



HAL
open science

A la recherche du tore perdu

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro, Frank Olaf Wagner

► **To cite this version:**

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro, Frank Olaf Wagner. A la recherche du tore perdu. 2013.
hal-00758982v4

HAL Id: hal-00758982

<https://hal.science/hal-00758982v4>

Preprint submitted on 12 Jun 2013 (v4), last revised 19 Jan 2015 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

À LA RECHERCHE DU TORE PERDU

THOMAS BLOSSIER, AMADOR MARTIN-PIZARRO ET FRANK O. WAGNER

RÉSUMÉ. Un groupe interprétable dans le mauvais corps vert est isogène à un quotient d'un sous-groupe d'un groupe algébrique par une puissance du groupe vert. Un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique dans un corps vert ou rouge est une extension des points colorés d'un groupe algébrique additif ou multiplicatif par un groupe algébrique. En particulier, tout groupe simple définissable dans un corps coloré est algébrique.

INTRODUCTION

La conjecture d'algébricité énoncée par Cherlin et Zilber affirme que tout groupe simple infini \aleph_1 -catégorique s'interprète comme un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Cette conjecture donna naissance à une interaction entre la théorie des modèles et la théorie des groupes.

Un *mauvais groupe* serait un contre-exemple à la conjecture de dimension minimale. La dimension en question est le *rang de Morley*, c'est-à-dire le rang de Cantor-Bendixson de l'espace des types sur un modèle suffisamment saturé. Un des premiers obstacles pour la caractérisation algébrique des sous-groupes de Borel (sous-groupes connexes résolubles maximaux) d'un groupe simple \aleph_1 -catégorique fut l'existence éventuelle d'un *mauvais corps* : un corps de rang de Morley fini muni d'un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif divisible non trivial. Rappelons qu'un corps de rang de Morley fini est algébriquement clos et que, dans le langage pur des anneaux, le rang de Morley équivaut à la dimension de Zariski.

L'existence d'un mauvais corps en caractéristique positive est improbable [19]. En caractéristique nulle, Poizat [16] utilisa la construction par amalgamation développée par Hrushovski [10, 11] pour introduire un corps de rang $\omega \cdot 2$ avec un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif de rang ω , qui fut collapsé dans [2] pour obtenir un mauvais corps. Dans le même article, Poizat construisit également un corps de caractéristique positive avec un prédicat pour un sous-groupe additif infini et d'indice infini, collapsé dans [3]. Ce travail faisait suite à sa construction [15] d'un corps avec un prédicat pour un sous-ensemble algébriquement indépendant, collapsé dans [1]. Poizat nomma les prédicats *vert*, *rouge* et *noir* respectivement. Les corps ainsi obtenus (collapsés ou non) s'appellent donc les corps *colorés*.

L'étude systématique des groupes définissables dans les corps colorés fut entamée dans [6] où les auteurs montrèrent que tout groupe simple définissable est linéaire. Grâce à [17], ils conclurent qu'un corps rouge n'admet pas de mauvais groupe

Date: 12 juin 2013.

2010 Mathematics Subject Classification. 03C45.

Key words and phrases. Model Theory, Amalgamation methods, Flatness, Interpretation, Groups.

Recherche conduite dans le cadre du projet MODIG ANR-09-BLAN-0047.

définissable, et qu'un mauvais groupe définissable dans un corps vert serait un groupe linéaire constitué uniquement d'éléments semi-simples. Puisque les corps de rang de Morley fini éliminent les imaginaires, on peut donc remplacer *définissable* par *interprétable* pour les corps collapsés. Néanmoins les techniques utilisées n'ont pas permis l'étude des groupes abéliens.

Dans cet article nous donnons une caractérisation des groupes définissables dans les corps verts collapsés en montrant le résultat suivant.

Théorème A. *Un groupe interprétable dans un corps vert collapsé est isogène à un quotient d'un sous-groupe d'un groupe algébrique par un sous-groupe central qui est lui isogène à une puissance cartésienne du sous-groupe multiplicatif vert.*

Notre méthode pour démontrer ce théorème ne s'applique pas au cas rouge collapsé : par exemple, à plusieurs reprises on utilise que les sous-groupes multiplicatifs connexes sont des tores et donc définissables sur \emptyset . Dans le cas rouge, on devra traiter les sous-groupes additifs donnés par des p -polynômes.

Le théorème A nous amène naturellement à étudier les sous-groupes définissables d'un groupe algébrique. Nous les caractérisons non seulement pour les mauvais corps verts de [2], mais en général pour tous les corps colorés, quels que soient leurs couleur ou rang.

Théorème B. *Dans un corps coloré, tout sous-groupe définissable d'un groupe algébrique est l'extension des points colorés d'un groupe algébrique additif ou multiplicatif par un groupe algébrique. En particulier, il n'interprète pas de mauvais groupe.*

Un corps coloré peut aussi être considéré comme une fusion de deux structures de rang fini avec la propriété de la multiplicité définissable (DMP) par amalgame de Hrushovski [10, 21]. Hrushovski construisit ces fusions pour deux théories fortement minimales ayant comme réduct commun l'égalité (cas du corps noir) ; dans le cas où le réduct commun est un espace vectoriel sur un corps fini (cas du corps rouge), cette construction fut réalisée dans [4]. Dans le cas où le réduct commun est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} (celui du corps vert), une telle fusion n'a pas encore été construite.

Hrushovski affirma que tout groupe définissable dans la fusion fortement minimale de deux théories fortement minimales sur l'égalité est isogène à un produit direct de deux groupes, chacun définissable dans l'une des théories initiales. Il ne donna pas de preuve, et on n'en trouve qu'une esquisse dans [8, Claim 3.1]. En nous inspirant de la preuve qu'aucun groupe infini n'est définissable dans une théorie plate [10, Section 4.2], nous donnons une démonstration complète de ce résultat, valable pour la fusion libre ou collapsée.

Théorème C. *Dans une fusion sur l'égalité de deux théories fortement minimales avec la DMP, tout groupe définissable est isogène à un produit direct de groupes interprétables dans les théories de base.*

1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette partie nous rappelons des résultats portant sur les groupes stables qui seront utilisés par la suite.

Définition 1.1. Soit G un groupe stable, un ensemble A de paramètres et un élément g de G . Le stabilisateur (à gauche) de g dans G sur A est le sous-groupe

défini par

$$\text{Stab}(g/A) = \{h \in G : \exists x \models \text{stp}(g/A) (hx \models \text{stp}(g/A) \wedge x \downarrow_A h)\}.$$

Notons que $\text{Stab}(g/A) = \text{Stab}(g/\text{acl}^{\text{eq}}(A))$. De plus, si $h \in \text{Stab}(g/A)$ et $g' \models \text{stp}(g/A)$ avec $g' \downarrow_A h$, par stationnarité on conclut que $hg' \models \text{stp}(g/A)$ et $hg' \downarrow_A h$.

Le lemme suivant est dû à Ziegler dans le cas abélien [20, Theorem 1].

Lemme 1.2. *Soit H un groupe type-définissable dans une théorie stable et h, h' dans H tels que h, h' et hh' sont deux-à-deux indépendants sur un ensemble A . Alors chacun des éléments a un stabilisateur (à gauche) connexe et l'élément est générique dans un translaté (à droite), qui est définissable sur $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$. De plus, les trois stabilisateurs sont conjugués.*

Démonstration. Nous travaillons sur $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$. En remplaçant le rang de Morley par chaque rang local stratifié D dans la preuve de [14, Lemme 2.3], il suffit de vérifier l'inégalité $D(\text{Stab}(h')) \geq D(h')$ pour la première partie.

Soit $h'' \models \text{tp}(h/hh')$ avec $h'' \downarrow_{hh'} h'$. Comme $h \downarrow hh'$ on a $h'' \downarrow hh'$ et donc $h'' \downarrow h, h'$; alors $h' \downarrow h$ donne $h' \downarrow h, h''$ et

$$h' \downarrow h''^{-1}h.$$

Comme $h, hh' \equiv h'', hh'$, on a $h, h' \equiv h'', h''^{-1}hh'$. En particulier,

$$h''^{-1}hh' \equiv h'.$$

On a donc $h''^{-1}h \in \text{Stab}(h')$. Ainsi

$$\begin{aligned} D(\text{Stab}(h')) &\geq D(h''^{-1}h) \geq D(h''^{-1}h/h'') = D(h/h'') = D(h) = D(h/h') \\ &= D(hh'/h') = D(hh') = D(hh'/h) = D(h'/h) = D(h'). \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, on voit facilement que

$$\text{Stab}(hh') = \text{Stab}(hh'/h') = \text{Stab}(h/h') = \text{Stab}(h)$$

et

$$\text{Stab}(hh') = \text{Stab}(hh'/h) = h \text{Stab}(h'/h)h^{-1} = h \text{Stab}(h')h^{-1}.$$

□

Remarque 1.3. Ce lemme se généralise au cas où H est hyperdéfinissable dans une théorie simple, avec la notion de stabilisateur correspondante aux théories simples sur la clôture bornée $\text{bdd}(A)$. On obtient que $\text{Stab}(hh') = \text{Stab}(h)$ est commensurable à un conjugué de $\text{Stab}(h')$.

Définition 1.4. Soient G et H deux groupes type-définissables. Un sous-groupe type-définissable S de $G \times H$ est une *endogénie* de G dans H si

- la projection sur G est un sous-groupe G_S d'indice borné, et
- le *co-noyau* $\text{coker}(S) = \{h \in H : (1, h) \in S\}$ est fini.

Une endogénie induit donc un morphisme de G_S dans $N_H(\text{coker}(S))/\text{coker}(S)$. Une *isogénie* de G vers H est une endogénie de noyau $\text{ker}(S) = \{g \in G : (g, 1) \in S\}$ fini et dont l'image (la projection sur H) est d'indice borné dans H .

Lemme 1.5. *Soient G et H deux groupes type-définissables dans une théorie stable et C un translaté à droite type définissable sur A d'un sous-groupe connexe $S \leq G \times H$. Supposons qu'il existe un générique (g, h) sur A du translaté C tel que $h \in \text{acl}(A, g)$. Alors S définit une endogénie de $\pi_1(S)$ dans H , où π_1 dénote la*

projection sur G . Si de plus g et h sont interalgébriques sur A , alors l'endogénie est une isogénie de $\pi_1(S)$ vers $\pi_2(S)$, où π_2 dénote la projection sur H .

