



HAL
open science

Fonction de Seshadri arithmétique en géométrie d'Arakelov

Huayi Chen

► **To cite this version:**

| Huayi Chen. Fonction de Seshadri arithmétique en géométrie d'Arakelov. 2012. hal-00762872

HAL Id: hal-00762872

<https://hal.science/hal-00762872>

Preprint submitted on 8 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FONCTION DE SESHADRI ARITHMÉTIQUE EN GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV

Huayi Chen

Résumé. — À tout fibré inversible adélique sur une variété arithmétique projective et tout point algébrique régulier de la variété arithmétique, on attache une fonction définie sur \mathbb{R} qui mesure la séparation de jets en ce point algébrique par les sections “petites” du fibré inversible adélique. Cette fonction sera utilisée à étudier la positivité arithmétique locale.

Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Constante de Seshadri mouvante des systèmes linéaires gradués .	4
3. Lien avec les corps d'Okounkov.....	8
4. Fonction de Seshadri arithmétique.....	14
Références.....	22

1. Introduction

La positivité locale en géométrie algébrique est une notion introduite par Demailly. Dans [8, §6], il a défini la constante de Seshadri d'un fibré inversible sur une variété projective complexe en un point fermé et a établi un lien entre cette constante et la séparation de jets par les sections globales des puissances tensorielles du fibré inversible (cf. [8] théorème 6.4). Bien que cette notion était initialement destinée à être utilisée dans l'étude de la conjecture de Fujita, ses propres intérêts ont été découverts peu après, et ont conduit à de nombreux travaux dans la littérature (on renvoie les lecteurs dans [1] pour un survol), souvent indépendants de la conjecture qui est encore ouverte jusqu'au présent.

Rappelons la définition de la constante de Seshadri. Soient X une variété projective lisse définie sur un corps algébriquement clos et L un fibré inversible ample sur X . Si

x est un point fermé de X , la *constante de Seshadri* de L en x est définie comme le nombre réel

$$(1) \quad \varepsilon(L, x) := \inf_C \frac{(L \cdot C)}{\text{mult}_x(C)},$$

où C parcourt l'ensemble des courbes intègres dans X passant par x . Cette notion provient du critère de Seshadri pour l'amplitude (cf. [15] théorème 1.7) qui prédit qu'un fibré inversible L sur X est ample si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$(L \cdot C) \geq \epsilon \text{mult}_x(C)$$

pour tout point fermé $x \in X$ et toute courbe intègre dans X qui contient x .

Soient $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement de X le long d'un point fermé x et E son diviseur exceptionnel. Il est connu (cf. [18] Proposition 5.1.5) que la constante de Seshadri $\varepsilon(L, x)$ est égale à

$$(2) \quad \sup\{\lambda \in \mathbb{Q} \mid \nu^*(L) - \lambda E \text{ est un } \mathbb{Q}\text{-diviseur ample}\}.$$

Cette reformulation montre que la constante de Seshadri $\varepsilon(L, x)$ mesure effectivement la positivité locale de L en x .

Supposons que le fibré inversible L est ample et sans point de base, alors on a une borne inférieure $\varepsilon(L, x) \geq 1$ qui est uniforme pour tout point rationnel x (cf. [18] Exemple 5.1.18). Plus généralement, la constante de Seshadri est liée à la séparation de jets. Soit \mathcal{I}_x le faisceau d'ideaux quasi-cohérent qui définit le point fermé x . Pour tout entier $s \geq 1$, on dit que L *sépare s -jets* en x si l'application d'évaluation

$$H^0(X, L) \longrightarrow L \otimes (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_x^{s+1})$$

est surjective. On désigne par $s(L, x)$ le plus grand entier s tel que L sépare s -jets en x . Alors on a (cf. [18] Theorem 5.1.17)

$$(3) \quad \varepsilon(L, x) = \sup_{k \geq 1} \frac{s(kL, x)}{k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{s(kL, x)}{k}.$$

On étudie dans cet article un analogue arithmétique de la constante de Seshadri dans le cadre de la géométrie d'Arakelov. Étant donné une variété arithmétique projective \mathcal{X} et un fibré inversible hermitien \mathcal{L} sur \mathcal{X} , on cherche à proposer une valeur numérique qui mesure la positivité de \mathcal{L} en un point algébrique de \mathcal{X} . Un analogue immédiat de (1) est inadapté dans le cadre arithmétique car un point algébrique de \mathcal{X} devrait être considéré comme une sous-variété arithmétique de dimension 1. En outre, la traduction des définitions alternatives (2) et (3) dans le cadre arithmétique pourrait être difficile. Premièrement, le diviseur exceptionnel dans l'éclatement de \mathcal{X} le long d'une courbe arithmétique horizontale n'est pas un diviseur arithmétique. Sa structure arithmétique dépend d'un choix de courant de Green, qui n'est pas intrinsèque. Deuxièmement, l'analogue des sections globales dans le cas arithmétique est la notion de sections petites. Rappelons que l'ensemble des "sections petites" d'un fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ est

$$\hat{H}^0(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}) = \{s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \mid \|s\|_{\text{sup}} \leq 1\}.$$

C'est un ensemble qui n'est pas stable par l'addition en général ⁽¹⁾, ainsi la séparation de jets par des sections petites pourrait être délicate à étudier.

Comme expliqué plus haut, les constructions géométriques de la constante de Seshadri ne sont pas adaptées dans le cadre arithmétique. Dans cet article, on utilise le système linéaire gradué de $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ filtré par minima absolus pour étudier la positivité locale de $\overline{\mathcal{L}}$. La méthode de filtration a été utilisée dans [5, 6] pour étudier la capacité sectionnelle et la fonction volume arithmétique respectivement. Elle permet de surmonter les difficultés liées à l'absence de bonne structure algébrique sur l'espace des «sections petites» dans le cadre arithmétique. On suppose que la fibre géométrique $L = \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est gros. Au lieu de traiter directement les ensembles finis $\widehat{H}^0(\mathcal{X}, n\overline{\mathcal{L}})$ qui n'ont pas de bonne structure algébrique, on considère le système linéaire gradué total de la fibre générique géométrique L . Les données arithmétiques (la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module et les métriques) de \mathcal{L} nous permettent de définir une \mathbb{R} -filtration décroissante $(V_{\bullet}^t(\overline{\mathcal{L}}))_{t \in \mathbb{R}}$ en sous-algèbres graduées de $V_{\bullet}(L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{X}_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}})$. Il s'avère que la positivité arithmétique de $\overline{\mathcal{L}}$ est encodée dans la positivité géométrique de la famille $(V_{\bullet}^t(\overline{\mathcal{L}}))_{t \in \mathbb{R}}$ de systèmes linéaires gradués (par exemple le cas de la fonction volume arithmétique a été traité dans [5, 4]). Ainsi on peut se ramener à étudier la positivité locale d'un système linéaire gradué dans le cadre géométrique qui généralise la constante de Seshadri pour un fibré inversible ample.

Plusieurs approches existent dans la littérature pour généraliser la constante de Seshadri dans le cadre géométrique. Nakamaye [21] a proposé une version mouvante de la constante de Seshadri pour les fibrés inversibles gros. Il l'a utilisée comme un outil pour étudier le lieu de base augmenté du fibré inversible (défini dans [20]). Des applications de la positivité locale à la géométrie diophantienne ont été développées dans [23, 22]. L'approche d'Itô [16] est basée sur la dégénérescence à une variété torique et la théorie des corps d'Okounkov. Il s'intéresse notamment à la positivité locale d'un système linéaire en un point très général. Dans cet article, on propose une généralisation de la construction de Nakamaye, qui nous permet de définir, pour tout système gradué V_{\bullet} d'un fibré inversible gros L sur une variété projective X et tout point fermé $x \in X$, une constante $\varepsilon(V_{\bullet}, x)$ qui mesure la positivité locale de V_{\bullet} en x (cf. la définition 2.4). Un lien entre cette constante et la séparation des jets est établi dans le théorème 2.6.

Étant donné un fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur une variété arithmétique \mathcal{X} et un point algébrique x de \mathcal{X} , la *fonction de Seshadri* de $\overline{\mathcal{L}}$ en x est définie comme

$$(t \in \mathbb{R}) \mapsto \varepsilon_t(\overline{\mathcal{L}}, x) := \varepsilon(V_{\bullet}^t(\overline{\mathcal{L}}), x).$$

C'est une fonction positive qui est bornée supérieurement par $\varepsilon(\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}}, x)$. Des liens entre cette fonction et le corps d'Okounkov arithmétique est discuté dans §4.3. Un critère d'annulation de section globale est établi dans le théorème 4.7, où on fait intervenir la multiplicité de la section en x ainsi que la hauteur de la section. On peut espérer que cette méthode sera utile dans l'étude de la géométrie diophantienne.

1. Cette difficulté apparaît aussi dans l'étude de la fonction volume arithmétique, qui décrit le comportement asymptotique du cardinal de $\widehat{H}^0(\mathcal{X}, n\overline{\mathcal{L}})$ lorsque n tend vers l'infini.

2. Constante de Seshadri mouvante des systèmes linéaires gradués

Ce paragraphe est consacré à la généralisation de la notion de constante de Seshadri mouvante pour un système linéaire gradué. Comparée à la construction de la constante de Seshadri mouvante pour les fibrés inversibles gros due à Nakamaye, la difficulté réside dans la détermination du lieu de base augmenté où le système linéaire gradué ne possède pas de positivité locale. On utilise un théoème d'approximation pour les systèmes linéaires gradués établi par Lazarsfeld et Mustață (cf. [19] théorème 3.3, voir aussi remarque 3.4) pour définir le lieu de base augmenté dans le cas général.

On fixe dans ce paragraphe un corps K qui est supposé être algébriquement clos.

