_a \cdots \lambda_m)$  est une matrice diagonale dont les éléments sont mis dans l'ordre décroissant.

Puisque l'objectif de l'ACP est de réduire la dimension de l'espace, les  $\ell$  premières CPs ( $\ell \ll m$ ) sont les plus significatives et suffisent pour expliquer la variabilité d'un processus à travers sa base de données  $X$ . Par conséquent, la partition de la matrice des vecteurs propres et celle des composantes principales donne respectivement :

$$P = [\hat{P} \quad \tilde{P}] \quad (3)$$

$$T = [\hat{T} \quad \tilde{T}] \quad (4)$$

où  $\hat{P} \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ ,  $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)}$ ,  $\hat{T} \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  et  $\tilde{T} \in \mathbb{R}^{n \times (m-\ell)}$ .

Les  $\ell$  premiers vecteurs propres constituent le sous-espace de représentation ou le sous-espace principal (SP) défini par :  $S_p = \text{span}\{\hat{P}\}$ . Le sous-espace complémentaire dit résiduel (SR) est décrit par :  $S_r = \text{span}\{\tilde{P}\}$ . Ces deux sous-espaces,  $S_p$  et  $S_r$ , sont orthogonaux. Ainsi, un vecteur d'observation  $\mathbf{x}$  se décompose en le projetant sur les deux sous-espaces SP et SR respectivement comme suit :

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{P}\hat{P}^T \mathbf{x} = \hat{C}\mathbf{x} \in S_p \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{P}\tilde{P}^T \mathbf{x} = \tilde{C}\mathbf{x} \in S_r \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (7)$$

TABLE I  
LES DIFFÉRENTS INDICES DE DÉTECTION

$\gamma$	$\Upsilon_{\gamma}^{\frac{1}{2}}$	$\Gamma_{\alpha}^2$
<i>SPE</i>	$\tilde{P}\tilde{I}^{-\frac{1}{2}}\tilde{P}^T = \tilde{C}$	$\delta_{\alpha}^2$
<i>SWE</i>	$\tilde{P}\tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\tilde{P}^T$	$\epsilon_{\alpha}^2$
$T^2$	$\tilde{P}\tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\tilde{P}^T$	$\tau_{\alpha}^2$
Distance combinée $\varphi$	$\frac{\tilde{P}\tilde{I}^{-\frac{1}{2}}\tilde{P}^T}{\delta_{\alpha}} + \frac{\hat{P}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^T}{\tau_{\alpha}}$	$\beta_{\alpha}^2$

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}} \quad (8)$$

$\hat{C}$  et  $\tilde{C} = (I - \hat{C})$  représentent les matrices de projection respectivement sur le SP et le SR. Elles constituent le modèle ACP représentant le bon fonctionnement du système.

## III. DÉTECTION DE DÉFAUTS

Les défauts et les valeurs aberrantes se traduisent par des valeurs anormales que l'on peut mettre en évidence par projections sur certains axes principaux. Ces projections ont pour but d'assurer la surveillance et le suivi du processus. Après la construction du modèle ACP, une nouvelle observation est projetée différemment sur les sous-espaces pour la tester. Ainsi, ce test est assuré par le calcul des distances ou indices de détection. Ces derniers seront, à leurs tours, comparés à leurs limites de contrôle.

Puisque la forme quadratique réunit toutes les statistiques de détection existantes [7], notons  $\gamma$  un indice unifié qui peut représenter n'importe quelle distance : T2 de Hotelling, SPE, SWE ou la distance combinée... :

$$\gamma = \|\tilde{\Upsilon}_{\gamma}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}\|^2 = \|\Upsilon_{\gamma}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}\|^2 \quad (9)$$

$\Upsilon_{\gamma}^{\frac{1}{2}}$  est une matrice semi définie positive qui caractérise l'indice de détection étudié.