Démonstration. Soit $(g', h') \models \text{stp}(g, h/A)$ avec $g', h' \downarrow_A g, h$. Alors $(g'g^{-1}, h'h^{-1})$ est générique dans S et indépendant de g', h' sur A . Comme $h'h^{-1} \in \text{acl}(A, g, g')$, on a que $h'h^{-1} \in \text{acl}(A, g'g^{-1}, g')$ et donc $h'h^{-1} \in \text{acl}(A, g'g^{-1})$. En particulier, le conoyau $\text{coker}(S)$ est fini et S est une endogénie de $\pi_1(S)$ vers $\pi_2(S)$. Si $g \in \text{acl}(A, h)$, on obtient par symétrie que $\ker(S)$ est fini. \square

Remarque 1.6. Le lemme 1.5 reste vrai avec un translaté de S à gauche. De plus, si g est générique dans un sous-groupe $G_1 \leq G$ type-définissable sur A , alors $\pi_1(S)$ est d'indice borné dans G_1 et S définit une endogénie de G_1 dans $\pi_2(S)$. Enfin si h est générique dans un sous-groupe $H_1 \leq H$, alors $\pi_2(S)$ a indice bornée dans H_1 .

Remarque 1.7. Si G , H et S sont hyperdéfinissables dans une théorie simple, on obtient un résultat analogue en remplaçant, dans les définitions d'endogénie et d'isogénie, fini par borné.

Jusqu'à la fin de cette partie, on considère une théorie stable T avec un réduit T_0 , qui elle a élimination géométrique des imaginaires. On utilisera l'indice 0 pour dénoter l'indépendance et la clôture algébrique au sens du réduit T_0 . Puisqu'on travaille avec des réduits, la clôture algébrique dans T sera prise au sens réel. Rappelons que d'après [6, Lemme 2.1], au-dessus d'un ensemble T -algébriquement clos l'indépendance au sens T implique l'indépendance au sens T_0 . La proposition suivante donne un critère pour montrer qu'un sous-groupe connexe T -type-définissable d'un groupe T_0 -type-définissable est lui-même T_0 -type-définissable.

Proposition 1.8. *À l'intérieur d'un groupe T_0 -type-définissable, on considère un translaté C d'un sous-groupe connexe T -type-définissable S sur un ensemble T -algébriquement clos de paramètres réels A . Soit p le type générique de C sur A et notons p_0 son T_0 -réduit. Si p est de rang maximal (par rapport au rang de Lascar ou de Morley, ou aux rangs locaux stratifiés) parmi les complétions de p_0 (vu comme T -type partiel), alors S est d'indice borné dans $\text{Stab}_0(p_0)$, qui est son enveloppe T_0 -type-définissable. Si p est l'unique complétion de p_0 de rang maximal, alors S est T_0 -type-définissable.*

Démonstration. Comme les hypothèses de la proposition se préservent par extension des paramètres, en prenant un représentant du translaté de S , on peut se réduire au cas où p est le générique de S .

Remarquons que $S = \text{Stab}(p) \subseteq \text{Stab}_0(p_0)$, puisque la T -indépendance implique la T_0 -indépendance. Comme S est un sous-groupe connexe A -invariant qui contient p , l'enveloppe T_0 -type-définissable \bar{S} est aussi un sous-groupe connexe A -invariant et contient p_0 . Donc il contient $\text{Stab}_0(p_0) \subseteq p_0 p_0^{-1}$. Il suit que $\bar{S} = \text{Stab}_0(p_0)$, qui est alors T_0 -connexe. En particulier, le type p_0 est l'unique 0-type générique de \bar{S} .

Rappelons qu'une formule est générique dans un groupe stable si un nombre fini de ses translats recouvre ce groupe. Ainsi, une T_0 -formule est générique pour \bar{S} (au sens de T_0 comme au sens de T) si et seulement si elle est dans p_0 . Les types T -génériques de \bar{S} sont donc précisément les complétions de p_0 de rang maximal.

Ainsi, si p est de rang maximal parmi les complétions de p_0 , alors p est générique pour \bar{S} , ce qui entraîne que l'indice de S dans \bar{S} est borné. Si de plus p est l'unique complétion de rang maximal de p_0 , alors p est l'unique type T -générique de \bar{S} , qui est donc T -connexe et égal à S . \square

Pour terminer ces préliminaires, on rappelle deux faits qui seront utilisés à plusieurs reprises par la suite. Soient G un groupe connexe type-définissable sur \emptyset dans T , et a et b deux génériques indépendants de G .

Fait 1.9. [6, Lemme 3.4] Après adjonction au langage des éléments d'une suite de Morley du générique de G au-dessus de a, b , on pose

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(b), \text{acl}(ab)) \cap \text{acl}(a), \\ b_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(a), \text{acl}(ab)) \cap \text{acl}(b), \\ (ab)_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(a), \text{acl}(b)) \cap \text{acl}(ab). \end{aligned}$$

Alors a_1, b_1 et $(ab)_1$ sont indépendants deux-à-deux, chacun est 0-algébrique sur les deux autres, et en plus

$$\text{acl}(b), \text{acl}(ab) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(a).$$

Fait 1.10. [6, Théorème 3.1] Après adjonction de paramètres indépendants de a, b , il existe un groupe connexe T_0 - \star -interprétable H et un morphisme définissable $\phi : G \rightarrow H$ tel que a_1 est 0-interalgébrique avec $\phi(a)$ (et de même pour b_1 et $(ab)_1$). En particulier,

$$\text{acl}(b), \text{acl}(ab) \underset{\phi(a)}{\downarrow}^0 \text{acl}(a).$$

2. DIE LIEBE FARBE

Dans cette partie nous rappelons quelques propriétés du mauvais corps obtenu dans [2] qui seront utilisées pour la démonstration du théorème A. Il s'agit d'un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle muni d'un sous-groupe propre multiplicatif divisible et sans torsion, noté \ddot{U} et coloré en vert, tel que $\text{RM}(K) = 2$ et $\text{RM}(\ddot{U}) = 1$ (où $\text{RM}(X)$ désigne le rang de Morley de X , qui dans tout groupe de rang de Morley fini est égal au rang de Lascar). On peut alors voir \ddot{U} comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel qui est fortement minimal avec toute la structure induite. Nous travaillons dans un langage relationnel, à l'exception de la loi du groupe multiplicatif et, pour chaque $q \in \mathbb{Q}$, de la multiplication linéaire par q sur les éléments verts. À l'élément zéro près, nos structures sont donc des sous-groupes multiplicatifs d'un corps de caractéristique nulle dont le sous-groupe vert est divisible sans torsion. Pour deux structures A et B , on note $A * B$ la structure engendrée, qui est, modulo l'élément 0, le plus petit sous-groupe multiplicatif les contenant et clos par racines vertes.

Pour deux structures $A \subseteq B$ avec B finiment engendrée sur A , on définit une prédimension relative

$$\delta(B/A) = 2 \text{ degtr}(B/A) - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(\ddot{U}(B)/\ddot{U}(A)) ;$$

lorsque A est vide, on l'omet. On dit que A est *autosuffisante* dans B , noté $A \leq B$, si $\delta(B_0/A) \geq 0$ pour tout $A \subseteq B_0 \subseteq B$. Une extension autosuffisante $A \leq B$ est *minimale* s'il n'y a pas de structure intermédiaire propre autosuffisante dans B .

Le corps K est caractérisé par les conditions suivantes :

- $\delta(A) \geq 0$ pour tout $A \subset K$ finiment engendré.
- Si $A \leq K$ et $A \leq B$ est une extension minimale, alors il existe un plongement de B dans K sur A avec image autosuffisante.

- Si $A \leq K$ et $A \leq B$ avec $\delta(B/A) = 0$, alors il n'y a qu'un nombre fini de plongements de B dans K sur A .

Rappelons que δ est *sous-modulaire* : pour A et B dans K finiment engendrées,

$$\delta(A * B) + \delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B).$$

En particulier, l'intersection de deux sous-structures autosuffisantes l'est aussi. Donc pour tout $A \subseteq K$, il existe une plus petite sous-structure autosuffisante de K contenant A , sa *clôture autosuffisante* $\langle A \rangle$, qui est algébrique sur A dans la théorie T du mauvais corps K et A -invariante en tant qu'ensemble. Si A est finiment engendré, alors $\langle A \rangle$ l'est aussi. De plus,

$$\text{RM}(a/C) = \delta(\langle aC \rangle / \langle C \rangle).$$

L'indépendance $a \downarrow_C b$ au sens de T pour deux uples a et b au-dessus de $C = \langle aC \rangle \cap \langle bC \rangle$ est caractérisée par les propriétés équivalentes suivantes :

- $\delta(\langle abC \rangle / \langle bC \rangle) = \delta(\langle aC \rangle / C)$
- $\langle aC \rangle \downarrow_C^0 \langle bC \rangle$, $\langle abC \rangle = \langle aC \rangle * \langle bC \rangle$ et $\ddot{U}(\langle abC \rangle) = \ddot{U}(\langle aC \rangle) \cdot \ddot{U}(\langle bC \rangle)$,

où l'indice 0 fait référence au réduit au pur langage des anneaux, et donc à la théorie T_0 des corps algébriquement clos de caractéristique 0. Notons que T_0 élimine les imaginaires, ce qui nous permet d'utiliser les résultats de la section précédente. De plus, si A et B sont autosuffisants et indépendants sur leur intersection, alors la structure engendrée $A * B$ est le produit des groupes A et B modulo 0. Dans [6], on montre que T est relativement CM-triviale au-dessus de T_0 par rapport à la clôture autosuffisante.

Remarque 2.1. Soient $A \subseteq B$ autosuffisants et $C \subseteq \text{acl}(A)$ autosuffisant tel que $B \cap C = A$. Alors, on a $B \downarrow_A^0 C$.