2.1. Rappels. — Soient $\pi : X \rightarrow \text{Spec } K$ un K -schéma projectif et intègre, et L un fibré inversible sur X . Rappelons que le *lieu de base* de L est défini comme le sous-schéma fermé $B(L)$ de X dont le faisceau d'ideaux quasi-cohérent est l'image de l'application d'évaluation

$$\pi^* \pi_*(L) \otimes L^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Le *lieu de base stable* de L est l'intersection ensembliste (on ignore les faisceaux d'anneaux) des lieux de base de nL pour tous les $n \geq 1$, noté comme $Bs(L)$. C'est un sous-espace fermé de X défini par le fasiceau d'ideaux quasi-cohérent

$$\text{Im} \left(\bigoplus_{n \geq 1} \pi^* \pi_*(nL) \otimes L^{\vee \otimes n} \longrightarrow \mathcal{O}_X \right).$$

Il s'avère que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $Bs(L) = Bs(nL)$. Cette observation nous permet d'étendre la construction du lieu de base stable pour les éléments dans $\text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$: pour tout $\alpha \in \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$, on définit $Bs(\alpha)$ comme $Bs(n\alpha)$, où n est un entier strictement positif qui est suffisamment divisible de telle sorte que $n\alpha \in \text{Pic}(X)$. Rappelons que le *lieu de base augmenté* de L est défini comme (cf. [20])

$$B_+(L) := \bigcap_A Bs(L - A),$$

où A parcourt l'ensemble des \mathbb{Q} -diviseurs de Cartier amples. Le lieu de base augmenté mesure l'amplitude du fibré inversible L et est lié à l'approximation de Fujita. En effet, si x est un point fermé de X en dehors de $B_+(L)$, alors il existe un morphisme projectif et birationnel $\varphi : X' \rightarrow X$ qui définit un isomorphisme de schémas dans un voisinage ouvert de x , ainsi qu'une décomposition $\varphi^*(L) = A + E$ de \mathbb{Q} -diviseurs avec A ample et E effectif ne contenant pas x (cf. [9] définition 1.2 et remarque 1.3)⁽²⁾. Nakamaye a ainsi défini un analogue de la constante de Seshadri (qu'il appelle *constante de Seshadri mouvante*) pour un fibré inversible gros L en un point fermé x en dehors de son lieu de base augmenté (cf. [21, définition 0.4], voir aussi [10, §6]) :

$$(4) \quad \varepsilon(L, x) := \sup_{\varphi^*(L)=A+E} \varepsilon(A, x),$$

2. Le passage à une modification birationnelle n'est pas nécessaire ici, mais ce passage est important dans la construction de la constante de Seshadri mouvante.

où $\varphi^*(L) = A + E$ parcourt l'ensemble des décompositions de L sur une modification birationnelle $\varphi : X' \rightarrow X$ (qui définit un isomorphisme de schémas dans un voisinage ouvert de x) en une somme d'un \mathbb{Q} -diviseur ample A et un \mathbb{Q} -diviseur effectif E ne contenant pas x . Une formule similaire à (3) qui relie la constante de Seshadri mouvante et la séparation des jets est démontrée dans [10, Proposition 6.6].

2.2. Constante de Seshadri mouvante d'un système linéaire gradué. — On propose la notion de lieu de base augmenté et celle de constante de Seshadri mouvante pour un système linéaire gradué qui contient un diviseur ample. Dans le cas particulier où le système linéaire gradué est le système linéaire gradué total d'un fibré inversible gros, on retrouve la constante de Seshadri mouvante au sens de Nakamaye du fibré inversible.

Soient X un schéma projectif et intègre sur $\text{Spec } K$ et L un \mathcal{O}_X -module inversible. On désigne par $V_\bullet(L)$ le système linéaire gradué total de L , défini comme

$$V_\bullet(L) := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nL),$$

où le produit tensoriel de \mathcal{O}_X -modules inversibles est noté additivement. On appelle *système linéaire gradué* de L toute sous- K -algèbre graduée de $V_\bullet(L)$. On dit qu'un système linéaire gradué V_\bullet de L *contient un diviseur ample* s'il existe un \mathcal{O}_X -module inversible ample A , un entier $q \geq 1$ et une section globale non-nulle s de $qL - A$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, l'image de l'application

$$H^0(X, nA) \xrightarrow{s^n} H^0(X, qnL)$$

soit contenue dans V_{qn} . Rappelons que ce genre de systèmes linéaires gradués sont dits satisfaire à la condition (C) dans [19, §2.3].

Remarque 2.1. — Soit V_\bullet un système linéaire gradué de L . Si V_\bullet contient un diviseur ample, alors son *volume*, défini comme

$$\text{vol}(V_\bullet) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\dim_K(V_n)}{n^{\dim(X)}/\dim(X)!},$$

est strictement positif. On en déduit que le volume de L (défini comme $\text{vol}(L) := \text{vol}(V_\bullet(L))$) est strictement positif, c'est-à-dire que le fibré inversible L est *gros*.

Définition 2.2. — Soient X un schéma intègre et projectif défini sur un K , L un fibré inversible sur X , et V_\bullet un système linéaire gradué de L , qui contient un diviseur ample. On dit qu'un point x de X est *en dehors du lieu de base augmenté* de V_\bullet s'il existe un K -morphisme projectif et birationnel $\varphi : X' \rightarrow X$, un entier $q \geq 1$, un fibré inversible ample A sur X' ainsi qu'une section globale non-nulle t_0 de $\varphi^*(qL) - A$, qui vérifient les conditions suivantes :

- (a) φ définit un isomorphisme dans un voisinage ouvert de x et t_0 est non-nulle en x ,
- (b) pour tout entier $n \geq 1$, l'image de l'homomorphisme

$$H^0(X', nA) \xrightarrow{t_0^n} H^0(X', \varphi^*(qnL))$$

est contenu dans V_{qn} , où on a identifié $H^0(X, qnL)$ à un sous-espace vectoriel de $H^0(X', \varphi^*(qnL))$ via l'homomorphisme naturel $qnL \rightarrow \varphi_*\varphi^*(qnL)$.

On désigne par $B_+(V_\bullet)$ l'ensemble (fermé) des points de X qui ne sont pas en dehors du lieu de base augmenté de V_\bullet , et on l'appelle le *lieu de base augmenté* de V_\bullet .

Remarque 2.3. — Comparé au cas d'un fibré inversible gros, il est difficile de définir directement le lieu de base augmenté pour un système linéaire gradué. C'est pour cette raison que l'on adopte une approche indirecte via l'approximation de Fujita. Cette approche est basée sur un travail de Lazarsfeld et Mustață (cf. [19] théorème 3.3, voir aussi remarque 3.4) qui prédit que tout système linéaire gradué contenant un diviseur ample est approximable par les diviseurs amples, quitte à passer à une modification birationnelle. Dans le cas où le système linéaire gradué V_\bullet est total (c'est-à-dire que $V_\bullet = V_\bullet(L)$), l'ensemble $B_+(V_\bullet)$ s'identifie au lieu de base augmenté de L .

Définition 2.4. — Étant donné un point fermé x en dehors de $B_+(V_\bullet)$, on définit la *constante de Seshadri mouvante* de V_\bullet en x comme

$$(5) \quad \varepsilon(V_\bullet, x) := \sup_{\substack{\varphi^*(qL)=A+E \\ V_\bullet(A) \subset V_\bullet}} q^{-1}\varepsilon(A, x),$$

où la borne supérieure est prise par rapport à l'ensemble des décompositions de certaine puissance tensorielle qL de L en produit tensoriel d'un fibré inversible ample A et un fibré inversible E ayant une section globale non-nulle t_0 sur une modification birationnelle $\varphi : X' \rightarrow X$, qui satisfont aux conditions (a) et (b) comme ci-dessus.

Remarque 2.5. — (1) Lorsque V_\bullet est le système linéaire gradué total $V_\bullet(L)$, le nombre $\varepsilon(V_\bullet, x)$ s'identifie à la constante de Seshadri mouvante (4) de L en x .

(2) Si x est un point de $B_+(V_\bullet)$, on définit $\varepsilon(V_\bullet, x)$ comme 0 par convention.

Le résultat suivant établit un lien entre la constante de Seshadri mouvante et la séparation de jets lorsque le point fermé x est régulier. Pour tout entier $k \geq 1$ on désigne par $s(V_k, x)$ le plus grand entier s tel que l'homomorphisme d'évaluation

$$V_k \longrightarrow L^{\otimes k} \otimes (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{X,x}^{s+1}),$$

soit surjectif, où $\mathcal{I}_{X,x}$ est le faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_X définissant le point fermé x .

Théorème 2.6. — Soient X un schéma projectif et intègre qui est défini sur K , L un fibré inversible gros sur X , et V_\bullet un système linéaire gradué de L qui contient un diviseur ample. Pour tout point fermé régulier x de X en dehors de $B_+(V_\bullet)$, on a

$$\varepsilon(V_\bullet, x) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{s(V_k, x)}{k} = \sup_{k \geq 1} \frac{s(V_k, x)}{k}.$$

Démonstration. — La suite $(s(V_k, x))_{k \geq 1}$ est sur-additive, d'où la seconde égalité.

Soient $\varphi : X' \rightarrow X$ une modification birationnelle et $\varphi^*(qL) = A + E$ une décomposition de $\varphi^*(qL)$ en produit tensoriel d'un fibré inversible ample A et un fibré inversible E ayant une section globale non-nulle t_0 qui vérifient les conditions (a) et (b) de la définition 2.2. D'après la formule de projection (cf. [14, 0.(5.4.8)]), on peut identifier $H^0(X, qnL)$ à un sous-espace vectoriel de $H^0(X', \varphi^*(qnL))$. En

outre, comme φ est un isomorphisme dans un voisinage ouvert de x , on obtient que l'homomorphisme canonique

$$\varphi^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{X,x}^{s+1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}_{X',x}^{s+1}$$

est un isomorphisme pour tout entier $s \geq 0$. Si l'homomorphisme d'évaluation

$$H^0(X', nA) \longrightarrow A^{\otimes n} \otimes (\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}_{X',x}^{s+1})$$

est surjectif, alors il en est de même de

$$\mathrm{Im}\left(H^0(X', nA) \xrightarrow{t_0^n} H^0(X', \varphi^*(qnL))\right) \longrightarrow \varphi^*(L)^{\otimes qn} \otimes (\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}_{X',x}^{s+1})$$

puisque t_0 ne s'annule pas en x . Par conséquent, l'homomorphisme d'évaluation

$$V_{qn} \longrightarrow L^{\otimes qn} \otimes (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{X,x}^{s+1})$$

est surjectif. Cela montre que $s(V_{qn}, x) \geq s(nA, x)$, où $s(nA, x)$ désigne le plus grand entier s tel que l'homomorphisme d'évaluation

$$H^0(X', nA) \longrightarrow A^{\otimes n} \otimes (\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}_{X',x}^{s+1})$$

soit surjectif. D'après un résultat classique sur la constante de Seshadri (cf. [18, théorème 5.1.17]), on obtient

$$\sup_{k \geq 1} \frac{s(V_k, x)}{k} \geq \sup_{n \geq 1} \frac{s(nA, x)}{pn} = \frac{\varepsilon(A, x)}{p}$$

et donc

$$\sup_{k \geq 1} \frac{s(V_k, x)}{k} \geq \varepsilon(V_\bullet, x).$$

Montrons l'inégalité inverse. Comme x est en dehors de $B_+(V_\bullet)$, pour tout entier $n \geq 1$ qui est suffisamment divisible, x est en dehors du lieu de base de V_n . Soit $\pi_n : X_n \rightarrow X$ l'éclatement de X le long du lieu de base de V_n . Soient E_n le faisceau inversible associé au diviseur exceptionnel de X_n et t_n la section globale de E_n qui définit le diviseur exceptionnel. Il s'avère que π_n définit un isomorphisme de schémas dans un voisinage ouvert de x et que la section t_n est non-nulle en x . Soit $N_n := \pi_n^*(nL) - E_n$. C'est le faisceau inversible universel sur X_n si on considère π_n comme le spectre projectif associé à l'algèbre graduée quasi-cohérente

$$\bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{Im}\left(\mathrm{Sym}^p(V_n) \longrightarrow L^{\otimes np}\right).$$

