



**HAL**  
open science

# Endoscopie et conjecture raffinée de Gan-Gross-Prasad pour les groupes unitaires

Raphaël Beuzart-Plessis

► **To cite this version:**

Raphaël Beuzart-Plessis. Endoscopie et conjecture raffinée de Gan-Gross-Prasad pour les groupes unitaires. 2012. hal-00761084v1

**HAL Id: hal-00761084**

**<https://hal.science/hal-00761084v1>**

Preprint submitted on 4 Dec 2012 (v1), last revised 29 Mar 2014 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Endoscopie et conjecture locale raffinée de Gan-Gross-Prasad pour les groupes unitaires

Raphaël Beuzart-Plessis

4 décembre 2012

## Introduction

Soient  $F$  un corps local non archimédien de caractéristique nulle,  $E$  une extension quadratique de  $F$  et  $c$  le  $F$ -automorphisme non trivial de  $E$ . Considérons deux espaces hermitiens  $(V, h)$  et  $(V', h')$  de dimensions respectives  $d$  et  $d'$  et de groupes unitaires respectifs  $G$  et  $G'$ . On suppose  $d$  pair et  $d'$  impair et que le plus petit des deux espaces hermitiens s'injecte dans le second. Alors, une fois une telle injection choisie, le plus petit des groupes  $G$  et  $G'$  est naturellement un sous-groupe du plus gros. Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  des représentations lisses irréductibles de  $G(F)$  et  $G'(F)$  respectivement. Gan, Gross et Prasad ont défini dans [GGP] une multiplicité  $m(\sigma, \sigma')$ . D'après [GGP] et [AGRS], on a toujours  $m(\sigma, \sigma') \leq 1$ .

Nous nous intéressons ici seulement au cas où les représentations  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont tempérées. Rappelons ici la classification conjecturale des représentations irréductibles tempérées d'un groupe unitaire. Énonçons ces conjectures pour  $G$ , celles-ci étant analogues pour  $G'$ . Notons  $WD_E = W_E \times SL_2(\mathbb{C})$  le groupe de Weil-Deligne de  $E$  et fixons un élément  $t \in W_F \setminus W_E$  que l'on laisse agir par conjugaison sur  $WD_E$  (avec action triviale sur le facteur  $SL_2(\mathbb{C})$ ). Soit  $\Phi_{temp}(G)$  l'ensemble des classes de conjugaison d'homomorphismes  $\varphi : WD_E \rightarrow GL_d(\mathbb{C})$  vérifiant des conditions classiques de semi-simplicité et d'algébricité ainsi que les conditions supplémentaires suivantes

- (i)  $\varphi$  est tempérée, c'est-à-dire que l'image de  $W_E$  par  $\varphi$  est relativement compacte ;
- (ii)  $\varphi$  est  $(-1)^{d+1}$ -conjuguée-duale, cela signifie qu'il existe une forme bilinéaire non dégénérée  $B : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$  telle que
  - $B(\varphi(\tau)w, \varphi(t\tau t^{-1})w') = B(w, w')$  ;
  - $B(w, \varphi(t^2)w') = (-1)^{d+1}B(w, w')$pour tous  $w, w' \in \mathbb{C}^d$ ,  $\tau \in WD_E$ .

Cette dernière condition ne dépend pas du choix de  $t$ . Soit  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$ , on peut alors décomposer  $\varphi$  en somme directe de représentations irréductibles de  $WD_E$ . Notons  $\varphi = \bigoplus_{i \in I} l_i \varphi_i$  cette décomposition avec les  $\varphi_i$  deux à deux non isomorphes. Notons  $I'$  le sous-ensemble des  $i \in I$  tels que  $\varphi_i$  soit  $(-1)^{d+1}$ -conjuguée-duale. Fixons une forme  $B$  vérifiant le

(ii) précédent. Notons  $S_\varphi$  le sous-groupe du commutant de  $\varphi$  dans  $GL_d(\mathbb{C})$  qui préserve  $B$  et  $\mathcal{S}_\varphi$  son groupe des composantes. On a alors un isomorphisme naturel entre  $\mathcal{S}_\varphi$  et  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I'}$ , en particulier  $\mathcal{S}_\varphi$  ne dépend pas des choix de  $B$  et  $t$ . Notons  $z_\varphi$  l'image de  $-1 \in S_\varphi$  dans  $\mathcal{S}_\varphi$ . Définissons  $\mathcal{E}^G(\varphi)$  comme l'ensemble des caractères  $\epsilon$  de  $\mathcal{S}_\varphi$  vérifiant  $\epsilon(z_\varphi) = \mu(G)$ , où on a posé

$$\mu(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ est quasi-déployé} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $Temp(G)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations tempérées irréductibles de  $G(F)$ . On conjecture que  $Temp(G)$  est réunion disjointe de  $L$ -paquets  $\Pi^G(\varphi)$  indexés par les  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$ . On conjecture aussi que  $\Pi^G(\varphi)$  admet une paramétrisation par  $\mathcal{E}^G(\varphi)$  que l'on note  $\epsilon \mapsto \sigma(\varphi, \epsilon)$ . On impose à cette paramétrisation des conditions de types endoscopiques. Il y a tout d'abord l'endoscopie usuelle entre  $G$  et ses groupes endoscopiques elliptiques. Ces groupes endoscopiques sont de la forme  $G_+ \times G_-$  où  $G_+$  et  $G_-$  sont des groupes unitaires quasi-déployés. On considère aussi une endoscopie tordue. Plus précisément soient  $G_+$  et  $G_-$  des groupes unitaires quasi-déployés d'espaces hermitiens de dimensions  $d_+$  et  $d_-$ . Posons  $n = d_+ + d_-$  et  $M_n = R_{E/F}GL_n$  (où  $R_{E/F}$  désigne la restriction des scalaires à la Weil). Notons  $\theta$  l'automorphisme de  $M_n$  donné par  $g \mapsto {}^t(g^c)^{-1}$  et  $\tilde{M}_n$  la composante non neutre du groupe non connexe  $M_n \rtimes \{1, \theta\}$ . Alors  $G_+ \times G_-$  est un groupe endoscopique du groupe tordu  $\tilde{M}_n$ . Soient  $\varphi_+ \in \Phi_{temp}(G_+)$ ,  $\varphi_- \in \Phi_{temp}(G_-)$  et  $\Pi^{G_+}(\varphi_+)$ ,  $\Pi^{G_-}(\varphi_-)$  les  $L$ -paquets correspondants de représentations tempérées de  $G_+(F)$  et  $G_-(F)$  respectivement. Posons  $\varphi = \varphi_+ \oplus \varphi_-$ . La correspondance locale de Langlands, prouvée par Harris-Taylor et Henniart, associe à  $\varphi$  une représentation tempérée irréductible  $\pi(\varphi)$  de  $M_n(F)$ . On peut étendre cette représentation en une représentation unitaire  $\pi^+(\varphi)$  de  $M_n(F) \rtimes \{1, \theta\}$  et on note  $\tilde{\pi}(\varphi)$  sa restriction à  $\tilde{M}_n(F)$ . D'après Clozel ([C]),  $\tilde{\pi}(\varphi)$  possède un caractère que l'on note  $\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi)}$ . On impose alors à nos  $L$ -paquets les deux conditions suivantes

- Les caractères  $\Theta_{\varphi_\pm} = \sum_{\sigma_\pm \in \Pi^{G_\pm}(\varphi_\pm)} \Theta_{\sigma_\pm}$  sont stables ;
- Il existe un nombre complexe  $c$  de module 1 tel que  $c\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi)}$  soit un transfert de  $\Theta_{\varphi_+} \times \Theta_{\varphi_-}$ .

Pour que cela ait un sens, il faut bien entendu fixer précisément les facteurs de transfert. On renvoie pour cela à 3.2. Les conjectures sont les mêmes pour  $G'$ . Il suffit de remplacer  $G$  par  $G'$  et  $d$  par  $d'$  dans les définitions sauf en ce qui concerne l'ensemble de caractères  $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$  : on le définit comme l'ensemble des caractères  $\epsilon$  de  $\mathcal{S}_{\varphi'}$  vérifiant  $\epsilon(z_{\varphi'}) = \mu(G')$ . On renvoie à 7.2 pour l'énoncé précis des conjectures, notamment en ce qui concerne l'endoscopie classique. On a introduit dans nos conjectures des constantes non précisées. On montre en 7.7 et 7.10 comment, quitte à changer les paramétrages, on peut déterminer les constantes. Une fois cela fait, les  $L$ -paquets et les paramétrisations sont uniquement déterminés.

Soient  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$  et  $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$  des paramètres de Langlands tempérés pour  $G$  et  $G'$  respectivement. Soit  $\varphi = \bigoplus_{i \in I} l_i \varphi_i$  la décomposition de  $\varphi$  en composantes isotypiques.

Comme indiqué précédemment, on a une identification naturelle  $\mathcal{S}_\varphi = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I'}$ . Fixons un caractère continu non trivial  $\psi_E^\delta$  de  $E$  trivial sur  $F$ . Signalons que les paramétrages des  $L$ -paquets dépendent du choix de ce caractère cf 7.10. On définit un caractère  $\epsilon_{\varphi, \varphi'}^G$  de  $\mathcal{S}_\varphi$  par

$$\epsilon_{\varphi, \varphi'}^G((e_i)_{i \in I'}) = \prod_{i \in I'} \epsilon(1/2, \varphi_i \otimes \varphi', \psi_E^\delta)^{e_i}$$

pour tout  $(e_i)_{i \in I'} \in \mathcal{S}_\varphi = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I'}$ . Le facteur epsilon d'une représentation du groupe de Weil-Deligne est défini comme dans [GGP]. On définit de la même façon un caractère  $\epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'}$  de  $\mathcal{S}_{\varphi'}$ . On vérifie que

$$\epsilon_{\varphi, \varphi'}^G(z_\varphi) = \epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'}(z_{\varphi'}) = \epsilon(1/2, \varphi \otimes \varphi', \psi_E^\delta)$$

En admettant les conjectures ci-dessus (précisées en 7.2), notre résultat principal est le suivant (théorème 7.8.1)

**Théorème 1** *Soient  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$  et  $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$ . Alors*

- (i) *Si  $\mu(G) \neq \epsilon(1/2, \varphi \otimes \varphi', \psi_E^\delta)$ , on a  $m(\sigma, \sigma') = 0$  pour tous  $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$ ,  $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$  ;*
- (ii) *Si  $\mu(G) = \epsilon(1/2, \varphi \otimes \varphi', \psi_E^\delta)$ , on a*

$$m(\sigma(\varphi, \epsilon_{\varphi, \varphi'}^G), \sigma(\varphi', \epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'})) = 1$$

*et  $m(\sigma, \sigma') = 0$  pour tous  $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$ ,  $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$  avec  $(\sigma, \sigma') \neq (\sigma(\varphi, \epsilon_{\varphi, \varphi'}^G), \sigma(\varphi', \epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'}))$ .*

Il s'agit de la conjecture 17.3 de [GGP] restreinte aux représentations tempérées. Expliquons brièvement comment on prouve le théorème 1. Rappelons que l'on a montré en [B1] une formule intégrale calculant la multiplicité  $m(\sigma, \sigma')$  en fonction des caractères de  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Par endoscopie classique on peut exprimer ces caractères en fonction de caractères stables vivant sur des groupes endoscopiques elliptiques de  $G$  et  $G'$ . Par endoscopie tordue cette fois, on peut exprimer ces caractères stables en fonction de caractères sur les groupes tordus  $\tilde{M}_n$ . Dans [B2], on a montré une formule intégrale pour un facteur epsilon de paire, similaire à celle pour la multiplicité, mais où on remplace les caractères de  $\sigma$  et  $\sigma'$  par des caractères sur des groupes tordus  $\tilde{M}_n$  et  $\tilde{M}_m$  avec  $n$  et  $m$  de parités différentes. Finalement, on obtient une expression de  $m(\sigma, \sigma')$  à partir de facteurs epsilon de paires. C'est de cette expression dont découle le théorème 1.

Mentionnons pour finir un autre résultat, le lemme 7.10.1, qui possède un intérêt propre. On peut l'énoncer ainsi : si  $G$  est quasi-déployé, pour chaque type de modèle de Whittaker sur  $G(F)$ , il existe dans le  $L$ -paquet  $\Pi^G(\varphi)$  une unique représentation admettant un tel modèle de Whittaker et de même pour  $G'$  (il n'existe qu'un seul type de modèle de Whittaker pour  $G'$ ). Signalons que cette propriété des  $L$ -paquets tempérés a déjà été obtenue pour les groupes classiques par T.Konno ([K]).

Décrivons le plan de l'article. Dans la première section, on a rassemblé les définitions, notations et résultats généraux sur les groupes, groupes tordus et groupes unitaires dont nous aurons besoin dans la suite. On paramètre dans la deuxième section les classes de conjugaison et conjugaison stable des groupes unitaires et des groupes tordus  $\tilde{M}_n$ . Dans la troisième section, on fixe les facteurs de transfert et on les exprime en fonction des paramétrages précédents. Les formules prouvées dans [B1] et [B2] sont réexprimées dans la quatrième section sous des formes plus appropriées pour la suite. Dans la cinquième section, on prouve, grâce à un résultat de Rodier, une formule pour l'existence ou non d'un modèle de Whittaker pour une représentation tempérée irréductible d'un groupe unitaire de dimension paire. Par endoscopie, on reformule dans la sixième partie les trois expressions précédentes en fonction de caractères stables. La septième partie est consacrée à la preuve du résultat principal (théorème 7.8.1).

## 1 Groupes, mesures, notations

### 1.1 Notations générales

Soit  $F$  un corps local non archimédien de caractéristique 0 et  $E$  une extension quadratique de  $F$ . On notera  $\mathcal{O}_F$ ,  $\mathfrak{p}_F$ ,  $\varpi_F$ ,  $k_F$ ,  $q_F$ ,  $val_F$  et  $|\cdot|_F$  l'anneau des entiers de  $F$ , son idéal maximal, une uniformisante, le corps résiduel, le cardinal de  $k_F$ , la valuation normalisée par  $val_F(\varpi_F) = 1$  et la valeur absolue définie par  $|x|_F = q_F^{-val_F(x)}$  pour tout  $x \in F$ . On définit de même  $\mathcal{O}_E$ ,  $\mathfrak{p}_E$ ,  $\varpi_E$ ,  $k_E$ ,  $q_E$ ,  $val_E$  et  $|\cdot|_E$ . On notera  $N$  et  $Tr_{E/F}$  les applications norme et la trace de l'extension  $E/F$ ,  $x \mapsto \bar{x}$  l'unique  $F$ -automorphisme non trivial de  $E$  que l'on notera aussi  $\tau_{E/F}$  et  $sgn_{E/F}$  l'unique caractère quadratique de  $F^\times$  dont le noyau est  $N(E^\times)$ . On fixe pour toute la suite un caractère continu non trivial  $\psi$  de  $F$ , une clôture algébrique  $\bar{F}$  de  $F$  et un élément  $\delta \in E$  non nul de trace nulle. On pose  $\psi_E = \psi \circ Tr_{E/F}$ . Pour tout groupe algébrique  $G$  défini sur  $E$ , on notera  $R_{E/F}G$  le groupe algébrique sur  $F$  obtenu par restriction des scalaires à la Weil à partir de  $G$ .

### 1.2 Groupes et groupes tordus

Soit  $G$  un groupe réductif défini sur  $F$ . On note  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie et on pose  $\delta(G) = \dim(G) - \dim(T)$  où  $T$  est n'importe quel sous-tore maximal de  $G$ . L'action adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$  sera notée ainsi

$$G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$(g, X) \mapsto ad(g)X = gXg^{-1}$$

Pour  $x \in G$ , on notera  $Z_G(x)$  respectivement  $G_x$  le centralisateur de  $x$  dans  $G$  respectivement le centralisateur connexe de  $x$  dans  $G$ . Un élément  $x \in G$  sera dit fortement régulier si  $Z_G(x)$  est un sous-tore (forcément maximal) de  $G$ . On définit de la même façon la notion

d'élément fortement régulier de  $\mathfrak{g}$ . On note  $G_{reg}$  resp.  $\mathfrak{g}_{reg}$  la sous-variété des éléments fortement réguliers de  $G$  resp.  $\mathfrak{g}$ . On dira que deux éléments  $x, y \in G_{reg}(F)$  sont stablement conjugués, s'ils sont conjugués par un élément de  $G(\overline{F})$ . On désigne par  $G_{reg}(F)/conj$  resp.  $G_{reg}(F)/stconj$  l'ensemble des classes de conjugaison resp. conjugaison stable de  $G_{reg}(F)$ . On note les projections naturelles  $G_{reg}(F) \rightarrow G_{reg}(F)/conj$  et  $G_{reg}(F) \rightarrow G_{reg}(F)/stconj$  par  $\phi_G$ , resp.  $\phi_G^{st}$ . On dispose d'une application naturelle  $\phi_G^{st}/conj$  entre  $G_{reg}(F)/conj$  et  $G_{reg}(F)/stconj$  qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_{reg}(F)/conj & \xrightarrow{\phi_G^{st}/conj} & G_{reg}(F)/stconj \\ & \searrow \phi_G & \nearrow \phi_G^{st} \\ & G_{reg}(F) & \end{array}$$

Soit  $T$  un tore. On notera  $A_T$  son sous-tore déployé maximal. On munit  $T(F)$  d'une mesure de Haar de la façon suivante : si  $T(F)$  est compact, on choisit la mesure de masse totale 1 ; si  $T$  est déployé, on choisit la mesure qui donne au sous-groupe compact maximal de  $T(F)$  la mesure 1 ; dans le cas général on choisit la mesure sur  $T(F)$  compatible avec les mesures juste définies sur  $A_T(F)$  et  $T(F)/A_T(F) = (T/A_T)(F)$ .

On peut munir  $G_{reg}(F)/conj$  d'une structure d'espace  $F$ -analytique et d'une mesure caractérisées par la condition suivante : pour tout  $x \in G_{reg}(F)$  il existe un voisinage  $\omega$  de 1 dans  $Z_G(x)$  tel que l'application

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow G_{reg}(F)/conj \\ t &\mapsto \phi_G(xt) \end{aligned}$$

soit un isomorphisme de  $\omega$  sur un voisinage ouvert de  $\phi_G(x)$  qui préserve les mesures. On munit de même  $G_{reg}(F)/stconj$  d'une structure de variété  $F$ -analytique et d'une mesure. L'application  $\phi_G^{st}/conj : G_{reg}(F)/conj \rightarrow G_{reg}(F)/stconj$  est alors un revêtement analytique qui préserve localement les mesures. Un élément  $x \in G_{reg}(F)$  sera dit anisotrope si  $G_x/A_G$  est un tore anisotrope, où  $A_G$  est le tore déployé central maximal de  $G$ . On note  $G(F)_{ani}$  le sous-ensemble des éléments (fortement réguliers) anisotropes de  $G(F)$ . On vérifie que la propriété d'être anisotrope est invariante par conjugaison et conjugaison stable. On notera  $G(F)_{ani}/conj$  resp.  $G(F)_{ani}/stconj$  l'ensemble des classes de conjugaison resp. conjugaison stable d'éléments anisotropes de  $G(F)$ . Ces espaces s'identifient naturellement à des ouverts de  $G_{reg}(F)/conj$  et  $G_{reg}(F)/stconj$  respectivement.

Pour  $x \in G(F)$  un élément semi-simple, on pose

$$D^G(x) = |\det((1 - ad(x))|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x})|_F$$

On désignera par  $Nil(\mathfrak{g}(F))$  l'ensemble des orbites nilpotentes de  $\mathfrak{g}(F)$ . Fixons une forme bilinéaire non dégénérée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathfrak{g}(F)$  invariante par l'action adjointe de  $G(F)$ . Pour  $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ , on pose

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}} f(Y) \psi(\langle Y, X \rangle) dY$$

pour tout  $X \in \mathfrak{g}(F)$  où  $dY$  est la mesure de Haar sur  $\mathfrak{g}(F)$  telle que  $\hat{f}(X) = f(-X)$ . Pour  $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))$ , on munit  $\mathcal{O}$  d'une mesure de la façon suivante. Pour  $X \in \mathcal{O}$ , la forme bilinéaire  $(Y, Z) \mapsto \langle X, [Y, Z] \rangle$  sur  $\mathfrak{g}(F)$  se descend en une forme symplectique sur  $\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_X(F)$ , c'est-à-dire sur l'espace tangent à  $\mathcal{O}$  au point  $X$ . Ainsi  $\mathcal{O}$  est muni d'une structure de variété  $F$ -analytique symplectique et on en déduit une mesure "autoduale" sur  $\mathcal{O}$  via le caractère  $\psi$ . On définit l'intégrale orbitale sur  $\mathcal{O}$  par

$$J_{\mathcal{O}}(f) = \int_{\mathcal{O}} f(X) dX$$

pour tout  $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ . D'après Harish-Chandra, [HCvD], il existe une fonction  $\hat{j}(\mathcal{O}, \cdot)$  localement intégrable sur  $\mathfrak{g}(F)$  telle que

$$J_{\mathcal{O}}(\hat{f}) = \int_{\mathfrak{g}(F)} \hat{j}(\mathcal{O}, X) f(X) dX$$

pour tout  $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ . Lorsque l'on voudra préciser le groupe ambiant, on notera  $\hat{j}^G(\mathcal{O}, \cdot)$  plutôt que  $\hat{j}(\mathcal{O}, \cdot)$ . Les fonctions  $\hat{j}(\mathcal{O}, \cdot)$  vérifient la propriété d'homogénéité suivante :

$$\hat{j}(\mathcal{O}, \lambda X) = |\lambda|_F^{-dim(\mathcal{O})/2} \hat{j}(\lambda \mathcal{O}, X)$$

pour tout  $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))$ , pour tout  $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$  et pour tout  $\lambda \in F^\times$ . Pour tout  $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))$  et tout  $\lambda \in F^{\times, 2}$ , on a  $\lambda \mathcal{O} = \mathcal{O}$ . On notera  $Nil(\mathfrak{g}(F))_{reg}$  le sous-ensemble de  $Nil(\mathfrak{g}(F))$  constitué des orbites régulières c'est-à-dire des orbites qui sont de dimension  $\delta(G)$ .

Enfin on notera  $Temp(G)$  l'ensemble des classes d'équivalence de représentations (complexes) irréductibles lisses et tempérées de  $G(F)$ .

Soit  $(M, \tilde{M})$  un groupe tordu défini sur  $F$ . Cela signifie que  $M$  est un groupe réductif connexe défini sur  $F$  et que  $\tilde{M}$  est une variété définie sur  $F$ , vérifiant  $\tilde{M}(F) \neq \emptyset$ , et munie de deux actions commutantes à gauche et à droite de  $M$  qui font chacune de  $\tilde{M}$  un espace principal homogène sous  $M$ . On note

$$\begin{aligned} M \times \tilde{M} \times M &\rightarrow \tilde{M} \\ (m, \tilde{m}, m') &\rightarrow m\tilde{m}m' \end{aligned}$$

les actions à gauche et à droite de  $M$  sur  $\tilde{M}$ . Pour  $\tilde{m} \in \tilde{M}$ , on note  $\theta_{\tilde{m}}$  l'automorphisme de  $M$  tel que  $\tilde{m}m = \theta_{\tilde{m}}(m)\tilde{m}$  pour tout  $m \in M$ . On note  $Z_M(\tilde{m})$  le centralisateur de  $\tilde{m}$  dans  $M$  pour l'action par conjugaison, c'est-à-dire le sous-groupe des points fixes de  $\theta_{\tilde{m}}$ , et  $M_{\tilde{m}}$  la composante neutre de  $Z_M(\tilde{m})$ . On dira que  $\tilde{m}$  est fortement régulier si  $Z_M(\tilde{m})$  est abélien et  $M_{\tilde{m}}$  est un tore. On note  $\tilde{M}_{reg}$  la sous-variété des éléments fortement réguliers et

$\tilde{M}_{reg}(F)/conj$  l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments fortement réguliers de  $\tilde{M}(F)$ . On dit que deux éléments de  $\tilde{M}_{reg}(F)$  qu'ils sont stablement conjugués s'il sont conjugués par un élément de  $M(\overline{F})$ . On note  $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$  l'ensemble des classes de conjugaison stable de  $\tilde{M}_{reg}(F)$ . On dispose comme dans le cas des groupes d'un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_{reg}(F)/conj & \xrightarrow{\phi_M^{st}/conj} & \tilde{M}_{reg}(F)/stconj \\ & \searrow \phi_{\tilde{M}} & \nearrow \phi_M^{st} \\ & \tilde{M}_{reg}(F) & \end{array}$$

On peut munir  $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$  d'une structure d'espace  $F$ -analytique et d'une mesure caractérisées par la propriété suivante : pour tout  $\tilde{m} \in \tilde{M}_{reg}(F)$ , il existe un voisinage ouvert  $\omega$  de 1 dans  $M_{\tilde{m}}(F)$  de sorte que l'application  $t \in \omega \mapsto \phi_{\tilde{M}}(t\tilde{m})$  soit un isomorphisme  $F$ -analytique de  $\omega$  sur un ouvert de  $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$  qui préserve les mesures. On munit de la même façon  $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$  d'une structure  $F$ -analytique et d'une mesure. L'application  $\phi_M^{st}/conj$  est alors un revêtement analytique qui préserve localement les mesures. L'action de  $\theta_{\tilde{m}}$  sur  $A_G$  est la même quelque soit  $\tilde{m} \in \tilde{M}$ , on note  $A_{\tilde{G}}$  la composante neutre du sous-groupe des points fixes de  $A_G$ . Un élément  $\tilde{x} \in \tilde{M}_{reg}(F)$  sera dit anisotrope si  $M_{\tilde{x}}/A_{\tilde{G}}$  est un tore anisotrope. On notera  $\tilde{M}(F)_{ani}$  le sous-ensemble des éléments (fortement réguliers) anisotropes de  $\tilde{M}(F)$ . On vérifie que la propriété d'être anisotrope est invariante par conjugaison et conjugaison stable. On note  $\tilde{M}(F)_{ani}/conj$  resp.  $\tilde{M}(F)_{ani}/stconj$  l'ensemble des classes de conjugaison resp. conjugaison stable d'éléments anisotropes de  $\tilde{M}(F)$ . Ces espaces s'identifient naturellement à des ouverts de  $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$  et  $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$  respectivement.

Pour  $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$  semi-simple, c'est-à-dire que  $\theta_{\tilde{x}}$  laisse stable une paire constituée d'un sous-groupe de Borel et d'un sous-tore maximal de ce dernier définis sur  $\overline{F}$ , on pose

$$D^{\tilde{M}}(\tilde{x}) = |\det(1 - \theta_{\tilde{x}})|_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_{\tilde{x}}}|_F$$

Supposons de plus  $\tilde{x}$  fortement régulier. Alors  $M_{\tilde{x}}$  est un tore et son centralisateur dans  $M$  est un sous-tore maximal  $T$ . On pose alors

$$D_0^{\tilde{M}} = D^{\tilde{M}}|\det(1 - \theta_{\tilde{x}})|_{\mathfrak{t}/\mathfrak{m}_{\tilde{x}}}|_F$$

### 1.3 Les groupes unitaires et leurs orbites nilpotentes régulières

Un espace hermitien sera pour nous un couple  $(V, h)$  formé d'un espace vectoriel de dimension finie sur  $E$  et d'une forme hermitienne non dégénérée  $h$  sur  $V$ . A un tel couple est associé un groupe unitaire  $G = U(V, h)$  qui est un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . Supposons que  $G$  est quasi-déployé. Alors son groupe de Weyl admet  $w(d)$  éléments où on a posé pour tout entier  $d \geq 0$ ,

$$w(d) = \begin{cases} 2^{d/2}(d/2)! & \text{si } d \text{ est pair} \\ 2^{(d-1)/2}((d-1)/2)! & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

Soit  $(V, h)$  un espace hermitien de dimension  $d$  et de groupe unitaire  $G$ . On peut alors identifier naturellement  $\mathfrak{g}(F)$  au sous-espace des endomorphismes  $E$ -linéaires  $X \in \text{End}_E(V)$  qui vérifient

$$h(Xv, v') + h(v, Xv') = 0$$

pour tous  $v, v' \in V$ . Pour tous  $X, X' \in \mathfrak{g}(F)$ , on pose

$$\langle X, X' \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}_{E/F}(\text{Tr}(XX'))$$

On vérifie que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire non dégénérée  $G$ -invariante. On peut alors appliquer les constructions du paragraphe précédent associée. Cela fournit des fonctions  $\hat{j}(\mathcal{O}, \cdot)$ ,  $\mathcal{O} \in \text{Nil}(\mathfrak{g}(F))$ , sur  $\mathfrak{g}(F)$ .

Si  $d$  est impair ou  $d = 0$  alors  $G$  est quasi-déployé et  $\mathfrak{g}(F)$  ne possède qu'une seule orbite nilpotente régulière. Si  $d \geq 2$  est pair et que  $G$  n'est pas quasi-déployé, alors  $\mathfrak{g}(F)$  ne possède aucune orbite nilpotente régulière. Enfin si  $d \geq 2$  est pair et que  $G$  est quasi-déployé, il existe deux orbites nilpotentes régulières dans  $\mathfrak{g}(F)$ . On peut paramétrer ces orbites par  $\text{KerTr}_{E/F} \setminus \{0\} / N(E^\times)$  de la façon suivante : on fixe une base  $(e_i)_{i=\pm 1, \dots, \pm d/2}$  de  $V$  vérifiant

$$h(e_i, e_j) = \delta_{i, -j}$$

pour  $i, j = \pm 1, \dots, \pm d/2$  et où  $\delta_{i, -j}$  est le symbole de Kronecker. Soit  $\eta \in \text{KerTr}_{E/F}$  non nul. On définit un élément  $N_\eta \in \mathfrak{g}(F)$  par  $N_\eta e_{d/2} = 0$ ,  $N_\eta e_i = e_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, d/2 - 1$ ,  $N_\eta e_i = -e_{i+1}$  pour  $i = -d/2, \dots, -2$  et  $N_\eta e_{-1} = \eta e_1$ . Alors  $N_\eta$  est un élément nilpotent régulier et l'orbite qu'il engendre ne dépend que de  $\eta$  modulo  $N(E^\times)$  (et pas du choix de la base  $(e_i)$ ). On note  $\mathcal{O}_\eta$  cette orbite. On obtient ainsi une bijection entre  $\text{KerTr}_{E/F} \setminus \{0\} / N(E^\times)$  et  $\text{Nil}(\mathfrak{g}(F))_{\text{reg}}$ .

Pour tout entier  $r \geq 0$ , on fixe un  $E$ -espace vectoriel  $Z_{2r+1}$  de dimension  $2r + 1$  ainsi qu'une base  $(z_i)_{i=0, \pm 1, \dots, \pm r}$  de celui-ci. Pour tout  $\nu \in F^\times$ , on notera alors  $h_{2r+1, \nu}$  la forme hermitienne sur  $Z_{2r+1}$  définie par

$$h(\lambda_0 z_0 + \sum_{i=1, \dots, r} \lambda_i z_i + \lambda_{-i} z_{-i}, \lambda'_0 z_0 + \sum_{i=1, \dots, r} \lambda'_i z_i + \lambda'_{-i} z_{-i}) = \nu \bar{\lambda}_0 \lambda'_0 + \sum_{i=1}^r \bar{\lambda}_i \lambda'_{-i} + \bar{\lambda}_{-i} \lambda'_i$$

pour tous  $(\lambda_i)_{i=0, \pm 1, \dots, \pm r}, (\lambda'_i)_{i=0, \pm 1, \dots, \pm r} \in E^{2r+1}$ .