Démonstration. Par le caractère local de la déviation, on peut supposer que C est finiment engendré au-dessus de A . Comme C est T -algébrique sur A , on a $B \downarrow_A C$; la caractérisation de l'indépendance implique alors $B \downarrow_A^0 C$. \square

Pour deux structures $B \subseteq A$, on appelle une *base verte* de A sur B tout uple de $\ddot{U}(A)$ qui complète une base linéaire de $\ddot{U}(B)$ en une base de $\ddot{U}(A)$; notons qu'il sera linéairement indépendant sur B . En particulier, une base verte de A est une base linéaire de $\ddot{U}(A)$. Terminons par quelques remarques utiles sur le corps K :

- Remarque 2.2.**
- (1) Si A est autosuffisante, alors $\text{acl}_0(A)$ l'est aussi et ne contient pas de nouveaux points colorés.
 - (2) Si A est autosuffisant et $b \in \text{acl}(A)$, alors il existe $B \supseteq Ab$ finiment engendré sur A tel que $\delta(B/A) = 0$. Si \bar{x} est une base verte de B sur A alors $\text{degr}(B/A) = \text{degr}(\bar{x}/A) = |\bar{x}|/2$. En particulier, B est inclus dans $\text{acl}_0(A, \ddot{U}(B))$; si A est vert, on a même $B \subseteq \text{acl}_0(\ddot{U}(B))$.
 - (3) Tout point x de K est la somme de deux points verts. De plus, il n'y a qu'un nombre fini de couples verts (y, z) tels que $x = y + z$. Soit B la sous-structure engendrée par l'ensemble des couples de points verts dont la somme est un point d'une sous-structure A fixée. Si A est autosuffisante, alors B l'est également et $B \subseteq \text{acl}(A)$.

3. CHERCHEZ LE TORE

Dans cette partie, nous allons démontrer le théorème A énoncé dans l'introduction. Pour ce faire, nous allons décomposer le groupe en une partie 0-algébrique et une partie 0-transcendante (où l'indice 0 fait toujours référence au réduit de pur corps algébriquement clos). En utilisant cette décomposition, on construira un groupe algébrique. Finalement, on exhibera une isogénie non trivial de notre groupe vers une section du groupe algébrique construit.

Rappelons qu'un corps de rang de Morley fini élimine les imaginaires [18] et donc tout groupe interprétable est définissablement isomorphe à un groupe définissable. En particulier, le quotient K^*/\check{U} est en bijection avec un groupe définissable. Hélas, pour deux uples réels a et b en bijection avec deux génériques indépendants de K^*/\check{U} , l'élément a_1 décrit dans le fait 1.9 est vide. Cet exemple sera notre fil conducteur pour faire une analyse plus précise des groupes définissables.

Fixons donc un groupe infini connexe G type-définissable dans le corps (K, \check{U}) . Nous ajoutons aux paramètres de la théorie ceux nécessaires pour définir G ainsi que la clôture algébrique d'une suite de Morley D du générique de G . Nous supposons en particulier que G est définissable sur \emptyset .

Prenons a, b et c trois points génériques de G indépendants, et posons

$$a_1 = \text{acl}(a) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(b), \text{acl}(ab)).$$

Alors a_1 est autosuffisant comme intersection de deux sous-structures autosuffisantes. Le fait 1.9 donne

$$\text{acl}(a) \downarrow_{a_1}^0 \text{acl}(b), \text{acl}(ab).$$

Considérons un uple réel a_E représentant l'ensemble $\{a, a^{-1}\}$. Alors a, a^{-1} et a_E sont tous interalgébriques au sens de la théorie T . Puisque (b, ab) et $(c^{-1}, (ca)^{-1})$ ont le même type sur a_E , on a également $a_1 = \text{acl}(a) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(c), \text{acl}(ca))$ et

$$\text{acl}_0(\text{acl}(c), \text{acl}(ca)) \downarrow_{a_1}^0 \text{acl}(a).$$

La clôture autosuffisante $\langle a, a^{-1} \rangle$ est une sous-structure finiment engendrée et algébrique sur a_E . Soit Θ un ensemble fini a_E -définissable qui engendre $\langle a, a^{-1} \rangle$. Par la remarque 2.2(3), l'ensemble (fini) a^2 constitué de tous les couples de points verts dont la somme est un point de Θ est aussi définissable sur a_E . De plus, l'uple a est 0-algébrique sur a^2 , et ce dernier engendre une sous-structure verte autosuffisante incluse dans $\text{acl}(a)$.

En utilisant la définissabilité de a^2 sur a_E et le fait que $(b, ab) \equiv_{a_E} (c^{-1}, (ca)^{-1})$, on décompose de la même façon les points b, ab, c, ca et cab . Posons

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{acl}_0(\langle a_1, a^2, b_1, b^2, ab_1, ab^2 \rangle) & A_2 &= \text{acl}_0(\langle a_1, a^2, c_1, c^2, ca_1, ca^2 \rangle) \\ A_3 &= \text{acl}_0(\langle b_1, b^2, ca_1, ca^2, cab_1, cab^2 \rangle) & A_4 &= \text{acl}_0(\langle ab_1, ab^2, c_1, c^2, cab_1, cab^2 \rangle), \end{aligned}$$

où la multiplication est prioritaire sur les indices : par exemple cab_1 signifie $(cab)_1$ et ab^2 signifie $(ab)^2$. Par la remarque 2.2(1), les sous-structures A_1, A_2, A_3 et A_4 sont toutes autosuffisantes ; comme $\text{acl}_0(a_1, b_1, ab_1) = \text{acl}_0(a_1, b_1)$ est autosuffisant et a^2, b^2, ab^2 sont finis, le degré de transcendance $\text{degr}(A_1/a_1, b_1)$ est fini. Posons $\bar{a} = \text{acl}(a) \cap A_1$, qui est autosuffisant. Alors $a_1 a^2 \subseteq \bar{a}$, et donc $a \in \text{acl}_0(\bar{a}) \subseteq \text{acl}(a)$. De plus, on a $\bar{a} = \text{acl}(a) \cap A_2$, car $A_1 \equiv_{a_E} A_2$. Comme $A_1 \downarrow_a A_2$, on a

$$\bar{a} \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \cap \text{acl}(a) = \bar{a}.$$

Ainsi $A_1 \cap A_2 = \bar{a}$. Notons que

$$A_1 \downarrow_{\bar{a}} A_2,$$

car a et \bar{a} sont interalgébriques au sens T . Il suit de la caractérisation de l'indépendance que $A_1 * A_2$ est autosuffisante,

$$A_1 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_2 \quad \text{et} \quad \ddot{U}(A_1 * A_2) = \ddot{U}(A_1) \cdot \ddot{U}(A_2),$$

où $\ddot{U}(A_1)$ et $\ddot{U}(A_2)$ sont en somme directe au-dessus de $\ddot{U}(\bar{a})$ en tant que \mathbb{Q} -espace vectoriel. La remarque 2.1 donne $A_1 \downarrow_{\bar{a}}^0 \text{acl}(a)$. Puisque $a^2 \subseteq \bar{a} \subseteq \text{acl}(a^2)$, on a $\delta(\bar{a}/a^2) = 0$. Donc $\bar{a} \in \text{acl}_0(\ddot{U}(\bar{a}))$ d'après la remarque 2.2 (2).

Lemme 3.1. *Le degré de transcendance $\text{degtr}(\bar{a}/a_1)$ est fini.*

Démonstration. Puisque

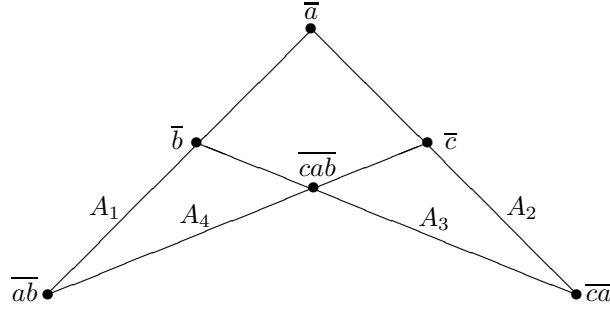
$$\text{acl}(a) \downarrow_{a_1}^0 \text{acl}(b), \text{acl}(ab),$$

on a l'inégalité

$$\text{degtr}(\bar{a}/a_1) = \text{degtr}(\bar{a}/a_1, b_1, b^2, ab_1, ab^2) \leq \text{degtr}(A_1/a_1, b_1),$$

qui est fini. \square

Avec les mêmes notations pour chacun des points, on obtient le quadrangle algébrique (au sens de T) suivant :



Notons que nous avons remplacé chaque point du groupe G par un uple auto-suffisant interalgébrique. De plus, on a $A_1 = \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{b}, \overline{ab} \rangle)$ (et de même pour les autres droites A_i). Nous allons modifier (une partie de) notre quadrangle afin de le rendre 0-algébrique, ce qui donnera le groupe algébrique H cité dans le théorème A.

Lemme 3.2.

$$A_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}}^0 A_2, A_3.$$

Démonstration. Vérifions d'abord que

$$A_1 \downarrow_{\bar{a} * \bar{b}}^0 \text{acl}(a) * \text{acl}(b).$$

Comme a et b sont indépendants, les structures $\bar{a} * \bar{b}$ et $\text{acl}(a) * \text{acl}(b)$ sont autosuffisantes. Grâce à la remarque 2.1, il suffit de montrer que $A_1 \cap (\text{acl}(a) * \text{acl}(b)) = \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b})$. Comme $\text{acl}(a) * \text{acl}(b) \subseteq \text{acl}(\bar{a}, \bar{b})$, l'ensemble $A_1 \cap (\text{acl}(a) * \text{acl}(b))$ est 0-algébrique sur ses points verts et $\bar{a} * \bar{b}$ par la remarque 2.2(2). Puisque son degré de transcendance sur $\bar{a} * \bar{b}$ est fini, sa base verte e sur $\bar{a} * \bar{b}$ est finie. Par hypothèse,

elle s'écrit comme $e = e_a \cdot e_b$, avec $e_a \in \text{acl}(a)$ et $e_b \in \text{acl}(b)$, où le produit est pris coordonnée par coordonnée. Notons que

$$\begin{aligned} e \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}}^0 e_a & \text{ car } A_1 \downarrow_{\bar{a}}^0 \text{acl}(a), \\ e \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}}^0 e_b & \text{ car } A_1 \downarrow_{\bar{b}}^0 \text{acl}(b), \text{ et} \\ e_a \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}}^0 e_b & \text{ car } \text{acl}(a) \downarrow \text{acl}(b) \text{ par indépendance au sens de } T. \end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme 1.2, l'élément e est 0-générique dans un translaté d'un sous-groupe algébrique connexe multiplicatif. Un tel sous-groupe de $(K^*)^n$ est un tore, défini par des relations \mathbb{Q} -linéaires. La dimension linéaire d'un point générique coïncide donc avec le degré de transcendance [12].

Notons que $\delta(e/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b})) = \delta(A_1 \cap (\text{acl}(a) * \text{acl}(b))/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b})) = 0$. Ainsi

$$0 = \delta(e/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b})) = 2 \text{degtr}(e/\bar{a}, \bar{b}) - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(e/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b})) = \text{degtr}(e/\bar{a}, \bar{b}),$$

et donc $e \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b})$.