Pour aborder l'étape de détection de défauts, le processus est considéré en fonctionnement normal si l'indice  $\gamma$  est sous sa limite de contrôle (10). Cette dernière aura une forme aussi standard [1] qui dépend de l'indice étudié tout en considérant un niveau de confiance  $\alpha$  :

$$\gamma \leq \Gamma_{\alpha}^2 = g_{\gamma} \chi_{(h_{\gamma}, \alpha)}^2 \quad (10)$$

$h_{\gamma}$  est le nombre de degrés de libertés de l'indice  $\gamma$ . Ce paramètre ainsi que  $g_{\gamma}$  sont déterminés comme suit [1] :

$$g_{\gamma} = \text{tr}[(\Sigma \Upsilon_{\gamma})^2] / \text{tr}[\Sigma \Upsilon_{\gamma}] \quad (11)$$

$$h_{\gamma} = (\text{tr}[\Sigma \Upsilon_{\gamma}])^2 / \text{tr}[(\Sigma \Upsilon_{\gamma})^2] \quad (12)$$

Le tableau I présente un récapitulatif des expressions des différents indices de détection ainsi que leurs matrices caractéristiques.  $\tilde{I} \in \mathbb{R}^{(m-\ell)^2}$  n'est autre que la matrice identité correspondant au sous-espace résiduel. Les distances SPE et SWE sont calculées dans le sous-espace résiduel. Cependant, l'indice T2 de Hotelling est calculé dans le sous-espace principal. La combinaison de ce dernier avec celui du SPE, dont chacun est pondéré par sa limite de contrôle, donne la distance combinée [5], [6], [9], [10].

#### IV. DÉTECTABILITÉ AVEC UN INDICE DE DÉTECTION QUADRATIQUE

L'existence d'un défaut dans le système n'est garanti détectable par un indice de détection considéré que sous certaines conditions. Ceci dépend de la performance de l'indice utilisée et surtout de l'amplitude de défaut. Dans ce papier, notre étude d'analyse de détectabilité sera généralisée tout en considérant les cas des défauts multidimensionnels (multiples).

Partons de l'hypothèse qu'un groupe de variables "  $i$  " est considéré en défaut. Ceci peut s'expliquer par un défaut sous forme d'un vecteur  $f$  qui sera projeté sur un sous-espace engendrant les directions de ces variables. Par conséquent, un vecteur d'observation quelconque peut s'écrire comme étant la somme d'un vecteur sans défaut et un vecteur qui représente le défaut :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \Xi_i f \quad (13)$$

$f \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur d'amplitudes de défauts.  $\Xi_i \in \mathbb{R}^{m \times r}$  est une matrice orthonormée dont les vecteurs colonnes sont ceux de la matrice identité qui correspondent aux variables en défauts.  $r = \dim\{i\}$  est le nombre de variables supposées en défauts.

A partir des équations (9) et (13), le vecteur  $\tilde{\mathbf{x}}$  peut s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \Upsilon_{\frac{1}{\gamma}}(\mathbf{x}^* + \Xi_i f) = \mathbf{x}^* + \tilde{f} \quad (14)$$

Ceci permet d'écrire la relation suivante :

$$\tilde{f} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^* \quad (15)$$

De cette équation, on peut établir l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{f}\| \leq \|\tilde{\mathbf{x}}\| + \|\mathbf{x}^*\| \quad (16)$$

Le vecteur  $\mathbf{x}^*$  représente la projection de la partie sans défaut du vecteur d'observation sur le sous-espace engendrant l'indice  $\gamma$ . Ceci implique que sa norme est toujours sous contrôle :

$$\|\mathbf{x}^*\| \leq \Gamma_{\alpha} \quad (17)$$

A partir des équations (16) et (17), on peut extraire une inégalité toujours vraie quelle que soit l'amplitude du défaut :

$$\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 \geq (\|\tilde{f}\| - \Gamma_{\alpha})^2 \quad (18)$$

En présence d'un défaut détectable, l'indice de détection  $\gamma$  dépasse sa limite de contrôle  $\Gamma_{\alpha}^2$  :

$$\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 > \Gamma_{\alpha}^2 \quad (19)$$