En particulier, on a un isomorphisme naturel entre V_n et $H^0(X_n, N_n)$ (vu comme des sous-espaces vectoriels de $H^0(X_n, \pi_n(nL))$ via la formule de projection et via t_n respectivement). Comme π_n est un isomorphisme dans un voisinage ouvert de x et comme t_n ne s'annule pas en x , on obtient donc $s(V_n, x) = s(N_n, x) \leq \varepsilon(N_n, x) \leq n\varepsilon(V_\bullet, x)$, où la seconde inégalité provient de la relation entre la constante de Seshadri mouvante et la séparation des jets pour un faisceau inversible gros (cf. [10, proposition 6.6]). Le résultat est ainsi démontré. \square

3. Lien avec les corps d'Okounkov

On établit un lien entre la constante de Seshadri mouvante et le corps d'Okounkov d'un système linéaire gradué. Bien que notre approche ressemble beaucoup à celle d'Itô [16] à première vue, la différence entre les deux méthodes est significative : Itô s'intéresse à la positivité du système linéaire gradué en un point très général et il établit le lien avec les corps d'Okounkov via la dégénérescence à une variété torique ; tandis qu'ici on considère la positivité locale en un point fermé fixé et le lien avec les corps d'Okounkov est obtenu via un choix spécifique d'une relation d'ordre sur les monômes (de toute façon il est peu intéressant de considérer un point très général dans le cas arithmétique). Cela non-seulement permet de reformuler la notion de constante de Seshadri mouvante dans un cadre plus combinatoire, mais encore conduit à diverses variantes de cette notion qui peuvent être utilisées ultérieurement dans la géométrie diophantienne.

Dans ce paragraphe, on fixe un corps K supposé être algébriquement clos.

3.1. Corps d'Okounkov. — Dans ce paragraphe, on rappelle la construction du corps d'Okounkov d'un système linéaire gradué sur une variété projective. On renvoie les lecteurs dans [3] pour un survol complet.

On appelle *relation d'ordre additive* sur \mathbb{N}^d toute relation d'ordre totale \leq sur \mathbb{N}^d qui vérifie les conditions suivantes :

(1) pour tous les éléments α, α' et β dans \mathbb{N}^d , on a

$$\alpha \leq \alpha' \implies \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta;$$

(2) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $0 \leq \alpha$.

On vérifie aisément que, si α, α', β et β' sont des éléments dans \mathbb{N}^d tels que $\alpha \leq \alpha'$ et $\beta \leq \beta'$, alors on a $\alpha + \beta \leq \alpha + \beta' \leq \beta + \beta'$. En outre, comme \leq est une relation d'ordre totale, pour tous les éléments α, α' et β dans \mathbb{N}^d , si $\alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$, alors on a $\alpha \leq \alpha'$.

Exemple 3.1. — (1) On désigne par \leq_{lex} la relation d'ordre lexicographique de \mathbb{N}^d .

Pour tous les éléments $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ de \mathbb{N}^d , $\alpha \leq_{\text{lex}} \beta$ si et seulement s'il existe un indice $i \in \{0, \dots, d\}$ tel que $\alpha_j = \beta_j$ pour tout $j \leq i$ et que $\alpha_{i+1} < \beta_{i+1}$ lorsque $i < d$. C'est une relation d'ordre additive sur \mathbb{N}^d .

(2) Soit $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ un vecteur en nombres réels strictement positifs. On définit la fonction d'indice sur \mathbb{R}_+^d par rapport à \mathbf{n} comme

$$\text{ind}_{\mathbf{n}}(y_1, \dots, y_d) := \frac{y_1}{n_1} + \dots + \frac{y_d}{n_d}.$$

On désigne par $\leq_{\mathbf{n}}$ la relation binaire suivante : pour tous les éléments α et β de \mathbb{N}^d , $\alpha \leq_{\mathbf{n}} \beta$ si et seulement si $\text{ind}_{\mathbf{n}}(\alpha) < \text{ind}_{\mathbf{n}}(\beta)$ ou si $\text{ind}_{\mathbf{n}}(\alpha) = \text{ind}_{\mathbf{n}}(\beta)$ et $\alpha \leq_{\text{lex}} \beta$. On peut vérifier que c'est aussi une relation d'ordre additive sur \mathbb{N}^d .

Dans le reste du sous-paragraphe, on fixe une relation d'ordre additive \leq sur \mathbb{N}^d . L'expression $\beta \geq \alpha$ désigne la relation $\alpha \leq \beta$. En outre, $\beta > \alpha$ signifie " $\beta \geq \alpha$ et $\beta \neq \alpha$ ".

Soient X un schéma projectif et intègre de dimension $d \geq 1$ défini sur K et L un \mathcal{O}_X -module inversible gros. On fixe en outre un point régulier $x \in X(K)$ et une suite régulière $z = (z_1, \dots, z_d)$ dans l'idéal maximal \mathfrak{m}_x de l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{X,x}$. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ est un élément de \mathbb{N}^d , on désigne par z^α l'élément $z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d}$ de $\mathfrak{m}_x^{|\alpha|}$, où $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

On désigne par $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ par rapport à la topologie \mathfrak{m}_x -adique. C'est un anneau local régulier qui est complet (cf. [25] Ch. VIII, §11). Le théorème de Cohen pour la structure des anneaux locaux noethériens complets (cf. [11] proposition 10.16) montre que l'homomorphisme de l'algèbre des séries formelles $K[[T_1, \dots, T_d]]$ vers $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, qui envoie T_i en z_i pour tout i , est un isomorphisme de K -algèbres.

Le choix de la suite régulière z et de la relation d'ordre additive \leq induit une \mathbb{N}^d -filtration décroissante \mathcal{F} sur $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$: pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\mathcal{F}^\alpha(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$ consiste des séries formelles dont les monômes à coefficient non-nul sont de la forme z^β avec $\beta \geq \alpha$. Comme \leq est une relation d'ordre additive, on obtient que $\mathcal{F}^\alpha(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$ est un idéal de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ (qui est en fait fermé pour la topologie \mathfrak{m}_x -adique). Par la même raison, on a

$$\mathcal{F}^\alpha(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})\mathcal{F}^\beta(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) \subset \mathcal{F}^{\alpha+\beta}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}).$$

Il s'avère que l'algèbre \mathbb{N}^d -graduée associée à cette filtration est isomorphe à l'anneau des polynômes à d indéterminés (qui sont les images des éléments z_1, \dots, z_d).

La filtration \mathcal{F} induit par restriction une \mathbb{N}^d -filtration décroissante sur $\mathcal{O}_{X,x}$ que l'on notera encore comme \mathcal{F} par abus de langage. Comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est un sous-anneau dense de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, les algèbres \mathbb{N}^d -graduées associées à $\mathcal{O}_{X,x}$ et à $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ sont isomorphes. En particulier, le sous-quotient d'indice α de $\mathcal{O}_{X,x}$, défini comme

$$\mathrm{gr}^\alpha(\mathcal{O}_{X,x}) := \mathcal{F}^\alpha(\mathcal{O}_{X,x}) \Big/ \bigcup_{\beta > \alpha} \mathcal{F}^\beta(\mathcal{O}_{X,x})$$

est un espace vectoriel de rang 1 sur K .

Remarque 3.2. — Soit $\mathbf{1}$ le vecteur constant $(1, \dots, 1)$ de longueur d . On a $\mathrm{ind}_{\mathbf{1}}(\alpha) = |\alpha|$. Ainsi dans le cas où la relation d'ordre \leq est de la forme $\leq_{\mathbf{1}}$, la filtration \mathcal{F} raffine la filtration \mathfrak{m}_x -adique.

Soit L un \mathcal{O}_X -module inversible. On désigne par L_x l'image réciproque de L par le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$ et la considère comme un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre de rang 1. Comme X est projectif et intègre, l'application K -linéaire $H^0(X, L) \rightarrow L_x$ définie par l'évaluation des sections est injective. Quitte à choisir une trivialisations de L en x , on peut identifier $H^0(X, L)$ (ou chacun de ses sous-espaces vectoriels) à un sous-espace K -vectoriel de $\mathcal{O}_{X,x}$. La filtration \mathcal{F} induit ainsi une \mathbb{N}^d -filtration décroissante sur $H^0(X, L)$. Bien que l'inclusion de $H^0(X, L)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$ dépend du choix de la trivialisations, la filtration induite ne le dépend pas. En effet, le rapport entre deux trivialisations de L en x est un élément inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Cet élément, ainsi que son inverse, sont tous les deux dans $\mathcal{F}^0(\mathcal{O}_{X,x})$.

Pour toute section $s \in H^0(X, L)$, on définit

$$(6) \quad \mathrm{ord}(s) := \sup\{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid s \in \mathcal{F}^\alpha H^0(X, L)\} \in \mathbb{N}^d \cup \{\infty\}.$$

La fonction $\text{ord}(\cdot)$ ressemble à une valuation. Pour tous éléments s et s' dans $H^0(X, L)$, on a

$$\text{ord}(s + s') \geq \min(\text{ord}(s), \text{ord}(s')).$$

En outre, si $s \in H^0(X, L)$ et si $a \in k^\times$, alors $\text{ord}(as) = \text{ord}(s)$. Si L_1 et L_2 sont deux fibrés inversibles sur X et si s_1 et s_2 sont respectivement des sections globales de L_1 et L_2 , alors on a

$$(7) \quad \text{ord}(s_1 s_2) = \text{ord}(s_1) + \text{ord}(s_2).$$

En particulier, si $V_\bullet = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$ est une sous-algèbre graduée de $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^{\otimes n})$ dont chaque composante homogène V_n est munie de la \mathbb{N}^d -filtration \mathcal{F} , alors l'algèbre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$ -graduée associée

$$\text{gr}(V_\bullet) := \bigoplus_{(n, \alpha) \in \mathbb{N}^{d+1}} \text{gr}^{n, \alpha}(V_\bullet)$$

est un anneau intègre, où

$$\text{gr}^{n, \alpha}(V_\bullet) := \mathcal{F}^\alpha(V_n) / \sum_{\beta > \alpha} \mathcal{F}^\beta(V_n).$$

On désigne par $\Gamma(V_\bullet)$ l'ensemble

$$\{(n, \alpha) \mid \text{gr}^{n, \alpha}(V_\bullet) \neq 0\}.$$

C'est un sous-semi-groupe de \mathbb{N}^{d+1} . On désigne par $\Sigma(V_\bullet)$ le cône convexe fermé dans \mathbb{R}^{d+1} engendré par $\Gamma(V_\bullet)$. Le *corps d'Okounkov* de V_\bullet est défini comme la tranche au niveau 1 du cône $\Sigma(V_\bullet)$:

$$\Delta(V_\bullet) := (\{1\} \times \mathbb{R}^d) \cap \Sigma(V_\bullet).$$

Lazarsfeld et Mustața ont découvert un lien étroit entre les corps d'Okounkov et la fonction volume arithmétique. Ils ont montré que (cf. [19, théorème 2.13]), si le système linéaire gradué V_\bullet contient un diviseur ample, alors la mesure de Lebesgue de $\Delta(V_\bullet)$ s'identifie à $\text{vol}(V_\bullet)/\dim(X)!$.