Pour terminer, observons qu'une relation 0-algébrique entre A_1 et A_2, A_3 se produit déjà au-dessus d'une partie infinie propre D' de la suite de Morley D fixée au départ. Cela donne une relation 0-algébrique entre les A'_1 et A'_2, A'_3 correspondants. Mais alors on peut envoyer c sur un élément de $D \setminus D'$ pour obtenir une copie de $A'_2 * A'_3$ dans $\text{acl}(a) * \text{acl}(b)$ au-dessus de A'_1 . Donc cette relation 0-algébrique se produit déjà entre A_1 et $\text{acl}(a) * \text{acl}(b)$, et par transitivité, entre A_1 et $\bar{a} * \bar{b}$. \square

Soit a_2 un uple de points verts de \bar{a} maximal 0-transcendant sur a_1 , qui est fini d'après le lemme 3.1. Alors $\bar{a} = \text{acl}_0(a_1 a_2)$ et comme \bar{a} est autosuffisant,

$$\bar{a} = \text{acl}_0(\langle a_1 a_2 \rangle).$$

En particulier, $\ddot{U}(\bar{a}) = \ddot{U}(\langle a_1 a_2 \rangle)$ par la remarque 2.2(1).

Lemme 3.3. *La structure $A_1 * A_2 * A_3$ est autosuffisante. On a*

$$\ddot{U}(A_1 * A_2 * A_3) = \ddot{U}(A_1) \cdot \ddot{U}(A_2) \cdot \ddot{U}(A_3).$$

En outre, ces sous-espaces sont en somme directe au-dessus de $\ddot{U}(\bar{a}) \cdot \ddot{U}(\bar{b}) \cdot \ddot{U}(\bar{c}\bar{a})$.

Démonstration. Comme $a, b, c \in \text{acl}(A_1 * A_2)$, on a $\delta(\text{acl}(a, b, c)/A_1 * A_2) = 0$, et

$$\delta(A_1 * A_2) = \delta(\text{acl}(a, b, c)) = 3 \text{RM}(G).$$

De plus,

$$0 \leq \delta(A_1 * A_2 * A_3/A_1 * A_2) \leq \delta(A_3/(A_1 * A_2) \cap A_3) = \delta(A_3/\bar{b} * \bar{c}\bar{a}) = 0.$$

Alors

$$3 \text{RM}(G) = \delta(A_1 * A_2) \leq \delta(\langle A_1 * A_2 * A_3 \rangle) \leq \delta(A_1 * A_2 * A_3) \leq 3 \text{RM}(G),$$

on a égalité, et $A_1 * A_2 * A_3$ est autosuffisant. Enfin, comme

$$\delta(A_1 * A_2 * A_3/\bar{a} * \bar{b}) = \text{RM}(G) = \delta(A_1/\bar{a} * \bar{b}) + \delta(A_2 * A_3/\bar{a} * \bar{b})$$

et $\ddot{U}(\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b})) = \ddot{U}(\bar{a} * \bar{b})$ puisque $\bar{a} * \bar{b}$ est autosuffisant, l'indépendance

$$A_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}}^0 A_2, A_3 \text{ implique } \ddot{U}(A_1 * A_2 * A_3) = \ddot{U}(A_1) \cdot \ddot{U}(A_2) \cdot \ddot{U}(A_3),$$

et que $\ddot{U}(A_1)$ et $\ddot{U}(A_2 * A_3)$ sont en somme directe au-dessus de $\ddot{U}(\bar{a} * \bar{b})$. Le fait que $\ddot{U}(A_2 * A_3)$ est la somme directe de $\ddot{U}(A_2)$ et $\ddot{U}(A_3)$ au-dessus de $\ddot{U}(\bar{c}\bar{a})$ nous permet de conclure. \square

Maintenant, nous allons obtenir une base verte de \bar{a} sur a_1 avec de bonnes propriétés.

Lemme 3.4. *Il existe un uple vert t_a (fini) qui complète a_2 en une base verte de \bar{a} sur a_1 et qui est 0-transcendant sur a_1 .*

Démonstration. Soit t_a complétant a_2 en une base verte de \bar{a} sur a_1 . Comme a_1 est autosuffisant, toute sous-structure de \bar{a} engendrée par n éléments de a_2, t_a sur a_1 a degré de transcendance au moins $n/2$ sur a_1 . En particulier,

$$|a_2| = \text{degr}(\bar{a}/a_1) \geq |t_a|.$$

On peut alors transformer linéairement les éléments de t_a avec les points de a_2 pour que t_a soit également 0-transcendant sur a_1 . \square

Rappelons que t_a est 0-algébrique sur $a_1 a_2$. Nous obtenons des bases vertes comme ci-dessus pour chaque point du diagramme. Les indépendances

$$\text{acl}(b) \downarrow^0 \text{acl}(ab) \quad \text{et} \quad \text{acl}(a) \downarrow^0_{a_1} \text{acl}(b), \text{acl}(ab)$$

impliquent que $a_2, b_2, ab_2, t_a, t_b, t_{ab}$ est une base linéaire de $\ddot{U}(\bar{a}) \cdot \ddot{U}(\bar{b}) \cdot \ddot{U}(\overline{ab})$ au-dessus de $\ddot{U}(\text{acl}_0(a_1, b_1, ab_1)) = \ddot{U}(\text{acl}_0(a_1, b_1)) = \ddot{U}(a_1) \cdot \ddot{U}(b_1)$.

Lemme 3.5. *Les uples*

$$t'_a = \frac{t_c}{t_{ca}}, \quad t'_b = \frac{t_{ca}}{t_{cab}}, \quad \text{et} \quad t'_{ab} = \frac{t_c}{t_{cab}}$$

satisfont :

- (1) $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$;
- (2) t'_a est 0-transcendant sur $\bar{a}, \overline{c\bar{a}}$ et de même sur \bar{a}, \bar{c} .

Démonstration. L'égalité est évidente. Comme

$$t_c \downarrow^0_{c_1} \bar{a}, \overline{c\bar{a}}$$

et t_c est 0-transcendant sur c_1 , il l'est aussi sur $\bar{a}, \overline{c\bar{a}}$. Puisque $t_{ca} \in \text{acl}_0(\overline{c\bar{a}})$, on voit que t'_a est 0-transcendant sur $\bar{a}, \overline{c\bar{a}}$. \square

Soit t_1 une base linéaire de $\ddot{U}(A_1)$ sur $\ddot{U}(\bar{a}) \cdot \ddot{U}(\bar{b}) \cdot \ddot{U}(\overline{ab})$, et de même pour les autres droites. Alors $a_2, b_2, ab_2, t_a, t_b, t_{ab}, t_1$ est une base verte de A_1 sur $\text{acl}_0(a_1, b_1)$. Nous allons transformer ces bases afin qu'elles satisfassent les conditions du lemme 1.2.

Proposition 3.6. *On peut transformer linéairement les uples t_i de façon que :*

- (1) $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$,
- (2) t_i et A_i sont 0-algébriques sur les trois points de la droite A_i ,
- (3) $|t_2| + |t_c| = |c_2|$ et $\text{RM}(\bar{c}/c_1) = \delta(\bar{c}/c_1) = |t_2|$,
- (4) t_2 est 0-transcendant sur \bar{a}, \bar{c}, t'_a et sur $\bar{a}, \overline{c\bar{a}}, t'_a$ (et de même pour t_3 et t_4),
- (5) t_2 est un uple vert T -générique sur \bar{a} .

Ainsi, les uples \bar{a}, \bar{c}, t'_a et t_2 , tout comme $\bar{a}, \overline{c\bar{a}}, t'_a$ et t_2 , sont 0-indépendants.

Démonstration. Par le lemme 3.3, la structure $A_1 * A_2 * A_3$ est autosuffisante et t_1, t_2, t_3 est une base linéaire de $X = \ddot{U}(A_1 * A_2 * A_3)$ sur

$$Y = \ddot{U}(\bar{a}) \cdot \ddot{U}(\bar{b}) \cdot \ddot{U}(\bar{c}) \cdot \ddot{U}(\overline{ab}) \cdot \ddot{U}(\overline{ca}) \cdot \ddot{U}(\overline{cab}).$$

Comme $A_1 * A_2 * A_3$ contient \overline{ab} , \bar{c} et \overline{cab} , elle contient également $\langle \overline{ab}, \bar{c}, \overline{cab} \rangle$. En particulier,

$$t_4 \in \ddot{U}(A_4) = \ddot{U}(\langle \overline{ab}, \bar{c}, \overline{cab} \rangle) \subseteq A_1 * A_2 * A_3,$$

donc ils existent $t'_i \in \ddot{U}(A_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$, tels que $t_4 = t'_1 \cdot t'_2 \cdot t'_3$. Par symétrie, pour tout $i < j \leq 3$, l'uple t_i, t_j, t_4 est aussi une base linéaire de X sur Y . Ceci implique que $\dim_{\text{lin}}(t'_i/Y) = \dim_{\text{lin}}(t_i/Y)$ pour chaque $1 \leq i \leq 4$. À transformation linéaire près de t_1, t_2 et t_3 , on peut donc supposer que $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$, ce qui montre (1).

Par l'indépendance du lemme 3.2, pour tous $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ distincts, l'uple t_i est 0-indépendant de t_j, t_k au-dessus de $\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \bar{c}, \overline{ca}$. Le lemme 1.2 appliqué à $t_1, t_2 \cdot t_3$ et t_4 donne que

$$\text{tp}_0(t_1 / \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \bar{c}, \overline{ca}))$$

est 0-générique dans un translaté V définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \bar{c}, \overline{ca})$ d'un tore de $(K^*)^{|t_1|}$. Puisque

$$t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}}^0 \overline{cab}, \bar{c}, \overline{ca},$$

le translaté V est définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab})$. Or, pour tout translaté d'un tore, sa dimension de Zariski correspond à la dimension linéaire multiplicative du point générique. Donc

$$\text{degtr}(t_1/\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}) = \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(t_1 / \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab})) = \delta(t_1 / \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab})) \leq 0,$$

puisque $t_1 \in A_1 = \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{b}, \overline{ab} \rangle)$. Ainsi t_1 est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}$, et A_1 l'est aussi car

$$A_1 = \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{b}, \overline{ab} \rangle) = \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}, t_1) = \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}),$$

ce qui montre (2).