L'inéquation (18) est toujours vérifiée. Cependant, (19) n'est vraie que si le défaut est détectable. Ceci nous permet d'imposer une condition suffisante afin de garantir la détection de défaut comme suit :

$$(\|\tilde{f}\| - \Gamma_{\alpha})^2 > \Gamma_{\alpha}^2 \quad (20)$$

Pour qu'un défaut soit garanti détectable par une telle distance  $\gamma$ , son amplitude doit satisfaire l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{f}\| > 2\Gamma_{\alpha} \quad (21)$$

#### V. ANALYSE DE DÉTECTABILITÉ AVEC LA DISTANCE COMBINÉE VERSUS SPE ET T2

Nous remarquons, d'après le tableau I, que les indices de détection sont calculés dans principalement deux sous-espaces différents. Chacun de ces indices peut présenter des avantages différents. Ces avantages sont relatifs aux relations de dépendance ou indépendance entre les variables ainsi qu'aux amplitudes de défauts.

Une variable indépendante se projette totalement avec son défaut sur le sous-espace principal [9], [10], [11]. Elle ne se projette plus sur le sous-espace résiduel. Par conséquent, la détection d'un défaut affectant ce type de variables ne peut être assurée que par une distance calculée dans le sous-espace principal comme la T2 de Hotelling ou la distance combinée. Cependant, un défaut dans une variable corrélée sera majoritairement projeté dans le sous-espace résiduel. Il peut apparaître dans le sous-espace principal quand son amplitude atteint des valeurs assez importantes. Les distances SPE et SWE sont principalement utiles pour ces cas de figures ainsi que la distance combinée.

Dans les deux cas, la distance combinée peut assurer la détection de défauts qui se projettent sur le sous-espace que se soit principal ou résiduel. Ceci présente un avantage majeur pour cette distance. Cependant, nous ignorons sa performance pour la détection de défauts par rapport aux deux indices qu'elle combine.

D'après l'équation (14), le vecteur de défaut calculé avec la distance combinée est :

$$\tilde{f} = \Upsilon_{\frac{1}{\varphi}} \Xi_i f = \frac{SPE}{\delta_{\alpha}} \frac{T2}{\tau_{\alpha}} f \quad \text{où} \quad \frac{SPE}{f} \perp \frac{T2}{f} \quad (22)$$

D'après les équations (21) et (22), la condition de détectabilité avec la distance combinée peut s'écrire de la façon suivante :

$$\|\tilde{f}\|^2 = \frac{\|f\|^2}{\tau_{\alpha}^2} + \frac{\|f\|^2}{\delta_{\alpha}^2} > 4\beta_{\alpha}^2 \quad (23)$$

Supposons qu'un défaut est garanti détectable par la distance combinée, nous pouvons déduire une condition sur l'amplitude de défaut calculée avec l'indice T2 de Hotelling pour satisfaire cette hypothèse :

$$\|\tilde{f}\|^2 > \tau_{\alpha}^2 \left( 4\beta_{\alpha}^2 - \frac{\|f\|^2}{\delta_{\alpha}^2} \right) \quad (24)$$

Cette inégalité ne peut exister que si le terme à droite est positif ou nul :

$$\|f\| \leq 2\delta_{\alpha}\beta_{\alpha} \quad (25)$$

Pour que le défaut soit garanti détectable par la distance T2 de Hotelling tout en satisfaisant l'hypothèse d'être toujours garanti détectable par la distance combinée, il faut que :

$$\tau_{\alpha}^2 \left( 4\beta_{\alpha}^2 - \frac{\|f\|^2}{\delta_{\alpha}^2} \right) \geq 4\tau_{\alpha}^2 \quad (26)$$

