

Hyperdeterminants et fonctions symétriques *

Christophe Carré ¹

Jean-Gabriel Luque ¹

¹ Laboratoire d'Informatique, de Traitement de l'Information et des Systèmes (LITIS)
Université de Rouen.

Christophe.Carre@univ-rouen.fr

Jean-Gabriel.Luque@univ-rouen.fr

Abstract: We give an account of results involving hyperdeterminants in the context of symmetric functions and their applications in physics.

Keywords: Symmetric functions, hyperdeterminants, Jack polynomials

Résumé : Nous donnons un aperçu de résultats faisant intervenir des hyperdeterminants dans un contexte lié aux fonctions symétriques et leurs applications en physique.

Mots clés : Fonctions symétriques, Hyperdéterminants, Polynômes de Jack.

1 Introduction

L'hyperdeterminant que nous allons considérer dans ce papier est la plus simple des généralisations du déterminant aux tenseurs d'ordre supérieur définies par Cayley [3] :

$$\text{Det}(\mathbf{M}) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma_1) \dots \epsilon(\sigma_k) M_{\sigma_1(1) \dots \sigma_k(1)} \dots M_{\sigma_1(n) \dots \sigma_k(n)} \quad (1)$$

où $\mathbf{M} = (M_{i_1, \dots, i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}$ est un tableau $\overbrace{n \times \dots \times n}^k$, \mathfrak{S}_n est le groupe symétrique et $\epsilon(\sigma)$ est le signe de la permutation σ .

Bien que cette généralisation soit naturelle, elle n'a pas été bien exploitée dans la littérature. Voici quelques ouvrages qui traitent du sujet : [3, 7, 14]. Cela peut s'expliquer par le niveau de complexité de la formule qui rend les calculs difficiles. Pourtant cette notion apparaît dans de nombreux contextes en physique et en mathématiques. La connaissance de la combinatoire de ces objets devrait pouvoir être mise à profit dans de multiples situations. Dans ce résumé nous présentons quelques exemples de propriétés et d'applications.

*Ce travail a été financé partiellement par l'accord CMEP 09MDU765.

2 Définitions de base

2.1 Hyperdéterminants

Les hyperdéterminants sont, en général, beaucoup plus difficiles à calculer que les déterminants car il n'existe pas d'algorithme polynomial permettant leur évaluation. Néanmoins, ils possèdent de nombreuses propriétés permettant d'accélérer les calculs dans certains cas. Les formules se comprennent mieux si on les exprime en utilisant des variables grassmanniennes (c'est à dire anticommutatives) $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$. Un tenseur est assimilé à un élément de $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$:

$$\mathbf{M} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} M_{i_1, \dots, i_k} \eta_{i_1} \otimes \dots \otimes \eta_{i_k}. \quad (2)$$

L'hyperdéterminant de M est alors défini par

$$\mathbf{M}^n = n! \text{Det}(\mathbf{M})(\eta_1 \dots \eta_n)^{\otimes k}. \quad (3)$$

Lorsque k est impair l'anticommutativité des variables grassmanniennes implique $\text{Det} = 0$; cette propriété peut aussi se prouver très facilement à partir de la formule (1). L'invariance sous l'action du groupe spécial linéaire se lit :

$$\text{Det}((g^{(1)} \otimes \dots \otimes g^{(2k)}) \star \mathbf{M}) = \det(g^{(1)}) \dots \det(g^{(1)}) \text{Det}(\mathbf{M}), \quad (4)$$

où \star désigne l'action naturelle des $2k$ -uplets de matrices $n \times n$ sur les tenseurs de $(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2k}$:

$$(g^{(1)} \otimes \dots \otimes g^{(2k)}) \star M = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{2k} \leq n} M_{j_1, \dots, j_{2k}} \left(\sum_{i_1=1}^n g_{i_1 j_1}^{(1)} \eta_{i_1} \right) \otimes \dots \otimes \left(\sum_{i_k=1}^n g_{i_k j_k}^{(k)} \eta_{i_k} \right).$$