## 2 Paramétrages

### 2.1 Espaces de paramètres

Dans ce qui suit, on entendra par extension de  $F$  un sous-corps de  $\overline{F}$  qui contient  $F$ . On définit  $\Xi$  comme l'ensemble des quadruplets  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})$  où

- $I$  est un ensemble fini ;
  - Pour tout  $i \in I$ ,  $F_{\pm i}$  est une extension finie de  $F$  et  $F_i = F_{\pm i} \otimes_F E$ . On note  $\tau_i = Id \otimes \tau_{E/F}$  l'unique  $F_{\pm i}$ -automorphisme non trivial de  $F_i$  ;
  - Pour tout  $i \in I$ ,  $y_i$  est un élément de  $F_i^\times$  vérifiant  $y_i \tau_i(y_i) = 1$ .
- Pour un tel  $\xi$ , on notera  $I^*$  l'ensemble des  $i \in I$  tels que  $F_i$  soit un corps et on posera

$$d_\xi = \sum_{i \in I} [F_{\pm i} : F] = \sum_{i \in I} [F_i : E]$$

Pour  $d \in \mathbb{N}$ , on notera  $\Xi_d$  l'ensemble des éléments  $\xi \in \Xi$  vérifiant  $d_\xi = d$ ,  $\Xi^*$  l'ensemble des éléments  $\xi \in \Xi$  vérifiant  $I^* = I$  et  $\Xi_d^* = \Xi_d \cap \Xi^*$ . On définit un isomorphisme entre deux éléments  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})$  et

$\xi' = (I', (F'_{\pm i'})_{i' \in I'}, (F'_{i'})_{i' \in I'}, (y'_{i'})_{i' \in I'})$  de  $\Xi$  comme étant un triplet  $(\iota, (\iota_{\pm i})_{i \in I}, (\iota_i)_{i \in I})$  où

- $\iota : I \rightarrow I'$  est une bijection ;
- Pour tout  $i \in I$ ,  $\iota_{\pm i} : F_{\pm i} \rightarrow F'_{\pm \iota(i)}$  est un  $F$ -isomorphisme et  $\iota_i = \iota_{\pm i} \otimes Id_E : F_i \rightarrow F'_{\iota(i)}$  le  $E$ -isomorphisme déduit

Ce triplet devant vérifier la condition supplémentaire

$$\iota_i(y_i) = y'_{\iota(i)}, \quad \forall i \in I$$

Un élément  $\xi \in \Xi$  sera dit régulier si l'identité est son seul automorphisme. On note  $\Xi_{reg}$  le sous-ensemble des éléments réguliers de  $\Xi$ . On définit  $\Xi$ , resp.  $\Xi_{reg}$ , resp.  $\Xi_d$ , resp.  $\Xi^*$  comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\Xi$ , resp.  $\Xi_{reg}$ , resp.  $\Xi_d$ , resp.  $\Xi^*$ . On posera  $\Xi_{d,reg} = \Xi_d \cap \Xi_{reg}$ ,  $\Xi_d^* = \Xi_d \cap \Xi^*$ ,  $\Xi_{d,reg}^* = \Xi_{d,reg} \cap \Xi^*$ . On identifiera toujours une classe d'isomorphisme de paramètres à un élément qui la représente.

Pour  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi_{reg}$ , introduisons le tore

$$T_\xi = \prod_{i \in I} Ker N_{F_i/F_{\pm i}}$$

C'est un tore défini sur  $F$ . L'espace  $\Xi_{reg}$  peut être muni d'une structure de variété analytique et d'une mesure caractérisées de la façon suivante : pour tout  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi_{reg}$ , il existe un voisinage ouvert  $\omega$  de 1 dans  $T_\xi(F)$  tel que l'application  $\omega \rightarrow \Xi_{reg}$

$$(t_i)_{i \in I} \mapsto (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i t_i)_{i \in I})$$

induisse un isomorphisme de  $\omega$  sur un ouvert de  $\Xi_{reg}$  qui préserve les mesures. Soient  $\xi_+ = (I_+, (F_{\pm i})_{i \in I_+}, (F_i)_{i \in I_+}, (y_i)_{i \in I_+})$ ,  $\xi_- = (I_-, (F_{\pm i})_{i \in I_-}, (F_i)_{i \in I_-}, (y_i)_{i \in I_-}) \in \Xi$ . On définit alors  $\xi_+ \sqcup \xi_- \in \Xi$  comme étant égal à  $(I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})$  où  $I = I_+ \sqcup I_-$ . Alors si  $\xi_+ \sqcup \xi_-$

est régulier, il en va de même de  $\xi_+$  et  $\xi_-$  et l'application  $(\xi_+, \xi_-) \in \Xi^2 \mapsto \xi_+ \sqcup \xi_- \in \Xi$  préserve localement les mesures au voisinage des éléments de  $\Xi_{reg}$ .

Soit  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi_{reg}$ . On lui associe le groupe abélien fini

$$C(\xi) = \prod_{i \in I} F_{\pm i}^\times / N_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^\times)$$

Ce groupe s'identifie naturellement à  $\{\pm 1\}^{I^*}$ , on notera  $C(\xi)^1$  le sous-groupe des éléments dont le produit des coordonnées vaut 1 et  $C(\xi)^{-1} = C(\xi) \setminus C(\xi)^1$ . Pour  $i \in I$ , notons  $\Gamma(y_i)$  l'ensemble des éléments  $\gamma_i \in F_i^\times$  tels que  $\gamma_i \tau_i(\gamma_i)^{-1} = y_i$ . On pose

$$\Gamma(\xi) = \prod_{i \in I} \Gamma(y_i) / N_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^\times)$$

## 2.2 Paramétrages des classes de conjugaison

Soit  $(V, h)$  un espace hermitien de dimension  $d$  et de groupe unitaire  $G$ . Soient  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi_{reg, d}$  et  $c = (c_i) \in \prod_{i \in I} F_{\pm i}^\times$ . Introduisons l'espace hermitien  $(V_{\xi, c}, h_{\xi, c})$  défini ainsi

- $V_{\xi, c} = \bigoplus_{i \in I} F_i$
- $h_{\xi, c}(\sum_{i \in I} x_i, \sum_{i \in I} x'_i) = \sum_{i \in I} \text{Trace}_{F_i/E}(c_i x'_i \tau_i(x_i))$

La classe d'isomorphisme de  $(V_{\xi, c}, h_{\xi, c})$  ne dépend que des images de  $\xi$  et  $c$  dans  $\Xi_{reg, d}$  et  $C(\xi)$  respectivement. De plus, il existe un unique  $\epsilon \in \{\pm 1\}$  de sorte que  $(V_{\xi, c}, h_{\xi, c})$  soit isomorphe à  $(V, h)$  si et seulement si  $c \in C(\xi)^\epsilon$ . Pour un tel  $c$ , fixons un isomorphisme  $(V, h) \simeq (V_{\xi, c}, h_{\xi, c})$  et notons  $x(\xi, c)$  l'élément de  $G_{reg}(F)$  qui via cet isomorphisme agit sur  $V_{\xi, c}$  comme la multiplication par  $y_i$  sur  $F_i \subset V_{\xi, c}$ . La classe de conjugaison de  $x(\xi, c)$  ne dépend que des images de  $\xi$  et  $c$  dans  $\Xi_{reg, d}$  et  $C(\xi)$  respectivement (donc notamment pas de l'isomorphisme choisi) et toutes les classes de conjugaison dans  $G_{reg}(F)$  sont ainsi atteintes pour un unique  $\xi \in \Xi_{reg, d}$  et un unique  $c \in C(\xi)$ . De plus, la classe de conjugaison stable de  $x(\xi, c)$  ne dépend elle que de  $\xi \in \Xi_{reg, d}$ . On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_{reg}(F)/conj & \xrightarrow{\phi_G^{st}/conj} & G_{reg}(F)/stconj \\ & \searrow p_G & \swarrow p_G^{st} \\ & \Xi_{reg, d} & \end{array}$$

où  $p_G^{st}$  est un isomorphisme  $F$ -analytique qui préserve les mesures de  $G_{reg}(F)/stconj$  sur un ouvert de  $\Xi_{reg, d}$  et  $p_G$  est un revêtement au dessus du même ouvert. La fibre en un point  $\xi$  de ce revêtement s'identifie à une classe  $C(\xi)^\epsilon \subset C(\xi)$ . Par les applications précédentes, une classe de conjugaison (resp. conjugaison stable) est anisotrope si et seulement si son image par  $p_G$  (resp.  $p_G^{st}$ ) appartient à  $\Xi_{reg, d}^*$ .

Soit  $U$  un espace vectoriel sur  $E$  de dimension  $n$ ,  $M = R_{E/F}GL(U)$  et  $\tilde{M}$  la variété algébrique définie sur  $F$  des formes sesquilinéaires non dégénérées sur  $U$  (notre convention est de les prendre linéaires à droite). On laisse agir  $M$  à gauche et à droite sur  $\tilde{M}$  de la façon suivante

$$(m\tilde{m}m')(u, u') = \tilde{m}(m^{-1}u, m'u')$$

pour tout  $\tilde{m} \in \tilde{M}$  et pour tous  $m, m' \in M$ . Le couple  $(M, \tilde{M})$  est un groupe tordu. Soit  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi_{reg, n}$  et fixons un isomorphisme  $E$ -linéaire

$$M \simeq \bigoplus_{i \in I} F_i$$

Pour  $\gamma = (\gamma_i) \in \prod_{i \in I} \Gamma(y_i)$ , introduisons l'élément  $\tilde{x}(\xi, \gamma) \in \tilde{M}_{reg}(F)$  qui via l'isomorphisme précédent est donné par la formule

$$\tilde{x}(\xi, \gamma) \left( \sum_{i \in I} u_i, \sum_{i \in I} u'_i \right) = \sum_{i \in I} \text{Trace}_{F_i/E}(\gamma_i \tau_i(u_i) u'_i)$$

Alors la classe de conjugaison de  $\tilde{x}(\xi, \gamma)$  est bien définie et ne dépend que des images de  $\xi$  et  $\gamma$  dans  $\Xi_{reg, n}$  et  $\Gamma(\xi)$  respectivement. Toutes les classes de conjugaison dans  $\tilde{M}_{reg}(F)$  sont ainsi atteintes pour un unique  $\xi \in \Xi_{reg, n}$  et un unique  $\gamma \in \Gamma(\xi)$ . De plus, la classe de conjugaison stable de  $\tilde{x}(\xi, \gamma)$  ne dépend elle que de  $\xi \in \Xi_{reg, n}$ . On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_{reg}(F)/conj & \xrightarrow{\phi_{\tilde{M}}^{st}/conj} & \tilde{M}_{reg}(F)/stconj \\ & \searrow p_{\tilde{M}} & \swarrow p_{\tilde{M}}^{st} \\ & \Xi_{reg, n} & \end{array}$$

où  $p_{\tilde{M}}^{st}$  est un isomorphisme  $F$ -analytique de  $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$  sur  $\Xi_{reg, n}$  et  $p_{\tilde{M}}$  est un revêtement. La fibre en un point  $\xi$  de ce revêtement s'identifie à  $\Gamma(\xi)$ . Par contre, l'application  $p_{\tilde{M}}^{st}$  ne préserve pas les mesures et son jacobien vaut  $|2|_F^n$ . Pour le voir, soient  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi_{reg, n}$  et  $\gamma \in \Gamma(\xi)$ . Posons  $\tilde{m} = \tilde{x}(\xi, \gamma)$  en ayant effectués les choix nécessaires. On a alors un isomorphisme  $T_{\xi} \simeq M_{\tilde{m}}$  qui à  $t = (t_i) \in T_{\xi}$  associe l'élément de  $M_{\tilde{m}}$  qui agit sur  $F_i$  comme la multiplication par  $t_i$ . Modulo cet isomorphisme, pour tout  $t = (t_i) \in M_{\tilde{m}}(F)$ , la classe de conjugaison stable de  $\tilde{m}t$  est paramétrée par  $(I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i t_i^2)_{i \in I})$ . L'application  $M_{\tilde{m}} \rightarrow \tilde{M}_{reg}(F)/stconj$ ,  $t \mapsto \phi_{\tilde{M}}^{st}(\tilde{m}t)$  préserve localement les mesures au voisinage de l'origine, tandis que l'application

$$\begin{aligned} T_{\xi}(F) &\rightarrow \Xi_{reg, n} \\ (t_i) &\mapsto (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i t_i^2)_{i \in I}) \end{aligned}$$

est de jacobien  $|2|_F^n$  à l'origine. Ceci entraîne l'affirmation sur le jacobien de  $p_{\tilde{M}}^{st}$ .

Remarquons enfin qu'une classe de conjugaison (resp. conjugaison stable) est anisotrope si et seulement si son image par  $p_{\tilde{M}}$  (resp.  $p_{\tilde{M}}^{st}$ ) appartient à  $\Xi_{reg,n}^*$ .

### 2.3 Définition de facteurs sur les paramètres

Soient  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi_{reg}$ . Pour tout  $i \in I$ , on note  $\Phi_i$  l'ensemble des homomorphismes non nuls de  $E$ -algèbres de  $F_i$  dans  $\overline{F}$ . Définissons un polynôme  $P_\xi$  par

$$P_\xi(T) = \prod_{i \in I} \prod_{\phi \in \Phi_i} (T - \phi(y_i))$$

Posons

$$\Delta(\xi) = |P_\xi(1)|_E$$

Soit  $(V_\xi, h_\xi)$  un espace hermitien de dimension  $d_\xi$ , de groupe unitaire  $G_\xi$  et soit  $t \in G_{\xi,reg}(F)$  dont la classe de conjugaison stable est paramétrée par  $\xi$ . On a alors

$$|\det(1 - t)|_{V_\xi}|_E = \Delta(\xi)$$

Soit  $d \geq d_\xi$  un entier et  $(Z, h_Z)$  un espace hermitien de dimension  $d - d_\xi$ . Soit  $G$  le groupe unitaire de  $(Z, h_Z) \oplus (V_\xi, h_\xi)$ . Alors  $t$  est un élément semi-simple de  $G(F)$  et on pose

$$D^d(\xi) = D^G(t)$$

Cette fonction ne dépend que de  $d$  et  $\xi$  (donc pas des choix de  $(V_\xi, h_\xi)$ ,  $t$  et  $(Z, h_Z)$ ). On pose  $D(\xi) = D^{d_\xi}(\xi)$ . On a alors

$$D^d(\xi) = \Delta(\xi)^{d-d_\xi} D(\xi)$$

Soient  $\xi_+ = (I_+, (F_{\pm i})_{i \in I_+}, (F_i)_{i \in I_+}, (y_i)_{i \in I_+}) \in \Xi_{reg}$ ,  $\xi_- = (I_-, (F_{\pm i})_{i \in I_-}, (F_i)_{i \in I_-}, (y_i)_{i \in I_-}) \in \Xi_{reg}$  et  $\mu_+$ ,  $\mu_-$  deux caractères continus de  $E^\times$ . Posons  $\xi = \xi_+ \sqcup \xi_-$ ,  $I = I_+ \sqcup I_-$ ,  $d_- = d_{\xi_-}$ ,  $d_+ = d_{\xi_+}$  et  $d = d_\xi$ .

Pour  $c = (c_i)_{i \in I} \in C(\xi)$  et  $\nu \in F^\times$ , on pose

$$(1) \quad \Delta_{\mu_+, \mu_-, \nu}(\xi_+, \xi_-, c) = \mu_-(P_{\xi_-}(0)P_{\xi_-}(-1)^{-1})\mu_+(P_{\xi_+}(0)P_{\xi_+}(-1)^{-1}) \prod_{i \in I_-} \text{sgn}_{F_i/F_{\pm i}}(\nu C_i)$$

où

$$C_i = \begin{cases} -\delta^{-d-1} c_i P'_\xi(y_i) P_\xi(-1)^{-1} y_i^{1-d/2} & \text{si } d \text{ est pair} \\ -\delta^{-d-1} c_i P'_\xi(y_i) P_\xi(-1)^{-1} y_i^{(1-d)/2} (1 + y_i) & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour  $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I} \in \Gamma(\xi)$ , on pose

$$(2) \quad \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi_+, \xi_-, \gamma) = \mu_-(P_{\xi_-}(0)P_{\xi_-}(-1)^{-1})\mu_+(P_{\xi_+}(0)P_{\xi_+}(-1)^{-1}) \prod_{i \in I_-} \text{sgn}_{F_i/F_{\pm i}}(C_i)$$

où cette fois

$$C_i = \begin{cases} \delta^{-d-1}\gamma_i^{-1}P'_\xi(y_i)P_\xi(-1)^{-1}y_i^{1-d/2}(1+y_i) & \text{si } d \text{ est pair} \\ \delta^{-d-1}\gamma_i^{-1}P'_\xi(y_i)P_\xi(-1)^{-1}y_i^{(3-d)/2} & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

Ramarquons que dans les formules (1) et (2), on peut remplacer le produit sur  $I_-$  par un produit sur  $I_-^*$  car pour  $i \in I_- \setminus I_-^*$ , on a  $\text{sgn}_{F_i/F_{\pm i}} = 1$ .

**Lemme 2.3.1** *Soit  $a_0$  un élément non nul de trace nulle de  $E$ . Pour  $\lambda \in F^\times$  assez proche de 0, on pose  $\zeta_0(\lambda) = (F, E, e^{\lambda a_0}) \in \Xi_{1, \text{reg}}$ . Soient  $\xi_+, \xi_- \in \Xi_{\text{reg}}$  et  $\mu_+, \mu_-$  deux caractères continus de  $E^\times$ . On pose  $d_+ = d_{\xi_+}$ ,  $d_- = d_{\xi_-}$ ,  $d = d_- + d_+$  et  $\xi = \xi_+ \sqcup \xi_-$ .*

1. *Soit  $\nu_0 \in F^\times$  et posons  $c_0 = (-1)^{d+1}\nu_0$  vu comme élément de  $C(\zeta_0(\lambda)) = F^\times/N_{E/F}(E^\times)$  pour tout  $\lambda$  assez petit.*

- *Si  $\mu_{+|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d_-}$ , on a*

$$(1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta_{\mu_+, \mu_-, \nu}(\xi_+ \sqcup \zeta_0(\lambda), \xi_-, (c, c_0)) = \Delta_{\mu_+, \mu_-, \nu}(\xi_+, \xi_-, c) \text{sgn}_{E/F}(\delta^{d_-} \frac{P_{\xi_-}(1)}{P_{\xi_-}(-1)})$$

*pour tout  $\nu \in F^\times$  et pour tout  $c \in C(\xi)$ .*

- *Si  $\mu_{-|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d_+}$ , on a*

$$(2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta_{\mu_+, \mu_-, \nu}(\xi_+, \xi_- \sqcup \zeta_0(\lambda), (c, c_0)) = \Delta_{\mu_+, \mu_-, \nu}(\xi_+, \xi_-, c) \text{sgn}_{E/F}(\delta^{d_+} \frac{P_{\xi_+}(1)}{P_{\xi_+}(-1)}) \\ \text{sgn}_{E/F}(\nu\nu_0)$$

*pour tout  $\nu \in F^\times$  et pour tout  $c \in C(\xi)$ .*

2. *Soit  $\nu_1 \in F^\times$  et posons  $\gamma_0(\lambda) = (-1)^{d+1}\nu_1 e^{\lambda a_0/2}$  vu comme élément de  $\Gamma(\zeta_0(\lambda))$  pour tout  $\lambda \in F^\times$  assez petit.*

- *Si  $\mu_{+|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d_-}$ , on a*

$$(1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi_+ \sqcup \zeta_0(\lambda), \xi_-, (\gamma, \gamma_0(\lambda))) = \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi_+, \xi_-, \gamma) \text{sgn}_{E/F}(\delta^{d_-} \frac{P_{\xi_-}(1)}{P_{\xi_-}(-1)})$$

*pour tout  $\gamma \in \Gamma(\xi)$ .*

- *Si  $\mu_{-|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d_++1}$ , on a*

$$(2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi_+, \xi_- \sqcup \zeta_0(\lambda), (\gamma, \gamma_0(\lambda))) = \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi_+, \xi_-, \gamma) \text{sgn}_{E/F}(\delta^{d_+} \frac{P_{\xi_+}(1)}{P_{\xi_+}(-1)}) \\ \text{sgn}_{E/F}(-\nu_1)$$

*pour tout  $\gamma \in \Gamma(\xi)$ .*

### 3 Endoscopie

Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$  et soit  $(H, s, {}^L\xi)$  une donnée endoscopique de  $G$ , cf [LS] 1.2. Cela définit une application, appelée la correspondance endoscopique, d'un sous-ensemble de  $H_{reg}(F)/stconj$ , dont on qualifie les éléments de  $G$ -fortement réguliers, vers  $G_{reg}(F)/stconj$ . On dira que  $x \in G_{reg}(F)/conj$  et  $y \in H_{reg}(F)/stconj$  se correspondent si  $\phi_G^{st}/conj(x)$  est l'image de  $y$  par cette application. Pour définir des facteurs de transfert, il convient de fixer une forme intérieure quasi-déployée  $\underline{G}$  de  $G$ , un toreur intérieur  $\psi_G : G \rightarrow \underline{G}$  et un épinglage défini sur  $F$  de  $\underline{G}$  à conjugaison par  $G(F)$  près. Cette dernière donnée revient à celle d'une orbite nilpotente régulière de  $\mathfrak{g}(F)$  (c.f lemme 5.1.A [LS]). Avec ces données, on peut définir des facteurs de transfert relatifs  $\Delta_{H,G}(y, x; \bar{y}, \bar{x})$  où  $y \in H_{reg}(F)/stconj$  et  $x \in G_{reg}(F)/conj$  resp.  $\bar{y} \in H_{reg}(F)/stconj$  et  $\bar{x} \in G_{reg}(F)/conj$  se correspondent. D'après une remarque de Kottwitz, si on fixe un cocycle  $u : Gal(\bar{F}/F) \rightarrow \underline{G}$  vérifiant  $\psi_G \circ \sigma(g) = u(\sigma)\sigma \circ \psi_G(g)u(\sigma)^{-1}$  pour tous  $g \in G$  et  $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$  (il n'en existe pas toujours), on peut alors définir des facteurs de transfert absolus  $\Delta_{H,G}(y, x)$ . Ces facteurs de transfert dépendent du cocycle  $u$  et non pas seulement de sa classe de cohomologie. On suppose que l'on a fixé un tel cocycle  $u$ .

Soient  $\Theta$  une distribution localement intégrable invariante par conjugaison sur  $G(F)$  et  $\Theta^H$  une distribution localement intégrable invariante par conjugaison stable sur  $H(F)$  (on dit alors que  $\Theta^H$  est stable). On dira que  $\Theta$  est un transfert de  $\Theta^H$  si on a l'égalité

$$\Theta(x)D^G(x)^{1/2} = \sum_y \Theta^H(y)D^H(y)^{1/2}\Delta_{H,G}(y, x)$$

pour tout  $x \in G_{reg}(F)/conj$ , où la somme porte sur les  $y \in H_{reg}(F)/stconj$  qui sont en correspondance avec  $x$ .

Soit  $(M, \tilde{M})$  un groupe tordu. On suppose  $M$  déployé et on fixe un élément  $\tilde{\theta} \in \tilde{M}(F)$ . On suppose qu'il existe un épinglage défini sur  $F$  de  $M$  qui est invariant par  $\theta_{\tilde{\theta}}$ . On fixe alors une orbite nilpotente régulière de  $\mathfrak{m}_{\tilde{\theta}}(F)$ . Soit  $(H, s, {}^L\xi)$  une donnée endoscopique de  $(M, \tilde{M})$ , cf [KS] 2.1. On dispose alors d'une application, appelée correspondance endoscopique, d'un sous-ensemble de  $H_{reg}(F)/stconj$ , dont les éléments sont qualifiés de  $\tilde{M}$ -fortement réguliers, vers  $\tilde{M}_{reg}(F)/stconj$ . Deux éléments  $y \in H_{reg}(F)/stconj$  et  $\tilde{x} \in \tilde{M}_{reg}(F)/conj$  sont dits en correspondance, si  $\phi_{\tilde{M}}^{st}/conj(\tilde{x})$  est l'image de  $y$  par l'application précédente. On dispose d'un facteur de transfert  $\Delta_{H,\tilde{M}}(y, \tilde{x})$  défini pour tout  $y \in H_{reg}(F)/stconj$  et  $\tilde{x} \in \tilde{M}_{reg}(F)/conj$  et qui est non nul si et seulement si  $\tilde{x}$  et  $y$  se correspondent. Soient  $\tilde{\Theta}$  une distribution localement intégrable invariante par conjugaison sur  $\tilde{M}(F)$  et  $\Theta^H$  une distribution localement intégrable invariante par conjugaison stable sur  $H(F)$ . On dira que  $\tilde{\Theta}$  est un transfert de  $\Theta^H$ , si on a l'égalité

$$\tilde{\Theta}(\tilde{x})D_0^{\tilde{M}}(\tilde{x})^{1/2} = \sum_y \Theta^H(y)D^H(y)^{1/2}\Delta_{H,\tilde{M}}(y, \tilde{x})$$

pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{M}_{reg}(F)/conj$ , où la somme porte sur les  $y \in H_{reg}(F)/stconj$  qui sont en correspondance avec  $\tilde{x}$ .

### 3.1 Endoscopie classique pour les groupes unitaires

Soient  $(V, h)$ ,  $(V_+, h_+)$  et  $(V_-, h_-)$  trois espaces hermitiens de dimensions respectives  $d$ ,  $d_+$  et  $d_-$ . Notons  $G$ ,  $G_+$  et  $G_-$  leurs groupes unitaires respectifs. On fait les hypothèses suivantes

- $d = d_+ + d_-$  ;
- $G_+$  et  $G_-$  sont quasidéployés.

Alors  $G_+ \times G_-$  est un groupe endoscopique de  $G$ . Il y a un certain nombre de choix à faire pour fixer la donnée endoscopique (cf [W1] 1.8). Certains de ces choix sont inoffensifs (correspondant aux paramètres  $z_+$  et  $z_-$  de loc.cit.), mais d'autres, dont dépendent les facteurs de transfert, doivent être précisés. Ce sont les caractères  $\mu^+$  et  $\mu^-$  du paragraphe 1.8 de [W1]. On suppose donc choisi deux caractères continus  $\mu_+, \mu_- : E^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  dont les restrictions à  $F^\times$  sont respectivement  $sgn_{E/F}^{d_-}$  et  $sgn_{E/F}^{d_+}$  et on fixe la donnée endoscopique comme en [W1] 1.8.

On doit encore fixer quelques données supplémentaires pour que les facteurs de transfert soient bien définis. A savoir une forme intérieure quasidéployée  $\underline{G}$  de  $G$ , un torseur intérieur  $\psi_G : G \rightarrow \underline{G}$ , un 1-cocycle  $u : Gal(\overline{F}/F) \rightarrow \underline{G}$  et une orbite nilpotente régulière dans  $\mathfrak{g}(F)$ . Fixons dorénavant (et jusqu'à la fin de l'article), un élément  $\nu_0 \in F^\times$ . Introduisons ici la condition **(QD)** suivante

**(QD)** : les groupes unitaires de  $(V, h)$  et  $(V, h) \oplus (Z_1, h_{1, \nu_0})$  sont quasi-déployés.

Si  $d$  est pair cette condition est équivalente à ce que  $G$  soit quasi-déployé. On posera  $\mu(V, h) = 1$  si  $(V, h)$  vérifie **(QD)**,  $-1$  sinon. Si  $\mu(V, h) = 1$ , on pose  $\underline{G} = G$ ,  $\psi_G = Id_G$  et  $u = 1$ . Si  $\mu(V, h) = -1$ , il existe un unique espace hermitien (à isomorphisme près)  $(\underline{V}, \underline{h})$  de dimension  $d$  vérifiant **(QD)**. Notons  $\underline{G}$  son groupe unitaire. Les formes sesquilinéaires  $h$  et  $\underline{h}$  s'étendent naturellement en des formes  $E \otimes_F \overline{F}$ -sesquilinéaires sur  $V \otimes_F \overline{F}$  et  $\underline{V} \otimes_F \overline{F}$  respectivement. On note encore  $h$  et  $\underline{h}$  ces prolongements. Fixons un isomorphisme  $E \otimes_F \overline{F}$ -linéaire  $\beta : V \otimes_F \overline{F} \rightarrow \underline{V} \otimes_F \overline{F}$  qui transforme  $h$  en  $\underline{h}$ . On pose  $\psi_G(g) = \beta g \beta^{-1}$  et  $u(\sigma) = \beta \sigma(\beta)^{-1}$ .

Dans les deux cas, il reste à choisir une orbite nilpotente régulière dans  $\mathfrak{g}(F)$ . Si  $d$  est impair ou  $d = 0$ , il n'y en a qu'une. Supposons  $d$  pair plus grand que 2. En 1.3, on a paramétré ces orbites par  $Ker(Tr_{E/F}) - \{0\}/N_{E/F}(E^\times)$ . Rappelons que l'on a fixé un élément  $\delta \in Ker(Tr_{E/F}) - \{0\}$  (en 1.1) et un élément  $\nu_0 \in F^\times$ . On choisit alors l'orbite paramétrée par l'élément  $\nu_0 \delta \in Ker(Tr_{E/F}) - \{0\}$ .

Ces données permettent de définir une correspondance entre classes de conjugaison stable semi-simples régulières de  $G(F)$  et les classes de conjugaison stable semi-simples  $G$ -régulières

de  $G_+(F) \times G_-(F)$ . Via les applications  $p_G^{st}, p_{G_+}^{st} \times p_{G_-}^{st}$ , une classe de conjugaison semi-simple stable  $(\xi_+, \xi_-) \in \Xi_{reg, d_+} \times \Xi_{reg, d_-}$  est  $G$ -régulière si et seulement si  $\xi_+ \sqcup \xi_- \in \Xi_{reg, d}$  et la classe de conjugaison stable  $\xi \in Im(p_G^{st})$  lui correspond si et seulement si  $\xi = \xi_+ \sqcup \xi_-$ . Soient  $y_+ \in G_{+, reg}(F)/stconj$ ,  $y_- \in G_{-, reg}(F)/stconj$  et  $y \in G_{reg}(F)/conj$ . Posons  $\xi_+ = p_{G_+}^{st}(y_+)$ ,  $\xi_- = p_{G_-}^{st}(y_-)$ ,  $\xi = p_G(y)$  et supposons que  $\xi = \xi_+ \sqcup \xi_-$ . Soit  $c \in C(\xi)$  qui paramètre la classe de conjugaison de  $y$ . On a alors

$$\Delta_{G_+ \times G_-, G}((y_+, y_-), y) = \Delta_{\mu_+, \mu_-, \nu_0}(\xi_+, \xi_-, c)$$

cf 1.10[W1], le  $\eta$  de cette référence vaut ici  $(-1)^{(d-2)/2} \delta \nu_0$  si  $d$  est pair,  $(-1)^{(d-3)/2} \nu_0$  si  $d$  est impair.

### 3.2 Changement de base pour les groupes unitaires

Soient  $U$  un  $E$ -espace vectoriel de dimension  $d$  et  $(V_+, h_+)$ ,  $(V_-, h_-)$  deux espaces hermitiens de dimension respectives  $d_+$  et  $d_-$ . Introduisons le groupe tordu  $(M, \tilde{M})$  associé à  $U$  comme en 2.2 et  $G_+$ ,  $G_-$  les groupes unitaires respectifs de  $(V_+, h_+)$ ,  $(V_-, h_-)$ . On fait les hypothèses suivantes :

- $G_+$  et  $G_-$  sont quasi-déployés ;
- $d_+ + d_- = d$ .