Ceci prouve que :

$$\|f\| \leq 2\delta_{\alpha}\sqrt{\beta_{\alpha}^2 - 1} \quad (27)$$

De cette inégalité, le défaut peut ne pas être garanti détectable par la distance T2 si :

$$\| f \|^{SPE} > 2\delta_\alpha \sqrt{\beta_\alpha^2 - 1} \quad (28)$$

Pour que l'inégalité (24) reste vraie, tout en gardant l'hypothèse qu'un défaut est garanti détectable par  $\varphi$  (25) mais il peut ne pas être garanti détectable par T2 (28), il faut que :

$$2\delta_\alpha \sqrt{\beta_\alpha^2 - 1} < \| f \|^{SPE} \leq 2\delta_\alpha \beta_\alpha \quad (29)$$

A partir de cette inégalité, nous pouvons déduire que le défaut peut aussi ne pas être garanti détectable par l'indice SPE tant que  $\beta_\alpha < \sqrt{2}$ .

Gardons l'hypothèse qu'un défaut est garanti détectable par la distance combinée. La condition suffisante sur l'amplitude de défaut calculée avec l'indice SPE et qui satisfait cette hypothèse est donnée par :

$$\| f \|^{SPE} > \delta_\alpha^2 \left( 4\beta_\alpha^2 - \frac{\| f \|^{T2}}{\tau_\alpha^2} \right) \quad \forall \quad \| f \|^{T2} \leq 2\tau_\alpha \beta_\alpha \quad (30)$$

En plus et pour que le défaut soit garanti détectable par l'indice SPE, il faut que :

$$\| f \|^{T2} \leq 2\tau_\alpha \sqrt{\beta_\alpha^2 - 1} \quad (31)$$

Le contraire de l'inégalité précédente signifie que le défaut peut ne pas être garanti détectable par SPE :

$$\| f \|^{T2} > 2\tau_\alpha \sqrt{\beta_\alpha^2 - 1} \quad (32)$$

Pour que l'inégalité (30) reste vraie, tout en gardant l'hypothèse que le défaut peut ne pas être garanti détectable par SPE (32), il faut que :

$$2\tau_\alpha \sqrt{\beta_\alpha^2 - 1} < \| f \|^{T2} \leq 2\tau_\alpha \beta_\alpha \quad (33)$$

Ceci prouve que le défaut peut aussi ne pas être garanti détectable par l'indice T2 pour  $\beta_\alpha < \sqrt{2}$ .

Nous avons montré théoriquement qu'il peut exister des cas où le défaut est garanti détectable que par la distance combinée. En plus, l'existence de ces cas est relative aux valeurs de la limite de contrôle d'une telle distance. Pour cela, nous pouvons analyser ce problème schématiquement.

L'équation (23) représente un quart de cercle de rayon  $2\beta_\alpha$  et de variables pondérées  $\| f \|_{\delta_\alpha}^{SPE}$  et  $\| f \|_{\tau_\alpha}^{T2}$ . Un défaut, admettant comme coordonnées ces deux variables, est considéré non garanti détectable par  $\varphi$  s'il est situé sur le périmètre ou à l'intérieur de ce quart de cercle. Dans le cas contraire, le défaut est garanti détectable par cet indice. En fonction de la valeur de la limite de contrôle d'une telle distance, nous avons distingué schématiquement cinq différents cas possibles (Figures 1, ..., 5). Dans ces figures, la partie ponctuée représente la zone garantissant la détection de défaut par la distance combinée. N'importe quel point situé dans la zone hachurée signifie que le défaut est non garanti détectable ni par l'indice SPE ni par la distance T2 de Hotelling. Ainsi dans le tableau II, nous récapitulons la condition de détectabilité de défaut avec la distance combinée versus celle des indices T2 et SPE qu'elle combine.

Nous montrons clairement que si le défaut est non garanti détectable ni par SPE ni par T2, il peut être garanti détectable par la distance combinée. Ceci est illustré par la zone d'intersection entre la partie hachurée et celle ponctuée (Figures 1, 2 et 3). En plus, cette intersection correspond à des valeurs de  $\beta_\alpha < \sqrt{2}$ .

Dans la pratique, si les deux indices (SPE et T2 de Hotelling) ne détectent pas la présence de défaut, cela ne signifie pas forcément son absence. Dans ce cas et si  $\beta_\alpha < \sqrt{2}$ , il est très important de révéifier la détection en considérant la distance combinée.