3.2. Constante de Seshadri mouvante via les corps d'Okounkov. — Soient X un schéma projectif de dimension d défini sur K , L un faisceau inversible gros sur X , et V_\bullet un système linéaire gradué de L qui contient un diviseur ample. Soit x un point fermé régulier de X en dehors de $B_+(V_\bullet)$. On fixe en outre un système de paramètres z de l'anneau local de X en x (qui est un anneau régulier). Soient $\Gamma(V_\bullet)$ et $\Delta(V_\bullet)$ respectivement le semi-groupe d'Okounkov et le corps d'Okounkov du système linéaire gradué V_\bullet relativement au système de paramètre z et à la relation d'ordre \leq_1 (cf. §3.1). Comme la \mathbb{N}^d -filtration de $\mathcal{O}_{X,x}$ induit par le système de paramètre z et la relation d'ordre \leq_1 raffine la filtration \mathfrak{m}_x -adique, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.3. — *Pour tout entier $k \geq 1$, le nombre $s(V_k, x)$ (défini dans la page 6) s'identifie au plus grand entier naturel b tel que $\Gamma(V_\bullet)$ contient tous les vecteurs $(k, \alpha) \in \mathbb{N}^{d+1}$ vérifiant $|\alpha| \leq b$.*

Pour tout élément $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}_+^d$, soit $|\mathbf{y}| := y_1 + \dots + y_d$. On désigne par $\varepsilon^+(V_\bullet, x)$ la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels $u \geq 0$ tels que le corps d'Okounkov $\Delta(V_\bullet)$ contienne l'ensemble $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d \mid |\mathbf{y}| \leq u\}$. Dans le cas où le système linéaire gradué V_\bullet est le système total des sections $V_\bullet(L)$, on utilise aussi l'expression $\varepsilon^+(L, x)$ pour désigner $\varepsilon^+(V_\bullet, x)$.

Comme le corps d'Okounkov contient les points de la forme $\{k^{-1}\alpha \mid (k, \alpha) \in \Gamma(V_\bullet)\}$, on obtient $\varepsilon(V_\bullet, x) \leq \varepsilon^+(V_\bullet, x)$, compte tenu du théorème 2.6. Cela conduit à une preuve rapide d'une généralisation d'un résultat classique qui donne une majoration de la constante de Seshadri.

Corollaire 3.4. — *On a*

$$\varepsilon^+(V_\bullet, x) \leq \text{vol}(V_\bullet)^{1/d}.$$

Démonstration. — Soit H le corps convexe

$$\{(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}_+^d \mid y_1 + \dots + y_d \leq \varepsilon^+(V_\bullet, x)\}.$$

Par définition, on a $H \subset \Delta(V_\bullet)$. Donc le volume de H pour la mesure de Lebesgue, qui est égal à $d! \varepsilon^+(V_\bullet, x)^d$, est majoré par celui de $\Delta(V_\bullet)$, qui est égal à $d! \text{vol}(V_\bullet)$. Le résultat est ainsi démontré. \square

Il est naturel de se demander si l'égalité $\varepsilon(V_\bullet, x) = \varepsilon^+(V_\bullet, x)$ est toujours vérifiée. Le résultat suivant montre que cette égalité est vraie lorsque le semi-groupe $\Gamma(V_\bullet)$ est engendré par un nombre fini d'éléments.

Théorème 3.5. — *Soient Γ un sous-semi-groupe de \mathbb{R}^{d+1} engendré par un nombre fini de vecteurs dans $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_+^d$ et Δ le corps convexe obtenu comme la tranche de niveau 1 du cône Σ engendré par Γ (autrement dit, on a $\{1\} \times \Delta = (\{1\} \times \mathbb{R}^d) \cap \Sigma$). On suppose que, pour tout entier $n \geq 1$ assez positif, le semi-groupe Γ contient les vecteurs $(n, \mathbf{0}), (n, \mathbf{e}_1), \dots, (n, \mathbf{e}_d)$, où $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^d$ est la base canonique de \mathbb{R}^d . Alors l'égalité $\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon^+(\Delta)$ est vérifiée, où*

$$\varepsilon(\Gamma) = \sup_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sup\{s \in \mathbb{N} \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq s \Rightarrow (k, \alpha) \in \Gamma\},$$

$$\varepsilon^+(\Delta) = \sup\{u \in \mathbb{R}_+ \mid \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d, |\mathbf{y}| \leq u \Rightarrow \mathbf{y} \in \Delta\}.$$

Démonstration. — Soit $(\mathbf{x}_i)_{i=1}^N$ un système de générateurs du semi-groupe Γ . On suppose que chaque vecteur \mathbf{x}_i est de la forme $(n_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$, où $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}_+^d$. Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, soit \mathbf{y}_i le vecteur $n_i^{-1} \boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}_+^d$. Il s'avère que le corps convexe Δ coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$. C'est donc un polytope dont l'ensemble des sommets est contenu dans $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$.

Rappelons qu'un point \mathbf{z} dans Δ est un sommet du polytope Δ si et seulement si, pour toute droite L passant par \mathbf{z} , l'intersection $L \cap \Delta$ ne contient pas un voisinage ouvert de \mathbf{z} dans L . Pour tout entier $j \in \{1, \dots, d\}$, soit $a_j \geq 0$ le plus grand nombre positif tel que $a_j \mathbf{e}_j \in \Delta$. Comme le polytope Δ est contenu dans \mathbb{R}_+^d , il s'avère que les vecteurs $(a_j \mathbf{e}_j)_{j=1}^d$ sont des sommets de Δ , et donc sont contenu dans l'ensemble $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N\}$.

Pour tout entier $j \in \{1, \dots, d\}$, soit Γ_j le sous-semi-groupe de Γ des éléments dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}e_j$. C'est un semi-groupe de type fini et engendre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}e_j$ comme un groupe. En outre, d'après ce que l'on a obtenu comme ci-dessus, on obtient que la tranche de niveau 1 du cône engendré par Γ_j est l'intervalle $[0, a_j]e_j$. D'après [17, Proposition 3], il existe deux nombres positifs u_j et v_j tels que tout vecteur de la forme $(n, \xi e_j)$ avec $n \geq u_j$ et $\xi \in [v_j, na_j]$ appartienne à Γ_j . En outre, d'après l'hypothèse du théorème (pour tout entier $n_0 \geq 1$ assez positif, l'ensemble $(\{n\} \times \mathbb{N}^d) \cap \Gamma$ contient les vecteurs $(n, \mathbf{0}), (n, e_1), \dots, (n, e_d)$), on obtient qu'il existe $\varepsilon_j > 0$ tel que Γ_j contienne tous les vecteurs $(n, \xi e_j)$ avec n assez grand et $0 \leq \xi \leq \varepsilon_j n$. Par conséquent, pour tout entier n assez positif, Γ_j contient tout vecteur $(n, \xi e_j)$ tel que $0 \leq \xi \leq na_j$. On obtient alors

$$\varepsilon(\Gamma) = \min\{a_1, \dots, a_d\} = \varepsilon^+(\Delta).$$

Le résultat est ainsi démontré. \square

Si on applique le théorème au cas où $\Gamma = \Gamma(V_\bullet)$, alors on a $\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon(V_\bullet, x)$ et $\varepsilon^+(\Delta) = \varepsilon^+(V_\bullet, x)$. En outre, si $n \geq 1$ est un entier assez grand, les sections dans V_n séparent les 1-jets en x . En particulier, les vecteurs $(n, \mathbf{0}), (n, e_1), \dots, (n, e_d)$ sont tous dans Γ . Par conséquent, si $\Gamma(V_\bullet)$ est engendré par un nombre fini de vecteurs, alors on a $\varepsilon(V_\bullet, x) = \varepsilon^+(V_\bullet, x)$.

Remarque 3.6. — Dans le cas où la variété X est de dimension 1, pour tout système linéaire gradué V_\bullet contenant un diviseur ample et tout point fermé x en dehors de $B_+(V_\bullet)$, l'égalité $\varepsilon(V_\bullet, x) = \varepsilon^+(V_\bullet, x)$ est toujours vérifiée, même si le semi-groupe $\Gamma(V_\bullet)$ n'est pas nécessairement de type fini. En effet, on peut approximer $\Gamma(V_\bullet)$ par une famille $(\Gamma_i)_{i \geq 0}$ de sous-semi-groupes de type fini telle que $\bigcup_{i \geq 0} \Delta_i = \Delta(V_\bullet)$, où Δ_i est le corps convexe associé à Γ_i obtenu comme la tranche de niveau 1 du cône engendré par Γ_i . Sans perte de généralité, on peut supposer que Γ_i contient tous les vecteurs de la forme $(n, 0)$ et $(n, 1)$ avec n suffisamment grand. Ainsi le corps convexe Δ_i est un intervalle de la forme $[0, a_i]$ où $a_i > 0$. Comme $\Delta(V_\bullet) = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ on obtient $\Delta(V_\bullet) = [0, a]$ avec $a = \sup_{i \geq 0} a_i$. Le théorème précédent montre que $\varepsilon(\Gamma_i) = \varepsilon^+(\Delta_i) = a_i$. Par conséquent, on a

$$\varepsilon(V_\bullet) = \varepsilon(\Gamma(V_\bullet)) \geq \varepsilon(\Gamma_i) = a_i$$

pour tout i , et donc $\varepsilon(V_\bullet) \geq a = \varepsilon^+(V_\bullet)$.

Remarque 3.7. — L'égalité $\varepsilon(V_\bullet, x) = \varepsilon^+(V_\bullet, x)$ n'est pas vraie en général dès que la dimension de la variété X est supérieure ou égale à 2. Considérons le cas où $X = \mathbb{P}^2 = \text{Proj}(K[T_0, T_1, T_2])$ et $L = \mathcal{O}(1)$. On identifie l'algèbre des sections $V_\bullet(L)$ à l'algèbre de polynômes $K[T_0, T_1, T_2]$ munie de la graduation usuelle. Il s'avère que le corps d'Okounkov de $V_\bullet(L)$ par rapport à $x = (1 : 0 : 0)$ et au système de paramètres usuel ($z_1 = T_1/T_0, z_2 = T_2/T_0$) n'est rien d'autre que $\{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u + v \leq 1\}$.