On peut alors considérer  $G_+ \times G_-$  comme un groupe endoscopique tordu de  $(M, \tilde{M})$ . Pour cela il faut fixer une donnée supplémentaire (cf [W1] 1.8) : deux caractères  $\mu_+$  et  $\mu_-$  de  $E^\times$  dont les restrictions à  $F^\times$  coïncident avec  $sgn_{E/F}^{d_-}$  et  $sgn_{E/F}^{d_+ + 1}$  respectivement (il faudrait aussi fixer un couple de nombres complexes  $(z_+, z_-)$  mais ce choix n'importe pas). La correspondance endoscopique, elle ne dépend pas du choix de ces caractères car la classe d'équivalence de la donnée endoscopique est bien définie. Elle dépend en revanche du choix d'un point base de  $\tilde{M}(F)$ . Pour cela, on fixe une base  $(u_j)_{j=1, \dots, d}$  de  $U$  et on prend pour point-base l'élément  $\theta_d \in \tilde{M}(F)$  défini par

$$\theta_d(u_j, u_k) = (-1)^k \delta^{d+1} \delta_{j, d+1-k}$$

On peut alors décrire la correspondance endoscopique à l'aide des espaces de paramètres de la façon suivante : une classe de conjugaison stable de  $G_+(F) \times G_-(F)$  paramétrée par  $(\xi_+, \xi_-) \in \Xi_{reg, d_+} \times \Xi_{reg, d_-}$  est  $\tilde{M}$ -régulière si  $\xi_+ \sqcup \xi_- \in \Xi_{reg, d}$  et de plus elle correspond à la classe de conjugaison stable  $\xi \in \Xi_{d, reg}$  de  $\tilde{M}(F)$  si et seulement si  $\xi = \xi_+ \sqcup \xi_-$ . Pour pouvoir définir des facteurs de transfert, il faut encore fixer une orbite nilpotente régulière dans  $\mathfrak{m}_{\theta_d}(F)$ . Si  $d$  est impair il n'y en a qu'une et si  $d$  est pair on choisit l'orbite contenant l'élément  $N$  défini par  $Nu_1 = 0$  et  $Nu_j = -u_{j-1}$  pour  $j = 2, \dots, d$ . Soient  $\tilde{x} \in \tilde{M}_{reg}(F)$  et  $y = (y_+, y_-) \in G_{+, reg}(F) \times G_{-, reg}(F)$  dont les classes de conjugaison stable se correspondent. La classe de conjugaison de  $\tilde{x}$  est paramétrée par  $\xi \in \Xi_{reg, d}$  et  $\gamma \in \Gamma(\xi)$  tandis que la classe de conjugaison stable de  $y$  est paramétrée par  $(\xi_+, \xi_-) \in \Xi_{d_+, reg} \times \Xi_{d_-, reg}$ . On a alors

$$\Delta(\tilde{x}, y) = \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi_+, \xi_-, \gamma)$$

cf [W1] 1.10, le  $\eta$  de cette référence vaut ici  $(-1)^d \delta^{d+1}$ .

## 4 Deux formules revisitées

### 4.1 Rappel : une formule pour la multiplicité

Soient  $(V, h)$  et  $(V', h')$  deux espaces hermitiens de dimensions respectives  $d$  et  $d'$ . Supposons  $d$  pair et  $d'$  impair. Notons  $G$  le groupe unitaire de  $(V, h)$  et  $G'$  le groupe unitaire de  $(V', h')$ . Posons  $r = (d - d' - 1)/2$  si  $d > d'$  et  $r = (d' - d - 1)/2$  si  $d' > d$ . On effectue l'hypothèse supplémentaire suivante :

- Si  $d > d'$ ,  $(V, h)$  est isomorphe à  $(V', h') \oplus (Z_{2r+1}, h_{2r+1, \nu_0})$  ;
- si  $d' > d$ ,  $(V', h')$  est isomorphe à  $(V, h) \oplus (Z_{2r+1}, h_{2r+1, -\nu_0})$ .

Fixons un tel isomorphisme, cela définit un plongement de  $G$  dans  $G'$  ou de  $G'$  dans  $G$  (suivant que  $d' > d$  ou  $d > d'$ ). Soient  $\sigma \in \text{Temp}(G)$  et  $\sigma' \in \text{Temp}(G')$ . on définit comme en [B1] section 4 une multiplicité  $m(\sigma, \sigma')$ . Rappelons en la définition. On suppose pour fixer les idées que  $d > d'$ . Rappelons que  $Z_{2r+1}$  admet une base  $(z_i)_{i=0, \pm 1, \dots, \pm r}$ . Soit  $P$  le sous-groupe parabolique de  $G$  qui préserve le drapeau de sous-espaces totalement isotropes suivant

$$Ez_r \subset Ez_r \oplus Ez_{r-1} \subset \dots \subset Ez_r \oplus \dots \oplus Ez_1$$

On a alors  $G' \subset P$ . Notons  $U$  le radical unipotent de  $P$ . On définit un caractère  $\xi$  de  $U(F)$  en posant

$$\xi(u) = \psi_E \left( \sum_{i=1}^r h(z_i, uz_{i-1}) \right)$$

pour tout  $u \in U(F)$ . La conjugaison par  $G'(F)$  stabilise  $\xi$ . Notons  $\text{Hom}_{G', \xi}(\sigma, \sigma'^{\vee})$  l'espace des applications linéaires  $\ell : E_{\sigma} \rightarrow E_{\sigma'^{\vee}}$  (où  $E_{\sigma}$  resp.  $E_{\sigma'^{\vee}}$  désignent les espaces des représentations  $\sigma$  et  $\sigma'^{\vee}$  resp.) vérifiant

$$\ell \circ \sigma(g'u) = \xi(u) \sigma'^{\vee}(g') \circ \ell$$

pour tous  $g' \in G'(F)$ ,  $u \in U(F)$ . On pose alors  $m(\sigma, \sigma') = \dim \text{Hom}_{G', \xi}(\sigma, \sigma'^{\vee})$ . D'après [AGRS] et [GGP], cette multiplicité vaut 0 ou 1. Remarquons que notre convention diffère ici de celle de [B1] : la multiplicité  $m(\sigma, \sigma')$  est celle notée  $m(\sigma, \sigma'^{\vee})$  dans [B1]. On a démontré en [B1](théorème 17.1.1) une formule calculant cette multiplicité. Explicitons la. Supposons encore pour fixer les idées que  $d > d'$ . Introduisons l'ensemble  $\underline{T}$  des sous-tores  $T$  de  $G'(F)$  vérifiant la condition suivante : il existe une décomposition orthogonale  $V' = V'_T \oplus W'_T$  telle que les groupes unitaires de  $V'_T$  et de  $V_T = V'_T \oplus Z_{2r+1}$  sont quasidéployés. Notons  $G'_T$  le groupe unitaire de  $W'_T$  que l'on identifie à un sous-groupe de  $G'$  en laissant agir un élément  $g \in G'_T$  par l'identité sur  $V'_T$ . Alors  $T$  doit être un sous-tore maximal anisotrope de  $G'_T$ . Remarquons que la décomposition orthogonale  $V' = V'_T \oplus W'_T$  associée à  $T$  est unique. Fixons un ensemble  $\mathcal{T}$  de représentants l'ensemble des classes de conjugaison par  $G'(F)$  dans  $\underline{T}$ . Soit  $T \in \mathcal{T}$  et notons  $G_{V'_T}, G_{V_T}$  les groupes unitaires de  $V'_T, V_T$  respectivement. Soit  $t \in T(F)$  en position générale. Alors on a  $G'_t = T \times G_{V'_T}$ . D'après Harish-Chandra, le caractère  $\Theta_{\sigma'}$  de la représentation  $\sigma'$  admet un développement local au voisinage de  $t$  de la forme

$$\Theta_{\sigma'}(\text{exp}(X)) = \sum_{\mathcal{O} \in \text{Nil}(\mathfrak{g}'_t(F))} c_{\sigma', \mathcal{O}}(t) \hat{j}(\mathcal{O}, X) \text{ pour } X \text{ proche de } 0 \text{ dans } \mathfrak{g}'_t(F)$$

Puisque  $G'_t = T \times G_{V'_T}$ , on a une identification naturelle  $\text{Nil}(\mathfrak{g}'_t(F)) = \text{Nil}(\mathfrak{g}_{V'_T})$ . On pose alors

$$c_{\sigma'}(t) = \frac{1}{|\text{Nil}(\mathfrak{g}_{V'_T})_{\text{reg}}|} \sum_{\mathcal{O} \in \text{Nil}(\mathfrak{g}_{V'_T})_{\text{reg}}} c_{\sigma', \mathcal{O}}(t)$$

De la même façon, on pose

$$c_{\sigma}(t) = \frac{1}{|\text{Nil}(\mathfrak{g}_{V_T})_{\text{reg}}|} \sum_{\mathcal{O} \in \text{Nil}(\mathfrak{g}_{V_T})_{\text{reg}}} c_{\sigma, \mathcal{O}}(t)$$

Posons

$$m_{\text{geom}}(\sigma, \sigma') = m_{\text{geom}}(\sigma', \sigma) = \sum_{T \in \mathcal{T}} |W(G'_T, T)|^{-1} \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{T(F)} c_{\sigma}(t) c_{\sigma'}(t) D^G(t)^{1/2} D^{G'}(t)^{1/2} \Delta(t)^{-1/2+s} dt$$

Cette expression a un sens et d'après le théorème 17.1.1 de [B1], on a l'égalité

$$(1) \quad m(\sigma, \sigma') = m_{\text{geom}}(\sigma, \sigma')$$

## 4.2 Reformulation de $m_{\text{geom}}(\sigma, \sigma')$

On conserve les notations et hypothèses de la section précédente sauf qu'on ne suppose plus  $d' < d$ . Notons  $\mathcal{D}(h, h')$  l'ensemble des entiers  $\underline{d} \in \mathbb{N}$  vérifiant les conditions suivantes :

1.  $0 \leq \underline{d} \leq \min(d, d')$  ;
2. si  $G$  ou  $G'$  n'est pas quasi-déployé,  $\underline{d} \geq 2$ .

Pour tout  $\underline{d} \in \mathcal{C}(h, h')$ , il existe un unique espace hermitien (à isomorphisme près)  $(V_{\underline{d}}, h_{\underline{d}})$  vérifiant les conditions suivantes :

- $\dim(V_{\underline{d}}) = \underline{d}$  ;
- Il existe deux espaces hermitiens  $(V_{\mathfrak{h}}, h_{\mathfrak{h}})$ ,  $(V'_{\mathfrak{h}}, h'_{\mathfrak{h}})$  dont les groupes unitaires sont quasi-déployés, tels que  $(V, h)$  soit isomorphe à  $(V_{\underline{d}}, h_{\underline{d}}) \oplus (V_{\mathfrak{h}}, h_{\mathfrak{h}})$  et  $(V', h')$  soit isomorphe à  $(V_{\underline{d}}, h_{\underline{d}}) \oplus (V'_{\mathfrak{h}}, h'_{\mathfrak{h}})$ .

Notons  $G_{\underline{d}}$  le groupe unitaire de  $(V_{\underline{d}}, h_{\underline{d}})$ . On peut choisir des isomorphismes  $(V, h) \simeq (V_{\underline{d}}, h_{\underline{d}}) \oplus (V_{\mathfrak{h}}, h_{\mathfrak{h}})$  et  $(V', h') \simeq (V_{\underline{d}}, h_{\underline{d}}) \oplus (V'_{\mathfrak{h}}, h'_{\mathfrak{h}})$  avec  $(V_{\mathfrak{h}}, h_{\mathfrak{h}})$ ,  $(V'_{\mathfrak{h}}, h'_{\mathfrak{h}})$  comme précédemment. Cela définit des plongements de  $G_{\underline{d}}$  dans  $G$  et  $G'$  bien définis à conjugaison près. Quitte à changer les isomorphismes, on peut toujours supposer que ces plongements sont compatibles avec le plongement de  $G$  dans  $G'$  ou de  $G'$  dans  $G$  (suivant que  $d' > d$  ou  $d > d'$ ). Pour

$x \in G_{\underline{d}}(F)_{ani}$ , l'image commune du tore  $G_{\underline{d},x}$  par ces deux plongements appartient à  $\underline{\mathcal{I}}$ . Puisque  $x \in G_{\underline{d},x}(F)$ , on peut définir les coefficients  $c_\sigma(x)$  et  $c_{\sigma'}(x)$ . Introduisons les espaces

$$\mathcal{C}(h, h') = \bigsqcup_{\underline{d} \in \mathcal{D}(h, h')} G_{\underline{d}}(F)_{ani} / conj$$

et

$$\Xi^*(h, h') = \bigsqcup_{\underline{d} \in \mathcal{D}(h, h')} \Xi_{reg, \underline{d}}^*$$

D'après 2.2,  $\mathcal{C}(h, h')$  est un revêtement de  $\Xi^*(h, h')$ . On a alors l'égalité

$$m_{geom}(\sigma, \sigma') = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{C}(h, h')} c_\sigma(x) c_{\sigma'}(x) D^d(x)^{1/2} D^{d'}(x)^{1/2} \Delta(x)^{-1/2+s} dx$$

### 4.3 Rappel : une formule pour un facteur epsilon de paire

Soient  $U$  et  $U'$  deux espaces vectoriels sur  $E$  de dimensions finies  $d$  et  $d'$ . On suppose que  $d$  est pair et que  $d'$  est impair. Posons  $M = R_{E/F}GL(U)$  et  $\tilde{M}$  la variété algébrique des formes sesquilinéaires non dégénérées sur  $U$ . Le couple  $(M, \tilde{M})$  est un groupe tordu. On introduit de même le groupe tordu  $(M', \tilde{M}')$  relatif à  $U'$ . On pose  $r = (d - d' - 1)/2$  si  $d > d'$  et  $r = (d' - d - 1)/2$  si  $d' > d$ . Si  $d > d'$ , on fixe un isomorphisme  $U \simeq U' \oplus Z_{2r+1}$ , si  $d' > d$ , on fixe un isomorphisme  $U' \simeq U \oplus Z_{2r+1}$ . Fixons (jusqu'à la fin de l'article) un élément  $\nu_1 \in F^\times$ . Si  $d > d'$ , on plonge  $\tilde{M}'$  dans  $\tilde{M}$  en identifiant toute forme sesquilinéaire  $\tilde{m}'$  sur  $U'$  à la somme directe de  $\tilde{m}'$  et de  $h_{2r+1, \nu_1}$  sur  $Z_{2r+1}$ . Si  $d' > d$ , on plonge  $\tilde{M}$  dans  $\tilde{M}'$  en identifiant toute forme sesquilinéaire  $\tilde{m}$  sur  $U$  à la somme directe de  $\tilde{m}$  et de  $h_{2r+1, -\nu_1}$  sur  $Z_{2r+1}$ .

Soient  $(\pi, E_\pi)$  et  $(\pi', E_{\pi'})$  des représentations irréductibles tempérées de  $M(F)$  et  $M'(F)$ . On suppose que  $\pi$  et  $\pi'$  se prolongent en des représentations unitaires de  $\tilde{M}(F)$  et  $\tilde{M}'(F)$ . C'est-à-dire que l'on peut trouver une application  $\tilde{\pi}$  de  $\tilde{M}(F)$  dans le groupe des automorphismes unitaires de  $E_\pi$  vérifiant  $\tilde{\pi}(m\tilde{m}m') = \pi(m)\tilde{\pi}(\tilde{m})\pi(m')$  pour tout  $\tilde{m} \in \tilde{M}(F)$  et pour tous  $m, m' \in M(F)$  (et de même pour  $\pi'$ ). On dira alors que  $\pi$  et  $\pi'$  sont conjuguées-duales. Ces prolongements ne sont uniques qu'à un facteur complexe de module 1 près. Néanmoins, il est possible de rendre le choix unique grâce à la théorie des fonctionnelles de Whittaker. Pour cela fixons une base  $u_1, \dots, u_d$  de  $U$  et identifions un élément de  $M$  à sa matrice dans cette base. Notons  $N$  le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures. On définit un caractère  $\psi_N$  de  $N(F)$  par la formule

$$\psi_N(n) = \psi_E\left(\sum_{i=1}^{d-1} n_{i, i+1}\right)$$

où pour  $n \in N(F)$ , on a noté  $n_{ij}$  les coefficients de la matrice associée. La théorie des fonctionnelles de Whittaker nous dit alors que l'espace  $Hom_{N(F)}(\pi, \psi_N)$  est de dimension 1. Si

$\tilde{\pi}$  est un prolongement de  $\pi$  à  $\tilde{M}(F)$ , l'application  $\ell \mapsto \ell \circ \tilde{\pi}(\theta_d)$  est un automorphisme de  $\text{Hom}_{N(F)}(\pi, \psi_N)$ . On normalise alors  $\tilde{\pi}$  de sorte que cet automorphisme soit l'identité. Un simple calcul de changement de base montre que ce prolongement ne dépend pas du choix de la base  $u_1, \dots, u_d$  (en revanche il dépend de  $\psi_E$ ). On normalise de la même façon  $\tilde{\pi}'$ .

On définit la quantité

$$\epsilon_{\nu_1}(\pi, \pi') = \epsilon_{\nu_1}(\pi', \pi) = \omega_{\pi}(\nu_1)\omega_{\pi'}(-\nu_1)\epsilon(1/2, \pi \times \pi', \psi_E^{\delta})$$

où  $\epsilon(s, \pi \times \pi', \psi_E^{\delta})$  est le facteur epsilon défini par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika ([JPPS]) et  $\psi_E^{\delta}$  est le caractère additif de  $E$  défini par  $\psi_E^{\delta}(x) = \psi_E(\delta x)$ . Le résultat principal de [B2] calcule ce terme par une formule intégrale. Rappelons cette formule. On suppose pour fixer les idées que  $d' > d$ . On introduit un ensemble de "sous-tores" tordu  $\underline{\mathcal{T}}$  de  $\tilde{M}$  de la façon suivante. Considérons une décomposition  $U = U_T \oplus W_T$ , une forme hermitienne non dégénérée  $\zeta_T$  sur  $U_T$  et un tore maximal  $(T, \tilde{T})$  du groupe tordu  $(M_T, \tilde{M}_T)$  associé à  $W_T$ . On suppose que les formes hermitiennes  $\zeta_T$  et  $\zeta_T \oplus h_{2r+1, -\nu_1}$  ont leurs groupes unitaires quasi-déployés et que  $\tilde{T}$  est anisotrope (i.e.  $A_{\tilde{T}} = \{1\}$ ). On plonge  $\tilde{T}$  dans  $\tilde{M}$  en identifiant tout  $\tilde{t} \in \tilde{T}$  à la somme directe  $\tilde{t} \oplus \zeta_T$  et on note encore  $\tilde{T}$  l'image de ce plongement. On désigne alors par  $\underline{\mathcal{T}}$  l'ensemble des "sous-tores"  $\tilde{T}$  de  $\tilde{M}$  obtenus de cette façon. Pour un élément  $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}$ , les sous-espaces  $U_T, W_T$ , la forme hermitienne  $\zeta_T$  et le tore tordu  $(T, \tilde{T})$  sont uniquement déterminés. Soit  $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}$ . On identifie  $T$  à un sous-tore de  $M$  en laissant agir un élément  $t \in T(F)$  par l'identité sur  $U_T$ . La conjugaison par  $\tilde{T} \subset \tilde{M}$  conserve  $T$  et l'action ainsi définie est la même pour tous les éléments de  $\tilde{T}$ , on la note  $\theta$ . On désignera par  $T^{\theta}$  le sous-groupe de  $T$  des éléments fixes par  $\theta$  et  $T_{\theta}$  la composante neutre de  $T^{\theta}$ . On note  $\tilde{T}(F)/\theta$  l'espace des classes de conjugaison dans  $\tilde{T}(F)$  par  $T(F)$ . On peut munir cet espace d'une unique mesure de sorte que pour tout  $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)/\theta$ , l'application  $T_{\theta}(F) \rightarrow \tilde{T}(F)/\theta, t \mapsto t\tilde{t}$  préserve localement les mesures. Le normalisateur de  $\tilde{T}$  dans  $M(F)$  contient  $T(F) \times U(\zeta_T)(F)$  comme sous-groupe d'indice fini. On pose

$$W(M, \tilde{T}) = \text{Norm}_{M(F)}(\tilde{T})/T(F) \times U(\zeta_T)(F)$$

Les représentations  $\tilde{\pi}$  et  $\tilde{\pi}'$  admettent des caractères pour lesquels on a les mêmes développements locaux que dans le cas non tordu (cf [C]). En recopiant les définitions du paragraphe 4.1, on obtient des fonctions  $c_{\tilde{\pi}}$  et  $c_{\tilde{\pi}'}$  définies presque partout sur  $\tilde{T}(F)$  lesquelles sont invariantes par conjugaison par  $T(F)$ . Fixons un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans  $\underline{\mathcal{T}}$  par  $M(F)$ . On pose alors

$$\epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') = \sum_{\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}} |2|_F^{\dim(W_T) - (d+d')/2} |W(M, \tilde{T})|^{-1} \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\tilde{T}(F)/\theta} c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) c_{\tilde{\pi}'}(\tilde{t}) D^{\tilde{M}}(\tilde{t})^{1/2} D^{\tilde{M}'}(\tilde{t})^{1/2} \Delta(\tilde{t})^{s-1/2} d\tilde{t}$$

Cette expression a un sens et le théorème 6.1.1 de [B2], on a l'égalité

$$(1) \quad \epsilon_{\nu_1}(\pi, \pi') = \epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}')$$

#### 4.4 Reformulation de $\epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}')$

On conserve la situation de la section précédente, sauf que l'on ne suppose plus  $d < d'$ . Soit  $\underline{d}$  un entier naturel vérifiant  $\underline{d} \leq \min(d, d')$ . Fixons un  $E$ -espace vectoriel  $W_{\underline{d}}$  de dimension  $\underline{d}$  et des identifications  $U = U_{\underline{d}} \oplus W_{\underline{d}}$ ,  $U' = U'_{\underline{d}} \oplus W_{\underline{d}}$ . On peut toujours faire ces identifications de sorte que si  $d < d'$ ,  $U'_{\underline{d}} = U_{\underline{d}} \oplus Z_{2r+1}$  et si  $d > d'$ ,  $U_{\underline{d}} = U'_{\underline{d}} \oplus Z_{2r+1}$ . On suppose que c'est le cas. On peut alors trouver des formes hermitiennes non dégénérées  $h_{\underline{d}}$  sur  $U_{\underline{d}}$  et  $h'_{\underline{d}}$  sur  $U'_{\underline{d}}$  vérifiant les conditions suivantes :

Les groupes unitaires de  $h_{\underline{d}}$  et  $h'_{\underline{d}}$  sont quasi-déployés et si  $d < d'$ ,  $h'_{\underline{d}}$  est égale à  $h_{\underline{d}} \oplus h_{2r+1, -\nu_1}$ , si  $d > d'$ ,  $h_{\underline{d}}$  est égale à  $h'_{\underline{d}} \oplus h_{2r+1, \nu_1}$ .

(Rappelons que  $h_{2r+1, \pm\nu_1}$  sont des formes hermitiennes non dégénérées sur  $Z_{2r+1}$ ). On fixe de telles formes. Notons  $(M_{\underline{d}}, \tilde{M}_{\underline{d}})$  le groupe tordu associé à  $W_{\underline{d}}$ . On plonge  $\tilde{M}_{\underline{d}}$  dans  $\tilde{M}$  en identifiant  $\tilde{x} \in \tilde{M}_{\underline{d}}$  à la somme directe de  $\tilde{x}$  et de  $h_{\underline{d}}$ . On plonge de même  $\tilde{M}_{\underline{d}}$  dans  $\tilde{M}'$ . Ces plongements sont alors compatibles avec le plongement de  $\tilde{M}$  dans  $\tilde{M}'$  ou de  $\tilde{M}'$  dans  $\tilde{M}$  (suivant que  $d < d'$  ou  $d > d'$ ). Alors si  $\tilde{T}_{\underline{d}}$  est un tore maximal anisotrope de  $\tilde{M}_{\underline{d}}$  défini sur  $F$ , son image commune par chacun de ces plongements appartient à  $\underline{T}$ . Ceci permet de définir  $c_{\tilde{\pi}}(\tilde{x})$  et  $c_{\tilde{\pi}'}(\tilde{x})$  pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{M}_{\underline{d}}(F)_{ani}$ . On définit de même les termes  $D^{\tilde{M}}(\tilde{x})$  et  $D^{\tilde{M}'}(\tilde{x})$ . Introduisons l'espace

$$\mathcal{X}(d, d') = \bigsqcup_{\underline{d} \leq \min(d, d')} \tilde{M}_{\underline{d}}(F)_{ani} / conj$$

Cet espace est muni d'une mesure d'après 1.2. Alors, on a

$$\epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{X}(d, d')} |2|_F^{d-(d+d')/2} c_{\tilde{\pi}}(\tilde{x}) c_{\tilde{\pi}'}(\tilde{x}) D^{\tilde{M}}(\tilde{x})^{1/2} D^{\tilde{M}'}(\tilde{x})^{1/2} \Delta(\tilde{x})^{-1/2+s} d\tilde{x}$$

## 5 Modèles de Whittaker pour un groupe unitaire de dimension paire

Soit  $(V, h)$  un espace hermitien de dimension  $d$ . Notons  $G$  son groupe unitaire. Dans toute cette section on fait l'hypothèse suivante

$G$  est quasi-déployé et  $d$  est pair

En 1.3, on a paramétré les orbites nilpotentes régulières de  $\mathfrak{g}(F)$  par  $(\text{Ker} \text{Tr}_{E/F} \setminus \{0\}) / N(E^\times)$ . Le choix d'un caractère continu de  $F$  (on en a fixé un  $\psi$ ) et d'une dualité  $\mathfrak{g}(F) \times \mathfrak{g}(F) \rightarrow F$ ,  $G$ -invariante (on en a fixé une en 1.3) déterminent alors un paramétrage analogue des types de modèles de Whittaker pour  $G$ . Ce paramétrage est décrit explicitement en 5.2. On rappelle alors un résultat de Rodier exprimant l'existence ou non d'un type de modèle de Whittaker

pour une représentation irréductible  $\sigma$  en fonction de son caractère (ou plutôt du comportement au voisinage de l'origine de ce dernier). Le lemme 5.5.1 donne une façon explicite de calculer le coefficient qui apparaît dans la formule de Rodier. Pour arriver à cette proposition, qui ne dépend d'aucune mesure, on a besoin de changer un peu nos normalisations (notamment les mesures sur les tores). Ces changements, ainsi qu'un certain nombre de notations et résultats utiles, sont introduits dans le paragraphe suivant.

## 5.1 Intégrales orbitales, transformée de Fourier, mesures et constantes de Weil

Rappelons que l'on a fixé en 1.3 une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathfrak{g}(F)$ . On en a alors déduit une mesure sur  $\mathfrak{g}(F)$  : celle qui est autoduale pour le bicalectère  $\psi(\langle \cdot, \cdot \rangle) : \mathfrak{g}(F) \times \mathfrak{g}(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Jusqu'à présent, la mesure fixée sur  $G(F)$  était inessentielle. Dans cette section, on choisit sur  $G(F)$  l'unique mesure de Haar telle que l'exponentielle préserve localement les mesures à l'origine.

Soit  $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ . Alors  $G_X$  est un tore et la restriction de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $\mathfrak{g}_X(F)$  est non dégénérée. On munit alors  $\mathfrak{g}_X(F)$  de la mesure autoduale associée. On a déjà fixé en 1.2 une mesure sur les tores. On oublie jusqu'en 5.5 cette normalisation et on relève sur  $G_X(F)$  la mesure de  $\mathfrak{g}_X(F)$  via l'exponentielle (comme pour  $G(F)$ ). Avec cette normalisation des mesures, on pose

$$J_G(X, f) = \int_{G_X(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}Xg)dg$$

pour tout  $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ . C'est l'intégrale orbitale de  $f$  en  $X$ . D'après Harish-Chandra, il existe une fonction  $\hat{j}$  localement intégrable sur  $\mathfrak{g}(F) \times \mathfrak{g}(F)$ , localement constante sur  $\mathfrak{g}_{reg}(F) \times \mathfrak{g}_{reg}(F)$ , telle que, pour toute  $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$  et tout  $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ , on ait l'égalité :

$$J_G(X, \hat{f}) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\hat{j}(X, Y)dY$$

Lorsque l'on voudra préciser le groupe ambiant, on notera  $\hat{j}^G(\cdot, \cdot)$  plutôt que  $\hat{j}(\cdot, \cdot)$ . Pour  $\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))$ , il existe une unique fonction  $\Gamma_{\mathcal{O}}$  sur  $\mathfrak{g}_{reg}(F)$ , le germe de Shalika associé à  $\mathcal{O}$ , qui vérifie les conditions suivantes. La première est une condition d'homogénéité : pour tout  $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$  et pour tout  $\lambda \in F^\times$ , on a

$$\Gamma_{\mathcal{O}}(\lambda X) = |\lambda|_F^{(\delta(G) - \dim(\mathcal{O}))/2} \Gamma_{\lambda\mathcal{O}}(X)$$

(rappelons que pour  $\lambda \in F^{\times, 2}$ , on a  $\lambda\mathcal{O} = \mathcal{O}$ ). La deuxième condition est la suivante : pour tout  $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$  il existe un voisinage  $\omega$  de 0 tel que pour tout  $X \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$ , on ait

$$J_G(X, f) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) J_{\mathcal{O}}(f)$$

D'après la "conjecture de Howe", si  $\omega$  est un ouvert de  $\mathfrak{g}(F)$  compact modulo conjugaison et contenant 0, alors il existe un ouvert  $\Omega$  de  $\mathfrak{g}(F)$  compact modulo conjugaison et contenant 0 tel que, pour tout  $X \in \Omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$  et tout  $Y \in \omega \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$ , on ait l'égalité

$$(1) \quad \hat{j}(X, Y) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) \hat{j}(\mathcal{O}, Y)$$

On aura encore besoin d'une formule sur les fonctions  $\hat{j}$ . Soit  $M$  un Levi de  $G$ . Alors la restriction de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $\mathfrak{m}(F)$  est non dégénérée. On peut donc appliquer toutes les constructions précédentes à  $M$  au lieu de  $G$ . En particulier, on dispose de fonctions  $\hat{j}^M : \mathfrak{m}(F) \times \mathfrak{m}(F) \rightarrow \mathbb{C}$ . Soient  $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$  et  $Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ . Fixons un ensemble de représentants  $(Y_i)_{i=1, \dots, r}$  des classes de conjugaison par  $M(F)$  dans  $\mathfrak{m}(F)$  qui rencontrent la classe de conjugaison de  $Y$  par  $G(F)$ . On a alors l'égalité

$$(2) \quad \hat{j}^G(X, Y) D^G(Y)^{1/2} = \sum_{i=1}^r \hat{j}^M(X, Y_i) D^M(Y_i)^{1/2}$$

On vérifie aussi que si  $M$  est un tore, alors  $\hat{j}^M(X, Y) = \psi(\langle X, Y \rangle)$  pour tous  $X, Y \in \mathfrak{m}(F)$ .

Soit  $(\mathcal{V}, q)$  un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique  $q$ . Pour  $L$  un réseau de  $\mathcal{V}$ , on pose

$$I_\psi(L, q) = \int_L \psi(q(v, v)/2) dv$$

Alors pour  $L$  assez grand,  $I_\psi(L, q)/|I_\psi(L, q)|$  ne dépend pas de  $L$ , on note sa valeur  $\gamma_\psi(q)$ . C'est la constante de Weil de  $q$  pour le caractère  $\psi$ . On vérifie facilement les propriétés suivants

- $\gamma_\psi(q \oplus q') = \gamma_\psi(q) \gamma_\psi(q')$  pour toutes formes quadratiques  $q, q'$  ;
- Si  $(V, q)$  est un plan hyperbolique,  $\gamma_\psi(q) = 1$  ;
- $\gamma_\psi(q)^{-1} = \gamma_\psi(-q)$  ;
- $\gamma_\psi(q)$  est une racine 8ème de l'unité.

En particulier, on note  $\gamma_\psi(N_{E/F})$  la constante de Weil associée à la forme quadratique  $(x, y) \mapsto \frac{1}{2} Tr_{E/F}(x\bar{y})$  sur  $E$ . On a alors

$$\gamma_\psi(\lambda N_{E/F}) = sgn_{E/F}(\lambda) \gamma_\psi(N_{E/F})$$

pour tout  $\lambda \in F^\times$ .

## 5.2 Types de modèles de Whittaker

Fixons une base  $(z_i)_{i=\pm 1, \dots, \pm r}$  telle que  $h(z_i, z_j) = \delta_{i, -j}$ . Introduisons le sous-groupe parabolique  $P_0$  de  $G$  des éléments qui conservent le drapeau

$$Ez_r \subset Ez_r \oplus Ez_{r-1} \subset \dots \subset Ez_r \oplus \dots \oplus Ez_1$$

et notons  $U_0$  son radical unipotent. Soit  $\eta \in E^\times$  tel que  $Tr_{E/F}(\eta) = 0$ . On définit un caractère  $\theta_\eta$  de  $U(F)$  par la formule suivante

$$\theta_\eta(u) = \psi \left( \sum_{i=1}^{r-1} Tr_{E/F}(h(z_{-i-1}, uz_i)) + 2Tr_{E/F}(\eta h(z_{-1}, uz_{-1})) \right)$$

Définissons un élément  $N^- \in \mathfrak{g}(F)$  par  $N^- z_i = z_{i-1}$  pour  $i = 2, \dots, r$ ,  $N^- z_1 = \eta z_{-1}$ ,  $N^- z_{-i} = z_{-i-1}$  pour  $i = 1, \dots, r-1$  et  $N z_{-r} = 0$ . Notons  $\overline{U}_0$  le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à  $P_0$ . On a alors  $N^- \in \overline{\mathfrak{u}}_0(F)$  et  $\theta_\eta(e^N) = \psi(\langle N, N^- \rangle)$  pour tout  $N \in \mathfrak{u}_0(F)$ .