Pour (3), posons $n = \text{degtr}(A_2/\bar{a}, \overline{ca})$. Du fait que $\delta(A_2/\bar{a} * \overline{ca}) = 0$ et que $\bar{a} * \overline{ca}$ est autosuffisant, la base verte c_2, t_2, t_c de A_2 sur $\bar{a} * \overline{ca}$ est de longueur $2n$. Par (2), on a

$$A_2 = \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{a}, \overline{ca}) = \text{acl}_0(c_2, \bar{a}, \overline{ca}).$$

Puisque $\bar{c} \downarrow_{c_1}^0 \bar{a}, \overline{ca}$, l'uple c_2 reste 0-transcendant sur \bar{a}, \overline{ca} . Un calcul de prédimension donne que

$$0 = \delta(c_2, t_2, t_c/\bar{a}, \overline{ca}) = 2 \text{degtr}(c_2/\bar{a}, \overline{ca}) - |c_2| - |t_2| - |t_c|.$$

Ainsi $|t_2| + |t_c| = |c_2|$. Comme \bar{c} est autosuffisant, on en déduit

$$\text{RM}(\bar{c}/c_1) = \delta(\bar{c}/c_1) = 2 \text{degtr}(\bar{c}/c_1) - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(\bar{c}/c_1) = 2|c_2| - |c_2| - |t_c| = |t_2|.$$

Pour (4), supposons que les $j-1$ premières coordonnées $t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ de l'uple t_2 sont 0-transcendantes sur $\bar{a}, \overline{ca}, t'_a$ et sur \bar{a}, \bar{c}, t'_a . Par (3), l'une des coordonnées z de c_2 est 0-transcendante sur $\bar{a}, \overline{ca}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$. Si $t_{2,j}$ est 0-algébrique sur $\bar{a}, \overline{ca}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ alors $t_{2,j}z$ est lui 0-transcendant. De plus, si $t_{2,j}$ était 0-transcendant sur $\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$, l'élément $t_{2,j}z$ l'est toujours.

Afin de conserver l'égalité $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$, on multiplie $t_{4,j}$ par z . Notons que si $t_{4,j}$ était 0-transcendant sur $\overline{ab}, \bar{c}, t'_{ab}, t_{4,1}, \dots, t_{4,j-1}$, alors $t_{4,j}z$ l'est toujours. Enfin, si $t_{4,j}$ était 0-transcendant sur $\overline{ab}, \overline{cab}, t'_{ab}, t_{4,1}, \dots, t_{4,j-1}$ mais $t_{4,j}z$ devient

0-algébrique, alors $t_{4,j}z^2$ est à nouveau 0-transcendant, ainsi que $t_{2,j}z^2$ sur les points correspondants. Le résultat suit par induction.

Pour (5), comme a et c sont indépendants, on a

$$c_2 \downarrow_{c_1} \bar{a}.$$

Par (3), l'une des coordonnées z de c_2 est T -transcendante sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ pour $j \leq |t_2|$. Si $t_{2,j}$ est algébrique sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$, l'élément $t_{2,j}z^n$ est T -transcendant sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ pour tout $n > 0$. Comme $t_{2,j}$ est 0-transcendant sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, (t_{2,i} : i \neq j)$, il y a au plus un n pour lequel $t_{2,j}z^n$ est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, (t_{2,i} : i \neq j)$. De même pour $t_{4,j}z^n$ au-dessus de $\bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, (t_{4,i} : i \neq j)$. Il existe donc un n commun permettant de préserver (1) et (4). On conclut par récurrence.

La dernière remarque suit du lemme 3.5 et du point (4). \square

Corollaire 3.7. *La droite A_2 est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2$. Les points \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont 0-interalgébriques sur \bar{a}, t'_a, t_2 .*

Démonstration. D'après la proposition 3.6, la droite A_2 est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}$ et donc sur \bar{a}, \bar{c}, ca_2 . De plus, l'uple t'_a, t_2 est 0-transcendant sur \bar{a}, \bar{c} . On en déduit que

$$\text{degtr}(A_2/\bar{a}, \bar{c}) = \text{degtr}(ca_2/\bar{a}, \bar{c}) = |ca_2| = |t'_a| + |t_2| = \text{degtr}(t'_a, t_2/\bar{a}, \bar{c}),$$

d'où $A_2 = \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2)$. En particulier, l'uple $\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2)$ et, par symétrie, $\bar{c} \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_2)$. \square

On pose

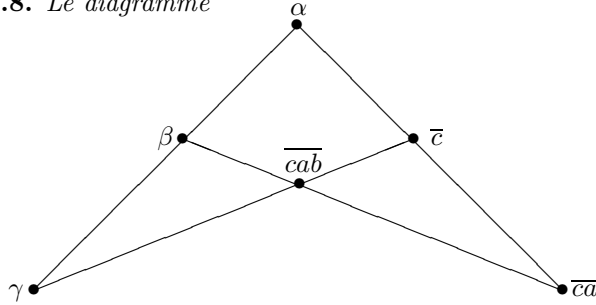
$$\alpha = \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2),$$

$$\beta = \text{acl}_0(\bar{c}\bar{a}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}) \cap \text{acl}_0(\bar{b}, t'_b, t_3) \text{ et}$$

$$\gamma = \text{acl}_0(\bar{c}\bar{a}\bar{b}, \bar{c}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4).$$

Remarquons que $a_1, t'_a \in \alpha$ et $b_1, t'_b \in \beta$, ainsi que $ab_1, t'_{ab} \in \gamma$.

Proposition 3.8. *Le diagramme*



est un quadrangle 0-algébrique.

Démonstration. Montrons d'abord que

$$(\star) \quad A_2 \downarrow_{\alpha}^0 \bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4.$$

Le lemme 3.2 donne l'indépendance $A_3, A_4 \downarrow_{\bar{c}, \bar{c}\bar{a}}^0 A_2$. Celle-ci entraîne

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4 \downarrow_{\bar{c}, \bar{c}\bar{a}}^0 A_2$$

et donc $\text{Cb}(\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4/A_2) \in \text{acl}_0(\bar{c}, \overline{ca})$.

Il reste à montrer que $\text{Cb}(\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4/A_2) \in \text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$, c'est-à-dire

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4 \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_2.$$

Comme $A_3 \downarrow_{\bar{b}}^0 A_1$ on a $\overline{ca}, t'_b, t_3 \downarrow_{\bar{b}}^0 A_1$. Puisque \bar{b}, \overline{ca} et t'_b, t_3 sont 0-indépendants par la proposition 3.6, il suit que $\overline{ca}, t'_b, t_3 \downarrow_{A_1}^0 A_1$ et

$$(\dagger) \quad \overline{ca} \downarrow_{A_1}^0 t'_b, t_3.$$

L'indépendance $A_3 \downarrow_{\bar{b}, \overline{ca}}^0 A_1, A_2$ entraîne $t'_b, t_3 \downarrow_{A_1, \overline{ca}}^0 \bar{c}, t'_a, t_2$; par transitivité avec (\dagger) on obtient $t'_b, t_3 \downarrow_{A_1}^0 \bar{c}, t'_a, t_2$ et donc

$$t'_b, t_3 \downarrow_{A_1, t'_a, t_2}^0 \bar{c}.$$

Comme $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$ et $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$, on a

$$(\ddagger) \quad t'_{ab}, t_4 \downarrow_{A_1, t'_a, t_2}^0 \bar{c}.$$

Ensuite $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$ implique $\bar{c} \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1$, ce qui entraîne avec (\ddagger)

$$\bar{c} \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1, t'_{ab}, t_4.$$

Comme $A_2 \subseteq \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2)$ d'après le corollaire 3.7,

$$A_2 \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1, t'_{ab}, t_4.$$

À nouveau les identités $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$ et $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$ donnent

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4 \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_2,$$

ce qui entraîne (\star) .

Nous allons maintenant vérifier que les points et les droites du diagramme satisfont les relations d'un quadrangle 0-algébrique.

L'indépendance (\star) entraîne

$$\bar{c}, \overline{ca} \downarrow_{\alpha}^0 \bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4,$$

ce qui implique

$$\bar{c}, \overline{ca} \downarrow_{\alpha}^0 \beta, \gamma.$$

Alors, les droites (α, β, γ) et $(\alpha, \bar{c}, \overline{ca})$ sont 0-indépendants sur leur intersection α . Par symétrie, chaque autre droite est 0-indépendante de (α, β, γ) sur leur intersection. La 0-indépendance de deux droites différentes de (α, β, γ) sur leur intersection découle de l'indépendance des droites A_i .

D'après le corollaire 3.7 appliqué aux droites A_3 et A_4 , on a $\overline{ca} \in \text{acl}_0(\bar{b}, \overline{cab}, t'_b, t_3)$ et $\overline{cab} \in \text{acl}_0(\overline{ab}, \bar{c}, t'_{ab}, t_4)$, ce qui implique $\overline{ca} \in \text{acl}_0(\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, \bar{c}, t'_{ab}, t_4)$. Par (\star) , on conclut

$$\overline{ca} \in \text{acl}_0(\alpha, \bar{c}).$$

On a de même $\bar{c} \in \text{acl}_0(\alpha, \overline{ca})$. Donc α, \bar{c} et \overline{ca} sont deux-à-deux 0-interalgébriques sur le troisième.

Par la proposition 3.6,

$$\bar{a}, t'_a, t_2 \downarrow^0 \bar{c} \quad \text{et} \quad \bar{a}, t'_a, t_2 \downarrow^0 \bar{c}\bar{a}.$$

Ainsi α , \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont deux à deux 0-indépendants. Cela montre les propriétés pour la droite $(\alpha, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Par symétrie, on obtient les mêmes propriétés pour les droites $(\beta, \overline{cab}, \bar{c}\bar{a})$ et $(\gamma, \overline{cab}, \bar{c})$.

Pour la droite (α, β, γ) , l'indépendance $A_2 \downarrow^0_{\bar{c}\bar{a}} A_3$ implique $\alpha \downarrow^0_{\bar{c}\bar{a}} \beta$. Comme $\alpha \downarrow^0 \bar{c}\bar{a}$ on a $\alpha \downarrow^0 \beta$. De plus,

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow^0_{\alpha} \beta, \gamma$$

et $\overline{cab} \in \text{acl}_0(\beta, \bar{c}\bar{a})$ impliquent

$$\gamma \downarrow^0_{\alpha, \beta} \bar{c}, \bar{c}\bar{a}, \overline{cab},$$

et donc $\gamma \in \text{acl}_0(\alpha, \beta)$. Par symétrie, les points α , β et γ sont deux-à-deux 0-indépendants et chacun est 0-algébrique sur les deux autres.