## VI. CONCLUSION

La surveillance d'un système est assurée par une variété d'indices de détection. Ces derniers sont calculés différemment dans principalement deux sous-espaces afin de contrôler les différentes projections de défauts. A cause de cette variété d'indices de contrôle, la tâche de surveillance peut être alourdie. Pour cette raison, la distance combinée représente un premier avantage puisqu'elle combine deux indices de détection (SPE et T2). Autrement, elle contrôle le processus dans ces deux sous-espaces simultanément. Cependant, la détectabilité de cet indice, en la comparant à celle du SPE et/ou T2, est encore non analysée.

Dans ce papier, nous avons montré que si un défaut est garanti détectable par la distance combinée, il n'est pas forcément garanti détectable par les indices T2 de Hotelling et SPE. Cette particularité, qui représente le deuxième avantage de la distance combinée, n'est possible que si  $\beta_\alpha < \sqrt{2}$ .

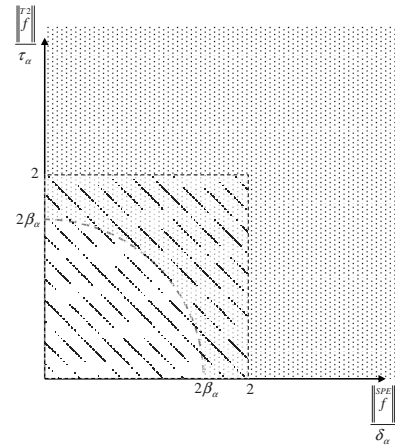


Fig. 1.  $\beta_\alpha < 1$

## RÉFÉRENCES

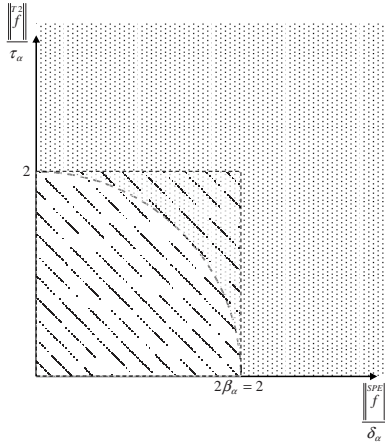
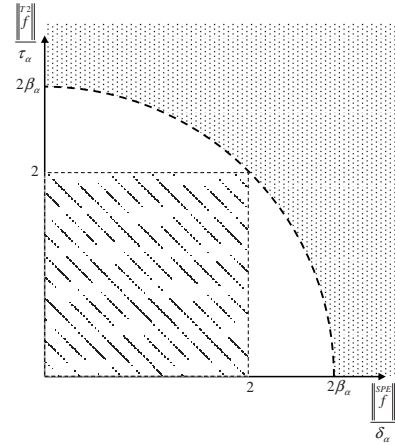
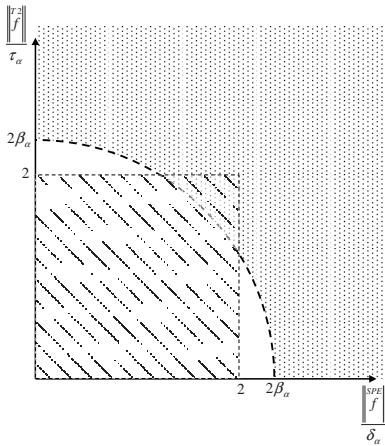
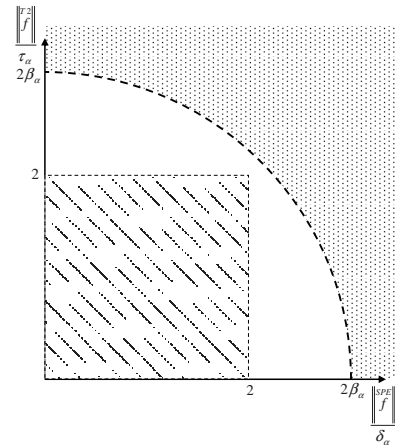
- [1] Box G.E.P. Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the One-Way Classification. *Ann. Math. Statist.*, vol. 25, n° 2, pp. 290-302, 1954.
- [2] Dunia R. et Joe Qin S. A unified geometric approach to process and sensor fault identification and reconstruction : the unidimensional fault case. *Computers & Chemical Engineering*, vol. 22, n° 7-8, pp. 927-943, 1998.
- [3] Dunia R. et Joe Qin S. Subspace Approach to Multidimensional Fault Identification and Reconstruction. *Process Systems Engineering*, vol. 44, n° 8, pp. 1813-1831, 1998.
- [4] Valle S., Li W. et Joe Qin S. Selection of the Number of Principal Components : The Variance of the Reconstruction Error Criterion with a Comparison to Other Methods. *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 38, n° 11, pp. 4389-4401, 1999.