Soit  $\sigma \in Temp(G)$ . On appelle fonctionnelle de Whittaker pour  $\sigma$  relativement à  $\eta$  toute forme linéaire

$$\ell : E_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant  $\ell \circ \sigma(u) = \theta_\eta(u)\ell$  pour tout  $u \in U_0(F)$ . On note  $Hom_{U_0}(\sigma, \theta_\eta)$  l'espace des fonctionnelles de Whittaker relativement à  $\sigma$ . Comme on le sait bien, cette espace est de dimension au plus 1. Posons

$$m(\sigma, \eta) = \dim(Hom_{U_0}(\sigma, \theta_\eta))$$

Rappelons que l'on a un développement de  $\Theta_\sigma$  au voisinage de l'origine de la forme

$$\Theta_\sigma(e^X) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g}(F))} c_{\sigma, \mathcal{O}}(1) \hat{j}(\mathcal{O}, X)$$

pour tout  $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$  assez proche de 0 et où les  $c_{\sigma, \mathcal{O}}(1)$  sont des nombres complexes. D'après un résultat de Rodier ([Ro]), on a

$$(1) \quad m(\sigma, \eta) = c_{\sigma, \mathcal{O}_\eta}(1)$$

On se propose dans les paragraphes qui suivent de trouver une méthode effective de calcul de ce coefficient.

### 5.3 Calcul de germes de Shalika

Soient  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  défini sur  $F$  et  $T_{qd}$  un sous-tore maximal de  $B$ . On fixe un élément  $X_{qd} \in \mathfrak{t}_{qd}(F) \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$ .

Choisissons deux éléments  $\nu_+, \nu_- \in F^\times$  tels que  $sgn_{E/F}(\nu_\pm) = \pm 1$ . Soit  $Z_0$  un sous-espace de  $V$  somme orthogonale de  $(d-2)/2$  plans hyperboliques. Pour  $\epsilon \in \{\pm\}$ , on peut toujours trouver une décomposition orthogonale  $V = D_+^\epsilon \oplus^\perp D_-^\epsilon \oplus^\perp Z_0$  où

- $D_+^\epsilon$  et  $D_-^\epsilon$  sont des droites;
- la restriction de  $h$  à  $D_+^\epsilon$  est équivalente à  $\nu_\epsilon N_{E/F}$  et la restriction de  $h$  à  $D_-^\epsilon$  est équivalente à  $-\nu_\epsilon N_{E/F}$ .

Fixons de telles décompositions. On note  $G_0 = U(Z_0)$ , c'est un groupe unitaire quasi-déployé. Soit  $T_{0,qd}$  un tore maximal de  $G_0$  inclus dans un sous-groupe de Borel. Fixons un élément  $X_{0,qd}$  de  $\mathfrak{t}_{0,qd}(F) \cap \mathfrak{g}_{0,reg}(F)$  et deux éléments distincts  $a_1, a_2 \in Ker(Tr_{E/F})$  qui ne sont pas valeurs propres de  $X_{0,qd}$ . Notons  $X^\epsilon \in \mathfrak{g}(F)$  l'élément ainsi défini :  $X^\epsilon$  agit par multiplication par  $a_1$  sur  $D_+^\epsilon$ , par multiplication par  $a_2$  sur  $D_-^\epsilon$  et comme  $X_{0,qd}$  sur  $Z_0$ . On a alors  $X^\epsilon \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ .

**Lemme 5.3.1** *Pour  $\eta \in Ker(Tr_{E/F}) \setminus \{0\}$ , on a*

1.

$$\Gamma_{\mathcal{O}_\eta}(X_{qd}) = 1$$

2.

$$\Gamma_{\mathcal{O}_\eta}(X^+) - \Gamma_{\mathcal{O}_\eta}(X^-) = sgn_{E/F}((a_1 - a_2)\eta)$$

Preuve : Fixons  $\eta \in Ker(Tr_{E/F}) \setminus \{0\}$ . La première assertion de l'énoncé est le lemme 9.3.1 de [B1]. Pour  $\epsilon \in \{\pm\}$ , notons  $T^\epsilon$  le tore maximal de  $G$  tel que  $X^\epsilon \in \mathfrak{t}^\epsilon(F)$ . D'après Shelstad ([Sh]),  $\Gamma_{\mathcal{O}_\eta}(X^\epsilon)$  vaut 1 ou 0 suivant qu'un certain invariant vaut 1 ou non. Soit  $N \in \mathcal{O}_\eta$ . Cet invariant est noté  $inv(X^\epsilon)inv(T^\epsilon)/inv(N)$  par Shelstad, c'est un élément de  $H^1(F, T^\epsilon)$ . On a une identification naturelle  $H^1(F, T^\epsilon) = \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$  (correspondant à l'identification naturelle  $T^\epsilon = Ker(N_{E/F}) \times Ker(N_{E/F}) \times (R_{E/F}\mathbb{G}_m)^{(d-2)/2}$ ). Les invariants  $inv(X^\epsilon)inv(T^\epsilon)$  et  $inv(N)$  dépendent chacun du choix d'un épinglage à conjugaison près, ces épinglages devant être opposés l'un à l'autre. Le choix d'un épinglage à conjugaison près revient au choix d'une orbite nilpotente régulière, donc au choix d'un élément de  $Ker(Tr_{E/F}) \setminus \{0\}/N_{E/F}(E^\times)$  via la paramétrisation 1.3. Deux épinglages  $\eta_0, \eta_1 \in Ker(Tr_{E/F}) \setminus \{0\}/N_{E/F}(E^\times)$  sont opposés si  $\eta_0 = -\eta_1$ . Le lemme X.7 de [W2] calcule l'invariant  $inv(X^\epsilon)inv(T^\epsilon)$  pour le choix d'un épinglage  $\eta_0$  (le  $\eta$  de cet référence vaut alors  $(-1)^{d/2}2\eta_0$ ) :

$$inv(X^\epsilon)inv(T^\epsilon) = (\epsilon sgn_{E/F}((-1)^{d/2}\eta_0 P'_{X^\epsilon}(a_1)), \epsilon sgn_{E/F}((-1)^{(d-2)/2}\eta_0 P'_{X^\epsilon}(a_2)))$$

où  $P_{X^\epsilon}$  désigne le polynôme caractéristique de  $X^\epsilon$  agissant sur  $V$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, -\bar{\lambda}_1, \dots, -\bar{\lambda}_r$ , où  $r = (d-2)/2$ , les valeurs propres de  $X_{0,qd}$  agissant sur  $V_0$ . On a alors

$$P'_{X^\epsilon}(a_1) = (a_1 - a_2) \times \prod_{i=1}^r (a_1 - \lambda_i)(a_1 + \bar{\lambda}_i)$$

La norme de  $(a_1 - \lambda_i)$  est égale à  $-(a_1 - \lambda_i)(a_1 + \bar{\lambda}_i)$ . On en déduit que  $P'_{X^\epsilon}(a_1) \in (-1)^{(d-2)/2}(a_1 - a_2)N_{E/F}(E^\times)$ . De la même façon, on a  $P'_{X^\epsilon}(a_2) \in (-1)^{d/2}(a_1 - a_2)N_{E/F}(E^\times)$ . Par conséquent

$$inv(X^\epsilon)inv(T^\epsilon) = (\epsilon sgn_{E/F}(-\eta_0(a_1 - a_2)), \epsilon sgn_{E/F}(-\eta_0(a_1 - a_2)))$$

Passons au calcul de  $inv(N)$ . On considère donc, comme on l'a dit, l'épinglage défini par  $-\eta_0$ . Au choix de cet épinglage est associé, suivant la construction de [Sh], un élément

de  $H^1(F, Z(G))$  que l'on voit dans  $H^1(F, T^\epsilon)$  via l'application naturelle  $H^1(F, Z(G)) \rightarrow H^1(F, T^\epsilon)$ . On a  $H^1(F, Z(G)) = \{\pm 1\}$  et l'application précédente est l'application diagonale. La construction de Shelstad n'est pas difficile à expliciter ici : on a  $inv(N) = 1$  si  $\eta \in -\eta_0 N_{E/F}(E^\times)$ ,  $-1$  sinon. En d'autres termes, on a  $inv(N) = (sgn_{E/F}(-\eta_0/\eta), sgn_{E/F}(-\eta_0/\eta'))$ . Finalement, on obtient que

$$\Gamma_{\mathcal{O}_\eta}(X^\epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } sgn_{E/F}(\eta(a_1 - a_2)) = \epsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On retrouve alors facilement la deuxième égalité de l'énoncé ■

## 5.4 Calcul de fonctions $\hat{j}^G$

**Lemme 5.4.1** *Pour  $\eta \in Ker(Tr_{E/F}) \setminus \{0\}$ , on a*

1.

$$\hat{j}^G(\mathcal{O}_\eta, X_{qd}) = \frac{w(d)}{2} D^G(X_{qd})^{-1/2}$$

2.

$$\hat{j}^G(\mathcal{O}_\eta, X^\epsilon) = \epsilon d^{-1} w(d) \gamma_\psi(N_{E/F}) sgn_{E/F}(2(a_2 - a_1)\eta) D^G(X^\epsilon)^{-1/2}$$

pour tout  $\epsilon \in \{\pm\}$ .

Preuve : La première égalité est le lemme 18.2.1 de [B1]. Soient  $X, Y \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$ . D'après 5.1(1), pour  $\lambda \in F^\times$  assez proche de 0, on a

$$\hat{j}^G(\lambda X, Y) = \sum_{\mathcal{O} \in Nil(\mathfrak{g})} \Gamma_{\mathcal{O}}(\lambda X) \hat{j}^G(\mathcal{O}, Y)$$

D'après les propriétés d'homogénéité des germes de Shalika, on a aussi

$$\lim_{\substack{\lambda \in F^{\times, 2} \\ \lambda \rightarrow 0}} \Gamma_{\mathcal{O}}(\lambda X) = \begin{cases} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) & \text{si } \mathcal{O} \text{ est régulière} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{\lambda \in F^{\times, 2} \\ \lambda \rightarrow 0}} \hat{j}^G(\lambda X, Y) = \sum_{\eta} \Gamma_{\mathcal{O}_\eta}(X) \hat{j}^G(\mathcal{O}_\eta, Y)$$

où la somme porte sur  $Ker(Tr_{E/F}) \setminus \{0\} / N(E^\times)$ . Appliquons l'égalité précédente à  $Y = X^\epsilon$  et  $X = X^+, X^-$  et  $X_{qd}$ . D'après le lemme 5.3.1, on a

$$(1) \hat{j}^G(\mathcal{O}_\eta, X^\epsilon) = \frac{1}{2} \lim_{\substack{\lambda \in F^{\times, 2} \\ \lambda \rightarrow 0}} \left( \hat{j}^G(\lambda X_{qd}, X^\epsilon) + sgn_{E/F}((a_1 - a_2)\eta) (\hat{j}^G(\lambda X^+, X^\epsilon) - \hat{j}^G(\lambda X^-, X^\epsilon)) \right)$$

pour tout  $\epsilon \in \{\pm\}$ . Soient  $\epsilon \in \{\pm\}$  et  $\lambda \in F^{\times, 2}$ . La classe de conjugaison de  $X^+$  ne rencontre pas  $\mathfrak{t}_{qd}(F)$ . Par conséquent, d'après 5.1(2), on a  $\hat{j}^G(\lambda X_{qd}, X^\epsilon) = 0$ . Il ne reste plus qu'à

calculer  $\hat{j}^G(\lambda X^+, X^\epsilon) - \hat{j}^G(\lambda X^-, X^\epsilon)$ .

Supposons dans un premier temps que  $d = 2$ . Posons  $G_1 = G_2 = U(1)$ . Alors,  $H = G_1 \times G_2$  est un groupe endoscopique de  $G$ . Pour la correspondance endoscopique associée,  $X^+$  et  $X^-$  correspondent aux classes de conjugaison stable de  $Y_1 = (a_1, a_2)$  et  $Y_2 = (a_2, a_1)$ . On peut normaliser les facteurs de transfert de sorte que

$$\Delta_{G,H}(Y_i, X^\epsilon) = \epsilon$$

pour tout  $i \in \{1, 2\}$  et pour tout  $\epsilon \in \{\pm\}$ . Grâce à Ngô Bau Chau, la conjecture 1.2 de [W3] est maintenant un théorème. La fonction  $\hat{j}^G(X, Z)$  de cette référence vaut  $D^G(Z)^{1/2} \hat{j}^G(X, Z)$ . Appliquée à  $Y = \lambda Y_1$  et  $Z = X^\epsilon$  la conjecture 1.2 de [W3] nous donne

$$(2) \quad \gamma_\psi(\mathfrak{g}) D^G(X^\epsilon)^{1/2} (\Delta_{G,H}(\lambda Y_1, \lambda X^+) \hat{j}^G(\lambda X^+, X^\epsilon) + \Delta_{G,H}(\lambda Y_1, \lambda X^-) \hat{j}^G(\lambda X^-, X^\epsilon)) \\ = \epsilon \gamma_\psi(\mathfrak{h}) (\hat{j}^H(\lambda Y_1, Y_1) + \hat{j}^H(\lambda Y_1, Y_2))$$

où  $\gamma_\psi(\mathfrak{g})$ , resp.  $\gamma_\psi(\mathfrak{h})$ , désigne la constante de Weil associée à  $\psi$  et à la forme quadratique  $X \mapsto \frac{1}{2} \text{Tr}_{E/F}(\text{Tr}(X^2))$  sur  $\mathfrak{g}$ , resp. la forme quadratique  $(X_1, X_2) \mapsto \frac{1}{2} \text{Tr}_{E/F}(\text{Tr}(X_1^2) + \text{Tr}(X_2^2))$  sur  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ . On a  $\Delta_{G,H}(\lambda Y_1, \lambda X^+) = \Delta_{G,H}(Y_1, X^+) = 1$  et  $\Delta_{G,H}(\lambda Y_1, \lambda X^-) = \Delta_{G,H}(Y_1, X^-) = -1$ . Puisque  $H$  est un tore, on a  $\hat{j}^H(\lambda Y_1, Y_1) = \hat{j}^H(\lambda Y_1, Y_2) = 1$  pour  $\lambda$  assez petit. Par conséquent, (2) devient

$$\hat{j}^G(\lambda X^+, X^\epsilon) - \hat{j}^G(\lambda X^-, X^\epsilon) = 2\epsilon \frac{\gamma_\psi(\mathfrak{h})}{\gamma_\psi(\mathfrak{g})} D^G(X^\epsilon)^{-1/2}$$

pour  $\lambda \in F^{\times,2}$  assez petit. Soit  $\xi \in F^\times$  tel que  $E = F[\xi]$ . La forme quadratique sur  $\mathfrak{g}$  est équivalente à la somme orthogonale d'un plan hyperbolique et de  $(x, y) \mapsto 2x^2 + 2\xi y^2$ . La forme quadratique sur  $\mathfrak{h}$  est équivalente à  $(x, y) \mapsto \xi x^2 + \xi y^2$ . La différence de ces deux formes quadratiques est équivalente à la somme d'un plan hyperbolique et de la forme  $-2N_{E/F}$ . On a donc

$$\frac{\gamma_\psi(\mathfrak{h})}{\gamma_\psi(\mathfrak{g})} = \gamma_\psi(-2N_{E/F}) = \text{sgn}_{E/F}(-2) \gamma_\psi(N_{E/F})$$

On obtient finalement

$$\hat{j}^G(\lambda X^+, X^\epsilon) - \hat{j}^G(\lambda X^-, X^\epsilon) = 2 \text{sgn}_{E/F}(-2) \gamma_\psi(N_{E/F}) D^G(X^\epsilon)^{-1/2}$$

pour  $\lambda \in F^{\times,2}$  assez petit.

Revenons au cas général. Rappelons que pour définir  $X^+$ , on a fixé trois espaces orthogonaux  $D_+$ ,  $D_-$  et  $Z_0$ . Soient  $G'$  le groupe unitaire de  $D_+ \oplus D_-$  et  $T_{0,qd}$  le tore maximal de  $G_0 = U(Z_0)$  que l'on a fixé pour définir  $X^+$  et  $X^-$ . Alors  $M = G' \times T_{0,qd}$  est un Levi de  $G$  auquel appartient  $X^+$  et  $X^-$ . Soit  $X'^+$  (resp.  $X'^-$ ) la projection de  $X^+$  (resp.  $X^-$ ) sur  $\mathfrak{g}'$ . Alors la classe de conjugaison de  $X^\epsilon$  rencontre  $2^{d/2-1}(d/2-1)!$  classes de conjugaisons

de  $\mathfrak{m}(F)$  et la projection de chacune de ces classes de conjugaison sur  $\mathfrak{g}'(F)$  coïncide avec la classe de conjugaison de  $X'^\epsilon$ . D'après 5.1(2), on en déduit que, pour  $\lambda$  assez petit,

$$\hat{j}^G(\lambda X^+, X^\epsilon) = 2^{d/2-1}(d/2-1)! \hat{j}^{G'}(\lambda X'^+, X'^\epsilon) D^{G'}(X'^\epsilon)^{1/2} D^G(X^\epsilon)^{-1/2}$$

et

$$\hat{j}^G(\lambda X^-, X^\epsilon) = 2^{d/2-1}(d/2-1)! \hat{j}^{G'}(\lambda X'^-, X'^\epsilon) D^{G'}(X'^\epsilon)^{1/2} D^G(X^\epsilon)^{-1/2}$$

D'après le résultat obtenu dans le cas  $d = 2$ , on a donc

$$\begin{aligned} \hat{j}^G(\lambda X^+, X^\epsilon) - \hat{j}^G(\lambda X^-, X^\epsilon) &= 2^{d/2-1}(d/2-1)! (\hat{j}^{G'}(\lambda X'^+, X'^\epsilon) - \hat{j}^{G'}(\lambda X'^-, X'^\epsilon)) D^{G'}(X'^\epsilon)^{1/2} D^G(X^\epsilon)^{-1/2} \\ &= \epsilon 2^{d/2}(d/2-1)! \text{sgn}_{E/F}(-2) \gamma_\psi(N_{E/F}) D^G(X^\epsilon)^{-1/2} \end{aligned}$$

pour tout  $\lambda \in F^{\times,2}$  assez petit. Réinjectant dans (1), on obtient

$$\hat{j}^G(\mathcal{O}_\eta, X^\epsilon) = \epsilon 2^{d/2-1}(d/2-1)! \text{sgn}_{E/F}(2(a_2 - a_1)\eta) \gamma_\psi(N_{E/F}) D^G(X^\epsilon)^{-1/2}$$

C'est la deuxième égalité de l'énoncé ■

## 5.5 Une formule pour la multiplicité $m(\Sigma, \eta)$

Soit  $\Sigma = \sum_k a_k \sigma_k$  une combinaison linéaire formelle de représentations irréductibles tempérées de  $G(F)$ . Soit  $\eta \in \text{Ker} \text{Tr}_{E/F} \setminus \{0\}$ . En prolongeant par linéarité l'application  $\sigma \mapsto m(\sigma, \eta)$ , on définit  $m(\Sigma, \eta)$

**Lemme 5.5.1** 1. On a l'égalité

$$\begin{aligned} m(\Sigma, \eta) &= (2w(d))^{-1} \lim_{\substack{\lambda \in F^{\times,2} \\ \lambda \rightarrow 0}} (\Theta_\Sigma(e^{\lambda X_{qd}}) D^G(e^{\lambda X_{qd}})^{1/2} \\ &\quad + d \text{sgn}_{E/F}(2(a_2 - a_1)\eta) \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \Theta_\Sigma(e^{\lambda X^+}) D^G(e^{\lambda X^+})^{1/2}) \end{aligned}$$

2. Si  $\Theta_\Sigma$  est stable alors,

$$\lim_{\substack{\lambda \in F^{\times,2} \\ \lambda \rightarrow 0}} \Theta_\Sigma(e^{\lambda X^+}) D^G(e^{\lambda X^+})^{1/2} = 0$$

Preuve : Le premier point est une conséquence facile de 5.2(1), du lemme 5.4.1 et des propriétés d'homogénéité des fonctions  $\hat{j}^G(\mathcal{O}, \cdot)$ . Supposons que  $\Theta_\Sigma$  soit stable. Comme  $X^+$  et  $X^-$  sont stablement conjugués, pour tout  $\lambda \in F^\times$ , on a  $\Theta_\Sigma(e^{\lambda X^+}) = \Theta_\Sigma(e^{\lambda X^-})$  et  $D^G(e^{\lambda X^+}) = D^G(e^{\lambda X^-})$ . Par conséquent dans la deuxième limite, on peut remplacer  $X^+$  par  $X^-$ . D'après le lemme 5.4.1, la limite existe et selon qu'on la calcule avec  $X^+$  ou  $X^-$ , on obtient deux résultats opposés. La limite est donc nulle ■

## 6 Endoscopie

### 6.1 Rappel sur les fonctions $c_{\sigma, \mathcal{O}}$

Soit  $(V, h)$  un espace hermitien. Donnons nous une décomposition orthogonale  $V = W \oplus V_{\mathfrak{h}}$ . On note  $G, G_W, G_{\mathfrak{h}}$  les groupes unitaires de respectivement  $V, W, V_{\mathfrak{h}}$  et on suppose que  $G_{\mathfrak{h}}$  est quasi-déployé. Soit  $t \in G_W(F)$  un élément semi-simple tel que  $G_t = T \times G_{\mathfrak{h}}$  où  $T$  est un tore maximal de  $G_W$ . Soit  $\sigma$  une représentation irréductible de  $G(F)$ . On définit comme en 4.1 un coefficient  $c_{\sigma}(t)$  à partir du caractère  $\Theta_{\sigma}$  de  $\sigma$ . On va rappeler une formule permettant de calculer ce terme. Fixons un sous-groupe de Borel  $B_{\mathfrak{h}}$  de  $G_{\mathfrak{h}}$  et un tore maximal  $T_{\mathfrak{h}}$  de  $B_{\mathfrak{h}}$  tous deux définis sur  $F$ . Soit  $Y_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathfrak{h}, reg}(F)$ , on a alors

$$(1) \quad c_{\sigma}(t) = w(d_{\mathfrak{h}})^{-1} \lim_{\lambda \in F^{\times}, \lambda \rightarrow 0} \Theta_{\sigma}(t \exp(\lambda Y_{\mathfrak{h}})) D^{G_{\mathfrak{h}}}(\lambda Y_{\mathfrak{h}})^{1/2}$$

cf 18.4 [B1].

### 6.2 Définition d'une multiplicité stable

Soient  $(V, h)$  et  $(V', h')$  deux espaces hermitiens de dimensions respectives  $d$  et  $d'$  (on ne fait ici aucune hypothèse sur leurs parités). On note  $G$  et  $G'$  leurs groupes unitaires et on les suppose quasi-déployés. Soient  $\Sigma = \sum_k a_k \sigma_k$  et  $\Sigma' = \sum_k b_k \sigma'_k$  des combinaisons linéaires formelles finies où les  $a_k$  et les  $b_k$  sont des nombres complexes, les  $\sigma_k$  appartiennent à  $Temp(G(F))$  et les  $\sigma'_k$  appartiennent à  $Temp(G'(F))$ . On définit par linéarité leurs caractères  $\Theta_{\Sigma}$  et  $\Theta_{\Sigma'}$ . On suppose qu'il s'agit de distributions stables (c'est-à-dire qu'ils sont constants sur les classes de conjugaison stable d'éléments fortement réguliers). Pour tout  $\underline{d} \leq \min(d, d')$ , on peut trouver une décomposition orthogonale  $V = W \oplus V_{\mathfrak{h}}$  où  $\dim(W) = \underline{d}$  et  $G_{\mathfrak{h}}$  le groupe unitaire de  $V_{\mathfrak{h}}$  est quasi-déployé. Notons  $G_W$  le groupe unitaire de  $W$ . Soit  $\xi \in \Xi_{\underline{d}, reg}^*$  et  $x \in G_{W, reg}(F)$  un élément dont la classe de conjugaison stable est paramétrée par  $\xi$  (il en existe toujours). Alors  $G_x = T \times G_{\mathfrak{h}}$  où  $T$  est un tore maximal de  $G_W$ . On peut donc définir le coefficient  $c_{\Sigma}(x) = \sum_k a_k c_{\sigma_k}(x)$ . Puisque  $\Theta_{\Sigma}$  est stable, ce terme ne dépend pas du choix de  $x$  ni de celui de la décomposition orthogonale. On le note  $c_{\Sigma}(\xi)$ . On définit de même  $c_{\Sigma'}(\xi)$ . Soit  $\mathcal{D}(d, d')$  l'ensemble des entiers naturels  $\underline{d}$  qui vérifient

- $\underline{d} \leq \min(d, d')$  ;
- $\underline{d} \equiv d$  ou  $d'[2]$ .

Introduisons l'espace

$$\Xi^*(d, d') = \bigsqcup_{\underline{d} \in \mathcal{D}(d, d')} \Xi_{\underline{d}, ani}^*$$

Soit  $\mu$  un caractère continu de  $E^{\times}$  dont la restriction à  $F^{\times}$  coïncide avec  $sgn_{E/F}^{d+d'+1}$ . On pose alors

$$S_{\mu}(\Sigma, \Sigma') = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\Xi^*(d, d')} \mu(\delta^{-d\xi} P_{\xi}(1)) |C(\xi)| c_{\Sigma}(\xi) c_{\Sigma'}(\xi) D^d(\xi)^{1/2} D^{d'}(\xi)^{1/2} \Delta(\xi)^{-1/2+s} d\xi$$

### 6.3 Endoscopie et multiplicité

Soient  $(V, h)$  et  $(V', h')$  deux espaces hermitiens vérifiant les hypothèses du paragraphe 4.1 dont on reprend les notations. Considérons quatre espaces hermitiens  $(V_+, h_+)$ ,  $(V_-, h_-)$ ,  $(V'_+, h'_+)$ ,  $(V'_-, h'_-)$  de groupes unitaires respectifs  $G_+$ ,  $G_-$ ,  $G'_+$  et  $G'_-$  et de dimensions respectives  $d_+$ ,  $d_-$ ,  $d'_+$ ,  $d'_-$ . On fait les hypothèses suivantes

- $(V_+, h_+)$ ,  $(V_-, h_-)$ ,  $(V'_+, h'_+)$  et  $(V'_-, h'_-)$  vérifient l'hypothèse **(QD)** ;
- $d_+ + d_- = d$  et  $d'_+ + d'_- = d'$ .

D'après 3.1, on peut donc considérer  $G_+ \times G_-$  comme un groupe endoscopique de  $G$  et  $G'_+ \times G'_-$  comme un groupe endoscopique de  $G'$ . Il faut pour cela fixer quelques données supplémentaires : des caractères  $\mu_+$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu'_+$  et  $\mu'_-$  vérifiant  $\mu_{+,|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d_-}$ ,  $\mu_{-,|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d_+}$ ,  $\mu'_{+,|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d'_-}$  et  $\mu'_{-,|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d'_+}$ . On les suppose fixés. Considérons une combinaison linéaire finie

$$\Sigma'_+ = \sum_k b_{k,+} \sigma_{k,+}$$

où les  $\sigma_{+,k}$  appartiennent à  $\text{Temp}(G_+)$ . On considère de même des combinaisons linéaires finies  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ ,  $\Sigma_-$ ,  $\Sigma'_+$ ,  $\Sigma'_-$  de représentations irréductibles tempérées de respectivement  $G$ ,  $G'$ ,  $G_-$ ,  $G'_+$  et  $G'_-$ . On suppose que les caractères  $\Theta_{\Sigma_+}$ ,  $\Theta_{\Sigma_-}$ ,  $\Theta_{\Sigma'_+}$ ,  $\Theta_{\Sigma'_-}$  sont stables, que  $\Theta_\Sigma$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$  et que  $\Theta_{\Sigma'}$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma'_+} \times \Theta_{\Sigma'_-}$ . En prolongeant par bilinéarité l'application  $(\sigma, \sigma') \mapsto m_{\text{geom}}(\sigma, \sigma')$ , on définit  $m_{\text{geom}}(\Sigma, \Sigma')$

**Proposition 6.3.1** *Sous les hypothèses précédentes, on a l'égalité*

$$m_{\text{geom}}(\Sigma, \Sigma') = \frac{1}{2} \left( S_{\mu_+ \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+) S_{\mu_- \mu'_-}(\Sigma_-, \Sigma'_-) + \mu(G) S_{\mu_+ \mu'_-}(\Sigma_+, \Sigma'_-) S_{\mu_- \mu'_+}(\Sigma_-, \Sigma'_+) \right)$$

**Preuve** : Exprimons le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé comme en 4.2. Puisque  $\mathcal{C}(h, h')$  est un revêtement de  $\Xi^*(h, h')$  qui lui-même est un ouvert de  $\Xi^*(d, d')$ , on peut écrire le membre de gauche sous la forme

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\Xi^*(d, d')} f_1(\xi) \Delta(\xi)^{s-1/2} d\xi$$

Le membre de droite s'exprime comme limite d'une intégrale sur  $\Xi^*(d_+, d'_+) \times \Xi^*(d_-, d'_-) \sqcup \Xi^*(d_+, d'_-) \times \Xi^*(d_-, d'_+)$ . L'application  $(\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_1 \sqcup \xi_2$  définit un revêtement qui préserve localement les mesures d'un ouvert de complémentaire de mesure nulle de cet espace au dessus d'un ouvert de  $\Xi^*(d, d')$ . On a l'égalité  $\Delta(\xi_1 \sqcup \xi_2) = \Delta(\xi_1) \Delta(\xi_2)$ , ce qui permet de réécrire le membre de droite sous la forme

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\Xi^*(d, d')} f_2(\xi) \Delta(\xi)^{s-1/2} d\xi$$

Pour établir le lemme, il suffit donc de montrer l'égalité  $f_1(\xi) = f_2(\xi)$  pour tout  $\xi \in \Xi^*(d, d')$ . Soit donc  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi^*(d, d')$ . Posons  $\underline{d} = d_\xi$ . On construit comme

en 4.2, un espace hermitien  $(V_{\underline{d}}, h_{\underline{d}})$  qui se plonge à la fois dans  $(V, h)$  et  $(V', h')$ . Notons  $G_{\underline{d}}$  son groupe unitaire. On dispose donc de deux plongements bien définis à conjugaison près de  $G_{\underline{d}}$  dans  $G$  et  $G'$ . On a alors

$$(1) \quad f_1(\xi) = \sum_{c \in C(\xi)^\epsilon} D^d(\xi)^{1/2} c_{\Sigma}(x(\xi, c)) D^{d'}(\xi)^{1/2} c_{\Sigma'}(x(\xi, c))$$

pour un certain  $\epsilon \in \{\pm 1\}$ . Soit  $c \in C(\xi)^\epsilon$ . Notons  $V_{\mathfrak{h}}$  l'orthogonal de  $V_{\underline{d}}$  dans  $V$ ,  $d_{\mathfrak{h}}$  sa dimension et  $G_{\mathfrak{h}}$  son groupe unitaire. D'après la construction 4.2,  $G_{\mathfrak{h}}$  est quasi-déployé. Soit  $T_{\mathfrak{h}}$  un sous-tore maximal d'un sous-groupe de Borel de  $G_{\mathfrak{h}}$  tous deux définis sur  $F$ . Fixons  $Y_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{g}_{\mathfrak{h}, reg}(F) \cap \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}(F)$  qui n'admet pas 0 comme valeur propre dans  $V_{\mathfrak{h}}$ . D'après 6.1(1), on a

$$(2) \quad D^d(\xi)^{1/2} c_{\Sigma}(x(\xi, c)) = w(d_{\mathfrak{h}})^{-1} \lim_{\lambda \in F^\times, \lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma}(x(\xi, c) e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}) D^G(x(\xi, c) e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})^{1/2}$$

Pour tout  $\lambda \in F^\times$  assez petit, notons  $\zeta_{\lambda} \in \Xi_{d_{\mathfrak{h}}, reg}$  l'élément qui paramètre la classe de conjugaison stable de  $e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$ . On distingue alors deux cas.