Il s'agit bien d'un quadrangle 0-algébrique. \square

Le théorème de la configuration de groupe [9] (voir aussi [7] ou [13, Theorem 5.4.5 et Remark 5.4.9]) nous donne, sur des paramètres indépendants ajoutés au langage, un groupe T_0 -définissable 0-connexe H , et des éléments 0-génériques 0-indépendants h et h' dans H , tels que α est 0-interalgébrique avec h , ainsi que β avec h' et γ avec hh' . Par contre, il se peut que les éléments h et h' ne soient pas indépendants ou que leur T -type ne soit pas générique dans H .

Pour la suite, nous utiliserons le rapport entre h et le générique a du groupe G de départ.

Lemme 3.9. *Les uples h et (t'_a, t_2) sont 0-interalgébriques sur \bar{a} . De plus, les uples \bar{a} et t_2 sont algébriques sur h et*

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow^0_h \bar{a}, t'_a, t_2.$$

Démonstration. Comme α et h sont 0-interalgébriques, il suffit de démontrer le lemme pour α à la place de h .

Par définition, l'uple α est dans $\text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$. Réciproquement, $\bar{c} \downarrow^0_{\bar{a}} t'_a, t_2$ par la proposition 3.6, ce qui donne $\bar{c} \downarrow^0_{\bar{a}, \alpha} t'_a, t_2$. D'où

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow^0_{\bar{a}, \alpha} t'_a, t_2,$$

car $\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\bar{c}, \alpha)$. Comme $t'_a, t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$, on conclut que

$$t'_a, t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \alpha).$$

La proposition 3.6 entraîne $\bar{c} \downarrow^0 \bar{a}, t'_a, t_2$ et donc $\bar{c} \downarrow^0 \bar{a}, t'_a, t_2, \alpha$, ce qui donne

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow^0_{\alpha} \bar{a}, t'_a, t_2.$$

Enfin, l'indépendance de \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ implique que $\bar{c} * \bar{c}\bar{a}$ est autosuffisante, ainsi que $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Donc $\langle \alpha \rangle$ est dans $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Par l'indépendance précédente, on a

$$\langle \alpha \rangle \downarrow^0_{\alpha} a_2, t'_a, t_2 \quad \text{et} \quad \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow^0_{\langle \alpha \rangle} a_2, t'_a, t_2.$$

Puisque a_2, t'_a, t_2 sont linéairement indépendants sur $\dot{U}(\bar{c} * \bar{c}\bar{a})$, on a

$$\delta(a_2, t'_a, t_2/\alpha) = \delta(a_2, t'_a, t_2/\langle \alpha \rangle) = \delta(a_2, t'_a, t_2/\bar{c} * \bar{c}\bar{a}) = \delta(A_2/\bar{c} * \bar{c}\bar{a}) = 0.$$

Comme \bar{a} est 0-algébrique sur $a_1 a_2$ et $a_1 \subseteq \alpha$, on conclut que \bar{a} et t_2 sont algébriques sur $\langle \alpha \rangle$, qui est elle algébrique sur α . \square

Cette interalgébricité nous permettra de définir un morphisme de G vers H . Posons $r = |t'_a|$ et $s = |t_2|$. Soit

$$S = \text{Stab}_0(h, t'_a, t_2/\bar{a})$$

le 0-stabilisateur de (h, t'_a, t_2) dans $H \times (K^*)^{r+s}$. Puisque $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$ implique $h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{b}, \bar{a}\bar{b}$, on a $S = \text{Stab}_0(h, t'_a, t_2/\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b})$.

Lemme 3.10. *Le point (h, t'_a, t_2) est 0-générique sur \bar{a} dans le translaté $S \cdot (h, t'_a, t_2)$, qui est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a})$. En particulier, le stabilisateur S est 0-connexe.*

Démonstration. Vérifions que (h, t'_a, t_2) , (h', t'_b, t_3) et $(hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4)$ satisfont les hypothèses du lemme 1.2 au-dessus de $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b})$. Remarquons tout d'abord que

$$(h, t'_a, t_2) \cdot (h', t'_b, t_3) = (hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4).$$

Montrons d'abord l'indépendance

$$(\dagger) \quad h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 h', t'_b, t_3.$$

Comme $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$, on a $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{c}\bar{a}}^0 \bar{b}, \bar{a}\bar{b}$. La proposition 3.6 donne $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{c}\bar{a}$, qui entraîne $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{b}, \bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}$. Puisque h est 0-algébrique sur \bar{a}, t'_a, t_2 , on obtient

$$h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 \bar{c}\bar{a}.$$

Enfin, l'indépendance $A_1 A_2 \downarrow_{\bar{b}, \bar{c}\bar{a}}^0 A_3$ implique

$$h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}}^0 h', t'_b, t_3.$$

On en déduit (\dagger) par transitivité.

Par symétrie, puisque $t_1 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b})$, on obtient également

$$hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 h', t'_b, t_3 \quad \text{et} \quad hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 h, t'_a, t_2,$$

ce qui permet de conclure. \square

Comme la paire (t'_a, t_2) est 0-générique sur \bar{a} , la projection de S sur les deux dernières coordonnées est 0-générique dans $(K^*)^{r+s}$, et donc surjective par connexité de K^* .

Par le fait 1.9, il existe un groupe algébrique H_1 (que l'on suppose \star -interprétable sur \emptyset) et des éléments génériques indépendants $h_1, h'_1 \in H_1$ tels que a_1 est 0-interalgébrique avec h_1 , ainsi que b_1 avec h'_1 , et ab_1 avec $h_1 h'_1$. Comme a_1 est contenu dans α , on a $h_1 \in \text{acl}_0(h)$; de même $h'_1 \in \text{acl}_0(h')$ et $h_1 h'_1 \in \text{acl}_0(hh')$. D'après le lemme 1.5 et la remarque 1.6, le stabilisateur $\text{Stab}(h, h_1)$ induit une endogénie T_0 -définissable ϕ de H sur H_1 . Soit N la 0-composante connexe de $\ker(\phi)$.

Puisque h est 0-générique dans H , il est 0-générique dans le translaté Nh sur son paramètre canonique; ce dernier est 0-interalgébrique avec $\phi(h) = h_1$ et donc avec a_1 . Comme h est 0-algébrique sur $\bar{c}, \bar{c}\bar{a}$ et

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{a_1}^0 \bar{a},$$

on conclut que h est 0-générique dans Nh sur \bar{a} . De plus, la 0-interalgébricité entre h et t'_a, t_2 sur \bar{a} entraîne, par le lemme 1.5, que le stabilisateur S induit une isogénie T_0 -définissable entre N et $(K^*)^{r+s}$. Ainsi, le sous-groupe N est l'enveloppe T_0 -définissable de sa torsion, car c'est le cas de $(K^*)^{r+s}$. Comme H normalise N , il normalise la n -torsion de N pour tout $n < \omega$. Celle-ci est finie et donc fixée puisque H est 0-connexe. Ainsi H centralise toute la torsion de N , et $N \leq Z(H)$.

Lemme 3.11. *Le stabilisateur S est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\emptyset)$.*

Démonstration. Le stabilisateur $S' = \text{Stab}_0(h', t'_b, t_3/\bar{b})$ induit également une isogénie ϕ' de N sur $(K^*)^{r+s}$, qui est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{b})$. Alors, le groupe $N \times (K^*)^{r+s}$ est isogène via $(\phi', \text{id}_{(K^*)^{r+s}})$ à $(K^*)^{r+s} \times (K^*)^{r+s}$. La composante connexe de l'image de S par $(\phi', \text{id}_{(K^*)^{r+s}})$ est un sous-groupe algébrique d'un tore, et donc définissable sans paramètres. Comme S est connexe, on en déduit que S est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{b})$. Puisque \bar{a} et \bar{b} sont 0-indépendants, le sous-groupe S est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\emptyset)$. \square

Rappelons que t_2 est un uple vert générique de $(K^*)^s$ sur \bar{a} par la proposition 3.6. Quoique l'uple (t_2, t'_a) est 0-générique dans $(K^*)^{r+s}$ sur \bar{a} , il se peut qu'il ne le soit pas au sens de T . Cependant, nous allons modifier h pour supprimer t'_a .

Comme S est une isogénie, il existent h_0 et $h'_0 \in N$ tels que $(h_0, t'_a, \bar{1})$ et $(h'_0, t'_b, \bar{1})$ sont dans S . Alors, l'élément $(h_0 h'_0, t'_{ab}, \bar{1})$ est aussi dans S car $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$. On pose $k = h_0^{-1} h$ et $k' = h'_0^{-1} h'$. Le translaté à droite

$$S \cdot (h, t'_a, t_2) = S \cdot (k, \bar{1}, t_2)$$

est 0-algébrique sur \bar{a} par le lemme 3.10; puisque S est définissable sur \emptyset , on obtient $k \in \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)$. On a de même $k' \in \text{acl}_0(\bar{b}, t_3)$ et $kk' \in \text{acl}_0(\bar{a}\bar{b}, t_1 \cdot t_4)$, car N est central dans H . Également $t'_a \in \text{acl}_0(h)$ et $h_0 \in \text{acl}_0(t'_a)$, d'où

$$k \in \text{acl}_0(h) \subseteq \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}).$$

Par symétrie, $k' \in \text{acl}_0(h') \subseteq \text{acl}_0(\bar{c}\bar{a}, \bar{c}\bar{a}\bar{b})$ et $kk' \in \text{acl}_0(hh') \subseteq \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}\bar{b})$.

On vérifie maintenant que k satisfait les propriétés analogues à celles de h .

Lemme 3.12. *On a*

$$\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2) = \text{acl}_0(k) \quad \text{et} \quad \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2.$$

De plus, les uples k et t_2 sont 0-interalgébriques sur \bar{a} , et (\bar{a}, t_2) est algébrique sur k .

Démonstration. Les remarques précédentes montrent que $k \in \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)$. Comme $a_1 \subset \text{acl}_0(h) = \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$ et $\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_h^0 \bar{a}, t'_a, t_2$, on a

$$\begin{aligned} \text{degtr}(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_2/a_1, c_1) &= \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1, c_1) + \text{degtr}(\bar{a}, t'_a, t_2/h) \\ &= \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1, c_1) + \text{degtr}(\bar{a}, t'_a, t_2/a_1) - \text{degtr}(h/a_1). \end{aligned}$$

La proposition 3.6 donne :

$$|a_2| + |c_2| + |ca_2| = |c_2| + |ca_2| + |a_2| + |t'_a| + |t_2| - \text{degtr}(h/a_1).$$

Ainsi $\text{degtr}(h/a_1) = r + s$. Comme $\text{degtr}(h_0/a_1) = \text{degtr}(t'_a/a_1) = r$ et $kh_0 = h$, on obtient $\text{degtr}(k/a_1) \geq s$. Notons que $k \downarrow_{a_1}^0 \bar{c}$ car $\bar{a}, t_2 \downarrow^0 \bar{c}$ par la proposition 3.6.