On fixe un nombre réel $\delta \in]0, 1[$. Pour tout entier n , soit V_n l'espace des polynômes homogènes de degré n dans $K[T_0, T_1, T_2]$ qui sont des combinaisons linéaires de monômes de la forme $T_0^{n-a_0-a_1} T_1^{a_1} T_2^{a_2}$ avec $a_1 > 0$ ou $a_2 \leq \delta n$. On vérifie facilement que $V_\bullet := \bigoplus_{n \geq 0} V_n$ est une sous-algèbre graduée de $V_\bullet(L)$ et que le corps d'Okounkov

de V_\bullet s'identifie à $\{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u + v \leq 1\}$, d'où $\varepsilon^+(V_\bullet, x) = 1$. Cependant, le semi-groupe d'Okounkov de V_\bullet est le sous-ensemble de \mathbb{N}^3 des vecteurs (n, a_1, a_2) tels que $a_1 > 0$ ou $a_2 \leq \delta n$. On a alors $\varepsilon(V_\bullet, x) = \delta$.

Quitte à passer à une modification birationnelle de X qui préserve un voisinage ouvert de x , on peut construire un faisceau inversible ample A (sur la modification birationnelle) tel que $\varepsilon(A, x) < \varepsilon^+(A, x)$.

Remarque 3.8. — Si x est dans le lieu de base augmenté de V_\bullet , on peut encore définir $\varepsilon^+(V_\bullet, x)$ comme la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels $u \geq 0$ tels que le corps d'Okounkov $\Delta(V_\bullet)$ contienne l'ensemble $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d \mid |\mathbf{y}| \leq u\}$. On peut facilement construire un exemple où $\varepsilon^+(V_\bullet, x)$ prend une valeur strictement positif dans ce cas-là. Il suffit de reprendre le contre-exemple dans la remarque précédente en mettant $\delta = 0$. Le système linéaire gradué V_\bullet ne sépare pas les vecteurs tangents en x . Donc x est dans le lieu de base augmenté de V_\bullet , tandis que $\varepsilon^+(V_\bullet, x) = 1$.

3.3. Variantes. — Inspiré par la relation entre la constante de Seshadri mouvante et le corps d'Okounkov présentée plus haut, on propose un invariant qui est analogue à $\varepsilon^+(V_\bullet, x)$ relativement à une relation d'ordre additive exotique. Cet invariant mesure la séparation de jets autour d'un point fermé avec une considération biaisée sur les directions dans l'espace cotangent. Dans la suite, on fixe un vecteur $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ en nombres réels strictement positifs. On désigne par $\Gamma_{\mathbf{n}}(V_\bullet)$ et $\Delta_{\mathbf{n}}(V_\bullet)$ le semi-groupe d'Okounkov et le corps d'Okounkov de V_\bullet relativement au système de paramètres z et à la relation d'ordre additive $\leq_{\mathbf{n}}$.

Définition 3.9. — Soient V_\bullet un système linéaire gradué sur une variété arithmétique projective X et x un point en dehors de $B_+(V_\bullet)$. On désigne par $\varepsilon_{\mathbf{n}}(V_\bullet, x)$ la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels positifs u tels que le semi-groupe d'Okounkov $\Gamma_{\mathbf{n}}(V_\bullet)$ contienne les points $(k, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$ tels que

$$\frac{\alpha_1}{n_1} + \dots + \frac{\alpha_d}{n_d} \leq uk,$$

où d est la dimension de X . On désigne par $\varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_\bullet, x)$ la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels positifs u tels que le corps d'Okounkov $\Delta_{\mathbf{n}}(V_\bullet)$ contienne la partie fermée convexe

$$\left\{ (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}_+^d \mid \frac{y_1}{n_1} + \dots + \frac{y_d}{n_d} \leq u \right\}.$$

Par définition on a $\varepsilon_{\mathbf{n}}(V_\bullet, x) \leq \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_\bullet, x)$.

En utilisant le même argument que dans la preuve du corollaire 3.4, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.10. — Pour tout vecteur $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ dans $\mathbb{R}_{>0}^d$, on a

$$\varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_\bullet, x) \leq \left(\frac{\text{vol}(V_\bullet)}{n_1 \cdots n_d} \right)^{1/d}.$$

Démonstration. — Le corps d'Okounkov $\Delta_{\mathbf{n}}(V_\bullet)$ contient le corps convexe

$$\left\{ (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}_+^d \mid \frac{y_1}{n_1} + \dots + \frac{y_d}{n_d} \leq \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_\bullet, x) \right\}$$

dont le volume est égale à

$$\frac{n_1 \cdots n_d}{d!} \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)^d,$$

d'où le résultat. \square

Du point de vue de la géométrie diophantienne, la constante $\varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)$ pourrait être un invariant intéressant à étudier. Il est naturel de se demander si cet invariant peut intégrer dans des résultats sous forme de lemme de zéro. Le résultat suivant donne une majoration pour l'indice en x d'une section non-nulle d'une puissance tensorielle de L . Pour tout entier $k \geq 1$ et toute section non-nulle $s \in H^0(X, kL)$, on désigne par $\text{ind}_{\mathbf{n}}(s)$ le nombre $\text{ind}_{\mathbf{n}}(\text{ord}(s))$, où la fonction $\text{ord}(\cdot)$ est définie par rapport à la relation d'ordre $\leq_{\mathbf{n}}$ (voir l'exemple 3.1 pour la définition de $\leq_{\mathbf{n}}$, et (6) pour celle de la fonction $\text{ord}(\cdot)$).

Proposition 3.11. — *Pour tout élément non-nul s de V_k , on a*

$$\frac{\text{ind}_{\mathbf{n}}(s)}{k} \leq \frac{\text{vol}(V_{\bullet})}{n_1 \cdots n_d \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)^{d-1}}.$$

Démonstration. — Le cas où $k^{-1} \text{ind}_{\mathbf{n}}(s) \leq \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)$ résulte directement de la proposition 3.10. On suppose dans la suite que $k^{-1} \text{ind}_{\mathbf{n}}(s) > \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)$. Ainsi le point $k^{-1} \text{ord}(s)$ est situé en dehors du corps convexe $\{y \in \mathbb{R}_+^d \mid \text{ind}_{\mathbf{n}}(y) \leq \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)\}$.

Soit $\alpha = \text{ord}(s)$. Par définition on a $k^{-1} \alpha \in \Delta_{\mathbf{n}}(V_{\bullet})$. Comme $\Delta_{\mathbf{n}}(V_{\bullet})$ est une partie fermée et convexe de \mathbb{R}^d , elle contient l'enveloppe convexe de

$$\{y \in \mathbb{R}_+^d \mid \text{ind}_{\mathbf{n}}(y) \leq \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)\} \cup \{k^{-1} \alpha\},$$

qui a pour volume

$$\frac{n_1 \cdots n_d}{d!} \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)^d \left(1 + \frac{k^{-1} \text{ind}_{\mathbf{n}}(s) - \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)}{\varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_{\bullet}, x)} \right).$$

Cette quantité est sans doute bornée supérieurement par le volume du corps d'Okounkov $\Delta_{\mathbf{n}}(V_{\bullet})$, qui est égal à $\text{vol}(V_{\bullet})/d!$. On en déduit donc le résultat souhaité. \square

4. Fonction de Seshadri arithmétique

Dans ce paragraphe, on étudie la positivité locale en géométrie d'Arakelov. Étant donné un fibré adélique continu \bar{L} sur une variété arithmétique projective X , on attache à chaque point algébrique régulier x de la variété arithmétique X un fonction décroissante (appelé la fonction de Seshadri) définie sur \mathbb{R} qui mesure la positivité locale arithmétique de \bar{L} en x . On fixe un corps de nombres K et un plongement de K dans \mathbb{Q} .

4.1. Notations. — Soit \mathfrak{p} une place finie du corps de nombres K . Par définition, \mathfrak{p} est un idéal maximal de l'anneau \mathcal{O}_K des entiers algébriques dans K . On désigne par $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ la valeur absolue sur K dans la classe \mathfrak{p} qui prolonge la valeur absolue p -adique sur \mathbb{Q} (normalisée de sorte que la valeur absolue de p est p^{-1}), où p est la caractéristique du corps résiduel $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} := \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Le complété du corps K par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ est noté comme $K_{\mathfrak{p}}$. On désigne par $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ le complété d'une clôture algébrique de $K_{\mathfrak{p}}$. La valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ s'étend de façon unique sur $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ et le corps $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ est algébriquement clos et complet par rapport à $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$.

Soit σ une place infinie de K qui correspond à un plongement de K dans \mathbb{C} . On désigne par $|\cdot|_{\sigma}$ la restriction de la valeur absolue usuelle sur K . Le complété de K par rapport à $|\cdot|_{\sigma}$ est ou bien isomorphe à \mathbb{R} (lorsque σ est une place réelle), ou bien isomorphe à \mathbb{C} (lorsque σ est une place complexe). On désigne par \mathbb{C}_{σ} la clôture algébrique de K_{σ} , qui est isomorphe à \mathbb{C} , et l'application d'inclusion de K dans \mathbb{C}_{σ} s'identifie naturellement au plongement de K dans \mathbb{C} correspondant à σ .

Par variété arithmétique projective on entend un schéma géométrique intègre défini sur K . Soit X une variété arithmétique projective. Pour toute place v de K , on désigne par X_v^{an} l'espace analytique associé au \mathbb{C}_v -schéma $X_{\mathbb{C}_v}$ (au sens de Berkovich si v est une place finie). C'est un espace localement annelé qui contient $X(\mathbb{C}_v)$ comme un sous-espace dense (ici l'ensemble $X(\mathbb{C}_v)$ est muni d'une topologie plus fine que sa topologie de Zariski). En outre, on a un morphisme naturel d'espaces localement annelés $j_v : X_v^{\text{an}} \rightarrow X$ dont la restriction à $X(\mathbb{C}_v)$ envoie chaque élément de $X(\mathbb{C}_v)$ en son point correspondant de X . Si L est un fibré inversible sur X , on désigne par L_v^{an} le tire en arrière de L par j_v . C'est un fibré inversible sur X_v^{an} . Le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$ opère sur $X_{\mathbb{C}_v}$. Cela induit une action de $\text{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$ sur l'espace localement annelé polarisé $(X_v^{\text{an}}, L_v^{\text{an}})$.

Si X est une variété arithmétique projective et si L est un fibré inversible sur X , un *modèle* de (X, L) est défini comme un \mathcal{O}_X -schéma projectif et plat \mathcal{X} muni d'un fibré inversible \mathcal{L} tel que $\mathcal{L}_K \cong L$. La donnée d'un modèle $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ de (X, L) induit pour chaque place finie \mathfrak{p} de K une métrique continue $\|\cdot\|_{\mathcal{L}, \mathfrak{p}}$ sur $L_{\mathfrak{p}}^{\text{an}}$. En effet, tout $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ -point x de X se prolonge en un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -point \mathcal{P}_x de $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}$, où $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau de valuation de $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $\mathcal{P}_x^* \mathcal{L}$ définit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -réseau dans le $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ -espace vectoriel $x^* L$ qui induit une ultranorme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}, \mathfrak{p}}(x)$ sur ce dernier :

$$\|s\|_{\mathcal{L}, \mathfrak{p}}(x) = \inf\{|t|_{\mathfrak{p}} : t \in \mathbb{C}_{\mathfrak{p}}^{\times}, t^{-1}s \in \mathcal{P}_x^* \mathcal{L}\}, \quad s \in x^* L.$$

Ces normes s'étendent par continuité à une métrique continue sur L_v^{an} , qui est invariante par l'action du groupe de Galois.