Supposons tout d'abord que  $\underline{d}$  est pair. Il existe alors une famille  $(a_j)_{j \in J}$  d'éléments non nuls de  $E$  telle que  $\zeta_{\lambda} = (J, (F_{\pm j})_{j \in J}, (F_j)_{j \in J}, (y_j(\lambda))_{j \in J})$  pour tout  $\lambda \in F^\times$  assez petit, où :

- $F_{\pm j} = E$  et  $F_j = E \times E$  ;
- $y_j(\lambda) = (e^{\lambda a_j}, e^{-\lambda \bar{a}_j})$

pour tout  $j \in J$ . On a alors  $C(\zeta_{\lambda}) = \{1\}$ , i.e.  $\zeta_{\lambda}$  détermine aussi la classe de conjugaison stable de  $e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$ . La classe de conjugaison de  $x(\xi, c) e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$  est alors paramétrée par  $\xi \sqcup \zeta_{\lambda}$  et  $c \in C(\xi \sqcup \zeta_{\lambda}) = C(\xi)$ . Pour tout  $I' \subset I$ , on pose  $\xi(I') = (I', (F_{\pm i})_{i \in I'}, (F_i)_{i \in I'}, (y_i)_{i \in I'})$  et  $d_{I'} = d_{\xi(I')}$ . On définit de même  $\zeta_{\lambda}(J')$  et  $d_{J'}$  pour tout  $J' \subset J$ . Puisque  $\Theta_{\Sigma}$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$ , on a

$$(3) \quad \Theta_{\Sigma}(x(\xi, c) e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}) D^G(x(\xi, c) e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})^{1/2} = \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} \Theta_{\Sigma_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_1)) D^{G_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_1))^{1/2} \Theta_{\Sigma_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_2)) D^{G_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_2))^{1/2} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_2), c)$$

où la somme porte sur les quadruplets  $(I_1, I_2, J_1, J_2)$  satisfaisant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $J_1 \sqcup J_2 = J$ ,  $d_{I_1} + 2|J_1| = d_+$  et  $d_{I_2} + 2|J_2| = d_-$ . Fixons un tel quadruplet. d'après 6.1(1), on a

$$(4) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_1)) D^{G_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_1))^{1/2} = c_{\Sigma_+}(\xi(I_1)) D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2}$$

$$(5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_2)) D^{G_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_{\lambda}(J_2))^{1/2} = c_{\Sigma_-}(\xi(I_2)) D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2}$$

Montrons que

(6) Pour  $\lambda$  assez proche de 0, on a

$$\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda(J_2), c) = \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)$$

D'après 2.3(1), il suffit de vérifier que pour  $\lambda$  assez petit, on a

$$\begin{aligned} & - \mu_+(P_{\zeta_\lambda(J_1)}(0)P_{\zeta_\lambda(J_1)}(-1)^{-1}) = 1; \\ & - \mu_-(P_{\zeta_\lambda(J_2)}(0)P_{\zeta_\lambda(J_2)}(-1)^{-1}) = 1; \\ & - \prod_{j \in J} (\delta^{-2}(y_i - e^{\lambda a_j})(y_i - e^{-\lambda \bar{a}_j})(1 + e^{\lambda a_j})^{-1}(1 + e^{-\lambda \bar{a}_j})^{-1}y_i^{-1}) \in N_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^\times) \end{aligned}$$

pour tout  $i \in I_2$ .

Pour le premier point, on a

$$P_{\zeta_\lambda(J_1)}(0)P_{\zeta_\lambda(J_1)}(-1)^{-1} = \prod_{j \in J_1} e^{\lambda(a_j - \bar{a}_j)}(1 + e^{\lambda a_j})^{-1}(1 + e^{-\lambda \bar{a}_j})^{-1}$$

La norme de  $(1 + e^{\lambda a_j})^{-1}$  vaut  $e^{-\lambda \bar{a}_j}(1 + e^{\lambda a_j})^{-1}(1 + e^{-\lambda \bar{a}_j})^{-1}$  et pour  $\lambda$  assez proche de 0,  $\mu_+(e^{\lambda a_j}) = 1$ . Cela conclut, puisque  $\mu_+$  est trivial sur  $N(E^\times)$ . On établit de la même façon le deuxième point. Enfin, pour le troisième point, il suffit de remarquer que pour tout  $j \in J$  et pour tout  $i \in I_2$ ,

$$\delta^{-2}(y_i - e^{\lambda a_j})(y_i - e^{-\lambda \bar{a}_j})(1 + e^{\lambda a_j})^{-1}(1 + e^{-\lambda \bar{a}_j})^{-1}y_i^{-1}$$

est la norme de  $\delta^{-1}(y_i - e^{\lambda a_j})(1 + e^{\lambda a_j})^{-1}$ .

Pour  $I_1, I_2 \subset I$ , tels que  $d_{I_1} \leq d_+$  et  $d_{I_2} \leq d_-$ , posons

$$B(I_1, I_2) = c_{\Sigma_+}(\xi(I_1))D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2}c_{\Sigma_-}(\xi(I_2))D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2}$$

De (2), (3), (4), (5) et (6), on déduit que

$$c_\Sigma(x(\xi, c))D^d(\xi)^{1/2} = w(d_{\mathfrak{q}})^{-1} \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} w(d_+ - d_{I_1})w(d_- - d_{I_2})B(I_1, I_2)\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)$$

où la somme porte toujours sur les mêmes quadruplets qu'en (3). Examinons la somme sur  $(J_1, J_2)$  à  $(I_1, I_2)$  fixé. La somme est vide sauf si  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$  et  $d_- - d_{I_2}$  sont des entiers positifs pairs. Si l'on est dans ce cas, alors  $(J_1, J_2)$  est soumis aux seules conditions  $J_1 \sqcup J_2 = J$ ,  $2|J_1| = d_+ - d_{I_1}$  et  $2|J_2| = d_- - d_{I_2}$ . Il y a  $\binom{|J|}{(d_+ - d_{I_1})/2}$  tels couples. On vérifie facilement l'égalité

$$\binom{|J|}{(d_+ - d_{I_1})/2} w(d_+ - d_{I_1})w(d_- - d_{I_2}) = w(d - \underline{d}) = w(d_{\mathfrak{q}})$$

On arrive donc à l'égalité

$$(7) \quad c_\Sigma(x(\xi, c))D^d(\xi)^{1/2} = \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2)\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)$$

où la somme porte sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$  et  $d_- - d_{I_2}$  positifs pairs.

Supposons maintenant que  $\underline{d}$  est impair. Il existe alors une famille  $(a_j)_{j \in J}$  d'éléments non nuls de  $E$  et  $j_0 \in J$  tels que  $\zeta_\lambda = (J, (F_{\pm j})_{j \in J}, (F_j)_{j \in J}, (y_j(\lambda))_{j \in J})$  pour tout  $\lambda \in F^\times$  assez petit, où :

- $F_{\pm j_0} = F$ ,  $F_{j_0} = E$ ,  $Tr_{E/F}(a_{j_0}) = 0$  et  $y_{j_0}(\lambda) = e^{\lambda a_{j_0}}$  ;
- $F_{\pm j} = E$ ,  $F_j = E \times E$  et  $y_j(\lambda) = (e^{\lambda a_j}, e^{-\lambda \bar{a}_j})$  pour tout  $j \in J \setminus \{j_0\}$ .

On a alors  $C(\zeta_\lambda) = F^\times/N(E^\times)$ , donc  $\zeta_\lambda$  ne détermine pas entièrement la classe de conjugaison de  $e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$ . Celle-ci est déterminée par la donnée supplémentaire d'un élément  $c_0 \in F^\times/N(E^\times)$ . L'hypothèse faites sur  $(V, h)$  et  $(V', h')$  entraîne  $c_0 = \nu_0$ . La classe de conjugaison de  $x(\xi, c)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$  est alors paramétrée par  $\xi \sqcup \zeta_\lambda$  et  $(c, c_0) \in C(\xi \sqcup \zeta_\lambda) = C(\xi) \times F^\times/N(E^\times)$ . Puisque  $\Theta_\Sigma$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$ , pour tout  $\lambda$  assez petit, on a

$$(8) \quad \Theta_\Sigma(x(\xi, c)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})D^G(x(\xi, c)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})^{1/2} = \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} \Theta_{\Sigma_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda(J_1))D^{G_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda(J_1))^{1/2} \Theta_{\Sigma_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda(J_2)) D^{G_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda(J_2))^{1/2} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda(J_2), (c, c_0))$$

où la somme porte sur les quadruplets  $(I_1, I_2, J_1, J_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $J_1 \sqcup J_2 = J$ ,  $d_{I_1} + d_{J_1} = d_+$  et  $d_{I_2} + d_{J_2} = d_-$ . Fixons un tel quadruplet. On a toujours (4) et (5). Il y a essentiellement deux cas possibles :  $j_0 \in J_1$  ou  $j_0 \in J_2$ . De façon tout à fait analogue à (6), on montre que pour  $\lambda$  assez proche de 0, on a

$$\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda(J_2), (c, c_0)) = \begin{cases} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda(j_0), \xi(I_2), (c, c_0)) & \text{si } j_0 \in J_1 \\ \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda(j_0), (c, c_0)) & \text{si } j_0 \in J_2 \end{cases}$$

où on a posé  $\zeta_\lambda(j_0) = \zeta_\lambda(\{j_0\})$ . D'après le lemme 2.3.1, on a donc

$$(9) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda(J_2), (c, c_0)) = \begin{cases} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(-1)P_{I_2}(1)}{P_{I_2}(0)}) & \text{si } j_0 \in J_1 \\ \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(-1)P_{I_1}(1)}{P_{I_1}(0)}) & \text{si } j_0 \in J_2 \end{cases}$$

où on a posé  $P_{I'} = P_{\xi(I')}$  pour tout  $I' \subset I$ . De (2), (4), (5), (8) et (9), on déduit que

$$(10) \quad c_{\Sigma}(x(\xi, c))D^d(\xi)^{1/2} = w(d_{\natural})^{-1} \left( \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} w(d_+ - d_{I_1})w(d_- - d_{I_2})B(I_1, I_2)\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c) \right. \\ \left. sgn_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(-1)P_{I_2}(1)}{P_{I_2}(0)}) + \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} w(d_+ - d_{I_1})w(d_- - d_{I_2}) \right. \\ \left. B(I_1, I_2)\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)sgn_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(-1)P_{I_1}(1)}{P_{I_1}(0)}) \right)$$

la première somme (resp. la deuxième) portant sur les mêmes quadruplets que (8) avec la condition supplémentaire  $j_0 \in J_1$  (resp.  $j_0 \in J_2$ ). Dans la première somme, à  $(I_1, I_2)$  fixé, la somme sur  $(J_1, J_2)$  est vide sauf si  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$  est positif impair et  $d_- - d_{I_2}$  est positif pair. Dans ce cas, elle contient  $\binom{|J|-1}{(d_- - d_{I_2})/2}$  termes. On vérifie que

$$\binom{|J|-1}{(d_- - d_{I_2})/2} w(d_+ - d_{I_1})w(d_- - d_{I_2}) = w(d - \underline{d}) = w(d_{\natural})$$

Dans la deuxième somme, à  $(I_1, I_2)$  fixé, la somme sur  $(J_1, J_2)$  est vide sauf si  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$  est positif pair et  $d_- - d_{I_2}$  est positif impair. Dans ce cas, elle contient  $\binom{|J|-1}{(d_+ - d_{I_1})/2}$  termes. On a de même

$$\binom{|J|-1}{(d_+ - d_{I_1})/2} w(d_+ - d_{I_1})w(d_- - d_{I_2}) = w(d_{\natural})$$

Par conséquent, (10) devient

$$(11) \quad c_{\Sigma}(x(\xi, c))D^d(\xi)^{1/2} = \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2)\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)sgn_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(-1)P_{I_2}(1)}{P_{I_2}(0)}) \\ + \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2)\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)sgn_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(-1)P_{I_1}(1)}{P_{I_1}(0)})$$

la première (resp. la deuxième) somme portant sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$  positif impair (resp. pair) et  $d_- - d_{I_2}$  positif pair (resp. impair).

On montre de la même façon des formules analogues à (7) et (11) pour  $c_{\Sigma'}(x(\xi, c))D^{d'}(\xi)^{1/2}$ . Plus précisément, pour tous  $I_1, I_2 \subset I$  vérifiant  $d'_+ \geq d_{I_1}$  et  $d'_- \geq d_{I_2}$ , posons

$$B'(I_1, I_2) = c_{\Sigma'_+}(\xi(I_1))D^{d'_+}(\xi(I_1))^{1/2}c_{\Sigma'_-}(\xi(I_2))D^{d'_-}(\xi(I_2))^{1/2}$$

On a alors

– Si  $\underline{d}$  est impair,

$$(12) \quad c_{\Sigma'}(x(\xi, c))D^{d'}(\xi)^{1/2} = \sum_{I_1, I_2} B'(I_1, I_2)\Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)$$

où la somme porte sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d'_+ - d_{I_1}$  et  $d'_- - d_{I_2}$  positifs et pairs.

– Si  $\underline{d}$  est pair,

$$(13) \quad c_{\Sigma'}(x(\xi, c))D^{d'}(\xi)^{1/2} = \sum_{I_1, I_2} B'(I_1, I_2)\Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(-1)P_{I_2}(1)}{P_{I_2}(0)}) \\ + \sum_{I_1, I_2} B'(I_1, I_2)\Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(-1)P_{I_1}(1)}{P_{I_1}(0)})$$

la première (resp. la deuxième) somme portant sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d'_+ - d_{I_1}$  positif impair (resp. pair) et  $d'_- - d_{I_2}$  positif pair (resp. impair).

Les formules (7), (11), (12) et (13) permettent d'exprimer  $f_1(\xi)$  en fonction de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$  et  $\Theta_{\Sigma'_+} \times \Theta_{\Sigma'_-}$ . Supposons à nouveau  $\underline{d}$  pair. De (1), (7) et (13), on déduit que

$$(14) \quad f_1(\xi) = \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ I'_1, I'_2}} B(I_1, I_2)B'(I'_1, I'_2) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I'_2}} \frac{P_{I'_2}(-1)P_{I'_2}(1)}{P_{I'_2}(0)}) A(I_1, I_2, I'_1, I'_2) \\ + \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ I'_1, I'_2}} B(I_1, I_2)B'(I'_1, I'_2) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I'_1}} \frac{P_{I'_1}(-1)P_{I'_1}(1)}{P_{I'_1}(0)}) A(I_1, I_2, I'_1, I'_2)$$

la première (resp. la deuxième) somme portant sur les quadruplets  $(I_1, I_2, I'_1, I'_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I'_1 \sqcup I'_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$  et  $d_- - d_{I_2}$  positifs pairs,  $d'_+ - d_{I'_1}$  positif impair (resp. pair) et  $d'_- - d_{I'_2}$  positif pair (resp. impair), et où on a posé

$$A(I_1, I_2, I'_1, I'_2) = \sum_{c \in C(\xi)^\epsilon} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)\Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I'_1), \xi(I'_2), c)$$

Examinons ce dernier terme. C'est à une constante ne dépendant pas de  $c$  près la somme de

$$\prod_{i \in I_2} \operatorname{sgn}_{F_i/F_{\pm i}}(c_i) \prod_{i \in I'_2} \operatorname{sgn}_{F_i/F_{\pm i}}(c_i)$$

sur  $C(\xi)^\epsilon$ . Cette somme est donc nulle sauf si  $(I_1, I_2) = (I'_1, I'_2)$  ou  $(I_1, I_2) = (I'_2, I'_1)$ . Dans le cas où  $(I_1, I_2) = (I'_1, I'_2)$ , on a

$$\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)\Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c) = \mu_+\mu'_+(P_{I_1}(0)P_{I_1}(-1)^{-1})\mu_-\mu'_-(P_{I_2}(0)P_{I_2}(-1)^{-1})$$

pour tout  $c \in C(\xi)^\epsilon$ . D'où

$$A(I_1, I_2, I_1, I_2) = |C(\xi)^\epsilon| \mu_+ \mu'_+(P_{I_1}(0)P_{I_1}(-1)^{-1}) \mu_- \mu'_-(P_{I_2}(0)P_{I_2}(-1)^{-1})$$

Considérons maintenant le cas  $(I_1, I_2) = (I'_2, I'_1)$ . La formule (6) relie  $\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c)$  au facteur de transfert relatif au groupe endoscopique  $G_+ \times G_-$  de  $G$ . Comme on le sait, permuter  $G_+$  et  $G_-$ , ne change pas le facteur de transfert si  $G$  est quasi-déployé, multiplie le facteur de transfert par  $-1$  si  $G$  n'est pas quasi-déployé. Par conséquent

$$\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c) = \mu(G) \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_2), \xi(I_1), c)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), c) \Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I_2), \xi(I_1), c) \\ = \mu(G) \mu_+ \mu'_-(P_{I_1}(0)P_{I_1}(-1)^{-1}) \mu_- \mu'_+(P_{I_2}(0)P_{I_2}(-1)^{-1}) \end{aligned}$$

Puis

$$A(I_1, I_2, I_2, I_1) = \mu(G) |C(\xi)^\epsilon| \mu_+ \mu'_-(P_{I_1}(0)P_{I_1}(-1)^{-1}) \mu_- \mu'_+(P_{I_2}(0)P_{I_2}(-1)^{-1})$$

Revenons à (14). Supposons  $\xi \neq \emptyset$  et  $d'_+$  de même parité que  $d_+$  et  $d_-$ . Alors  $|C(\xi)^\epsilon| = |C(\xi)|/2$  et on ne peut pas avoir  $(I_1, I_2) = (I'_1, I'_2)$  ni  $(I_1, I_2) = (I'_2, I'_1)$  dans la première somme. Par conséquent seule la deuxième somme contribue et, d'après ce qui précède et le fait que les cas  $(I_1, I_2) = (I'_1, I'_2)$  et  $(I_1, I_2) = (I'_2, I'_1)$  sont exclusifs (car  $\xi \neq \emptyset$ ), celle-ci vaut  $|C(\xi)|/2$  multiplié par

$$\begin{aligned} \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2) B'(I_1, I_2) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(-1)P_{I_1}(1)}{P_{I_1}(0)}) \mu_+ \mu'_+(P_{I_1}(0)P_{I_1}(-1)^{-1}) \\ \mu_- \mu'_-(P_{I_2}(0)P_{I_2}(-1)^{-1}) + \mu(G) \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2) B'(I_2, I_1) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I'_2}} \frac{P_{I_2}(-1)P_{I_2}(1)}{P_{I_2}(0)}) \\ \mu_+ \mu'_-(P_{I_1}(0)P_{I_1}(-1)^{-1}) \mu_- \mu'_+(P_{I_2}(0)P_{I_2}(-1)^{-1}) \end{aligned}$$

la première (resp. deuxième) somme portant sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d_{I_1} \in \mathcal{D}(d_+, d'_+)$  (resp.  $d_{I_1} \in \mathcal{D}(d_+, d'_-)$ ) et  $d_{I_2} \in \mathcal{D}(d_-, d'_-)$  (resp.  $d_{I_2} \in \mathcal{D}(d_-, d'_+)$ ). Dans le cas que l'on considère  $(\mu_+ \mu'_+)|_{F^\times} = \operatorname{sgn}_{E/F}$  et  $(\mu_- \mu'_+)|_{F^\times} = \operatorname{sgn}_{E/F}$ , donc

$$\operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(-1)P_{I_1}(1)}{P_{I_1}(0)}) \mu_+ \mu'_+(P_{I_1}(0)P_{I_1}(-1)^{-1}) = \mu_+ \mu'_+(\delta^{-d_{I_1}} P_{I_1}(1))$$

et

$$\operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(-1)P_{I_2}(1)}{P_{I_2}(0)}) \mu_- \mu'_+(P_{I_2}(0)P_{I_2}(-1)^{-1}) = \mu_+ \mu'_+(\delta^{-d_{I_2}} P_{I_2}(1))$$

Toujours dans le cas que l'on considère,  $\mu_+\mu'_-$  et  $\mu_-\mu'_+$  sont triviaux sur  $F^\times$ . On vérifie que  $\delta^{-d_{I'}} P_{I'}(1)P_{I'}(-1)P_{I'}(0)^{-1}$  est élément de  $F^\times$  pour tout  $I' \subset I$ . Par conséquent

$$\mu_+\mu'_-(P_{I_1}(0)P_{I_1}(-1)^{-1}) = \mu_+\mu'_-(\delta^{-d_{I_1}} P_{I_1}(1))$$

et

$$\mu_-\mu'_-(P_{I_2}(0)P_{I_2}(-1)^{-1}) = \mu_-\mu'_-(\delta^{-d_{I_2}} P_{I_2}(1))$$

On peut donc réécrire (14) sous la forme

$$f_1(\xi) = \frac{|C(\xi)|}{2} \left( \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 = I \\ d_{I_1} \in \mathcal{D}(d_+, d'_+) \\ d_{I_2} \in \mathcal{D}(d_-, d'_-)}} B(I_1, I_2) B'(I_1, I_2) \mu_+\mu'_+(\delta^{-d_{I_1}} P_{I_1}(1)) \mu_-\mu'_-(\delta^{-d_{I_2}} P_{I_2}(1)) \right. \\ \left. + \mu(G) \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 = I \\ d_{I_1} \in \mathcal{D}(d_+, d'_-) \\ d_{I_2} \in \mathcal{D}(d_-, d'_+)}} B(I_1, I_2) B'(I_2, I_1) \mu_+\mu'_-(\delta^{-d_{I_1}} P_{I_1}(1)) \mu_-\mu'_+(\delta^{-d_{I_2}} P_{I_2}(1)) \right)$$

On vérifie facilement que le membre de droite vaut  $f_2(\xi)$ . Supposons maintenant  $\xi = \emptyset$ . Alors le membre de droite de (14) ne comprend qu'un seul terme et on trouve

$$f_1(\xi) = |C(\xi)^\epsilon| c_{\Sigma_+}(1) c_{\Sigma_-}(1) c_{\Sigma'_+}(1) c_{\Sigma'_-}(1)$$

D'un autre côté, on a

$$f_2(\xi) = \frac{1 + \mu(G)}{2} c_{\Sigma_+}(1) c_{\Sigma_-}(1) c_{\Sigma'_+}(1) c_{\Sigma'_-}(1)$$

Dans tous les cas, on a  $|C(\xi)^\epsilon| = \frac{1 + \mu(G)}{2}$  ce qui établit l'égalité voulue. Le cas où  $d'_+$  est de parité différente de  $d_+$  et  $d_-$  et le cas où  $\underline{d}$  est impair se traitent de la même manière ■

## 6.4 Endoscopie et facteur epsilon

Soient  $U, U'$  deux  $E$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $d, d'$ . Soient  $(V_+, h_+), (V_-, h_-), (V'_+, h'_+), (V'_-, h'_-)$  quatre espaces hermitiens de dimensions respectives  $d_+, d_-, d'_+, d'_-$ . On adopte les notations suivantes :

- $(M, \tilde{M})$  et  $(M', \tilde{M}')$  les groupes tordus associés à  $U$  et  $U'$  respectivement ;
- $G_+, G_-, G'_+$  et  $G'_-$  les groupes unitaires de  $(V_+, h_+), (V_-, h_-), (V'_+, h'_+)$  et  $(V'_-, h'_-)$  respectivement.

On fixe de plus des caractères continus  $\mu_+, \mu_-, \mu'_+, \mu'_-$  de  $E^\times$  dont les restrictions à  $F^\times$  coïncident respectivement avec  $\text{sgn}_{E/F}^{d_-}, \text{sgn}_{E/F}^{d_++1}, \text{sgn}_{E/F}^{d'_-}$  et  $\text{sgn}_{E/F}^{d'_++1}$ . On fait les hypothèses suivantes :

- $d_+ + d_- = d, d'_+ + d'_- = d'$  ;

– les groupes  $G_+$ ,  $G_-$ ,  $G'_+$  et  $G'_-$  sont quasi-déployés.

Le paramètre supplémentaire  $(\mu_+, \mu_-)$  (resp.  $(\mu'_+, \mu'_-)$ ) permet de considérer  $G_+ \times G_-$  (resp.  $G'_+ \times G'_-$ ) comme un groupe endoscopique tordu de  $\tilde{M}$  (resp.  $\tilde{M}'$ ). Tous les autres choix permettant de définir des facteurs de transfert ont été effectués en 3.2. Soient des combinaisons linéaires formelles

$$\tilde{\Pi} = \sum_k a_k \tilde{\pi}_k, \quad \Pi = \sum_k a'_k \tilde{\pi}'_k$$

des combinaisons linéaires formelles de représentations tempérées irréductibles de  $\tilde{M}(F)$  et  $\tilde{M}'(F)$  respectivement. On considère de la même façon des combinaisons linéaires formelles  $\Sigma_+, \Sigma_-, \Sigma'_+, \Sigma'_-$  de représentations tempérées irréductibles de  $G_+(F), G_-(F), G'_+(F), G'_-(F)$  respectivement. On suppose

- Les caractères  $\Theta_{\Sigma_+}, \Theta_{\Sigma_-}, \Theta_{\Sigma'_+}$  et  $\Theta_{\Sigma'_-}$  sont stables ;
- $\Theta_{\tilde{\Pi}}$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$  et  $\Theta_{\tilde{\Pi}'}$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma'_+} \times \Theta_{\Sigma'_-}$ .

En prolongeant par bilinéarité l'application  $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \mapsto \epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}')$ , on définit  $\epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}')$ .

**Proposition 6.4.1** *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$\epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}') = \text{sgn}_{E/F}(-\nu_1)^{d_- + d'_-} S_{\mu_+ \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+) S_{\mu_- \mu'_-}(\Sigma_-, \Sigma'_-)$$

Preuve : Exprimons  $\epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}')$  comme en 4.4. Puisque  $\mathcal{X}(d, d')$  est un revêtement de  $\Xi^*(d, d')$ , on peut réécrire le membre de gauche sous la forme

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\Xi^*(d, d')} f_1(\xi) \Delta(\xi)^{s-1/2} d\xi$$

Le membre de droite est défini comme la limite d'une intégrale sur  $\Xi^*(d_+, d'_+) \times \Xi^*(d_-, d'_-)$ . L'application  $(\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_1 \sqcup \xi_2$  définit un revêtement qui préserve localement les mesures d'un ouvert de complémentaire de mesure nulle de cet espace au dessus de  $\Xi^*(d, d')$ . Puisque  $\Delta(\xi_1 \sqcup \xi_2) = \Delta(\xi_1) \Delta(\xi_2)$ , on peut donc réécrire le membre de droite sous la forme

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\Xi^*(d, d')} f_2(\xi) \Delta(\xi)^{s-1/2} d\xi$$

Pour établir le lemme, il suffit donc de prouver l'égalité  $f_1(\xi) = f_2(\xi)$  pour tout  $\xi \in \Xi^*(d, d')$ . Soit  $\xi = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \Xi^*(d, d')$ . En tenant compte du jacobien de l'application  $\mathcal{X}(d, d') \rightarrow \Xi^*(d, d')$ , on a

$$(1) \quad f_1(\xi) = |2|_F^{-(d+d')/2} \sum_{\gamma \in \Gamma(\xi)} c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma)) D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2} c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi, \gamma)) D^{\tilde{M}'}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2}$$

Posons  $\underline{d} = d_\xi$ . Introduisons comme en 4.4 des décompositions  $U = U_{\underline{d}} \oplus W_{\underline{d}}$ ,  $U' = U_{\underline{d}} \oplus W'_{\underline{d}}$ , des formes hermitiennes  $h_{\underline{d}}$  sur  $W_{\underline{d}}$  et  $h'_{\underline{d}}$  sur  $W'_{\underline{d}}$  et le groupe tordu  $(M_{\underline{d}}, \tilde{M}_{\underline{d}})$  associé à  $U_{\underline{d}}$ .

Alors en 4.4, on a défini un plongement de  $\tilde{M}_{\underline{d}}$  dans  $\tilde{M}$  et  $\tilde{M}'$ . Pour tout  $\gamma \in \Gamma(\xi)$ ,  $\tilde{x}(\xi, \gamma)$  représente une classe de conjugaison dans  $\tilde{M}_{\underline{d}}$  et les coefficients  $c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))$ ,  $D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))$ ,  $c_{\tilde{\Pi}'}$ ,  $D^{\tilde{M}'}$  sont définis au moyen des plongements.

Soit  $\gamma \in \Gamma(\xi)$ . Notons  $G_{\mathfrak{h}}$  le groupe unitaire de  $(W_{\underline{d}}, h_{\underline{d}})$ . Ce groupe est quasi-déployé. Fixons un sous-tore maximal  $T_{\mathfrak{h}}$  d'un sous-groupe de Borel de  $G_{\mathfrak{h}}$  tous deux définis sur  $F$ . Soit  $Y_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathfrak{h}, \text{reg}}(F)$  qui n'admet pas 0 comme valeur propre dans  $W_{\underline{d}}$ . D'après 6.1(2), on a

$$(2) \quad c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2} = w(d_{\mathfrak{h}})^{-1} \lim_{\substack{\lambda \in F^\times \\ \lambda \rightarrow 0}} \Theta_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})^{1/2}$$

où  $d_{\mathfrak{h}} = d - \underline{d}$  est la dimension de  $W_{\underline{d}}$ . Pour tout  $\lambda \in F^\times$  assez petit, la classe de conjugaison stable de  $e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$  admet pour paramètre  $\zeta_\lambda = (J, (F_{\pm j})_{j \in J}, (F_j)_{j \in J}, (y_j(\lambda))_{j \in J})$  (les trois premières données du quadruplet ne dépendent pas de  $\lambda$ ). Alors la classe de conjugaison stable de  $\tilde{x}(\xi, \gamma)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$  est elle paramétrée par  $\xi \sqcup \zeta_\lambda^2$  où  $\zeta_\lambda^2 = (J, (F_{\pm j})_{j \in J}, (F_j)_{j \in J}, (y_j(\lambda)^2)_{j \in J})$ .