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{degtr}(k/a_1) &= \text{degtr}(k/a_1, c_1) \leq \text{degtr}(\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)/a_1, c_1) \\ &\leq \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1, c_1) + \text{degtr}(\bar{a}, t_2/a_1) - \text{degtr}(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}, t_2/a_1, c_1) \\ &= |c_2| + |ca_2| + |a_2| + |t_2| - |a_2| - |c_2| - |ca_2| = s. \end{aligned}$$

En particulier, on a $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2) = \text{acl}_0(k, a_1)$. Pour montrer que cette intersection est égale à $\text{acl}_0(k)$, vérifions que $a_1 \in \text{acl}_0(k)$. Comme $\text{degtr}(k/a_1) \leq s$ et

$$\text{degtr}(k/h_0a_1) = \text{degtr}(h/h_0a_1) \geq \text{degtr}(h/a_1) - \text{degtr}(h_0/a_1) = r + s - r = s,$$

on a $k \downarrow_{a_1}^0 h_0$. La proposition 3.6 et la 0-interalgébricité de h_0 et t'_a entraînent $a_1 \downarrow^0 h_0$. Par transitivité, on a $h_0 \downarrow^0 a_1, k$ et donc $h_0 \downarrow_k^0 a_1$. Puisque $a_1 \in \text{acl}_0(h)$, on conclut que $a_1 \in \text{acl}_0(k)$. De plus,

$$\text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/k, c_1) = \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1, c_1) - \text{degtr}(k/a_1) = |c_2| + |ca_2| - s$$

et

$$\begin{aligned} \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/\bar{a}, t_2, c_1) &= \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}, \bar{a}, t_2/a_1, c_1) - \text{degtr}(\bar{a}, t_2/a_1) \\ &= |c_2| + |ca_2| + |a_2| - |a_2| - |t_2| = |c_2| + |ca_2| - s, \end{aligned}$$

d'où $\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{k, c_1}^0 \bar{a}, t_2$. Alors $\bar{c} \downarrow^0 \bar{a}, t_2$ implique $c_1 \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2$, et donc

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2$$

par transitivité. Comme $t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$, on en déduit $t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, k)$, ce qui donne la 0-interalgébricité de k et t_2 sur \bar{a} . Enfin, puisque $\bar{c} * \bar{c}\bar{a}$ est autosuffisant, la clôture autosuffisante $\langle k \rangle$ est dans $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Ainsi,

$$\langle k \rangle \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2 \quad \text{et} \quad \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\langle k \rangle}^0 \bar{a}, t_2.$$

L'indépendance linéaire de a_2, t_2 sur $\ddot{U}(\bar{c} * \bar{c}\bar{a})$ donne

$$\delta(a_2, t_2/k) = \delta(a_2, t_2/\langle k \rangle) = \delta(a_2, t_2/\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})) = 2|a_2| - |a_2| - |t_2| - |t_2| = 0,$$

ce qui permet de conclure que \bar{a} et t_2 sont algébriques sur $\langle k \rangle$ et donc sur k . \square

Soit

$$S' = \text{Stab}_0(k, t_2/\bar{a})$$

le 0-stabilisateur de (k, t_2) dans $H \times (K^*)^s$. De façon analogue aux lemmes 3.10 et 3.11, le groupe S' est T_0 -définissable sans paramètres et (k, t_2) est 0-générique sur \bar{a} dans le translaté $S' \cdot (k, t_2)$, qui est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a})$.

On pose

$$\Gamma = \{n \in N : \exists t \in \ddot{U}^s(n, t) \in S'\}.$$

Alors S' induit une isogénie entre Γ et \ddot{U}^s par le lemme 1.5, la remarque 1.6 et la proposition 3.6. Comme N est central dans H , le groupe Γ l'est aussi.

Puisque les paramètres ajoutés pour définir H , Γ et les isogénies ont été pris indépendants des paramètres de départ, on obtient ainsi le théorème A de l'introduction.

Théorème 3.13. *Un groupe G interprétable dans le mauvais corps (K, \ddot{U}) est isogène à un sous-groupe de H/Γ , où le groupe H est algébrique et le sous-groupe Γ , qui est central dans H , est isogène à une puissance du sous-groupe coloré \ddot{U} .*

Démonstration. À partir du groupe G , que l'on a supposé définissable sur \emptyset , on construit les groupes H et Γ . Pour terminer, on considère le stabilisateur

$$S^* = \text{Stab}(a, k\Gamma)$$

de $\text{tp}(a, k\Gamma)$ dans $G \times (H/\Gamma)$.

Notons d'abord que $\Gamma k = k\Gamma$ est la projection sur la première coordonnée de $S'(k, t_2) \cap (H \times \ddot{U}^s)$, puisque t_2 est vert. Ainsi $k\Gamma \in \text{acl}(a)$, car $S'(k, t_2)$ est définissable sur $\text{acl}(a)$. De même $k'\Gamma \in \text{acl}(b)$ et $kk'\Gamma \in \text{acl}(ab)$. Comme

$$(a, k\Gamma) \cdot (b, k'\Gamma) = (ab, kk'\Gamma),$$

et a, b et ab sont deux-à-deux indépendants, le point $(a, k\Gamma)$ est générique dans un translaté de S^* d'après le lemme 1.2. Ainsi S^* induit une endogénie de G dans H/Γ par le lemme 1.5 et la remarque 1.6.

Pour vérifier que le noyau de cette endogénie est fini, il suffit de montrer que a et $k\Gamma$ sont interalgébriques. Comme $\text{RM}(\ddot{U}) = 1$, on a $\text{RM}(\Gamma) = s$ et $\text{RM}(k\Gamma) \geq \text{RM}(k) - s$ et $\text{RM}(t_2/\bar{a}) = \text{RM}(t_2/a) = s$, car t_2 est vert générique sur \bar{a} . Puisque k et t_2 sont 0-interalgébriques sur \bar{a} , on obtient que $\text{RM}(k/a) = s$. Ainsi

$$\text{RM}(k\Gamma) \geq \text{RM}(k) - s = \text{RM}(k/a) + \text{RM}(a) - s = \text{RM}(a) \geq \text{RM}(k\Gamma).$$

On a bien l'interalgébricité entre a et $k\Gamma$. □

4. SOUS-GROUPES COLORÉS

Rappelons que tout groupe simple définissable dans un corps coloré se plonge dans un groupe algébrique d'après [6, Corollaire 5.10]. Ceci et le théorème A nous amènent à étudier les sous-groupes définissables d'un groupe algébrique.

Théorème 4.1 (cf. Théorème B).

- Dans un corps rouge, tout sous-groupe définissable connexe d'un groupe algébrique est une extension des points rouges d'un groupe algébrique additif par un groupe algébrique.
- Dans un corps vert, tout sous-groupe définissable connexe d'un groupe algébrique est une extension des points verts d'un tore par un groupe algébrique.
- Dans un corps noir, tout groupe définissable est algébrique.
- Tout groupe simple définissable dans un corps coloré est algébrique.

L'avant-dernier point a été montré dans le cas non-collapsé [15, Proposition 2.4]. La preuve ci-dessous s'en inspire.

Démonstration. De façon analogue à la partie 2, on notera T la théorie du corps coloré et l'indice 0 fera référence au réduit du pur corps algébriquement clos. Dans le cas collapsé, nous avons élimination des imaginaires car il s'agit de corps de rang de Morley fini [18]. Dans le cas non-collapsé, tout type sur un ensemble autosuffisant est stationnaire [15, dernier paragraphe p.1348]. En particulier, si G est définissable sur un ensemble autosuffisant A , sa composante connexe l'est sur $\text{acl}_0(A)$.

Soit G un sous-groupe connexe définissable d'un groupe algébrique. Prenons deux génériques indépendants a et b , et notons c leur produit. Alors $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ sont en

amalgame libre ; comme la loi de groupe est algébrique, l'élément c est 0-algébrique sur a et b . Ainsi

$$\langle c \rangle \subseteq \langle \text{acl}_0(a, b) \rangle \subseteq \text{acl}_0(\langle a, b \rangle) = \text{acl}_0(\langle a \rangle * \langle b \rangle),$$

par la remarque 2.2(1), qui est valable pour tout corps coloré (collapsé ou non).

Cela entraîne que la base colorée t de $\langle c \rangle$ est une combinaison linéaire des bases colorées r et s de $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$, respectivement. Par le même argument qu'au début de la preuve de la proposition 3.6, on peut supposer que $t = r + s$ dans le cas rouge (ou $t = r \cdot s$ dans le cas vert). Puisque (a, r) , (b, s) et (c, t) sont deux-à-deux indépendants et que r est algébrique sur a , d'après les lemmes 1.2, 1.5 et la remarque 1.6, le stabilisateur $\text{Stab}(a, r)$ induit une endogénie définissable ϕ de G vers les points colorés d'un sous-groupe algébrique d'une puissance cartésienne de K^+ (ou de K^* dans le cas vert). En composant ϕ par une application algébrique, on peut supposer que $\text{coker}(\phi)$ est trivial et que ϕ est un morphisme.

Le groupe engendré par r est clairement autosuffisant dans $\langle a \rangle$ et donc égal à $\langle r \rangle$. Or, pour une structure autosuffisante verte, le 0-type détermine le type. Soit donc $X \models \text{tp}_0(\langle r \rangle)$ vert. Alors soit X est autosuffisant et $X \models \text{tp}(\langle r \rangle)$, soit

$$\delta(\langle X \rangle) < \delta(X) = \delta(\langle r \rangle) \quad \text{et donc} \quad \text{RM}(X) < \text{RM}(\langle r \rangle) = \text{RM}(r).$$

Comme r est générique dans $\text{im}(\phi)$ qui est connexe, $\text{im}(\phi)$ est 0-définissable d'après la proposition 1.8, et donc un groupe algébrique.