Soit X une variété arithmétique projective. On appelle *fibré inversible adélique* sur X toute donnée \bar{L} d'un \mathcal{O}_X -module inversible L muni d'une famille $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ de métriques indexée par l'ensemble M_K des places de K , où pour chaque v , $\|\cdot\|_v$ est une métrique continue sur L_v^{an} qui est invariante par l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$. On demande en outre qu'il existe un modèle $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ de (X, L) tel que $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{\mathcal{L}, v}$ pour tout sauf un nombre fini de $v \in M_K$.

La donnée d'un fibré inversible adélique \bar{L} sur une variété arithmétique projective X permet de définir une fonction de hauteur (absolue) sur l'ensemble des points algébrique de X . Étant donné un point algébrique x de X dont un corps de définition

est K' , la hauteur de x par rapport à \bar{L} est définie comme

$$h_{\bar{L}}(x) := - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K'/K)} \log \|s\|_v(\sigma(x))$$

Cette définition ne dépend pas du choix du corps de définition K' puisque nous avons normalisé la somme par le coefficient $[K' : \mathbb{Q}]^{-1}$.

On appelle *fibré vectoriel adélique* sur $\text{Spec } K$ toute donnée \bar{V} d'un espace vectoriel de rang fini V sur K muni d'une famille $(\|\cdot\|)_{v \in M_K}$ de normes, où $\|\cdot\|_v$ est une norme sur $V \otimes_K \mathbb{C}_v$ qui est invariante par l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$ et ultramétrique lorsque v est une place finie. On demande aussi qu'il existe un \mathcal{O}_K -module projectif \mathcal{V} et une famille finie S de places tels que $\mathcal{V}_K \cong V$ et que, pour toute place finie v en dehors de S , on ait

$$\forall s \in V_{\mathbb{C}_v}, \quad \|s\|_v = \inf\{|a|_v : a \in \mathbb{C}_v^\times, a^{-1}s \in \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_v\}.$$

On renvoie les lecteurs dans les articles de Gaudron [12, 13] pour une présentation détaillée concernant ces objets. Soit \bar{V} un fibré vectoriel adélique sur $\text{Spec } K$. On désigne par $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif de V qui classe les quotients de rang 1 de V et par $\mathcal{O}_V(1)$ son faisceau inversible universel. La structure de normes de \bar{V} induit par passage au quotient des métriques continues (métriques de Fubini-Study) sur $\mathcal{O}_V(1)_{v, \text{an}}$, où $v \in M_K$, qui définissent une structure de fibré inversible adélique.

Soit \bar{V} un fibré vectoriel adélique sur $\text{Spec } K$. Si s est un élément non-nul de $V_{\bar{\mathbb{Q}}}$, alors la $\bar{\mathbb{Q}}$ -droite engendré par s correspond à un point algébrique dans $\mathbb{P}(V^\vee)$. On désigne par $\widehat{\text{deg}}_n(s)$ l'opposé de la hauteur de ce point algébrique relativement au fibré inversible adélique $\overline{\mathcal{O}_V(1)}$, appelé de degré d'Arakelov (normalisé) de s . Par définition, si s appartient à $V_{K'}$, où K' est un corps de nombres contenant K , on a

$$\widehat{\text{deg}}_n(s) = - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K'/K)} \log \|\sigma(s)\|_v.$$

On convient que $\widehat{\text{deg}}_n(0) = -\infty$. La formule du produit montre que le degré d'Arakelov reste invariant si remplace s par as avec $a \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$.

Soient X une variété arithmétique projective et \bar{L} un fibré inversible adélique sur X . Soit $\pi : X \rightarrow \text{Spec } K$ le morphisme structurel. On désigne par $\pi_*(\bar{L})$ le K -espace vectoriel $H^0(X, L)$ muni des normes sup $(\|\cdot\|_{v, \text{sup}})_{v \in M_K}$, où $\|\cdot\|_{v, \text{sup}}$ est la norme sur $H^0(X, L) \otimes_K \mathbb{C}_v$ définie comme

$$\|s\|_{v, \text{sup}} = \sup_{x \in X_{v, \text{an}}} \|s\|_v(x).$$

La donnée $\pi_*(\bar{V})$ est un fibré vectoriel adélique sur $\text{Spec } K$.

Proposition 4.1. — *Soient $\pi : X \rightarrow \text{Spec } K$ une variété arithmétique projective, et \bar{L} et \bar{M} deux fibrés inversibles adéliques sur X . Si s et s' sont des sections globales de $L_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et $M_{\bar{\mathbb{Q}}}$, alors on a*

$$\widehat{\text{deg}}_n(ss') \geq \widehat{\text{deg}}_n(s) + \widehat{\text{deg}}_n(s'),$$

où les degrés d'Arakelov sont évalués par rapport aux structures de fibré vectoriel adélique de $\pi_*(\bar{L} \otimes \bar{M})$, $\pi_*(\bar{L})$ et $\pi_*(\bar{M})$ respectivement.

Démonstration. — Pour toute place v du corps de nombres K , on a

$$\|ss'\|_{v,\text{sup}} = \sup_{x \in X_v^{\text{an}}} \|ss'\|_v(x) = \sup_{x \in X_v^{\text{an}}} \|s\|_v(x) \cdot \|s'\|_v(x)$$

On en déduit l'inégalité souhaitée. \square

4.2. Minima successifs absolus. — La notion de minima absolus est une variante d'une notion classique en géométrie des nombres : minimia successifs d'un réseau euclidien. Cette notion a été d'abord introduite par Roy and Thunder [24, §6] et puis reformulée dans le cadre de la géométrie d'Arakelov par Soulé pour les fibrés vectoriels normés (dans un exposé au colloque “*Arakelov theory and its arithmetic applications*” à Regensburg, 2010). On adopte son point de vue ici. Soient K un corps de nombres et \bar{E} un fibré vectoriel normé de rang $r \geq 1$ sur $\text{Spec } K$. Soit i un entier dans $\{1, \dots, r\}$. Le $i^{\text{ème}}$ minimum absolu logarithmique $\nu_i(\bar{E})$ de \bar{E} est défini comme la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels λ tels que le sous-espace \mathbb{Q} -vectoriel de $E \otimes_K \mathbb{Q}$ engendré par les vecteurs de degré d'Arakelov $\geq \lambda$ est de rang $\geq i$. Par définition on a

$$\nu_1(\bar{E}) \geq \dots \geq \nu_r(\bar{E}).$$

On note $\nu_{\max}(\bar{E}) := \nu_1(\bar{E})$ et $\nu_{\min}(\bar{E}) := \nu_r(\bar{E})$. Autrement dit, pour tout corps de nombres K' contenant K , on a $\nu_i(\bar{E}) = \nu_i(\bar{E} \otimes_K K')$ quel que soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Le premier minimum absolu $\nu_1(\bar{E})$ s'identifie au premier degré d'Arakelov introduit dans [2, §2.5]. Cependant les autres «degrés d'Arakelov successifs» dans [2] sont en fait des minima successifs de hauteur à la Zhang et sont en général différents des minima absolus d'un fibré vectoriel adélique.

Soit \bar{E} un fibré vectoriel adélique sur $\text{Spec } K$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{F}^t(E_{\mathbb{Q}})$ le sous-espace \mathbb{Q} -vectoriel engendré par tous les vecteurs de degré d'Arakelov $\geq t$. Il s'avère que $(\mathcal{F}^t(E_{\mathbb{Q}}))_{t \in \mathbb{R}}$ est une filtration décroissante de $E_{\mathbb{Q}}$ dont les points de saut (en comptant la multiplicité) sont les minima absolus logarithmiques, appelée la filtration par minima absolus. En outre, cette filtration est séparée ($\mathcal{F}^t(E_{\mathbb{Q}}) = 0$ pour t suffisamment positif), exhaustive ($\mathcal{F}^t(E_{\mathbb{Q}}) = E_{\mathbb{Q}}$ pour t suffisamment négatif) et continue à gauche (la fonction $t \mapsto \text{rg}(\mathcal{F}^t(E_{\mathbb{Q}}))$ est localement constante à gauche).

Soient X une variété arithmétique définie sur K et \bar{L} un fibré inversible adélique sur X tel que L soit gros. On désigne par

$$V_{\bullet}(L_{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X_{\mathbb{Q}}, nL_{\mathbb{Q}})$$

le système linéaire gradué total de $L_{\mathbb{Q}}$. Pour tout entier $n \geq 0$, la structure de fibré vectoriel adélique sur $\pi_*(n\bar{L})$ induit une \mathbb{R} -filtration décroissante (par minima absolus) sur $V_n(L_{\mathbb{Q}}) := H^0(X_{\mathbb{Q}}, nL_{\mathbb{Q}})$. Cela nous permet de construire une \mathbb{R} -filtration en systèmes linéaires gradués de L : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note

$$(8) \quad V_{\bullet}^t(\bar{L}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}^{nt}(V_n(L_{\mathbb{Q}})).$$

Si s et s' sont deux sections non-nulles de $H^0(X, nL)$ et $H^0(X, n'L)$ respectivement, alors on a

$$\widehat{\deg}_n(ss') \geq \widehat{\deg}_n(s) + \widehat{\deg}_n(s').$$

Cela montre que $V_\bullet^t(\bar{L})$ est une sous- $\bar{\mathbb{Q}}$ -algèbre graduée de $V_\bullet(L_{\bar{\mathbb{Q}}})$. Rappelons que la *penete maximale asymptotique* de \bar{L} est définie comme (cf. [6, §4.2])

$$\widehat{\mu}_{\max}^{\text{asy}}(\bar{L}) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\nu_1(\pi_*(n\bar{L}))}{n} = \sup_{n \geq 1} \frac{\nu_1(\pi_*(n\bar{L}))}{n}.$$

Par définition, les systèmes linéaires gradués $V_\bullet^t(\bar{L})$ sont dégénérés (i.e. $V_n^t(\bar{L}) = 0$ lorsque $n \geq 1$) dès que $t > \widehat{\mu}_{\max}^{\text{asy}}(\bar{L})$. En outre, lorsque $t < \widehat{\mu}_{\max}^{\text{asy}}(\bar{L})$, le système linéaire gradué $V_\bullet(\bar{L})$ contient un diviseur ample (voir §2.2 pour la définition). On revoie les lecteurs dans [4, Lemma 1.6] pour la démonstration de cet énoncé.