Supposons dans un premier temps que  $\underline{d}$  est pair. Alors  $F_{\pm j} = E$ ,  $F_j = E \times E$  pour tout  $j \in J$  et il existe une famille  $(a_j)_{j \in J}$  d'éléments distincts et de traces non nulles de  $E$  telle que  $y_j(\lambda) = (e^{\lambda a_j}, e^{-\lambda \bar{a}_j})$  pour tout  $\lambda$  assez petit. On a alors  $\Gamma(\xi \sqcup \zeta_\lambda^2) = \Gamma(\xi)$  et la classe de conjugaison de  $\tilde{x}(\xi, \gamma)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$  est paramétrée par  $\gamma \in \Gamma(\xi \sqcup \zeta_\lambda^2)$ . Pour tout  $I' \subset I$ , on pose  $\xi(I') = (I', (F_{\pm i})_{i \in I'}, (F_i)_{i \in I'}, (y_i)_{i \in I'})$ . On définit de même  $\zeta_\lambda^2(J')$  pour  $J' \subset J$ . Puisque  $\Theta_{\tilde{\Pi}}$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$ , pour tout  $\lambda$  assez petit, on a l'égalité

$$(3) \quad \Theta_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})D_0^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma)e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})^{1/2} = \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} \Theta_{\Sigma_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1))D^{d_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1))^{1/2} \Theta_{\Sigma_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2))D^{d_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2))^{1/2} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2), \gamma)$$

où la somme porte sur les quadruplets  $(I_1, I_2, J_1, J_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $J_1 \sqcup J_2 = J$ ,  $d_{I_1} + 2|J_1| = d_+$  et  $d_{I_2} + 2|J_2| = d_-$ . Fixons un tel quadruplet. D'après 6.1(1), on a

$$(4) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1))D^{d_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1))^{1/2} = w(d_+ - d_{I_1})c_{\Sigma_+}(\xi(I_1))D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2}$$

$$(5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2))D^{d_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2))^{1/2} = w(d_- - d_{I_2})c_{\Sigma_-}(\xi(I_2))D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2}$$

De façon analogue à 6.3(6), on montre que

(6) Pour  $\lambda$  assez petit, on a

$$\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2), \gamma) = \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma)$$

On vérifie facilement que

$$(7) \quad D^{\tilde{M}}(\tilde{x}) = |2|_F^d D_0^{\tilde{M}}(\tilde{x})$$

pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{M}_{reg}(F)$ . Pour tous  $I_1, I_2 \subset I$  tels que  $d_{I_1} \leq d_+$ ,  $d_{I_2} \leq d_-$ , posons

$$B(I_1, I_2) = c_{\Sigma_+}(\xi(I_1)) D^{d_+}(\xi(I_1))^{1/2} c_{\Sigma_-}(\xi(I_2)) D^{d_-}(\xi(I_2))^{1/2}$$

De (2), (3), (4), (5), (6) et (7), on déduit que

$$(8) \quad c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma)) D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2} = \\ w(d_{\mathfrak{h}})^{-1} |2|_F^{d/2} \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} w(d_+ - d_{I_1}) w(d_- - d_{I_2}) B(I_1, I_2) \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma)$$

où la somme porte sur les mêmes quadruplets qu'en (3). Fixons  $(I_1, I_2)$  et examinons la somme sur  $(J_1, J_2)$ . Elle est vide sauf si  $d_+ - d_{I_1}$  et  $d_- - d_{I_2}$  sont positifs et pairs et si tel est le cas, elle comporte  $\binom{|J|}{(d_+ - d_{I_1})/2}$  termes. On vérifie que

$$\binom{|J|}{(d_+ - d_{I_1})/2} w(d_+ - d_{I_1}) w(d_- - d_{I_2}) = w(d - \underline{d}) = w(d_{\mathfrak{h}})$$

Par conséquent, (8) devient

$$(9) \quad c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma)) D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2} = |2|_F^{d/2} \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2) \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma)$$

où la somme porte sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$  et  $d_+ - d_{I_1}$ ,  $d_- - d_{I_2}$  pairs et positifs.

Supposons maintenant que  $\underline{d}$  soit impair. Alors il existe une famille  $(a_j)_{j \in J}$  d'éléments de  $E$  et  $j_0 \in J$  tels que, pour  $\lambda$  assez petit,

- $F_{\pm j_0} = F$ ,  $F_{j_0} = E$ ,  $Tr_{E/F}(a_{j_0}) = 0$  et  $y_{j_0}(\lambda) = e^{\lambda a_0}$ ;
- $F_{\pm j} = E$ ,  $F_j = E \times E$  et  $y_j(\lambda) = (e^{\lambda a_j}, e^{-\lambda \bar{a}_j})$  pour tout  $j \in J \setminus \{j_0\}$ .

On a alors  $\Gamma(\xi \sqcup \zeta_\lambda^2) = \Gamma(\xi) \times \Gamma(e^{2\lambda a_0})/N(E^\times)$  et la classe de conjugaison de  $\tilde{x}(\xi, \gamma) e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}$  est paramétrée par  $(\gamma, \gamma_0(\lambda))$  pour un certain  $\gamma_0(\lambda) \in \Gamma(e^{2\lambda a_0})/N(E^\times)$ . D'après la façon dont  $\tilde{M}_{\underline{d}}$  a été plongé dans  $\tilde{M}$ , on a  $\gamma_0(\lambda) = \nu_1 e^{\lambda a_0}$ . Puisque  $\Theta_{\tilde{\Pi}}$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$ , pour tout  $\lambda$  assez petit, on a l'égalité

$$(10) \quad \Theta_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma) e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}}) D_0^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma) e^{\lambda Y_{\mathfrak{h}}})^{1/2} = \\ \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} \Theta_{\Sigma_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1)) D^{d_+}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1))^{1/2} \Theta_{\Sigma_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2)) \\ D^{d_-}(\xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2))^{1/2} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2), (\gamma, \gamma_0(\lambda)))$$

où la somme porte sur les quadruplets  $(I_1, I_2, J_1, J_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $J_1 \sqcup J_2 = J$ ,  $d_{I_1} + d_{J_1} = d_+$  et  $d_{I_2} + d_{J_2} = d_-$ . Fixons un tel quadruplet. On distingue deux cas suivant que  $j_0 \in J_1$  ou  $j_0 \in J_2$ . Toujours de la même façon que 4.3(6), on montre que pour  $\lambda$  assez proche de 0, on a

$$\begin{aligned} & \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2), (\gamma, \gamma_0(\lambda))) = \\ & \begin{cases} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(j_0), \xi(I_2), (\gamma, \gamma_0(\lambda))) & \text{si } j_0 \in J_1 \\ \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(j_0), (\gamma, \gamma_0(\lambda))) & \text{si } j_0 \in J_2 \end{cases} \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3.1, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_1), \xi(I_2) \sqcup \zeta_\lambda^2(J_2), (\gamma, \gamma_0(\lambda))) = \\ & \begin{cases} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(1)P_{I_2}(-1)}{P_{I_2}(0)}) & \text{si } j_0 \in J_1 \\ \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(1)P_{I_1}(-1)}{P_{I_1}(0)}) \operatorname{sgn}_{E/F}(-\nu_1) & \text{si } j_0 \in J_2 \end{cases} \end{aligned}$$

où pour tout  $I' \subset I$ , on a posé  $P_{I'} = P_{\xi(I')}$ . On a toujours (4) et (5). D'après (2),(7) et (10), on en déduit que

$$\begin{aligned} (11) \quad & c_{\bar{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma)) D^{\bar{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2} = |2|_F^{d/2} w(d_{\mathfrak{q}})^{-1} \left( \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} w(d_+ - d_{I_1}) w(d_- - d_{I_2}) B(I_1, I_2) \right. \\ & \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(1)P_{I_2}(-1)}{P_{I_2}(0)}) + \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ J_1, J_2}} w(d_+ - d_{I_1}) w(d_- - d_{I_2}) B(I_1, I_2) \\ & \left. \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(1)P_{I_1}(-1)}{P_{I_1}(0)}) \operatorname{sgn}_{E/F}(-\nu_1) \right) \end{aligned}$$

la première somme (resp. la deuxième) portant sur les mêmes quadruplets que (10) avec la condition supplémentaire  $j_0 \in J_1$  (resp.  $j_0 \in J_2$ ). Dans la première somme, à  $(I_1, I_2)$  fixé, la somme sur  $(J_1, J_2)$  est vide sauf si  $d_+ - d_{I_1}$  est positif impair et  $d_- - d_{I_2}$  est positif pair. Si tel est le cas, elle contient  $\binom{|J|-1}{(d_- - d_{I_2})/2}$  termes. On vérifie que

$$(12) \quad \binom{|J|-1}{(d_- - d_{I_2})/2} w(d_+ - d_{I_1}) w(d_- - d_{I_2}) = w(d - \underline{d}) = w(d_{\mathfrak{q}})$$

De même, dans la deuxième somme, à  $(I_1, I_2)$  fixé, la somme sur  $(J_1, J_2)$  est vide sauf si  $d_+ - d_{I_1}$  est positif pair et  $d_- - d_{I_2}$  est positif impair. Si tel est le cas, elle contient  $\binom{|J|-1}{(d_+ - d_{I_1})/2}$  termes. On vérifie que

$$(13) \quad \binom{|J|-1}{(d_+ - d_{I_1})/2} w(d_+ - d_{I_1}) w(d_- - d_{I_2}) = w(d - \underline{d}) = w(d_{\mathfrak{q}})$$

De (11), (12) et (13), on déduit que

$$(14) \quad c_{\tilde{\Pi}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))D^{\tilde{M}}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2} = |2|_F^{d/2} \left( \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2) \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \right. \\ \left. sgn_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(1)P_{I_2}(-1)}{P_{I_2}(0)}) + \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2) \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \right. \\ \left. sgn_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(1)P_{I_1}(-1)}{P_{I_1}(0)}) sgn_{E/F}(-\nu_1) \right)$$

où la première (resp. la deuxième) somme porte sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$  positif impair (resp. pair) et  $d_- - d_{I_2}$  positif pair (resp. impair).

On montre de la même façon des formules analogues à (9) et (14) pour  $c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi, \gamma))D^{\tilde{M}'}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2}$ . Plus précisément, pour tous  $I_1, I_2 \subset I$  vérifiant  $d'_+ \geq d_{I_1}$  et  $d'_- \geq d_{I_2}$ , posons

$$B'(I_1, I_2) = c_{\Sigma'_+}(\xi(I_1))D^{d'_+}(\xi(I_1))^{1/2} c_{\Sigma'_-}(\xi(I_2))D^{d'_-}(\xi(I_2))^{1/2}$$

On a alors

– Si  $\underline{d}$  est impair, alors

$$(15) \quad c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi, \gamma))D^{\tilde{M}'}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2} = |2|_F^{d'/2} \sum_{I_1, I_2} B'(I_1, I_2) \Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma)$$

où la somme porte sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d'_+ - d_{I_1}$  et  $d'_- - d_{I_2}$  positifs pairs.

– Si  $\underline{d}$  est pair, alors

$$(16) \quad c_{\tilde{\Pi}'}(\tilde{x}(\xi, \gamma))D^{\tilde{M}'}(\tilde{x}(\xi, \gamma))^{1/2} = |2|_F^{d'/2} \left( \sum_{I_1, I_2} B'(I_1, I_2) \Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \right. \\ \left. sgn_{E/F}(\delta^{-d_{I_2}} \frac{P_{I_2}(1)P_{I_2}(-1)}{P_{I_2}(0)}) + \sum_{I_1, I_2} B'(I_1, I_2) \Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \right. \\ \left. sgn_{E/F}(\delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(1)P_{I_1}(-1)}{P_{I_1}(0)}) sgn_{E/F}(-\nu_1) \right)$$

où la première (resp. la deuxième) somme porte sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d'_+ - d_{I_1}$  positif impair (resp. pair) et  $d'_- - d_{I_2}$  positif pair (resp. impair).

On peut maintenant, grâce à (1), (9), (14), (15) et (16), exprimer  $f_1(\xi)$  en fonction de  $\Theta_{\Sigma'_+} \times \Theta_{\Sigma'_-}$  et  $\Theta_{\Sigma'_+} \times \Theta_{\Sigma'_-}$ . Supposons à nouveau  $\underline{d}$  pair. On obtient

$$(17) \quad f_1(\xi) = \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ I'_1, I'_2}} B(I_1, I_2) B'(I'_1, I'_2) \operatorname{sgn}_{E/F} \left( \delta^{-d_{I'_2}} \frac{P_{I'_2}(-1) P_{I'_2}(1)}{P_{I'_2}(0)} \right) A(I_1, I_2, I'_1, I'_2) \\ + \sum_{\substack{I_1, I_2 \\ I'_1, I'_2}} B(I_1, I_2) B'(I'_1, I'_2) \operatorname{sgn}_{E/F} \left( \delta^{-d_{I'_1}} \frac{P_{I'_1}(-1) P_{I'_1}(1)}{P_{I'_1}(0)} \right) \operatorname{sgn}_{E/F}(-\nu_1) A(I_1, I_2, I'_1, I'_2)$$

la première (resp. la deuxième) somme portant sur les quadruplets  $(I_1, I_2, I'_1, I'_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I'_1 \sqcup I'_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$  et  $d_- - d_{I_2}$  positifs pairs,  $d'_+ - d'_{I'_1}$  positif impair (resp. pair) et  $d'_- - d'_{I'_2}$  positif pair (resp. impair), et où on a posé

$$A(I_1, I_2, I'_1, I'_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma(\xi)} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I'_1), \xi(I'_2), \gamma)$$

Cette somme est à une constante près la somme des

$$\prod_{i \in I_2} \operatorname{sgn}_{F_i/F_{\pm i}}(\gamma_i^{-1}(1 + y_i)) \prod_{i \in I'_2} \operatorname{sgn}_{F_i/F_{\pm i}}(\gamma_i^{-1}(1 + y_i))$$

sur  $\Gamma(\xi)$ . Comme  $\Gamma(\xi)$  est un espace principal homogène sous  $C(\xi)$ , cette somme est nulle sauf si  $(I_1, I_2) = (I'_1, I'_2)$ . Si  $(I_1, I_2) = (I'_1, I'_2)$ , on a

$$\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi(I_1), \xi(I_2), \gamma) \Delta_{\mu'_+, \mu'_-}(\xi(I'_1), \xi(I'_2), \gamma) = \mu_+ \mu'_+(P_{I_1}(0) P_{I_1}(-1)^{-1}) \mu_- \mu'_-(P_{I_2}(0) P_{I_2}(-1)^{-1})$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma(\xi)$ . On a  $|\Gamma(\xi)| = |C(\xi)|$ , et par conséquent

$$(18) \quad A(I_1, I_2, I'_1, I'_2) = |C(\xi)| \mu_+ \mu'_+(P_{I_1}(0) P_{I_1}(-1)^{-1}) \mu_- \mu'_-(P_{I_2}(0) P_{I_2}(-1)^{-1})$$

Supposons que  $d'_+$  est de même parité que  $d_+$  et  $d_-$ . On en déduit que  $(\mu'_+ \mu_+)_{|F^\times} = \operatorname{sgn}_{E/F}$  et  $(\mu_- \mu'_-)_{|F^\times}$  est trivial. Un quadruplet de la forme  $(I_1, I_2, I_1, I_2)$  ne peut intervenir que dans la deuxième somme de (17) (donc la première somme est nulle). Pour un tel quadruplet, on vérifie que  $\delta^{-d_{I_2}} P_{I_2}(1) P_{I_2}(-1) P_{I_2}(0)^{-1} \in F^\times$ . Par conséquent

$$\mu_- \mu'_-(P_{I_2}(0) P_{I_2}(-1)^{-1}) = \mu_- \mu'_-(\delta^{-d_{I_2}} P_{I_2}(1))$$

et

$$\operatorname{sgn}_{E/F} \left( \delta^{-d_{I_1}} \frac{P_{I_1}(-1) P_{I_1}(1)}{P_{I_1}(0)} \right) \mu_+ \mu'_+(P_{I_1}(0) P_{I_1}(-1)^{-1}) = \mu_+ \mu'_+(\delta^{-d_{I_1}} P_{I_1}(1))$$

Grâce à (18), on en déduit que

$$(19) \quad f_1(\xi) = \operatorname{sgn}_{E/F}(-\nu_1) \sum_{I_1, I_2} B(I_1, I_2) B'(I_1, I_2) \mu_+ \mu'_+(\delta^{-d_{I_1}} P_{I_1}(1)) \mu_- \mu'_-(\delta^{-d_{I_2}} P_{I_2}(1))$$

où la somme porte sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $d_+ - d_{I_1}$ ,  $d_- - d_{I_2}$ ,  $d'_+ - d_{I_1}$  positifs pairs et  $d'_- - d_{I_2}$  positif impair. On vérifie que les quatres dernières conditions sont équivalentes à  $d_{I_1} \in \mathcal{D}(d_+, d'_+)$  et  $d_{I_2} \in \mathcal{D}(d_-, d'_-)$ . On voit aussi que l'on peut remplacer le terme  $\operatorname{sgn}_{E/F}(-\nu_1)$  par  $\operatorname{sgn}_{E/F}(-\nu_1)^{d_- + d'_-}$ . Le membre de droite de (19) s'identifie alors à  $f_2(\xi)$ . D'où l'égalité  $f_1(\xi) = f_2(\xi)$ . Les autres cas ( $d'_-$  de même parité que  $d_-$  et  $d_+$  puis  $d_-$  impair) se traitent de la même façon ■

## 6.5 Endoscopie et modèles de Whittaker en dimension paire

Soient  $(V, h)$ ,  $(V_+, h_+)$ ,  $(V_-, h_-)$  trois espaces hermitiens de dimensions respectives  $d$ ,  $d_+$ ,  $d_-$  et de groupes unitaires respectifs  $G$ ,  $G_+$ ,  $G_-$ . On fait les hypothèses suivantes

- $d$  est pair ;
- $d = d_+ + d_-$  ;
- $G$ ,  $G_+$  et  $G_-$  sont quasi-déployés.

On peut alors considérer  $G_+ \times G_-$  comme un groupe endoscopique de  $G$ . Fixons un couple  $(\mu_+, \mu_-)$  de caractères continus de  $E^\times$  dont la restriction à  $F^\times$  coïncide avec  $(\operatorname{sgn}_{E/F}^{d_-}, \operatorname{sgn}_{E/F}^{d_+})$ . On normalise alors les facteurs de transfert comme en 3.1. Soient  $\Sigma$ ,  $\Sigma_+$ ,  $\Sigma_-$  des combinaisons linéaires formelles d'éléments de  $\operatorname{Temp}(G)$ ,  $\operatorname{Temp}(G_+)$  et  $\operatorname{Temp}(G_-)$  respectivement. On suppose que

- $\Theta_{\Sigma_+}$  et  $\Theta_{\Sigma_-}$  sont stables ;
- $\Theta_\Sigma$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$ .

Soit  $\eta \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}_{E/F}) - \{0\}/N(E^\times)$ . En prolongeant par linéarité l'application  $\sigma \mapsto m(\sigma, \eta)$ , on définit  $m(\Sigma, \eta)$ .

**Proposition 6.5.1** *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$m(\Sigma, \eta) = \begin{cases} c_{\Sigma_+}(1) c_{\Sigma_-}(1) & \text{si } d_+ \text{ et } d_- \text{ sont pairs} \\ \operatorname{sgn}_{E/F}(-2\nu_0 \eta \delta) \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} c_{\Sigma_+}(1) c_{\Sigma_-}(1) & \text{si } d_+ \text{ et } d_- \text{ sont impairs} \end{cases}$$

Preuve : Fixons deux éléments distincts  $a_1, a_2 \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}_{E/F} \setminus \{0\}$ . Introduisons des éléments  $X_+, X_{qd} \in \mathfrak{g}_{\operatorname{reg}}(F)$  comme en 5.3. D'après le lemme 5.5.1, on a alors

$$(1) \quad m(\Sigma, \eta) = (2w(d))^{-1} \lim_{\substack{\lambda \in F^{\times, 2} \\ \lambda \rightarrow 0}} (2\Theta_\Sigma(e^{\lambda X_{qd}}) D^G(e^{\lambda X_{qd}})^{1/2} + d \operatorname{sgn}_{E/F}(2A\eta) \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \Theta_\Sigma(e^{\lambda X_+}) D^G(e^{\lambda X_+})^{1/2})$$

où on a posé  $A = a_2 - a_1$ . Il existe une famille  $(\alpha_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $E$  telle que, pour tout  $\lambda \in F^\times$  assez petit, la classe de conjugaison stable de  $e^{\lambda X_{qd}}$  soit paramétrée par  $\xi_\lambda = (I, (F_{\pm i})_{i \in I}, (F_i)_{i \in I}, (y_i(\lambda))_{i \in I})$  où

- $F_{\pm i} = E, F_i = E \times E$ ;
- $y_i(\lambda) = (e^{\lambda\alpha_i}, e^{-\lambda\bar{\alpha}_i})$

pour tout  $i \in I$ . On a  $C(\xi_\lambda) = \{1\}$ , c'est à-dire que la classe de conjugaison de  $e^{\lambda X_{qd}}$  est entièrement déterminée par  $\xi_\lambda$ . Pour tout  $I' \subset I$ , posons  $\xi_\lambda(I') = (I', (F_{\pm i})_{i \in I'}, (F_i)_{i \in I'}, (y_i(\lambda))_{i \in I'})$ . Puisque  $\Theta_\Sigma$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$ , on a, pour tout  $\lambda$  assez petit,

$$(2) \quad \Theta_\Sigma(e^{\lambda X_{qd}})D^G(e^{\lambda X_{qd}})^{1/2} = \sum_{I_1, I_2} \Theta_{\Sigma_+}(\xi_\lambda(I_1))D^{G_+}(\xi_\lambda(I_1))^{1/2} \Theta_{\Sigma_-}(\xi_\lambda(I_2)) \\ D^{G_-}(\xi_\lambda(I_2))^{1/2} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi_\lambda(I_1), \xi_\lambda(I_2), 1)$$

où la somme porte sur les couples  $(I_1, I_2)$  vérifiant  $I_1 \sqcup I_2 = I$ ,  $2|I_1| = d_+$  et  $2|I_2| = d_-$ . Fixons un tel couple. D'après 6.1(1), on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma_+}(\xi_\lambda(I_1))D^{G_+}(\xi_\lambda(I_1))^{1/2} = w(d_+)c_{\Sigma_+}(1)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma_-}(\xi_\lambda(I_2))D^{G_-}(\xi_\lambda(I_2))^{1/2} = w(d_-)c_{\Sigma_-}(1)$$

On montre alors comme en 6.3(6) que pour  $\lambda$  assez petit, on a

$$\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\xi_\lambda(I_1), \xi_\lambda(I_2), 1) = \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\emptyset, \emptyset, 1) = 1$$

Par passage à la limite dans (2), on en déduit que

$$(3) \quad \lim_{\lambda \in F^\times, \lambda \rightarrow 0} \Theta_\Sigma(e^{\lambda X_{qd}})D^G(e^{\lambda X_{qd}})^{1/2} = \sum_{I_1, I_2} w(d_+)w(d_-)c_{\Sigma_+}(1)c_{\Sigma_-}(1)$$

la somme portant sur les mêmes couples que (2). Si  $d_+$  et  $d_-$  sont impairs, cette somme est vide. Si  $d_+$  et  $d_-$  sont pairs, cette somme comporte  $\binom{|I|}{d_+/2}$  termes. On vérifie que

$$\binom{|I|}{d_+/2} w(d_+)w(d_-) = w(d)$$

Par conséquent (3) devient

$$(4) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_\Sigma(e^{\lambda X_{qd}})D^G(e^{\lambda X_{qd}})^{1/2} = \begin{cases} w(d)c_{\Sigma_+}(1)c_{\Sigma_-}(1) & \text{si } d_+ \text{ et } d_- \text{ sont pairs} \\ 0 & \text{si } d_+ \text{ et } d_- \text{ sont impairs} \end{cases}$$

Il existe une famille  $(\beta_j)_{j \in J}$  d'éléments de  $E$  avec  $\{1, 2\} \subset J$ ,  $\beta_1 = a_1$ ,  $\beta_2 = a_2$  telle que, pour  $\lambda$  assez petit, la classe de conjugaison stable de  $e^{\lambda X_+}$  soit paramétrée par  $\zeta_\lambda = (J, (F_{\pm j})_{j \in J}, (F_j)_{j \in J}, (y_j(\lambda))_{j \in J})$ , où

- $F_{\pm 1} = F_{\pm 2} = F, F_1 = F_2 = E, y_1(\lambda) = e^{\lambda a_1}, y_2(\lambda) = e^{\lambda a_2}$ ;
- $F_{\pm j} = E, F_j = E \times E, y_j(\lambda) = (e^{\lambda \beta_j}, e^{-\lambda \bar{\beta}_j})$  pour tout  $j \in J \setminus \{1, 2\}$ .

On a alors  $C(\zeta_\lambda) = F_{\pm 1}^\times/N(F_1^\times) \times F_{\pm 2}^\times/N(F_2^\times) = F^\times/N(E^\times) \times F^\times/N(E^\times)$ . La classe de conjugaison de  $e^{\lambda X_+}$  est alors déterminée par  $c = (\bar{1}, -\bar{1}) \in F^\times/N(E^\times) \times F^\times/N(E^\times)$  (où pour  $x \in F^\times$ , on désigne par  $\bar{x}$  l'image de  $x$  dans  $F^\times/N(E^\times)$ ). Puisque  $\Theta_\Sigma$  est un transfert de  $\Theta_{\Sigma_+} \times \Theta_{\Sigma_-}$ , on a , pour tout  $\lambda$  assez petit,

$$(5) \quad \Theta_\Sigma(e^{\lambda X_+})D^G(e^{\lambda X_+})^{1/2} = \sum_{J_1, J_2} \Theta_{\Sigma_+}(\zeta_\lambda(J_1))D^{G_+}(\zeta_\lambda(J_1))^{1/2} \Theta_{\Sigma_-}(\zeta_\lambda(J_2)) \\ D^{G_-}(\zeta_\lambda(J_2))^{1/2} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(J_1), \zeta_\lambda(J_2), c)$$

où la somme porte sur les couples  $(J_1, J_2)$  vérifiant  $J_1 \sqcup J_2 = J$ ,  $d_{J_1} = d_+$  et  $d_{J_2} = d_-$ . Fixons un tel couple. Supposons dans un premier temps que  $d_+$  et  $d_-$  sont pairs. Alors, on a  $\{1, 2\} \subset J_1$  ou  $\{1, 2\} \subset J_2$ . Si  $\{1, 2\} \subset J_1$ , alors, en remplaçant  $G$  par  $G_+$  dans les constructions, on peut trouver un élément  $X_+^{G_+} \in \mathfrak{g}_{+, reg}(F)$  analogue à  $X_+$  tel que pour tout  $\lambda \in F^\times$  assez petit, la classe de conjugaison stable de  $e^{\lambda X_+^{G_+}}$  soit paramétrée par  $\zeta_\lambda(J_1)$ . D'après le lemme 5.5.1,  $\Theta_{\Sigma_+}(\zeta_\lambda(J_1))D^{G_+}(\zeta_\lambda(J_1))^{1/2}$  tend vers 0 pour  $\lambda \in F^{\times, 2}$  qui tend vers 0. D'après 6.1(1),  $\Theta_{\Sigma_-}(\zeta_\lambda(J_2))D^{G_-}(\zeta_\lambda(J_2))^{1/2}$  admet aussi une limite lorsque  $\lambda$  tend vers 0, tandis que  $\Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(J_1), \zeta_\lambda(J_2), c)$  reste borné (car c'est un nombre complexe de module 1). On en déduit que le terme indexé par  $(I_1, I_2)$  dans la somme (5) tend vers 0 pour  $\lambda \in F^{\times, 2}$  qui tend vers 0. Le même résultat, avec la même preuve, est valable pour les couples  $(J_1, J_2)$  avec  $\{1, 2\} \subset J_2$ . Par conséquent, si  $d_+$  et  $d_-$  sont pairs, on a

$$(6) \quad \lim_{\lambda \in F^{\times, 2}, \lambda \rightarrow 0} \Theta_\Sigma(e^{\lambda X_+})D^G(e^{\lambda X_+})^{1/2} = 0$$

Supposons maintenant que  $d_+$  et  $d_-$  sont impairs et fixons un couple  $(J_1, J_2)$  comme dans la somme (5). On a alors  $1 \in J_1$  et  $2 \in J_2$  ou  $2 \in J_1$  et  $1 \in J_2$ . Dans les deux cas, d'après 6.1(1), on a

$$(7) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma_+}(\zeta_\lambda(J_1))D^{G_+}(\zeta_\lambda(J_1))^{1/2} = w(d_+)c_{\Sigma_+}(1)$$

$$(8) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Theta_{\Sigma_-}(\zeta_\lambda(J_2))D^{G_-}(\zeta_\lambda(J_2))^{1/2} = w(d_-)c_{\Sigma_-}(1)$$

De façon tout à fait analogue à 6.3(6), on montre que, pour  $\lambda$  assez petit, on a l'égalité

$$(9) \quad \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(J_1), \zeta_\lambda(J_2), c) = \begin{cases} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(1), \zeta_\lambda(2), c) & \text{si } 1 \in J_1 \text{ et } 2 \in J_2 \\ \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(2), \zeta_\lambda(1), c) & \text{si } 2 \in J_1 \text{ et } 1 \in J_2 \end{cases}$$

où on a posé  $\zeta_\lambda(i) = \zeta_\lambda(\{i\})$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . On calcule

$$(10) \quad \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(1), \zeta_\lambda(2), c) = \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(2), \zeta_\lambda(1), c) \\ = \mu_+ \left( \frac{e^{\lambda a_2}}{1 + e^{\lambda a_2}} \right) \mu_- \left( \frac{e^{\lambda a_1}}{1 + e^{\lambda a_1}} \right) \text{sgn}_{E/F} \left( -\nu_0 \delta^{-3} (e^{\lambda a_1} - e^{\lambda a_2}) (1 + e^{\lambda a_1})^{-1} (1 + e^{\lambda a_2})^{-1} \right)$$

On peut remplacer le  $\delta^{-3}$  de l'égalité précédente par  $\delta$  (car  $\delta^4$  est une norme de  $E^\times$ ). Lorsque  $\lambda$  tend vers 0,  $\frac{e^{\lambda a_1} - e^{\lambda a_2}}{\lambda(a_1 - a_2)}$  tend vers 1. Par conséquent pour  $\lambda \in F^{\times,2}$  assez proche de 0, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta(e^{\lambda a_1} - e^{\lambda a_2})) &= \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta\lambda(a_1 - a_2)) \\ &= \operatorname{sgn}_{E/F}(\delta(a_1 - a_2)) \end{aligned}$$

Les autres termes de l'expression (10) admettent des limites lorsque  $\lambda$  tend vers 0 qui se calculent aisément. On obtient

$$(11) \quad \lim_{\lambda \in F^{\times,2}, \lambda \rightarrow 0} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(1), \zeta_\lambda(2), c) = \lim_{\lambda \in F^{\times,2}, \lambda \rightarrow 0} \Delta_{\mu_+, \mu_-}(\zeta_\lambda(2), \zeta_\lambda(1), c) = \\ \mu_+ \mu_- (1/2) \operatorname{sgn}_{E/F}(\nu_0 \delta(a_2 - a_1)) = \operatorname{sgn}_{E/F}(\nu_0 \delta A)$$

où à la dernière égalité, on a utilisé le fait que le caractère  $\mu_+ \mu_-$  est trivial sur  $F^\times$ . De (5), (7), (8), (9) et (11), on déduit que

$$\lim_{\lambda \in F^{\times,2}, \lambda \rightarrow 0} \Theta_\Sigma(e^{\lambda X_+}) D^G(e^{\lambda X_+})^{1/2} = \sum_{J_1, J_2} w(d_+) w(d_-) \operatorname{sgn}_{E/F}(\nu_0 \delta A) c_{\Sigma_+}(1) c_{\Sigma_-}(1)$$

où on somme sur les mêmes couples  $(J_1, J_2)$  qu'en (5). Il est facile de compter le nombre de tels couples : il y en a  $2 \binom{|J|-2}{(d_+-1)/2} = 2 \binom{d/2-1}{(d_+-1)/2}$ . On vérifie aisément que l'on a l'égalité

$$2 \binom{d/2-1}{(d_+-1)/2} w(d_+) w(d_-) = 2d^{-1} w(d)$$

On obtient finalement que, pour  $d_+$  et  $d_-$  impairs, on a

$$(12) \quad \lim_{\lambda \in F^{\times,2}, \lambda \rightarrow 0} \Theta_\Sigma(e^{\lambda X_+}) D^G(e^{\lambda X_+})^{1/2} = 2d^{-1} w(d) \operatorname{sgn}_{E/F}(\nu_0 \delta A) c_{\Sigma_+}(1) c_{\Sigma_-}(1)$$

L'égalité de l'énoncé est maintenant conséquence facile de (1), (4), (6) et (12) ■

## 7 $L$ -paquets tempérés pour les groupes unitaires et endoscopie

### 7.1 Paramètres de Langlands et représentations conjuguées-duales du groupe de Weil-Deligne

Notons  $WD_E = W_E \times SL_2(\mathbb{C})$ , où  $W_E$  est le groupe de Weil, le groupe de Weil-Deligne de  $E$ . Soit  $N \geq 1$  un entier. On appelle paramètre de Langlands de dimension  $N$  tout homomorphisme continu

$$\varphi : WD_E \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\varphi$  est semi-simple ;
- la restriction de  $\varphi$  à  $SL_2(\mathbb{C})$  est algébrique ;