Un autre exemple est donné par la formule du déterminant d'une somme de tenseur. La preuve se ramène à étudier les hypermineurs apparaissant dans le développement :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{N})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{M}^i \mathbf{N}^{n-i}.$$

Pour plus de détail sur ces techniques, le lecteur peut se référer aux articles [2, 8, 9, 10]

2.2 Quelques propriétés des fonctions symétriques

Les fonctions symétriques sont des polynômes sur un alphabet $X = \{x_1, \dots\}$, infini et sans relation algébrique entre les variables, qui sont invariants par permutation des variables. L'ensemble des fonctions symétriques à coefficients dans un corps est stable par combinaison linéaire et produit ; c'est une algèbre que l'on notera Sym . Cette algèbre est librement engendrée par les sommes de puissances $p_n = \sum_{x \in X} x^n$, par les fonctions complètes $h_n = \sum_{m \text{ est un monôme de degré } n} m$ ou les fonctions élémentaires $e_n = \sum_{x_1, \dots, x_n \text{ distincts}} x_1 \dots x_n$:

$$\text{Sym} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots] = \mathbb{C}[h_1, h_2, \dots] = \mathbb{C}[e_1, e_2, \dots]. \quad (5)$$

Cette liberté permet de spécialiser les fonctions symétriques h_n (ou p_n , ou e_n) à n'importe quel ensemble de nombres ou de polynômes commutatifs $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Cette opération consiste,

en quelque sorte, à considérer un alphabet virtuel A tel que $h_i(A) = a_i$. Si on connaît la fonction génératrice $\sigma_t(A) = \sum_i a_i t^i$, cette opération est assimilable au calcul du terme constant :

$$h_i = \text{C.T.}\{t^i \sigma_{t^{-1}}(A)\}. \quad (6)$$

La spécialisation $h_i(A)$ est alors considérée comme un moment. Cette astuce permet d'utiliser les fonctions symétriques dans le cadre d'un calcul d'intégrale.

D'autres fonctions symétriques sont très utiles. Par exemple, les fonctions de Schur s_λ (qui permettent de coder les caractères irréductibles du groupe symétrique) et leurs généralisations : les polynômes de Jack (avec un paramètre) et les polynômes de Macdonald (avec deux paramètres); ces deux généralisations interviennent dans la théorie des représentation de l'algèbre de Hecke double affine du groupe symétrique. Pour plus de détails sur les fonctions symétriques, le lecteur peut se référer aux ouvrages [6, 11]

3 Intégrales de type Selberg et Hyperdeterminants

Une intégrale de type Selberg est une intégrale multiple faisant intervenir une puissance paire du Vandermonde :

$$I_f := \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) \prod_{i < j} (x_i - x_j)^{2k} d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n).$$

Lorsque f est une fonction constante (ou une puissance de $x_1 \dots x_n$), elle peut s'exprimer comme un hyperdéterminant

$$I_f = n! \text{Det} (h_{i_1 + \dots + i_{2k}}(A))_{1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n} \quad (7)$$

où $h_n(A)$ représente le $n^{\text{ième}}$ moment associé à la mesure μ . L'identification d'une intégrale à un hyperdeterminant permet de calculer certains hyperdéterminants en utilisant des égalités connues sur les intégrales itérées (voir par exemple [9]) ou de bien de calculer certaines intégrales en utilisant la combinatoire des hyperdéterminant (dans [10] nous donnons une preuve des formules de Selberg et Aomoto en utilisant uniquement un raisonnement sur les hyperdéterminants).