4.3. Fonction de Seshadri arithmétique. — Soient X une variété arithmétique projective définie sur un corps de nombres K et \bar{L} un fibré inversible adélique sur X . Étant donné un point algébrique régulier x , on définit une fonction décroissante $t \mapsto \varepsilon_t(\bar{L}, x)$ comme la suite :

$$(9) \quad \varepsilon_t(\bar{L}, x) := \varepsilon(V_\bullet^t(\bar{L}), x), \quad t < \widehat{\mu}_{\max}^{\text{asy}}(\bar{L}).$$

Rappelons que si x est dans le lieu de base augmenté de $V_\bullet^t(\bar{L})$, alors $\varepsilon_t(\bar{L}, x) = 0$ par convention. De façon similaire, on définit

$$(10) \quad \varepsilon_t^+(\bar{L}, x) := \varepsilon^+(V_\bullet^t(\bar{L}), x).$$

On convient que $\varepsilon_t(\bar{L}, x) = \varepsilon_t^+(\bar{L}, x) = 0$ si $t \geq \widehat{\mu}_{\max}^{\text{asy}}(\bar{L})$. Ces fonctions possèdent des propriétés similaires à celles de la constante de Seshadri.

Proposition 4.2. — Soient \bar{L} et \bar{M} deux fibrés inversibles adéliques sur X . Si a et b sont deux nombres réels tels que $\varepsilon_a(\bar{L}, x) > 0$ et $\varepsilon_b(\bar{M}, x) > 0$, alors on a

$$(11) \quad \varepsilon_{a+b}(\bar{L} \otimes \bar{M}, x) \geq \varepsilon_a(\bar{L}, x) + \varepsilon_b(\bar{M}, x).$$

Démonstration. — Les conditions $\varepsilon_a(\bar{L}, x) > 0$ et $\varepsilon_b(\bar{M}, x) > 0$ montrent que x n'est ni dans $B_+(V_\bullet^a(\bar{L}))$ ni dans $B_+(V_\bullet^b(\bar{M}))$. En outre, pour tout entier $n \geq 0$, on a $V_n^a(\bar{L})V_n^b(\bar{M}) \subset V_n^{a+b}(\bar{L} \otimes \bar{M})$, compte tenu de la proposition 4.1. Le lemme suivant montre alors que x est en dehors du lieu de base de $V_\bullet^{a+b}(\bar{L} \otimes \bar{M})$ et que le semi-groupe d'Okounkov de $V_\bullet^{a+b}(\bar{L} \otimes \bar{M})$ contient la somme de ceux de $V_\bullet^a(\bar{L})$ et de $V_\bullet^b(\bar{M})$. Si $\Gamma(V_\bullet^a(\bar{L}))$ contient tous les vecteurs $(k, \alpha) \in \mathbb{N}^{d+1}$ vérifiant $|\alpha| \leq k\lambda$ et si $\Gamma(V_\bullet^b(\bar{M}))$ contient tous les vecteurs $(k, \beta) \in \mathbb{N}^{d+1}$ vérifiant $|\beta| \leq k\mu$, où $d = \dim(X)$ et λ et μ sont des nombres réels positifs, alors $\Gamma(V_\bullet^{a+b}(\bar{L} \otimes \bar{M}))$ contient les vecteurs de la forme $(k, \gamma) \in \mathbb{N}^{d+1}$ avec $|\gamma| \leq k(\lambda + \mu) - 1$. Le résultat est ainsi démontré. \square

Lemme 4.3. — Soient Y une variété projective définie sur un corps algébriquement clos, L et M deux fibrés inversibles gros sur Y , U_\bullet et V_\bullet des systèmes linéaires gradués de L et M , qui contiennent des diviseurs amples. Si W_\bullet est un système linéaire gradué de $L \otimes M$ de tel que $W_n \supset U_n V_n$ pour tout entier $n \geq 0$, alors on a $B_+(W_\bullet) \subset B_+(U_\bullet) \cup B_+(V_\bullet)$. En outre, pour tout point régulier x en dehors

de $B_+(U_\bullet) \cup B_+(V_\bullet)$, le semi-groupe d'Okoukov de W_\bullet contient la somme des semi-groupes d'Okoukov⁽³⁾ de U_\bullet et de V_\bullet .

Démonstration. — Soit x un point de Y en dehors de $B_+(U_\bullet) \cup B_+(V_\bullet)$. Par définition, il existe un entier $q \geq 1$, deux morphismes projectifs et birationnels $\varphi_i : Y_i \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) définissant des isomorphismes dans un voisinage ouvert de x et tels que $q\varphi_1^*L$ et $q\varphi_2^*M$ se décompose comme $q\varphi_1^*L = A_1 \otimes E_1$ et $q\varphi_2^*M = A_2 \otimes E_2$, où A_1 et A_2 sont des faisceaux inversibles amples, E_1 et E_2 possèdent des sections globales s_1 et s_2 qui sont non-nulles en x et telles que, pour tout entier $n \geq 1$, les images des homomorphismes naturels

$$H^0(Y_i, nA_i) \xrightarrow{s_i^n} H^0(Y_i, \varphi_i^*(qnL)) \quad (i = 1, 2)$$

soient contenues dans U_{nq} et V_{nq} respectivement. Quitte à passer à une modification birationnelle qui domine les Y_i en même temps et augmenter l'entier q (il faut aussi tordre les A_i par des proportions négatives convenables des diviseurs exceptionnels), on peut supposer que les modifications birationnelles φ_i sont la même (que l'on notera $\varphi : Y' \rightarrow Y$). En outre, comme les faisceaux inversibles A_1 et A_2 sont amples, pour tout entier m suffisamment grand, l'application canonique

$$H^0(Y', nA_1) \otimes H^0(Y', nA_2) \longrightarrow H^0(Y', nA_1 + nA_2)$$

est surjectif. Quitte à augmenter q et remplacer A_i par une puissance tensorielle convenable on peut supposer que l'application comme ci-dessus est surjective dès que $n \geq 1$. Ainsi l'image de l'homomorphisme naturel

$$H^0(Y', nA_1 + nA_2) \xrightarrow{s_1^n s_2^n} H^0(Y', \varphi^*(qnL + qnM))$$

est contenue dans W_n . Donc x n'est pas dans le lieu de base augmenté de W_\bullet .

La deuxième assertion provient de la relation (7), concernant l'additivité de la \mathbb{N}^d -valuation d'Okoukov. \square

L'analogue de la proposition 4.2 est aussi vrai pour ε_t^+ . La démonstration est un peu plus simple car on n'a plus besoin de discuter les lieux de base augmentés.

Proposition 4.4. — Soient \bar{L} et \bar{M} deux fibrés inversibles adéliques sur X . Si a et b sont deux nombres réels tels que $\varepsilon_a(\bar{L}, x) > 0$ et $\varepsilon_b(\bar{M}, x) > 0$, alors on a

$$(12) \quad \varepsilon_{a+b}^+(\bar{L} \otimes \bar{M}, x) \geq \varepsilon_a^+(\bar{L}, x) + \varepsilon_b^+(\bar{M}, x).$$

Démonstration. — Par définition les corps d'Okoukov $\Delta(V_\bullet^a(\bar{L}))$ et $\Delta(V_\bullet^b(\bar{M}))$ contiennent les corps convexes $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d \mid |\mathbf{y}| \leq \varepsilon_a^+(\bar{L}, x)\}$ et $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d \mid |\mathbf{y}| \leq \varepsilon_b^+(\bar{M}, x)\}$ respectivement. En outre, le corps d'Okoukov $\Delta(V_\bullet^{a+b}(\bar{L} \otimes \bar{M}))$ contient la somme de Minkowski de $\Delta(V_\bullet^a(\bar{L}))$ et $\Delta(V_\bullet^b(\bar{M}))$, et donc contient la somme de Minkowski de $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d \mid |\mathbf{y}| \leq \varepsilon_a^+(\bar{L}, x)\}$ et $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d \mid |\mathbf{y}| \leq \varepsilon_b^+(\bar{M}, x)\}$, qui est égale à

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d \mid |\mathbf{y}| \leq \varepsilon_a^+(\bar{L}, x) + \varepsilon_b^+(\bar{M}, x)\}.$$

3. Ici on considère les semi-groupes d'Okoukov par rapport à un système de paramètre en x et une relation d'ordre additive fixé.

On en déduit donc $\varepsilon_{a+b}^+(\bar{L} \otimes \bar{M}, x) \geq \varepsilon_a^+(\bar{L}, x) + \varepsilon_a^+(\bar{M}, x)$. \square

Le résultat suivant donne un contrôle de la fonction $t \mapsto \varepsilon_t^+$ par la fonction volume arithmétique, qui est analogue au corollaire 3.4.

Proposition 4.5. — *Soit \bar{L} un fibré inversible adélique sur une variété arithmétique projective X . Pour tout point algébrique régulier x de X , on a*

$$(13) \quad \int_0^{+\infty} \varepsilon_t^+(\bar{L}, x)^d dt \leq \frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L})}{d+1},$$

où d est la dimension de X , et $\widehat{\text{vol}}(\bar{L})$ est le volume arithmétique de \bar{L} défini comme

$$\widehat{\text{vol}}(\bar{L}) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\widehat{H}^0(X, n\bar{L})}{n^{d+1}/(d+1)!},$$

et $\widehat{H}^0(X, n\bar{L})$ est l'ensemble des sections s dans $H^0(X, nL)$ telles que $\|s\|_{v, \text{sup}} \leq 1$ pour toute place $v \in M_K$.

Démonstration. — D'après le corollaire 1.13 et le théorème 2.8 de [4], on a ⁽⁴⁾

$$\widehat{\text{vol}}(\bar{L}) = (d+1) \int_0^{+\infty} \text{vol}(V_\bullet^t(\bar{L})) dt.$$

Compte tenu du corollaire 3.4, on a

$$\frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L})}{d+1} \geq \int_0^{+\infty} \varepsilon_t^+(\bar{L}, x)^d dt.$$

\square

Ce résultat a une interprétation géométrique via le corps d'Okounkov arithmétique introduit dans [4]. Rappelons que le corps d'Okounkov arithmétique de \bar{L} est défini comme le corps convexe

$$\widehat{\Delta}(\bar{L}) := \{(y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid t \geq 0, y \in \Delta(V_\bullet^t(\bar{L}))\} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

On définit un sous-ensemble $H_x(\bar{L})$ de \mathbb{R}^{d+1} comme

$$H_x(\bar{L}) := \{(y, t) \in \mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+ \mid t \geq 0, |y| \leq \varepsilon_t^+(\bar{L}, x)\}.$$

La proposition 4.4 montre que $H_x(\bar{L})$ est un corps convexe, qui est contenu dans $\widehat{\Delta}(\bar{L})$ par définition. On obtient alors (13) comme une comparaison entre les volumes de $H_x(\bar{L})$ et $\widehat{\Delta}(\bar{L})$.

On peut également construire les variants biaisés des fonctions $t \mapsto \varepsilon_t(\bar{L})$ et $t \mapsto \varepsilon_t^+(\bar{L})$. Soit $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ un vecteur en nombres strictement positifs. Pour $t < \widehat{\mu}_{\max}^{\text{asy}}(\bar{L})$, on note

$$(14) \quad \varepsilon_{\mathbf{n}, t}(\bar{L}, x) := \varepsilon_{\mathbf{n}}(V_\bullet^t(\bar{L}), x), \quad \varepsilon_{\mathbf{n}, t}^+(\bar{L}, x) := \varepsilon_{\mathbf{n}}^+(V_\bullet^t(\bar{L}), x).$$

4. Le théorème 2.8 de [4] est démontré par rapport à la filtration par minima. Cependant les minima absolus sont comparables aux minima usuels. On renvoie les lecteurs dans [7] §1.2.3 pour la comparaison entre les minima usuels et les minima absolus, et dans §1.4.2 du *loc. cit.* pour des théorèmes de limite arithmétiques pour diverses filtrations.