On dira de plus que  $\varphi$  est tempéré si l'image de  $W_E$  par  $\varphi$  est relativement compacte. Deux paramètres de Langlands  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont dits conjugués, ce que l'on note  $\varphi \simeq \varphi'$ , s'ils ont même dimension  $N$  et qu'ils sont conjugués par un élément de  $GL_N(\mathbb{C})$ . Notons  $\Phi_{temp}(GL_N)$  l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de dimension  $N$  à conjugaison près. La correspondance locale de Langlands, due à Harris-Taylor et Henniart, associe à tout  $\varphi \in \Phi_{temp}(GL_N)$  une représentation irréductible tempérée  $\pi(\varphi)$  de  $GL_N(E)$ . Notons  $\Phi_{temp,irr}(GL_N)$  le sous-ensemble des  $\varphi \in \Phi_{temp}(GL_N)$  qui sont irréductibles. Fixons  $t \in W_F - W_E$ , cet élément agit par conjugaison sur  $W_E$ , on prolonge cette action à  $WD_E$  en laissant agir  $t$  de façon triviale sur  $SL_2(\mathbb{C})$ . Pour tout  $\varphi \in \Phi_{temp}(GL_N)$ , on définit un nouveau paramètre de Langlands  $\varphi^\theta \in \Phi_{temp}(GL_N)$  de la façon suivante :  $\varphi^\theta(\tau) = {}^t\varphi(t\tau t^{-1})^{-1}$  pour tout  $\tau \in WD_E$ . L'élément  $\varphi^\theta$  ainsi construit ne dépend pas (à conjugaison près) du choix de  $t$ . Un paramètre  $\varphi \in \Phi_{temp}(GL_N)$  sera dit conjugué-dual, si on a  $\varphi \simeq \varphi^\theta$ . C'est équivalent à l'existence d'une forme bilinéaire non dégénérée  $B : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant

$$(1) B(\varphi(\tau)w, \varphi(t\tau t^{-1})w') = B(w, w'), \text{ pour tous } w, w' \in \mathbb{C}^N \text{ et pour tout } \tau \in WD_E$$

Notons  $\Phi_{temp}^\theta(GL_N)$  le sous-ensemble des paramètres  $\varphi \in \Phi_{temp}(GL_N)$  qui sont conjugués-duals. Un élément  $\varphi \in \Phi_{temp}(GL_N)$  sera dit conjugué-orthogonal (resp. conjugué-symplectique) s'il existe une forme bilinéaire non dégénérée  $B : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  qui vérifie (1) et la condition supplémentaire

$$(2) B(w, \varphi(t^2)w') = B(w', w) \text{ (resp. } B(w, \varphi(t^2)w') = -B(w', w)) \text{ pour tous } w, w' \in \mathbb{C}^N$$

Cette définition ne dépend pas du choix de  $t$ . Fixons une telle forme  $B$  et notons  $Aut(\varphi, B)$  le groupe des éléments  $g \in GL_N(\mathbb{C})$  qui préservent  $B$  et commutent à l'image de  $\varphi$ . A automorphisme intérieur près, ce groupe ne dépend pas de  $t$  ni de  $B$  et c'est un groupe algébrique réductif complexe (en général non connexe). On pose alors  $\mathcal{S}_\varphi = Aut(\varphi, B)/Aut(\varphi, B)^0$  où  $Aut(\varphi, B)^0$  désigne la composante neutre. Ce groupe est abélien et est donc bien défini à un unique isomorphisme près (indépendamment de  $B$  et de  $s$ ). La notation  $\mathcal{S}_\varphi$  est cependant quelque peu imprécise : elle ne dénote pas le même objet suivant que l'on considère  $\varphi$  comme un paramètre conjugué-orthogonal ou conjugué-symplectique (certains paramètres peuvent être considérés des deux façons). Néanmoins, dans ce qui suit, le contexte devrait effacer toute confusion possible (ou en tout cas l'auteur espère qu'il en est ainsi). On note  $\Phi_{temp}^+(GL_N)$  (resp.  $\Phi_{temp}^-(GL_N)$ ) le sous-ensemble de  $\Phi_{temp}(GL_N)$  constitué des paramètres conjugués-orthogonaux (resp. conjugués-symplectiques). On a alors  $\Phi_{temp}^\pm(GL_N) \subset \Phi_{temp}^\theta(GL_N)$ . On adopte la notation suivante  $\Phi_{temp,irr}^\epsilon(GL_N) = \Phi_{temp,irr}(GL_N) \cap \Phi_{temp}^\epsilon(GL_N)$  pour tout  $\epsilon \in \{+, -, \theta\}$ . On a alors l'égalité  $\Phi_{temp,irr}^\theta(GL_N) = \Phi_{temp,irr}^+(GL_N) \sqcup \Phi_{temp,irr}^-(GL_N)$ . On posera aussi  $\Phi_{temp}^\epsilon = \bigsqcup_{d \geq 0} \Phi_{temp}^\epsilon(GL_d)$  pour tout  $\epsilon \in \{+, -, \theta, \emptyset\}$ . On vérifie alors aisément les propriétés suivantes

- Pour tous  $\varphi_1 \in \Phi_{temp}^{\epsilon_1}$ ,  $\varphi_2 \in \Phi_{temp}^{\epsilon_2}$ ,  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{\pm 1\}$ , on a  $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \Phi_{temp}^{\epsilon_1 \epsilon_2}$  ;

– Pour tout  $\varphi \in \Phi_{temp}^\epsilon$ ,  $\epsilon \in \{\pm 1\}$ , on a  $\det \varphi \in \Phi_{temp}^{\epsilon^n}$ .  
 Soit  $\varphi \in \Phi_{temp}^\theta$ . Alors, il existe une décomposition, unique au choix des indices près

$$\varphi \simeq \bigoplus_{j \in J} \ell_j \varphi_j \oplus \bigoplus_{i \in I} \ell_i (\varphi_i \oplus \varphi_i^\theta)$$

où

- $I$  et  $J$  sont des ensembles finis (disjoints),
- les  $\ell_i, \ell_j$  ( $i \in I, j \in J$ ) sont des entiers naturels non nuls,
- pour tout  $j \in J$ ,  $\varphi_j$  appartient à  $\Phi_{temp,irr}^\theta$ ,
- pour tout  $i \in I$ ,  $\varphi_i$  est un élément de  $\Phi_{temp,irr}$  qui n'est pas conjugué-dual,
- les  $\varphi_i, \varphi_j$  ( $i \in I, j \in J$ ) sont distincts deux à deux.

On notera alors  $J^+$  (resp.  $J^-$ ) le sous-ensemble des  $j \in J$  tels que  $\varphi_j \in \Phi_{temp,irr}^+$  (resp.  $\varphi_j \in \Phi_{temp,irr}^-$ ). On a  $\varphi \in \Phi_{temp}^+$  (resp.  $\varphi \in \Phi_{temp}^-$ ) si et seulement si  $\ell_j$  est pair pour tout  $j \in J^-$  (resp. pour tout  $j \in J^+$ ). Soit  $\epsilon \in \{\pm\}$  et supposons que  $\varphi \in \Phi_{temp,irr}^\epsilon$ . Fixons une forme bilinéaire  $B$  qui vérifie les points (1) et (2) (avec le signe qui convient suivant  $\epsilon$ ). On a alors une identification (à automorphisme intérieur près)

$$Aut(\varphi, B) = \prod_{j \in J^\epsilon} O(\ell_j, \mathbb{C}) \times \prod_{j \in J^{-\epsilon}} Sp(\ell_j, \mathbb{C}) \times \prod_{i \in I} GL(\ell_i, \mathbb{C})$$

d'où l'on déduit une identification (bien définie cette fois)

$$(3) \quad \mathcal{S}_\varphi = \{\pm 1\}^{J^\epsilon}$$

## 7.2 Conjectures

Soit  $(V, h)$  un espace hermitien de dimension finie  $d$  et notons  $G$  son groupe unitaire. On pose  $\Phi_{temp}(G) = \Phi_{temp}^{(-1)^{d+1}}(GL_d)$ . On conjecture qu'il existe une application qui à  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$  associe un sous-ensemble  $\Pi^G(\varphi)$ , appelé  $L$ -paquet, de  $Temp(G)$  vérifiant les propriétés ci-dessous. Tout d'abord, les  $\Pi^G(\varphi)$  forment une partition de  $Temp(G)$ . Soit  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$ . On note  $\mathcal{E}^G(\varphi)$  l'ensemble des caractères  $\epsilon$  de  $\mathcal{S}_\varphi$  tels que  $\epsilon(z_\varphi) = \mu(V, h)$ . Alors il existe une bijection  $\epsilon \mapsto \sigma(\varphi, \epsilon)$  de  $\mathcal{E}^G(\varphi)$  sur  $\Pi^G(\varphi)$  vérifiant les conditions qui suivent. Pour tout  $s \in \mathcal{S}_\varphi$ , posons  $\Theta_{\varphi, s} = \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi)} \epsilon(s) \Theta_{\sigma(\varphi, \epsilon)}$ . Supposons que  $(V, h)$  vérifie **(QD)**, la distribution  $\Theta_{\varphi, 0}$  est stable (on note 0 l'élément neutre de  $\mathcal{S}_\varphi$ ).

On revient au cas général et on ne suppose plus que  $(V, h)$  vérifie **(QD)**. Soient  $(V_+, h_+)$ ,  $(V_-, h_-)$  deux espaces hermitiens. On utilise des notations que l'on espère maintenant habituelles au lecteur :  $G_+ = U(V_+)$ ,  $G_- = U(V_-)$ ,  $d_+ = \dim(V_+)$ ... On suppose que  $(V_+, h_+)$  et  $(V_-, h_-)$  vérifient l'hypothèse **(QD)** et que  $d = d_+ + d_-$ . Soient  $\varphi_+ \in \Phi_{temp}(G_+)$ ,  $\varphi_- \in \Phi_{temp}(G_-)$ ,  $\mu_+, \mu_-$  deux caractères continus de  $W_E$  que l'on identifie via la théorie du corps de classe à des caractères de  $E^\times$ .

Supposons tout d'abord que les restrictions de  $\mu_+$  et  $\mu_-$  à  $F^\times$  coïncident respectivement avec  $\text{sgn}_{E/F}^{d_-}$  et  $\text{sgn}_{E/F}^{d_+}$ . Alors  $\varphi = \mu_+\varphi_+ \oplus \mu_-\varphi_-$  appartient à  $\Phi_{temp}(G)$ . Soit  $s$  l'élément qui agit comme l'identité sur (l'espace sous-jacent à)  $\mu_+\varphi_+$  et comme la multiplication par  $-1$  sur  $\mu_-\varphi_-$ . Il existe sur  $\mu_+\varphi_+$  et  $\mu_-\varphi_-$  des formes duales-conjuguées non dégénérées de signe  $(-1)^{d_+}$ . Fixons en une  $B_+$  sur  $\mu_+\varphi_+$  et une  $B_-$  sur  $\mu_-\varphi_-$ . Alors  $B = B_+ \oplus B_-$  est une forme duale-conjuguée sur  $\varphi$  de signe  $(-1)^{d_+}$ . On a  $s \in \text{Aut}(\varphi, B)$ , donc  $s$  détermine un élément, aussi noté  $s$ , de  $\mathcal{S}_\varphi$ . Comme élément de  $\mathcal{S}_\varphi$ ,  $s$  ne dépend pas des choix de  $B_+$  et  $B_-$ . Le couple  $(\mu_+, \mu_-)$  permet de définir comme en 3.1 des facteurs de transfert entre  $G_{reg}(F)/conj$  et  $G_{+,reg}(F)/stconj \times G_{-,reg}(F)/stconj$ . Alors, pour ces facteurs de transfert, il existe un nombre complexe  $\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-)$  de module 1 tel que  $\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-)\Theta_{\varphi, s}$  soit le transfert de  $\Theta_{\varphi_+, 0} \times \Theta_{\varphi_-, 0}$ .

On suppose maintenant que les restrictions de  $\mu_+$  et  $\mu_-$  à  $F^\times$  coïncident respectivement avec  $\text{sgn}_{E/F}^{d_-}$  et  $\text{sgn}_{E/F}^{d_+}$ . Alors  $\varphi = \mu_+\varphi_+ \oplus \mu_-\varphi_-$  appartient à  $\Phi_{temp}^\theta(GL_d)$ . Introduisons un espace  $U$  de dimension  $d$  sur  $E$  et le groupe tordu  $(M, \tilde{M})$  associé. Posons  $\pi = \pi(\varphi)$ . Alors  $\pi$  est une représentation conjuguée-duale de  $M(F)$ . On en déduit comme en 3.2 un prolongement  $\tilde{\pi}$  de  $\pi$  à  $\tilde{M}(F)$ . De plus, le couple  $(\mu_+, \mu_-)$  permet de définir des facteurs de transfert entre  $\tilde{M}_{reg}(F)/conj$  et  $G_{+,reg}(F)/stconj \times G_{-,reg}(F)/stconj$ . Alors, pour ces facteurs de transfert, il existe un nombre complexe  $c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, \varphi_-)$  de module 1 tel que  $c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, \varphi_-)\Theta_{\tilde{\pi}}$  soit le transfert de  $\Theta_{\varphi_+, 0} \times \Theta_{\varphi_-, 0}$ .

**Remarque** : Ces conjectures ont récemment été démontrées par C.P.Mok pour les groupes unitaires quasi-déployés ([Mo1], [Mo2]). Les techniques développées par Arthur dans le cas des groupes orthogonaux ([A]) permettront probablement d'établir les conjectures dans le cas général.

**Dans tout ce qui suit, on admet ces conjectures pour tout les espaces hermitiens  $(V, h)$**

### 7.3 Remarques sur les conjectures

Soient  $(V, h)$  un espace hermitien de dimension  $d$ , de groupe unitaire  $G$  et  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$ . On dispose donc d'un paramétrage de  $\Pi^G(\varphi)$  par  $\mathcal{E}^G(\varphi)$ . On peut changer le paramétrage de la façon suivante : soit  $\epsilon_0$  un caractère de  $\mathcal{S}_\varphi$  vérifiant  $\epsilon_0(z_\varphi) = 1$ , pour  $\epsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi)$  on note alors  $\sigma(\varphi, \epsilon)$  la représentation notée avant  $\sigma(\varphi, \epsilon\epsilon_0)$ . Les conjectures sont alors encore valable pour ce paramétrage à condition de multiplier les constantes  $\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-)$  par  $\epsilon_0(s)$ .

Il y a quelques cas où on peut déterminer les constantes. Tout d'abord dans le cas où  $d = 0$  : on a formellement  $c_{\mu_+, \mu_-}(0, 0) = 1$ . Il y a aussi le cas où  $(V, h)$  vérifie **(QD)**,  $s = 1$  et où  $\mu_+$  est le caractère trivial. On trouve alors que  $\gamma_{1, \mu_-}^G(\varphi, 0)\Theta_{\varphi, 0}$  est le transfert de  $\Theta_{\varphi, 0}$ . Puisque dans ce cas, les facteurs de transfert valent 1, on en déduit que

$$(1) \quad \gamma_{1,\mu_-}^G(\varphi, 0) = 1$$

Dans le cas de l'endoscopie entre groupes unitaires, examinons ce qu'il se passe lorsque l'on échange  $G_+$  et  $G_-$ . Alors  $s$  est remplacé par  $sz_\varphi$  et on a  $\Theta_{\varphi, sz_\varphi} = \mu(V, h)\Theta_{\varphi, s}$ . D'un autre côté, les facteurs de transfert sont inchangés si le cocycle choisi pour les définir est trivial, ils sont multipliés par  $-1$  sinon. Comme on a choisi le cocycle de sorte qu'il soit trivial si et seulement si  $\mu(V, h) = 1$ , les facteurs de transfert sont aussi multipliés par  $\mu(V, h)$ . Par conséquent, on a

$$(2) \quad \gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) = \gamma_{\mu_-, \mu_+}^G(\varphi_-, \varphi_+)$$

Supposons maintenant que  $d$  est impair et que  $(V, h)$  ne vérifie pas **(QD)**. Soit  $(\underline{V}, \underline{h})$  l'unique espace hermitien de dimension  $d$  qui vérifie **(QD)**. Notons  $\underline{G}$  sont groupe unitaire. Pour  $\alpha \in F^\times \backslash N(E^\times)$ ,  $(V, \alpha h)$  est isomorphe à  $(\underline{V}, \underline{h})$ . On en déduit un isomorphisme bien défini à conjugaison près entre  $\underline{G}$  et  $G$ , donc aussi une identification entre leurs représentations tempérées irréductibles. On peut considérer  $\underline{G}$  comme un groupe endoscopique de  $G$  (avec  $\mu_+ = 1$ ). D'après les conjectures,  $\gamma_{1,\mu_-}^G(\varphi, 0)\Theta_{\varphi,0}^G$  est le transfert de  $\Theta_{\varphi,0}^{\underline{G}}$ . Ici le transfert correspond à l'identification entre classes de conjugaison stable de  $G$  et de  $\underline{G}$  et les facteurs de transfert valent 1. On en déduit que via l'isomorphisme entre  $G$  et  $\underline{G}$ , on a l'égalité  $\gamma_{1,\mu_-}^G(\varphi, 0)\Theta_{\varphi,0}^G = \Theta_{\varphi,0}^{\underline{G}}$ . D'après l'indépendance des caractères, on en déduit que  $\gamma_{1,\mu_-}^G(\varphi, 0) = 1$  et  $\Pi^G(\varphi) = \Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ . Les conjectures fournissent un paramétrage de cet ensemble par  $\mathcal{E}^{\underline{G}}(\varphi)$ . Définissons un caractère  $\epsilon_0$  de  $\mathcal{S}_\varphi$  donné, via l'identification 7.1(3), par

$$\epsilon_0((e_j)_{j \in J^1}) = \prod_{j \in J^1} e_j^{d_j}$$

où pour tout  $j \in J^1$ ,  $d_j$  est la dimension de  $\varphi_j$ . On a alors  $\epsilon_0(z_\varphi) = -1$ . Pour tout  $\epsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi)$ , posons  $\sigma(\varphi, \epsilon) = \sigma(\varphi, \epsilon\epsilon_0)$ . On vérifie que pour cette paramétrisation de  $\Pi^G(\varphi)$ , les conjectures 7.2 sont encore valables et que l'on a les égalités

$$(3) \quad \gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) = \gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-)$$

dans la suite, on supposera que la paramétrisation de  $\Pi^G(\varphi)$  est ainsi obtenue.

Enfin, on peut complètement déterminer les  $L$ -paquets dans le cas où  $d = 1$ . Dans ce cas, la correspondance de Langlands pour  $GL_1$  est juste la théorie du corps de classe, et les représentations tempérées irréductibles de  $G(F)$  sont les caractères continus de  $\text{Ker} N_{E/F}$ . Soit  $\mu \in \Phi_{temp}(G)$ . Via la théorie du corps de classe, on identifie  $\mu$  à un caractère de  $E^\times$  trivial sur  $F^\times$ . On a alors  $\pi(\mu) = \mu$ . Notons  $\mu'$  le caractère de  $\text{Ker} N_{E/F}$  défini par

$$\mu'(x/\bar{x}) = \mu(x)$$

pour tout  $x \in E^\times$ . On vérifie que  $\tilde{\mu}(\tilde{x}(\xi, \gamma)) = \mu'(a)$  pour tout  $\xi = (F, E, a) \in \Xi_{1,reg}$  et pour tout  $\gamma \in \Gamma(\xi)$ . On a  $\mathcal{S}_\mu = \{\pm 1\}$  donc d'après les conjectures  $\mathcal{E}^G(\mu)$  est réduit à un

élément. Notons  $\mu_G$  cet élément. D'après les conjectures,  $c_{1,\mu_-}(\mu, 0)\mu_G$  est le transfert de  $\tilde{\mu}$ . Les facteurs de transfert valent alors 1 et on en déduit que  $\mu_G = \mu'$ . En particulier, le  $L$ -paquet correspondant au caractère trivial  $1 \in \Phi_{temp}(G)$  ne contient que le caractère trivial de  $G(F)$ .

## 7.4 Facteurs epsilons de représentations du groupe de Weil-Deligne

Soient  $d, d' \geq 0$  deux entiers. Pour toutes représentations admissibles irréductibles  $\pi$  de  $GL_d(E)$  et  $\pi'$  de  $GL_{d'}(E)$ , on pose

$$\begin{aligned}\epsilon(\pi) &= \epsilon(1/2, \pi, \psi_E^\delta) \\ \epsilon(\pi \times \pi') &= \epsilon(1/2, \pi \times \pi', \psi_E^\delta)\end{aligned}$$

Pour tout  $\varphi \in \Phi_{temp}(GL_d)$ , on pose

$$\epsilon(\varphi) = \epsilon(\varphi, \psi_E^\delta)$$

où  $\epsilon(\varphi, \psi_E^\delta)$  est défini comme dans [GGP] §5. D'après les résultats d'Haris-Taylor et Henniart, on a les identités

$$(1) \quad \epsilon(\varphi) = \epsilon(\pi(\varphi))$$

$$(2) \quad \epsilon(\varphi \otimes \varphi') = \epsilon(\pi(\varphi) \times \pi(\varphi'))$$

pour tous  $\varphi, \varphi' \in \Phi_{temp}$ . Pour  $\varphi \in \Phi_{temp}^+$ , la proposition 5.2(2) de [GGP] affirme l'égalité

$$(3) \quad \epsilon(\varphi) = 1$$

Puisque pour  $\varphi \in \Phi_{temp}^\theta$ , on a  $\varphi \oplus \varphi \in \Phi_{temp}^+$ , on en déduit que

$$(4) \quad \epsilon(\varphi)^2 = \epsilon(\varphi \oplus \varphi) = 1$$

pour tout  $\varphi \in \Phi_{temp}^\theta$ .

## 7.5 Calcul d'un facteur epsilon par une formule intégrale

Pour deux nombres complexes non nul  $z$  et  $z'$ , on notera

$$z \propto z'$$

pour signifier que  $z/z'$  est un réel strictement positif.

**Lemme 7.5.1** *Soit  $\mu$  un caractère continu de  $E^\times$  tel que  $\mu|_{F^\times} = \text{sgn}_{E/F}$ . On a alors*

$$\epsilon(\mu) \propto \text{sgn}_{E/F}(-2)\gamma_\psi(N_{E/F}) \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\text{Ker} N_{E/F}} \mu(\delta^{-1}(1-x)) |1-x|_E^{s-1/2} dx$$

Preuve : Munissons  $E$  de la mesure de Haar qui donne à  $\mathcal{O}_F + \delta\mathcal{O}_F$  la mesure 1. On note  $dx$  cette mesure. Pour  $\Phi \in C_c^\infty(E)$  et  $s \in \mathbb{C}$ , posons

$$\zeta(\Phi, \mu, s) = \int_E \Phi(x) \mu(x) |x|_E^{s-1} dx$$

L'intégrale est convergente pour  $Re(s) > 0$  et la fonction  $s \mapsto \zeta(\Phi, \mu, s)$  admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. On pose aussi pour tout  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$L(\mu, s) = \begin{cases} (1 - \mu(\varpi_E) q_E^{-s})^{-1} & \text{si } \mu \text{ est non ramifié} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit de même  $\zeta(\Phi, \mu^{-1}, s)$  et  $L(\mu^{-1}, s)$ . On a alors l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \frac{\zeta(\hat{\Phi}, \mu^{-1}, 1-s)}{L(\mu^{-1}, 1-s)} = \epsilon(s, \mu, \psi_E^\delta) \frac{\zeta(\Phi, \mu, s)}{L(\mu, s)}$$

pour tout  $\Phi \in C_c^\infty(E)$ , où  $\hat{\Phi}$  désigne la transformée de Fourier de  $\Phi$  par rapport au caractère  $\psi_E^\delta$  et à la mesure autoduale associée que l'on note  $dz$ . L'hypothèse sur  $\mu$  entraîne l'identité  $L(\mu, \cdot) = L(\mu^{-1}, \cdot)$ . Soient  $N$  et  $N'$  deux entiers naturels non nuls. On définit  $\Phi_{N,N'}$  comme la fonction caractéristique de l'ensemble des  $x \in E$  qui s'écrivent  $x = a + b\delta$ ,  $a, b \in F$ , avec  $val_F(a-1) \geq N$  et  $val_F(b) \geq N'$ . Dans tout ce qui suit, on suppose que  $N$  et  $N'$  sont assez grands. On a l'égalité

$$\zeta(\Phi_{N,N'}, \mu, s) = q_F^{-N-N'}$$

pour tout  $s \in \mathbb{C}$ . Notons  $n(\psi)$  le conducteur de  $\psi$ , i.e. le plus petit entier tel que  $\psi$  soit triviale sur  $\mathfrak{p}_F^{n(\psi)}$ . Soit  $C$  tel que  $dz = Cdx$ . Posons  $N_0 = n(\psi) - val_F(2\delta^2)$ . On calcule

$$\hat{\Phi}_{N,N'}(a + b\delta) = \begin{cases} C q_F^{-N-N'} \psi(2\delta^2 b) & \text{si } val_F(b) \geq -N + N_0 \text{ et } val_F(a) \geq -N' + N_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posant  $\Phi = \Phi_{N,N'}$  dans (1), on en déduit que pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(s) < 1$ , on a

$$(2) \quad \epsilon(s, \mu, \psi_E^\delta) \frac{L(\mu, 1-s)}{L(\mu, s)} = C \int_{val_F(a) \geq -N' + N_0; val_F(b) \geq -N + N_0} \psi(2\delta^2 b) \mu(a + b\delta)^{-1} |a + b\delta|_E^{-s} dadb$$

Pour  $Re(s) > 1/2$ , l'intégrale de droite converge lorsque  $N' \rightarrow \infty$  vers

$$\int_{val_F(b) \geq -N + N_0} \int_F \psi(2\delta^2 b) \mu(a + b\delta)^{-1} |a + b\delta|_E^{-s} dadb$$

Puisque le membre de gauche de (2) ne dépend pas de  $N'$ , on a l'égalité

$$(3) \quad \epsilon(s, \mu, \psi_E^\delta) \frac{L(\mu^{-1}, 1-s)}{L(\mu, s)} = C \int_{val_F(b) \geq -N + N_0} \int_F \psi(2\delta^2 b) \mu(a + b\delta)^{-1} |a + b\delta|_E^{-s} dadb$$

pour  $Re(s) > 1/2$ . Examinons le membre de droite. Après le changement de variable  $a \mapsto ab$ , celui-ci est égal au produit des intégrales

$$(4) \quad \int_{val_F(b) \geq -N+N_0} \psi(2\delta^2 b) sgn_{E/F}(b) |b|_F^{1-2s} db$$

et

$$(5) \quad \int_F \mu(a + \delta)^{-1} |a + \delta|_E^{-s} da$$

On a  $\int_{val_F(b) \geq -N+N_0} \psi(2\delta^2 b) db = 0$ , par conséquent l'expression (4) évaluée en  $s = 1/2$  est égale à

$$\int_{val_F(b) \geq -N+N_0, b \in N_{E/F}(E^\times)} \psi(2\delta^2 b) db$$

A une constante multiplicative positive près c'est  $\int_{val_F(N_{E/F}(x)) \geq -N+N_0} \psi(2\delta^2 N_{E/F}(x)) dx$ . Par définition de la constante de Weil c'est aussi à une constante multiplicative positive près  $\gamma_\psi(4\delta^2 N_{E/F}) = sgn_{E/F}(-1) \gamma_\psi(N_{E/F})$ . Examinons maintenant l'intégrale (5). Par le changement de variable  $x \in Ker N_{E/F} \mapsto a = \frac{\delta + \delta x}{1-x}$  dont le jacobien est proportionnel à  $|1-x|_E^{-1}$ , on obtient

$$\int_F \mu(a + \delta)^{-1} |a + \delta|_E^{-s} da \propto sgn_{E/F}(2) |2\delta|_E^{-s} \int_{Ker N_{E/F}} \mu(\delta^{-1}(1-x)) |1-x|_E^{s-1} dx$$

Le résultat du lemme est alors conséquence de ce qui précède et de l'égalité (3) évaluée en  $s = 1/2$  ■

## 7.6 Une application de la proposition 6.4.1

Soient  $(V_+, h_+)$ ,  $(V_-, h_-)$ ,  $(V'_+, h'_+)$ ,  $(V'_-, h'_-)$  des espaces hermitiens de dimension respectives  $d_+$ ,  $d_-$ ,  $d'_+$ ,  $d'_-$  et de groupes unitaires respectifs  $G_+$ ,  $G_-$ ,  $G'_+$ ,  $G'_-$ . On suppose que ces espaces hermitiens vérifient tous la condition **(QD)**. Soient  $\varphi_+ \in \Phi_{temp}(G_+)$ ,  $\varphi_- \in \Phi_{temp}(G_-)$ ,  $\varphi'_+ \in \Phi_{temp}(G'_+)$ ,  $\varphi'_- \in \Phi_{temp}(G'_-)$  et  $\mu_+$ ,  $\mu_-$ ,  $\mu'_+$ ,  $\mu'_-$  des caractères continus de  $E^\times$  vérifiant  $\mu_{+|F^\times} = sgn_{E/F}^{d_+}$ ,  $\mu_{-|F^\times} = sgn_{E/F}^{d_-}$ ,  $\mu'_{+|F^\times} = sgn_{E/F}^{d'_+}$ ,  $\mu'_{-|F^\times} = sgn_{E/F}^{d'_-}$ . Posons  $\varphi = \mu_+ \varphi_+ \oplus \mu_- \varphi_- \in \Phi_{temp}^\theta$ ,  $\varphi' = \mu'_+ \varphi'_+ \oplus \mu'_- \varphi'_- \in \Phi_{temp}^\theta$ ,  $d = d_+ + d_-$  et  $d' = d'_+ + d'_-$ . D'après 4.3(1), on a l'égalité

$$(1) \quad \begin{aligned} \epsilon_{geom, \nu_1}(\tilde{\pi}(\varphi), \tilde{\pi}(\varphi')) &= \epsilon_{\nu_1}(\pi(\varphi), \pi(\varphi')) \\ &= \omega_{\pi(\varphi)}(\nu_1) \omega_{\pi(\varphi')}(-\nu_1) \epsilon(\pi(\varphi) \times \pi(\varphi')) \end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $\omega_{\pi(\varphi)}$  et  $\omega_{\pi(\varphi')}$  désignent les caractères centraux de  $\pi(\varphi)$  et  $\pi(\varphi')$  respectivement. Supposons  $d$  pair et  $d'$  impair. On a alors  $\mu_- \varphi_- \otimes \mu'_+ \varphi'_+ \in \Phi_{temp}^+$  et  $\mu_+ \varphi_+ \otimes \mu'_- \varphi'_- \in \Phi_{temp}^+$ . D'après 7.4(2) et 7.4(3), on en déduit que

$$(2) \quad \begin{aligned} \epsilon(\pi(\varphi) \times \pi(\varphi')) &= \epsilon(\varphi \otimes \varphi') \\ &= \epsilon(\mu_+ \varphi_+ \otimes \mu'_+ \varphi'_+) \epsilon(\mu_- \varphi_- \otimes \mu'_- \varphi'_-) \end{aligned}$$

D'après les résultats d'Harris-Taylor et Henniart, on a

$$\omega_{\pi(\varphi)} = \det \varphi$$

$$\omega_{\pi(\varphi')} = \det \varphi'$$

On a  $\det \varphi = (\det \mu_+ \varphi_+) (\det \mu_- \varphi_-)$  et  $\det \varphi' = (\det \mu'_+ \varphi'_+) (\det \mu'_- \varphi'_-)$ . Puisque  $\mu_+ \varphi_+ \in \Phi_{temp}^{(-1)^{d+1}}(GL_{d_+})$ , on a  $\det \mu_+ \varphi_+ \in \Phi_{temp}^{(-1)^{(d+1)d_+}}(GL_1)$  donc  $(\det \mu_+ \varphi_+)_{|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{(d+1)d_+}$ . De la même façon, on a

$$(\det \mu_- \varphi_-)_{|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{dd_-}, (\det \mu'_+ \varphi'_+)_{|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{(d'+1)d'_+} \text{ et } (\det \mu'_- \varphi'_-)_{|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d'd'_-}.$$

On en déduit que

$$(3) \quad (\omega_{\pi(\varphi)})_{|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d(d+1)+d_-} = \text{sgn}_{E/F}^{d_-}$$

$$(4) \quad (\omega_{\pi(\varphi')})_{|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d'(d'+1)+d'_-} = \text{sgn}_{E/F}^{d'_-}$$

Posons

$$\Sigma_+ = \sum_{\sigma \in \Pi^{G_+}(\varphi_+)} \sigma$$

On définit de même  $\Sigma_-$ ,  $\Sigma'_+$  et  $\Sigma'_-$ . Les conjectures 6.2, la proposition 6.4.1, ainsi que les points (1) à (4) précédents, entraînent

$$(5) \quad \begin{aligned} S_{\mu_+ \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+) S_{\mu_- \mu'_-}(\Sigma_-, \Sigma'_-) &= \\ c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, \varphi_-) c_{\mu'_+, \mu'_-}(\varphi'_+, \varphi'_-) \text{sgn}_{E/F}^{d_-} (-1)^{d_-} \epsilon(\mu_+ \varphi_+ \otimes \mu'_+ \varphi'_+) \epsilon(\mu_- \varphi_- \otimes \mu'_- \varphi'_-) \end{aligned}$$

## 7.7 Détermination des constantes pour le changement de base

Soient  $(V, h)$  et  $(V', h')$  deux espaces hermitiens qui vérifient **(QD)** et qui sont de dimension  $d$  et  $d'$  respectivement. On note  $G$  et  $G'$  leurs groupes unitaires respectifs. Soient  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$  et  $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$ . On pose

$$\Sigma = \sum_{\sigma \in \Pi^G(\varphi)} \sigma \text{ et } \Sigma' = \sum_{\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')} \sigma'$$

Soient  $\mu, \mu'$  deux caractères continus de  $E^\times$  tels que  $\mu|_{F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d'}$  et  $\mu'|_{F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d'+1}$ .