TABLE II

CONDITIONNEMENT SUR LA DÉTECTABILITÉ DE DÉFAUT AVEC  $\varphi$  VERSUS LA DÉTECTABILITÉ AVEC LES INDICES SPE ET/OU T2

	$\beta_\alpha < 1$	$\beta_\alpha = 1$	$1 < \beta_\alpha < \sqrt{2}$	$\beta_\alpha = \sqrt{2}$	$\beta_\alpha > \sqrt{2}$
Si le défaut est non garanti détectable ni par SPE ni par T2	défaut peut être garanti détectable par $\varphi$		défaut est non garanti détectable par $\varphi$		
Si le défaut est garanti détectable par SPE ou T2	défaut est garanti détectable par $\varphi$		défaut est garanti détectable par $\varphi$ si $\ \hat{f}\  > 2\beta_\alpha$		
Si le défaut est garanti détectable par SPE et T2	défaut est garanti détectable par $\varphi$				défaut est garanti détectable par $\varphi$ si $\ \hat{f}\  > 2\beta_\alpha$
Si le défaut est non garanti détectable par SPE ou T2	défaut est garanti détectable par $\varphi$ si $\ \hat{f}\  > 2\beta_\alpha$				

Fig. 2.  $\beta_\alpha = 1$ Fig. 4.  $\beta_\alpha = \sqrt{2}$ Fig. 3.  $1 < \beta_\alpha < \sqrt{2}$ Fig. 5.  $\beta_\alpha > \sqrt{2}$ 

- [5] Henry Yue H. et Joe Qin S. Reconstruction-Based Fault Identification Using a Combined Index. *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 40, n° 20, pp. 4403-4414, 2001.
- [6] Joe Qin S. Statistical process monitoring : basics and beyond. *Journal of Chemometrics*, vol. 17, n° 8-9, pp. 480-502, 2003.
- [7] Alcalá C.F. et Joe Qin S. Unified Analysis of Diagnosis Methods for Process Monitoring. 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SafeProcess 2009, Barcelona, Spain, 30 juin - 3 juillet 2009.
- [8] Mnassri B., El Adel E.M., Ananou B. et Ouladsine M. Fault Detection and Diagnosis Based on PCA and a New Contribution Plots. 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SafeProcess 2009, Barcelona, Spain, 30 juin - 3 juillet 2009.
- [9] Mnassri B., El Adel E.M., Ananou B. et Ouladsine M. A Generalized Variance of Reconstruction Error Criterion for Determining the Optimum Number of Principal Components. 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10, Marrakech, Morocco, 23-25 juin 2010.
- [10] Mnassri B., El Adel E.M., Ananou B. et Ouladsine M. Selection of the Number of Principal Components Based on the Fault Reconstruction Approach Applied to a New Combined Index. 49th IEEE Conference on Decision and Control, 49th CDC, Atlanta, GA, USA, 15-17 décembre 2010.
- [11] Mnassri B., El Adel E.M. et Ouladsine M. Inverse-Variance Weighting PCA-based VRE criterion to select the optimal number of PCs. 18th IFAC World Congress, IFAC2011, Milano, Italy, 28 août - 2 septembre 2011.