L'utilisation de la spécialisation d'alphabet dans (7) permet d'aller un peu plus loin. En effet, les polynômes orthogonaux apparaissant dans ce genre de mesure multivariés font intervenir des polynômes de Jack (*c.f.*[5, 11]). En fait, on peut montrer qu'une telle intégrale est un polynôme de Jack rectangulaire spécialisé an A . Mais plus généralement, certains polynômes de Jack rectangulaires ont une expression hyperdeterminantale. C'est ce que nous avons montré dans [1] en généralisant une identité de [12].

4 La fonction d'onde de Laughlin

Le développement des puissances paires du Vandermonde dans la base des fonctions de Schur est un problème notoirement difficile relié à la théorie de l'effet de Hall fractionnaire quantique [4, 13]. Dans [2], nous avons donné une identité hyperdeterminantale exprminant les coefficients apparaissant dans le développement et nous avons utilisé un développement de Laplace généralisé afin de les calculer. Nous avons poussé les calculs jusqu'à un alphabet de taille 11 pour le carré du Vandermonde.

5 Vers des fonctions de Schur hyperdéterminantales ?

Nous sommes en train d'explorer la possibilité de construire des fonctions de Schur hyperdéterminantales. Ces fonctions de Schur ont la propriété de pouvoir s'exprimer comme un hyperdéterminant de fonctions complètes, d'avoir une identité de type Jacobi-Trudi et de pouvoir se définir alternativement comme les duales des fonctions de Schur pour un noyau décalé par le Vandermonde. De nombreuses questions sont en suspens au sujet de ces fonctions. Par exemple : Sont-elles linéairement indépendantes ? Permettent-elles de coder des caractères de certains groupes ?

Références

- [1] H. Belbachir, A. Boussicault, J.-G. Luque, Hankel hyperdeterminants, rectangular Jack polynomials and even powers of the Vandermonde, *Journal of Algebra* 320, 11 (2008) 3911-392
- [2] A. Boussicault, J.-G. Luque, C. Tollu, Hyperdeterminantal computation for the Laughlin wave function, *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical* 42 (2009) 145301
- [3] A. Cayley, Mémoire sur les hyperdéterminants, *J. reine u. angew. Math.* 30, 1-37, 1846.
- [4] P. Di Francesco, M. Gaudin, C. Itzykson, F. Lesage, Laughlins wave functions, Coulomb gases and expansions of the discriminant, *Int. J. Mod. Phys. A* 9, 4257-4351, 1994.
- [5] P. Forrester, *Log-gases and Random matrices*, Chapitre 3, London Mathematical Society Monographs, Princeton.
- [6] A Lascoux, *Symmetric function and combinatorial operators on polynomials*, CBMS 99, American Mathematical Society, 2001.
- [7] M. Lecat, *Leçon sur la théorie des déterminants à n dimensions avec applications à l'algèbre, à la géométrie, etc.*, AD. Hoste, Gand, 1910.
- [8] J.-G. Luque et J.-Y. Thibon, Pfaffian and Hafnian identities in shuffle algebra, *Advances in Applied Mathematics* 29, 620-646, 2002
- [9] J.-G. Luque et J.-Y. Thibon, Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals, *J.Phys.A : Math. Gen.* 36, 5267-5292, 2003.
- [10] J.-G. Luque et J.-Y. Thibon, Hyperdeterminantal calculations of Selbergs and Aomoto integrals, *Molecular Physics* 102 : 11-12, 1351-1359, 2004.
- [11] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed, Oxford university press, 1995.
- [12] S. Matsumoto, Two parameters circular ensembles and Jacobi- Trudi type formulas for Jack functions of rectangular shape, *J. Phys. A : Math. Theor.* 40 (2007) 13567-13586
- [13] T. Scharf, J.-Y. Thibon, B. G. Wybourne, Powers of the Vandermonde determinant and the quantum Hall effect, *J. Phys. A : Math. Gen.* 27 (1994) 4211-4219.
- [14] N.P. Sokolov, *Introduction à la théorie des matrices multidimensionnelles*, Kiev : Nukova Dumka, En Russe, 1972.