**Proposition 7.7.1** *Sous ces hypothèses on a les égalités suivantes*

1. 
$$\frac{S_{\mu\mu'}(\Sigma, \Sigma')}{\epsilon(\mu\varphi \otimes \mu'\varphi')} = \begin{cases} \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \text{sgn}_{E/F}(-2) & \text{si } d \text{ et } d' \text{ sont impairs} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. 
$$c_{\mu, \mu'}(\varphi, \varphi') = \begin{cases} \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \text{sgn}_{E/F}(2) & \text{si } d \text{ et } d' \text{ sont impairs} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3.  $c_\Sigma(1) = c_{\Sigma'}(1) = 1.$

Preuve : On reprend les hypothèses du paragraphe 7.6 et les notations afférentes :  $\varphi_+, \varphi_-, \varphi'_+, \varphi'_-, d_+, d_-, d'_+, d'_-, \mu_+, \mu'_+, \mu_-, \mu'_-$ . Appliquons 7.6(5) au cas où  $d = 0$ . On obtient l'égalité

$$c_{\mu'_+, \mu'_-}(\varphi'_+, \varphi'_-) = c_{\Sigma'_+}(1)c_{\Sigma'_-}(1)$$

D'après le résultat de Rodier ([Ro]),  $c_{\Sigma'_+}(1)$  compte le nombre de représentations admettant un modèle de Whittaker de  $\Pi^{G'_+}(\varphi'_+)$  divisé par le nombre de types de modèles de Whittaker pour  $G'_+$ . Dans tout les cas c'est un demi-entier positif et de même pour  $c_{\Sigma'_-}(1)$ . Puisque  $c_{\mu'_+, \mu'_-}(\varphi'_+, \varphi'_-)$  est un nombre complexe de module 1, on a par conséquent

$$(1) \quad c_{\mu'_+, \mu'_-}(\varphi'_+, \varphi'_-) = 1$$

Appliqué à  $\varphi = \varphi'_+, \varphi' = \varphi'_-$ , on en déduit le 2. de l'énoncé avec  $d$  et  $d'$  de parités différentes. Remarquons que pour  $d'_- = 0$  ou 1, on a trivialement  $c_{\Sigma'_-}(1) = 1$  entraînant ainsi  $c_{\Sigma'_+}(1) = 1$ . On en déduit le point 3. de l'énoncé. Appliquons maintenant 7.6(5) au cas où  $d_- = d'_+ = 0$ . On obtient

$$c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, 0)c_{\mu'_+, \mu'_-}(0, \varphi'_-) = c_{\Sigma_+}(1)c_{\Sigma'_-}(1)$$

D'après ce que l'on vient de voir, on a  $c_{\mu'_+, \mu'_-}(0, \varphi'_-) = c_{\Sigma_+}(1)c_{\Sigma'_-}(1) = 1$ . Cela entraîne

$$(2) \quad c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, 0) = 1$$

Dans le cas où  $d_- = 0$ , l'égalité 7.6(5) nous donne

$$c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, 0)c_{\mu'_+, \mu'_-}(\varphi'_+, \varphi'_-) = \frac{S_{\mu_+\mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+)}{\epsilon(\mu_+\varphi_+ \otimes \mu'_+\varphi'_+)}c_{\Sigma'_-}(1)$$

D'après (1), (2) et le 3. de l'énoncé, on a  $c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, 0) = c_{\mu'_+, \mu'_-}(\varphi'_+, \varphi'_-) = c_{\Sigma'_-}(1) = 1$ . L'égalité précédente se simplifie donc en

$$\frac{S_{\mu_+\mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+)}{\epsilon(\mu_+\varphi_+ \otimes \mu'_+\varphi'_+)} = 1$$

Appliqué à  $\Sigma = \Sigma_+$ ,  $\Sigma' = \Sigma'_+$  et à  $\Sigma = \Sigma'_+$ ,  $\Sigma' = \Sigma_+$ , on en déduit le 1. de l'énoncé dans le cas où  $dd'$  est pair.

Si  $d_+$  et  $d_-$  sont pairs, l'identité 7.6(5) s'écrit

$$c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, \varphi_-) = \frac{S_{\mu_+ \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+) S_{\mu_- \mu'_-}(\Sigma_-, \Sigma'_-)}{\epsilon(\mu_+ \varphi_+ \otimes \mu'_+ \varphi'_+) \epsilon(\mu_- \varphi_- \otimes \mu'_- \varphi'_-)}$$

Le 1. de l'énoncé ayant été établi dans les cas  $\Sigma = \Sigma_+$ ,  $\Sigma' = \Sigma'_+$  et  $\Sigma = \Sigma_-$ ,  $\Sigma' = \Sigma'_-$ , on en déduit

$$c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, \varphi_-) = 1$$

Pour  $\varphi_+ = \varphi$  et  $\varphi_- = \varphi'$ , on obtient ainsi le 2. de l'énoncé dans le cas où  $d$  et  $d'$  sont pairs.

On vient de démontrer toutes les assertions de la proposition sauf les deux premiers points dans les cas où  $d$  et  $d'$  sont impairs. Appliquons 7.6(5) avec  $d_- = d'_- = 1$  et  $\varphi_- = \varphi'_- = 1$ . On obtient

$$c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, 1) \text{sgn}_{E/F}(-1) = \frac{S_{\mu_+ \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+) S_{\mu_- \mu'_-}(1, 1)}{\epsilon(\mu_+ \varphi_+ \otimes \mu'_+ \varphi'_+) \epsilon(\mu_- \mu'_-)}$$

Le point 1. ayant été établi dans le cas où  $d'$  est pair, on a

$$\frac{S_{\mu_+ \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+)}{\epsilon(\mu_+ \varphi_+ \otimes \mu'_+ \varphi'_+)} = 1$$

Par définition de  $S_{\mu_- \mu'_-}(1, 1)$  (6.2), et puisque le  $L$ -paquet associé à 1 ne contient qu'un caractère trivial, on a

$$S_{\mu_- \mu'_-}(1, 1) = 2 \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\text{Ker } N_{E/F}} \mu_- \mu'_-(\delta^{-1}(1-x)) |1-x|_E^{s-1/2} dx$$

D'après la proposition 7.5.1,  $\frac{S_{\mu_- \mu'_-}(1, 1)}{\epsilon(\mu_- \mu'_-)}$  est donc égal à une constante multiplicative près à  $\gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \text{sgn}_{E/F}(-2)$ . Puisque  $c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, 1)$  est de module 1, on en déduit que

$$(3) c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, 1) = \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \text{sgn}_{E/F}(2)$$

Appliquons 7.6(5) à  $d_- = 1$ ,  $\varphi_- = 1$  et  $d'_-$  pair. On obtient

$$c_{\mu_+, \mu_-}(\varphi_+, 1) \text{sgn}_{E/F}(-1) = \frac{S_{\mu_+ \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+) S_{\mu_- \mu'_-}(1, \Sigma'_-)}{\epsilon(\mu_+ \varphi_+ \otimes \mu'_+ \varphi'_+) \epsilon(\mu_- \mu'_- \varphi'_-)}$$

D'après (3) et le 1. de l'énoncé dans un cas déjà établi, cette égalité se réécrit

$$\frac{S_{\mu_+ \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+)}{\epsilon(\mu_+ \varphi_+ \otimes \mu'_+ \varphi'_+)} = \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \text{sgn}_{E/F}(-2)$$

Pour  $\Sigma = \Sigma_+$ ,  $\Sigma' = \Sigma'_+$ , c'est le point 1. dans le cas où  $d$  et  $d'$  sont impairs. On déduit alors facilement 2. dans le cas où  $d$  et  $d'$  sont impairs en appliquant 7.6(5) à  $\Sigma = \Sigma_+$  et  $\Sigma' = \Sigma_-$  ■

On en déduit en particulier que  $c_{\mu,\mu'}(\varphi, \varphi')$  ne dépend que de  $\varphi$  et  $\varphi'$ . On note dorénavant  $c(\varphi, \varphi')$  cette constante.

## 7.8 Le théorème

Soient  $(V, h)$  et  $(V', h')$  deux espaces hermitiens vérifiant les conditions du paragraphe 4.1 dont on conserve les notations. Soient  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$  et  $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$ . Soit  $s \in \mathcal{S}_\varphi$  et  $B$  une forme conjuguée-duale non dégénérée de signe  $(-1)^{d+1}$  sur  $\varphi$ . On peut relever  $s$  en un élément, encore noté  $s$ , de  $Aut(\varphi, B)$  vérifiant  $s^2 = 1$ . Soit  $\varphi^{s=-1}$  la sous-représentation de  $\varphi$  où  $s$  agit comme  $-1$ . On pose

$$\epsilon_{\varphi, \varphi'}^G(s) = \epsilon(\varphi^{s=-1} \otimes \varphi')$$

Cette définition ne dépend pas du choix de  $B$  et du relèvement : cela découle essentiellement de 7.4(3) cf theorem 6.1 [GGP]. Alors  $\epsilon_{\varphi, \varphi'}^G$  est un caractère de  $\mathcal{S}_\varphi$  (cf theorem 6.1 [GGP]) et on a  $\epsilon_{\varphi, \varphi'}^G(z_\varphi) = \epsilon(\varphi \otimes \varphi')$ . On définit de la même façon un caractère  $\epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'}$  de  $\mathcal{S}_{\varphi'}$  vérifiant  $\epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'}(z_{\varphi'}) = \epsilon(\varphi \otimes \varphi')$ .

**Théorème 7.8.1** *Quitte à reparamétriser les  $L$ -paquets de  $G$  et  $G'$ , pour tous  $\varphi \in \Phi_{temp}(G)$  et  $\varphi' \in \Phi_{temp}(G')$ , on a avec les notations précédentes*

- Si  $\epsilon(\varphi \otimes \varphi') \neq \mu(G)$ , alors  $m(\sigma, \sigma') = 0$  pour tout  $(\sigma, \sigma') \in \Pi^G(\varphi) \times \Pi^{G'}(\varphi')$ .
- Si  $\epsilon(\varphi \otimes \varphi') = \mu(G)$ , alors pour tout  $(\epsilon, \epsilon') \in \mathcal{E}^G(\varphi) \times \mathcal{E}^{G'}(\varphi')$ , on a

$$m(\sigma(\varphi, \epsilon), \sigma(\varphi', \epsilon')) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\epsilon, \epsilon') = (\epsilon_{\varphi, \varphi'}^G, \epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les paramétrages des  $L$ -paquets  $\Pi^G(\varphi)$  et  $\Pi^{G'}(\varphi')$  pour lesquels le théorème précédent est vérifié seront définis au paragraphe 7.10.

## 7.9 Utilisation des résultats précédents

On conserve les notations et hypothèses du paragraphe précédent. Soient  $s \in \mathcal{S}_\varphi$  et  $s' \in \mathcal{S}_{\varphi'}$ . On pose

$$m(\varphi, s; \varphi', s') = \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi) \\ \epsilon' \in \mathcal{E}^{G'}(\varphi')}} \epsilon(s) \epsilon'(s') m(\sigma(\varphi, \epsilon), \sigma(\varphi', \epsilon'))$$

On peut toujours trouver une décomposition  $\varphi = \mu_+ \varphi_+ \oplus \mu_- \varphi_-$  et des entiers naturels  $d_+, d_-$  tels que

$$- \varphi_+ \in \Phi_{temp}^{(-1)^{d_++1}}(GL_{d_+}), \varphi_- \in \Phi_{temp}^{(-1)^{d_-+1}}(GL_{d_-});$$

- $d_+ + d_- = d$ ;
- $\mu_+$  et  $\mu_-$  sont des caractères continus de  $E^\times$  tels que  $\mu_{+,|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d_-}$ ,  $\mu_{-,|F^\times} = \text{sgn}_{E/F}^{d_+}$ ;
- $s$  provient de l'élément qui agit comme l'identité sur  $\mu_+\varphi_+$  et par  $-1$  sur  $\mu_-\varphi_-$ .

On peut de même trouver une décomposition  $\varphi' = \mu'_+\varphi'_+ \oplus \mu'_-\varphi'_-$  (et des entiers naturels  $d'_+, d'_-$ ) relative à  $s'$ . Il existe un unique espace hermitien  $(V_+, h_+)$  de dimension  $d_+$  qui vérifie la condition **(QD)**. On introduit de même les espaces hermitiens  $(V_-, h_-)$ ,  $(V'_+, h'_+)$  et  $(V'_-, h'_-)$ . On pose, comme toujours,  $G_+ = U(V_+)$ ,  $G_- = U(V_-)$ ,  $G'_+ = U(V'_+)$  et  $G'_- = U(V'_-)$ . Les paramètres  $\varphi_+, \varphi_-, \varphi'_+, \varphi'_-$  déterminent des  $L$ -paquets tempérés de  $G_+, G_-, G'_+, G'_-$  respectivement. On introduit la combinaison linéaire formelle suivante

$$\Sigma_+ = \sum_{\sigma_+ \in \Pi^{G_+}(\varphi_+)} \sigma_+$$

On définit de même  $\Sigma_-, \Sigma'_+$  et  $\Sigma'_-$ . D'après les conjectures 7.2 et la proposition 6.3.1, le terme

$$(1) \quad \gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) \gamma_{\mu'_+, \mu'_-}^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-) m(\varphi, s; \varphi', s')$$

est égal à

$$(2) \quad \frac{1}{2} (S_{\mu_+, \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+) S_{\mu_-, \mu'_-}(\Sigma_-, \Sigma'_-) + \mu(G) S_{\mu_+, \mu'_-}(\Sigma_+, \Sigma'_-) S_{\mu_-, \mu'_+}(\Sigma_-, \Sigma'_+))$$

Fixons un caractère continu  $\mu$  de  $E^\times$  dont la restriction à  $F^\times$  coïncide avec  $\text{sgn}_{E/F}$ . On a  $\mu_-\mu'_- = (\mu_-\mu)(\mu'_-\mu^{-1})$  et  $\mu_-\mu'_+ = (\mu_-\mu)(\mu'_+\mu^{-1})$ . D'après 7.6(5), on a les égalités

$$\begin{aligned} S_{\mu_+, \mu'_+}(\Sigma_+, \Sigma'_+) S_{\mu_-, \mu'_-}(\Sigma_-, \Sigma'_-) &= c(\varphi_+, \varphi_-) c(\varphi'_+, \varphi'_-) \text{sgn}_{E/F}(-1)^{d_-} \\ &\quad \epsilon(\mu_+\varphi_+ \otimes \mu'_+\varphi'_+) \epsilon(\mu_-\varphi_- \otimes \mu'_-\mu^{-1}\varphi'_-) \\ &= c(\varphi_+, \varphi_-) c(\varphi'_+, \varphi'_-) \text{sgn}_{E/F}(-1)^{d_-} \\ &\quad \epsilon(\mu_+\varphi_+ \otimes \mu'_+\varphi'_+) \epsilon(\mu_-\varphi_- \otimes \mu'_-\varphi'_-) \\ S_{\mu_+, \mu'_-}(\Sigma_+, \Sigma'_-) S_{\mu_-, \mu'_+}(\Sigma_-, \Sigma'_+) &= c(\varphi_+, \varphi_-) c(\varphi'_-, \varphi'_+) \text{sgn}_{E/F}(-1)^{d_-} \\ &\quad \epsilon(\mu_+\varphi_+ \otimes \mu'_-\varphi'_-) \epsilon(\mu_-\varphi_- \otimes \mu'_+\mu^{-1}\varphi'_+) \\ &= c(\varphi_+, \varphi_-) c(\varphi'_-, \varphi'_+) \text{sgn}_{E/F}(-1)^{d_-} \\ &\quad \epsilon(\mu_+\varphi_+ \otimes \mu'_-\varphi'_-) \epsilon(\mu_-\varphi_- \otimes \mu'_+\varphi'_+) \end{aligned}$$

D'après la proposition 7.7.1, on a l'égalité  $c(\varphi'_-, \varphi'_+) = c(\varphi'_+, \varphi'_-)$ . On en déduit que l'expression (2) est égale à

$$(3) \quad \frac{c(\varphi_+, \varphi_-) c(\varphi'_+, \varphi'_-) \text{sgn}_{E/F}(-1)^{d_-}}{2} (\epsilon(\mu_+\varphi_+ \otimes \mu'_+\varphi'_+) \epsilon(\mu_-\varphi_- \otimes \mu'_-\varphi'_-) + \mu(G) \epsilon(\mu_+\varphi_+ \otimes \mu'_-\varphi'_-) \epsilon(\mu_-\varphi_- \otimes \mu'_+\varphi'_+))$$

D'après 7.4(4), la forme bilinéaire  $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\Phi_{temp}^\theta)^2 \mapsto \epsilon(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$  prend ses valeurs dans  $\{\pm 1\}$ . On peut donc réécrire (3), sous la forme

$$(4) \quad c(\varphi_+, \varphi_-)c(\varphi'_+, \varphi'_-) \operatorname{sgn}_{E/F}(-1)^{d-} \epsilon(\mu_- \varphi_- \otimes \varphi') \epsilon(\varphi \otimes \mu'_- \varphi'_-) \left( \frac{\epsilon(\varphi \otimes \varphi') + \mu(G)}{2} \right)$$

Par définition, on a  $\epsilon(\mu_- \varphi_- \otimes \varphi') = \epsilon_{\varphi, \varphi'}^G(s)$  et  $\epsilon(\varphi \otimes \mu'_- \varphi'_-) = \epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'}(s')$ . Par conséquent, l'égalité entre (1) et (4) s'écrit

$$(5) \quad \gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) \gamma_{\mu'_+, \mu'_-}^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-) m(\varphi, s; \varphi', s') = \\ c(\varphi_+, \varphi_-)c(\varphi'_+, \varphi'_-) \operatorname{sgn}_{E/F}(-1)^{d-} \epsilon_{\varphi, \varphi'}^G(s) \epsilon_{\varphi, \varphi'}^{G'}(s') \left( \frac{\epsilon(\varphi \otimes \varphi') + \mu(G)}{2} \right)$$

## 7.10 Paramétrages des $L$ -paquets et constantes $\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-)$

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent. Dans ce paragraphe, on va fixer les paramétrages des  $L$ -paquets  $\Pi^G(\varphi)$  et  $\Pi^{G'}(\varphi')$  et en déduire les valeurs des constantes  $\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-)$  et  $\gamma_{\mu'_+, \mu'_-}^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-)$ . Supposons dans un premier temps que  $G$  est quasi-déployé. Rappelons que  $G'$  admet un unique type de modèle de Whittaker et que  $G$  en admet deux paramétrés par  $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}_{E/F} - \{0\} / N(E^\times)$  si  $d \geq 2$ , un seul sinon.

**Lemme 7.10.1** *Il existe une unique représentation du  $L$ -paquet  $\Pi^{G'}(\varphi')$  qui admet un modèle de Whittaker. Pour tout  $\eta \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}_{E/F} - \{0\}$ , il existe une unique représentation du  $L$ -paquet  $\Pi^G(\varphi)$  qui admet un modèle de Whittaker de type  $\eta$ .*

Preuve : D'après un résultat de Rodier ([Ro]), pour tout  $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$ , on a  $c_{\sigma'}(1) = 1$  si  $\sigma'$  admet un modèle de Whittaker, 0 sinon. D'après le 3. de la proposition 7.7.1, on a

$$c_{\Sigma'}(1) = \sum_{\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')} c_{\sigma'}(1) = 1$$

On en déduit le résultat pour  $G'$ . D'après la proposition 6.5.1 appliquée à  $\Sigma_+ = \Sigma$  et le 3. de la proposition 7.7.1, on a

$$m(\Sigma, \eta) = c_{\Sigma}(1) = 1$$

pour tout  $\eta \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}_{E/F} - \{0\}$ . Or,  $m(\Sigma, \eta)$  compte précisément le nombre de représentations du  $L$ -paquet  $\Pi^G(\varphi)$  qui admettent un modèle de Whittaker de type  $\eta$  ■

Quitte à reparamétriser, on peut supposer que l'unique représentation de  $\Pi^{G'}(\varphi')$  qui admet un modèle de Whittaker correspond au caractère trivial de  $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$ . Quitte à reparamétriser aussi, on peut supposer que l'unique représentation de  $\Pi^G(\varphi)$  qui admet un modèle de Whittaker de type  $-\nu_0 \delta$  correspond au caractère trivial de  $\mathcal{E}^G(\varphi)$ .

**Lemme 7.10.2** *Supposons que  $G$  est quasi-déployé et que les paramétrages de  $\Pi^G(\varphi)$  et  $\Pi^{G'}(\varphi')$  sont fixés comme ci-dessus. Alors on a*

$$\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) = \begin{cases} \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \text{sgn}_{E/F}(-2) & \text{si } d_+ \text{ et } d_- \text{ sont impairs} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\gamma_{\mu'_+, \mu'_-}^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-) = 1$$

Preuve : L'égalité 7.9(5) appliquée à  $d = 0$  devient

$$\gamma_{\mu'_+, \mu'_-}^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-) m(0, 0; \varphi', s') = c(\varphi'_+, \varphi'_-)$$

D'après le choix de la paramétrisation, on a  $m(0, 0; \varphi', s') = 1$ . D'après la proposition 7.7.1, on a  $c(\varphi'_+, \varphi'_-) = 1$ . On en déduit la deuxième égalité du lemme. Posons

$$m(\varphi, s, \eta) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi)} \epsilon(s) m(\sigma(\varphi, \epsilon), \eta)$$

pour tout  $\eta \in \text{Ker} \text{Tr}_{E/F} - \{0\}$ . D'après la proposition 6.5.1, on a l'égalité

$$\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_-, \varphi_+) m(\varphi, s, -\nu_0 \delta) = \begin{cases} \gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \text{sgn}_{E/F}(-2) c_{\Sigma_+}(1) c_{\Sigma_-}(1) & \text{si } d_+ \text{ et } d_- \text{ sont impairs} \\ c_{\Sigma_+}(1) c_{\Sigma_-}(1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le choix de la paramétrisation, on a  $m(\varphi, s, -\nu_0 \delta) = 1$ . D'après la proposition 7.7.1, on a  $c_{\Sigma_+}(1) = c_{\Sigma_-}(1) = 1$ . On en déduit la première égalité du lemme ■

Supposons maintenant que  $G$  n'est pas quasi-déployé. Alors  $(V', h')$  ne vérifie pas **(QD)**. Soit  $(\underline{V}', \underline{h}')$  l'unique espace hermitien de dimension  $d'$  qui vérifie **(QD)** et  $\underline{G}'$  son groupe unitaire. On fixe comme précédemment un paramétrage de  $L$ -paquet  $\Pi^{\underline{G}'}(\varphi')$ . D'après 7.3, on en déduit un paramétrage de  $\Pi^{G'}(\varphi')$ . Il existe un vecteur  $v_0 \in V$  tel que  $h(v_0) = \nu_0$ . Fixons un tel vecteur. Notons  $V'_0$  l'orthogonal de  $v_0$  dans  $V$  et  $G'_0$  son groupe unitaire. Montrons le fait suivant

(1) Il existe  $\varphi'_0 \in \Phi_{\text{temp}}(G'_0)$  tel que l'application  $(\sigma, \sigma'_0) \mapsto m(\sigma, \sigma'_0)$  ne soit pas identiquement nulle sur  $\Pi^G(\varphi) \times \Pi^{G'_0}(\varphi'_0)$ .

Preuve : Soit  $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$  et munissons  $E_\sigma$  d'un produit scalaire invariant. Pour  $e_1, e_2 \in E_\sigma$ , notons  $f_{e_1, e_2}$  la fonction sur  $G'_0(F)$  définie par  $g \mapsto (e_1, \sigma(g)e_2)$ . D'après ?? [B1], cette fonction appartient à l'espace de Schwartz-Harish-Chandra de  $G'_0(F)$ . Pour  $e_1$  et  $e_2$  convenables,  $f_{e_1, e_2}$  est non nulle. D'après la formule de Plancherel-Harish-Chandra, il existe  $\sigma'_0 \in \text{Temp}(G'_0)$  telle que  $\sigma'_0 \vee (f_{e_1, e_2})$  soit non nulle. Munissons aussi  $E_{\sigma'_0}$  d'un produit scalaire invariant. Il existe alors  $e'_1, e'_2 \in E_{\sigma'_0}$  tels que

$$\int_{G'_0(F)} (e_1, \sigma(g)e_2) (\sigma'_0(g)e'_1, e'_2) dg \neq 0$$

D'après [B ?] proposition ??, cela entraîne  $m(\sigma, \sigma'_0) = 1$  ■

Fixons un tel paramètre  $\varphi'_0 \in \Phi_{temp}(G'_0)$ . Quitte à reparamétriser, on peut supposer que l'unique représentation  $\sigma$  de  $\Pi^G(\varphi)$  telle que  $\sum_{\sigma'_0 \in \Pi^{G'_0}(\varphi'_0)} m(\sigma, \sigma'_0) = 1$  est associée au caractère  $\epsilon_{\varphi, \varphi'_0}^G$ .

**Lemme 7.10.3** *Supposons que  $G$  ne soit pas quasi-déployé et que les paramétrages de  $\Pi^G(\varphi)$  et  $\Pi^{G'}(\varphi')$  sont fixés comme ci-dessus. Alors on a*

$$\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) = \begin{cases} -\gamma_\psi(N_{E/F})^{-1} \text{sgn}_{E/F}(-2) & \text{si } d_+ \text{ et } d_- \text{ sont impairs} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\gamma_{\mu'_+, \mu'_-}^{G'}(\varphi_+, \varphi_-) = 1$$

Preuve : La deuxième égalité découle du lemme précédent et de l'égalité 7.3(3). Appliquons l'égalité 7.9(5), au cas où  $G' = G'_0$ ,  $\varphi' = \varphi'_0$  et  $s' = 0$ . On obtient

$$\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) m(\varphi, s; \varphi'_0, 0) = -c(\varphi'_0, 0) c(\varphi_+, \varphi_-) \text{sgn}_{E/F}(-1)^{d_-} \epsilon_{\varphi, \varphi'_0}^G(s)$$

D'après le choix du paramétrage, on a  $m(\varphi, s; \varphi'_0, 0) = \epsilon_{\varphi, \varphi'_0}^G(s)$ . D'après la proposition 7.7.1, on a  $c(\varphi'_0, 0) = 1$ . Par conséquent

$$\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) = -c(\varphi_+, \varphi_-) \text{sgn}_{E/F}(-1)^{d_-}$$

La première égalité est alors conséquence de la proposition 7.7.1 ■

## 7.11 Preuve du théorème 7.8.1

On conserve toujours les hypothèses et notations du paragraphe 7.8. D'après les lemmes 7.10.2, 7.10.3 et la proposition 7.7.1, on a les égalités

$$\gamma_{\mu'_+, \mu'_-}^{G'}(\varphi'_+, \varphi'_-) = c(\varphi'_+, \varphi'_-)$$

$$\gamma_{\mu_+, \mu_-}^G(\varphi_+, \varphi_-) = \mu(G) c(\varphi_+, \varphi_-) \text{sgn}_{E/F}(-1)^{d_-}$$

L'égalité 7.9(5) devient alors

$$(1) \quad m(\varphi, s; \varphi', s') = \epsilon_{\varphi, \varphi'}^G(s) \epsilon_{\varphi', \varphi'}^{G'}(s') \frac{1 + \epsilon(\varphi \otimes \varphi') \mu(G)}{2}$$

Pour  $s = s' = 0$ , on obtient  $m(\varphi, 0; \varphi', 0) = \frac{1 + \epsilon(\varphi \otimes \varphi') \mu(G)}{2}$ . Par conséquent, si  $\epsilon(\varphi \otimes \varphi') = -\mu(G)$ , pour tout  $(\sigma, \sigma') \in \Pi^G(\varphi) \times \Pi^{G'}(\varphi')$  on a  $m(\sigma, \sigma') = 0$ , si  $\epsilon(\varphi \otimes \varphi') = \mu(G)$ , il existe un unique couple  $(\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}') \in \mathcal{E}^G(\varphi) \times \mathcal{E}^{G'}(\varphi')$  tel que  $m(\sigma(\varphi, \underline{\epsilon}), \sigma(\varphi', \underline{\epsilon}')) = 1$ . Dans le deuxième cas, l'égalité (1) entraîne  $\underline{\epsilon} = \epsilon_{\varphi, \varphi'}^G$  et  $\underline{\epsilon}' = \epsilon_{\varphi', \varphi'}^{G'}$  ■

## Bibliographie

- [A] J. Arthur : *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic groups*, Colloquium Publication Series, AMS. To appear
- [AGRS] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann : *Multiplicity one theorems*, Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 2, 1407-1434.
- [B1] R. Beuzart-Plessis : *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées de groupes unitaires*, prépublication 2012
- [B2] ————— : *Expression d'un facteur epsilon de paire par une formule intégrale*, prépublication 2012
- [C] L. Clozel : *Characters of nonconnected, reductive  $p$ -adic groups*, Canad. J. Math. 39 (1987), no. 1, 149-167
- [GGP] W. T. Gan, B. Gross, D. Prasad : *Symplectic local root numbers, central critical  $L$ -values and restriction problems in the representation theory of classical groups*, astérisque 346 (2012)
- [HCvD] Harish-Chandra : *Harmonic analysis on reductive  $p$ -adic groups*, notes par G. van Dijk, Springer Lecture Notes 162 (1970)
- [JPSS] H. Jacquet, I.I. Piatetskii-Shapiro, J. Shalika : *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math. 105 (1983), no. 2, 367-464
- [K] T. Konno : *Twisted endoscopy and the generic packet conjecture*, Israel J. Math. 129 (2002), 253-289
- [KS] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque No 255 (1999)
- [LS] R. Langlands, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), no. 1-4, 219-271
- [Mo1] : C.P. Mok : *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups I*, prépublication 2012
- [Mo2] : C.P. Mok : *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups II*, prépublication 2012
- [Ro] F. Rodier : *Modèle de Whittaker et caractères de représentations*, in Non commutative harmonic analysis, J. Carmona, J. Dixmier, M. Vergne éd. Springer LN 466 (1981), p.151-171
- [Sh] D. Shelstad : *A formula for regular unipotent germs*, dans "Orbites unipotentes et représentations, II", Astérisque No. 171-172 (1989), 275-277
- [W1] J.-L. Waldspurger : *Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire*, Manuscripta Math. 133 (2010), no. 1-2, 41-82
- [W2] ————— : *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque No. 269 (2001)
- [W3] ————— : *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. 105 (1997), no. 2, 153-236

Institut de mathématiques de Jussieu 2 place Jussieu 75005 Paris  
e-mail : rbeuzart@math.jussieu.fr