L'analogie des propositions 4.2 et 4.4 reste encore vrai pour ces fonctions. En outre, l'inégalité suivante est vraie pour la fonction $t \mapsto \varepsilon_t^+(\bar{L}, x)$ (analogue à (13)) :

$$(15) \quad n_1 \cdots n_d \int_0^{+\infty} \varepsilon_{\mathbf{n},t}^+(\bar{L}, x)^d dt \leq \frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L})}{d+1}.$$

Pour montrer cette inégalité, on peut utiliser le fait que l'ensemble

$$H_{\mathbf{n},x}(\bar{L}) = \{(x, t) \in \mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+ \mid t \geq 0, \text{ind}_{\mathbf{n}}(x) \leq \varepsilon_{\mathbf{n},t}^+(\bar{L}, x)^d\}$$

est un corps convexe contenu dans $\widehat{\Delta}(\bar{L})$.

On désigne par $\theta_{\mathbf{n}}^+(\bar{L}, x)$ la borne supérieure

$$\sup\{t \geq 0 \mid \varepsilon_{\mathbf{n},t}^+(\bar{L}, x)^d > 0\}.$$

La convexité de $H_{\mathbf{n},x}(\bar{L})$ montre qu'il contient le corps convexe

$$\tilde{H}_{\mathbf{n},x}(\bar{L}) := \left\{ (y_1, \dots, y_d, t) \in \mathbb{R}_+^{d+1} \mid \frac{y_1}{n_1 \varepsilon_{\mathbf{n},0}^+(\bar{L}, x)} + \cdots + \frac{y_d}{n_d \varepsilon_{\mathbf{n},0}^+(\bar{L}, x)} + \frac{t}{\theta_{\mathbf{n}}^+(\bar{L}, x)} \leq 1 \right\}.$$

En particulier, on obtient le résultat suivant en comparant les volumes des corps convexes $\tilde{H}_{\mathbf{n},x}(\bar{L})$ et $\widehat{\Delta}(\bar{L})$.

Proposition 4.6. — *Soit \bar{L} un fibré inversible adélique sur une variété arithmétique projective X . Pour tout point algébrique régulier x de X , on a*

$$(16) \quad \varepsilon_{\mathbf{n},0}^+(\bar{L}, x)^d \theta_{\mathbf{n}}^+(\bar{L}, x) \leq \frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L})}{n_1 \cdots n_d}.$$

On établit un analogue arithmétique de la proposition 3.11 comme ci-dessous.

Théorème 4.7. — *Soit \bar{L} un fibré inversible adélique sur une variété arithmétique projective X . Pour tout point algébrique régulier x de X et toute section non-nulle s de kL telle que $\widehat{\text{deg}}_{\mathbf{n}}(s) \geq 0$, on a*

$$(17) \quad \frac{\text{ind}_{\mathbf{n}}(s)}{k \varepsilon_{\mathbf{n},0}^+(\bar{L}, x)} + \frac{\widehat{\text{deg}}_{\mathbf{n}}(s)}{k \theta_{\mathbf{n}}^+(\bar{L}, x)} \leq \frac{\widehat{\text{vol}}(\bar{L})}{n_1 \cdots n_d \varepsilon_{\mathbf{n},0}^+(\bar{L}, x)^d \theta_{\mathbf{n}}^+(\bar{L}, x)}$$

Démonstration. — Soit α le point $k^{-1}(\text{ord}_{\mathbf{n}}(s), \widehat{\text{deg}}_{\mathbf{n}}(s))$ dans \mathbb{R}_+^{d+1} . C'est un point dans $\widehat{\Delta}(\bar{L})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\frac{\text{ind}_{\mathbf{n}}(s)}{k \varepsilon_{\mathbf{n},0}^+(\bar{L}, x)} + \frac{\widehat{\text{deg}}_{\mathbf{n}}(s)}{k \theta_{\mathbf{n}}^+(\bar{L}, x)} > 1$$

car sinon l'inégalité (17) provient directement de (16). Le point α est donc en dehors du corps convexe $\tilde{H}_{\mathbf{n},x}(\bar{L})$. La comparaison des volumes de $\widehat{\Delta}(\bar{L})$ et de l'enveloppe convexe de $\tilde{H}_{\mathbf{n},x}(\bar{L}) \cup \{\alpha\}$ conduit au résultat souhaité. \square

Remarque 4.8. — On peut améliorer ce résultat en remplaçant $\widehat{\text{deg}}_{\mathbf{n}}(s)$ par le nombre

$$\sup\{t \in \mathbb{R} \mid s \in \mathcal{F}^t V_k(L_{\mathbb{Q}})\},$$

la démonstration reste inchangée.

4.4. Perspectives. — La méthode de filtration combinée avec les corps d’Okounkov permet d’étudier de façon numérique la positivité locale des fibrés inversibles adéliques en un point algébrique d’une variété arithmétique projective. Le lien avec la géométrie convexe est particulièrement agréable car il conduit à des démonstrations simples pour les relations explicites entre la positivité locale est l’annulation des sections globales à grande multiplicité. Des problèmes de recherche apparaissent naturellement avec cette approche.

- (i) Les constructions et le résultats établis dans cet article sont valable sans modification pour le cas des corps de fonctions, où on considère une fibration d’une variété projective au-dessus d’une courbe projective lisse. La fonction de Seshadri arithmétique devrait mesurer la positivité d’un fibré inversible le long d’une courbe horizontale au-dessus de la courbe de base. Rappelons que la constante de Seshadri le long d’une sous-variété fermée est également définie pour les fibrés inversibles amples. Peut-on retrouver cette constante à partir de la fonction de Seshadri arithmétique ?
- (ii) Pour avoir des applications dans les problèmes diophantiens, il est souhaitable de généraliser la notion de fonction de Seshadri arithmétique en plusieurs points algébrique. On peut par exemple utiliser la séparation simultanée de jets pour décrire numériquement la positivité locale arithmétique d’un fibré adélique le long de plusieurs point algébrique. Cependant, le lien avec les corps convexes est beaucoup moins évident et nécessite une étude soigneuse.

Remerciement. — Les résultats de cet article ont été présentés dans la conférence “*Arakelov Geometry and K-theory*” à l’occasion des 60 ans de Christophe Soulé. Je tiens à remercier Christophe Soulé pour l’intérêt qu’il a manifesté à mes recherches et pour ses encouragements. Je remercie aussi l’organisateur de la conférence pour l’invitation.

Références

- [1] T. BAUER, S. DI ROCCO, B. HARBOURNE, M. KAPUSTKA, A. KNUTSEN, W. SYZDEK & T. SZEMBERG — « A primer on Seshadri constants », in *Interactions of classical and numerical algebraic geometry*, Contemp. Math., vol. 496, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, p. 33–70.
- [2] J.-B. BOST & H. CHEN — « Concerning the semi stability of tensor products in arakelov geometry », *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, à paraître.
- [3] S. BOUCKSOM — « Corps d’okounkov (d’après Andri Okounkov, Robert Lazarsfeld et Mircea Mustață, Kiumars Kavech et Askold Khovanskii », Séminaire Bourbaki, Vol. 2011/2012, à paraître.
- [4] S. BOUCKSOM & H. CHEN — « Okounkov bodies of filtered linear series », *Compositio Mathematica* **147** (2011), no. 4, p. 1205–1229.
- [5] H. CHEN — « Arithmetic Fujita approximation », *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* **43** (2010), no. 4, p. 555–578.
- [6] ———, « Convergence des polygones de Harder-Narasimhan », *Mémoires de la Société Mathématique de France* **120** (2010), p. 1–120.

- [7] ———, *Géométrie d'Arakelov : théorèmes de limite et comptage des points rationnels*, Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot, Décembre 2011.
- [8] J.-P. DEMAILLY – « Singular Hermitian metrics on positive line bundles », in *Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990)*, Lecture Notes in Math., vol. 1507, Springer, Berlin, 1992, p. 87–104.
- [9] L. EIN, R. LAZARSFELD, M. MUSTAŢĂ, M. NAKAMAYE & M. POPA – « Asymptotic invariants of base loci », *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier* **56** (2006), no. 6, p. 1701–1734.
- [10] ———, « Restricted volumes and base loci of linear series », *American Journal of Mathematics* **131** (2009), p. 607–651.
- [11] D. EISENBUD – *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.
- [12] É. GAUDRON – « Pentec de fibrés vectoriels adéliques sur un corps globale », *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **119** (2008), p. 21–95.
- [13] ———, « Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés », *Manuscripta Mathematica* **130** (2009), no. 2, p. 159–182.
- [14] A. GROTHENDIECK & J. DIEUDONNÉ – *Éléments de géométrie algébrique*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [15] R. HARTSHORNE – *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Volume 156, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [16] A. ITÔ – « Okounkov bodies and Seshadri constants », arxiv :1202.6662, 2012.
- [17] A. G. KHOVANSKIĬ – « The Newton polytope, the Hilbert polynomial and sums of finite sets », *Rossiĭskaya Akademiya Nauk. Funktsional'nyiĭ Analiz i ego Prilozheniya* **26** (1992), no. 4, p. 57–63, 96.
- [18] R. LAZARSFELD – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Classical setting : line bundles and linear series.
- [19] R. LAZARSFELD & M. MUSTAŢĂ – « Convex bodies associated to linear series », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **42** (2009), no. 5, p. 783–835.
- [20] M. NAKAMAYE – « Stable base loci of linear series », *Mathematische Annalen* **318** (2000), no. 4, p. 837–847.
- [21] ———, « Base loci of linear series are numerically determined », *Transactions of the American Mathematical Society* **355** (2003), no. 2, p. 551–566.
- [22] ———, « Multiplicity estimates, interpolation, and transcendence theory », in *Number theory, analysis and geometry*, Springer, New York, 2012, p. 475–498.
- [23] M. NAKAMAYE & N. RATAZZI – « Lemmes de multiplicités et constante de Seshadri », *Mathematische Zeitschrift* **259** (2008), no. 4, p. 915–933.
- [24] D. ROY & J. L. THUNDER – « An absolute Siegel's lemma », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **476** (1996), p. 1–26.

- [25] O. ZARISKI & P. SAMUEL – *Commutative algebra. Vol. II*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.-Toronto-London-New York, 1960.

8 décembre 2012

HUAYI CHEN, Institut Fourier, Université Joseph Fourier - Grenoble I

E-mail : huayi.chen@ujf-grenoble.fr • *Url* : www-fourier.ujf-grenoble.fr/~huayi