Pour montrer que le noyau $\ker(\phi)$ est un groupe algébrique, il suffit de le montrer pour sa composante T -connexe N , car on travaille à l'intérieur d'un groupe algébrique. Soit n générique dans N sur a . Notons que le paramètre canonique de $\ker(\phi)a$ est interdéfinissable avec $\phi(a) = r$, et donc le paramètre de Na est algébrique sur r . Comme na est générique dans Na sur a , il l'est aussi sur r . De plus, comme $(n, \bar{1}) \in \text{Stab}(a, r)$, les points a et na ont même type sur r . Les clôtures autosuffisantes $\langle na \rangle$ et $\langle a \rangle$ ont les mêmes points colorés, qui est le groupe engendré par r . Ce groupe est clairement autosuffisant dans $\langle a \rangle$ et donc égal à $\langle r \rangle$. En particulier, la clôture autosuffisante $\langle na \rangle$ est engendrée par na et $\langle r \rangle$, ce qui entraîne que la clôture autosuffisante $\langle na, \text{acl}(r) \rangle$ est l'amalgame libre de $\langle na \rangle$ et $\text{acl}(r)$ sur l'ensemble $Y = \langle na \rangle \cap \text{acl}_0(\langle r \rangle) \supseteq \langle r \rangle$, par la caractérisation de l'indépendance.

Nous allons maintenant vérifier que le type $\text{tp}(na / \text{acl}(r))$ est l'unique complétion de rang maximal de son réduct $\text{tp}_0(na / \text{acl}(r))$ pour montrer que N est T_0 -définissable, par la proposition 1.8. Si $x \models \text{tp}_0(na / \text{acl}(r))$, notons par X la structure qu'il engendre.

$$\begin{aligned} \delta(\langle x, \text{acl}(r) \rangle / \text{acl}(r)) &\leq \delta(X / \text{acl}(r)) \\ &= 2 \text{degtr}(X / \text{acl}(r)) - \text{dimlin}(\ddot{U}(X * \text{acl}(r)) / \text{acl}(r)) \\ &\leq 2 \text{degtr}(X / \text{acl}(r)) = \delta(\langle na, \text{acl}(r) \rangle / \text{acl}(r)) \end{aligned}$$

Si $\text{RM}(x/r) \geq \text{RM}(an/r)$, on a $\delta(\langle x, \text{acl}(r) \rangle / \text{acl}(r)) \geq \delta(\langle na, \text{acl}(r) \rangle / \text{acl}(r))$. Dans ce cas, la structure $X * \text{acl}(r)$ est autosuffisante et ses points colorés sont $\langle r \rangle$. En particulier, comme $x \equiv_{\text{acl}(r)}^0 na$, la clôture $X * \text{acl}(r)$ est isomorphe à la structure engendrée par na et $\text{acl}(r) = \langle na, \text{acl}(r) \rangle$. Donc, le T -type de x sur $\text{acl}(r)$ est $\text{tp}(na / \text{acl}(r))$.

Si G est un groupe infini définissable simple, d'après [6, corollaire 5.10] le groupe G est, à isomorphisme près, un sous-groupe d'un groupe algébrique (et même

linéaire). L'image de G par ϕ doit être triviale car elle est incluse dans un groupe abélien. On conclut que $G = \ker(\phi)$ est algébrique.

Enfin, dans le cas noir, l'hypothèse de la simplicité du groupe n'est pas nécessaire car les bases noires r , s et t obtenues au début de la preuve sont nécessairement triviales. \square

5. LA FUSION AU DESSUS DE L'ÉGALITÉ

Une théorie ω -stable a la propriété de la multiplicité définissable (DMP) si pour toute formule $\varphi(x, y)$ et tout $n < \omega$, l'ensemble des paramètres a tels que $\varphi(x, a)$ a multiplicité n est définissable.

Dans cette partie, nous décrirons complètement les groupes définissables dans une fusion T (libre ou collapsée) de deux théories fortement minimales T_1 et T_2 avec la DMP, à langages disjoints [10, 5]. Rappelons que T est obtenue en utilisant la prédimension

$$\delta(X) = \dim_1(X) + \dim_2(X) - |X|,$$

où \dim_1 et \dim_2 sont les rangs de Morley respectifs de T_1 et T_2 . Comme dans la partie 2, cette prédimension induit un opérateur, la clôture autosuffisante $\langle \cdot \rangle$, ainsi qu'une dimension, notée \dim : la prédimension de la clôture autosuffisante. Alors $\bar{a} \in \text{acl}(B)$ implique $\dim(\bar{a}/B) = 0$; la réciproque est vraie dans le cas collapsé. En particulier, deux uplets interalgébriques ont même dimension.

L'indépendance au sens de T est caractérisée de la manière suivante :

Pour deux uplets \bar{a} , \bar{b} et un ensemble C tel que $\langle aC \rangle \cap \langle bC \rangle = C$,

$$\bar{a} \downarrow_C \bar{b} \text{ si et seulement si } \begin{cases} \langle \bar{a} \cup C \rangle \downarrow_C^i \langle \bar{b} \cup C \rangle \text{ pour } i = 1, 2 \\ \langle \bar{a}\bar{b} \cup C \rangle = \langle \bar{a} \cup C \rangle \cup \langle \bar{b} \cup C \rangle. \end{cases}$$

Après adjonction de constantes au langage, on peut supposer que chaque théorie fortement minimale T_i a élimination faible des imaginaires. Nous pouvons ainsi parler de la dimension d'uplets d'imaginaires des théories T_1 et T_2 .

Par un ensemble T -interprétable dans un produit $S_1 \times S_2$ de sortes imaginaires au sens de chaque théorie T_i , on entend la projection d'un ensemble T -définissable sur $S_1 \times S_2$. Nous commençons par étudier les sous-groupes T -interprétables dans un produit de groupes T_i -interprétables. La démonstration du lemme suivant s'inspire de la preuve de la platitude dans l'amalgame *ab initio* [11].

Lemme 5.1. *Soient H_i des groupes T_i -interprétables pour $i = 1, 2$. Tout sous-groupe T -interprétable connexe K de $H_1 \times H_2$ est de la forme $K_1 \times K_2$, où $K_i \leq H_i$ est T_i -interprétable. Un générique $g = (g^1, g^2)$ de K consiste en un couple T -indépendant de génériques de chaque K_i . De plus, si l'on suppose les groupes H_i et K interprétables sur \emptyset , alors $\dim(g_i) = \dim_i(g_i/\text{acl}(\emptyset))$.*

Démonstration. On peut supposer que le langage est relationnel et que les groupes H_1 , H_2 et K sont interprétables sur \emptyset . Nous allons vérifier que g^1 et g^2 sont T -indépendants pour un générique $g = (g^1, g^2)$ de K . Fixons un uple réel $a = (a^1, a^2)$ tel que a^i est T_i -algébrique sur l'imaginaire g^i qui est lui T_i -définissable sur a^i , et posons $X = \langle a \rangle \cap \text{acl}(\emptyset)$. Considérons une suite de Morley $(g_i)_{i < \omega}$ du type $\text{tp}(g)$. Pour $i \neq j$, l'élément $g_i g_j^{-1}$ est aussi générique et, par connexité, a même type que g sur $\text{acl}(\emptyset)$. On choisit alors $b_{i,j}$ tel que $(g_i g_j^{-1}, b_{i,j})$ a même type que (g, a) sur

$\text{acl}(\emptyset)$. Comme $g_i g_j^{-1}$ et $g_k g_l^{-1}$ sont indépendants pour $(i, j) \neq (k, l)$, on a

$$\langle b_{i,j} \rangle \cap \langle b_{k,l} \rangle = \langle b_{i,j} \rangle \cap \text{acl}(\emptyset) = \langle a \rangle \cap \text{acl}(\emptyset) = X,$$

qui est autosuffisant comme intersection de deux ensembles autosuffisants.

Fixons $n > 0$. Par T_1 -interalgébricité, on obtient

$$\dim_1((b_{i,j}^1)_{i < j < n}/X) \leq \dim_1((b_{1,k}^1)_{k < n}/X) \leq n \dim_1(a^1/X).$$

Notons

$$Y = \bigcup_{i < j < n} \langle b_{i,j} \rangle.$$

Alors

$$\begin{aligned} \dim_1(Y/X) &= \dim_1((b_{i,j}^1)_{i < j < n}/X) + \dim_1(Y/X, (b_{i,j}^1)_{i < j < n}) \\ &\leq n \dim_1(a^1/X) + \sum_{i < j} \dim_1(\langle b_{i,j} \rangle/X, b_{i,j}^1) \\ &\leq n \dim_1(a^1/X) + \binom{n}{2} \dim_1(\langle a \rangle/X, a^1). \end{aligned}$$

De même,

$$\dim_2(Y/X) \leq n \dim_2(a^2/X) + \binom{n}{2} \dim_2(\langle a \rangle/X, a^2).$$

Comme X est autosuffisant, on a $\delta(Y/X) \geq 0$. Puisque Y est la réunion d'ensembles deux-à-deux disjoints au-dessus de X , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta(Y/X) &= \dim_1(Y/X) + \dim_2(Y/X) - |Y \setminus X| \\ &\leq n (\dim_1(a^1/X) + \dim_2(a^2/X)) \\ &\quad + \binom{n}{2} (\dim_1(\langle a \rangle/X, a^1) + \dim_2(\langle a \rangle/X, a^2) - |\langle a \rangle \setminus X|). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (\star) \quad 0 &\leq \dim_1(\langle a \rangle/X, a^1) + \dim_2(\langle a \rangle/X, a^2) - |\langle a \rangle \setminus X| \\ &= \delta(\langle a \rangle/X, a) + \dim_1(a/X, a^1) + \dim_2(a/X, a^2) - |a \setminus X|. \end{aligned}$$

Notons que

$$\dim_1(a/X, a^1) \leq |a^2 \setminus (X \cup a^1)|,$$

avec égalité si et seulement si $a^2 \setminus (X \cup a^1)$ est un uple de points T_1 -indépendants sur X, a^1 . De même pour $\dim_2(a/X, a^2)$. Comme

$$|a \setminus X| = |a^1 \setminus (X \cup a^2)| + |a^2 \setminus (X \cup a^1)| + |(a^1 \cap a^2) \setminus X|,$$

on en déduit que

$$\dim_1(a/X, a^1) + \dim_2(a/X, a^2) - |a \setminus X| \leq -|(a^1 \cap a^2) \setminus X|.$$

De plus, la prédimension $\delta(\langle a \rangle/a, X) \leq 0$. Donc, par (\star) , on a

$$\begin{aligned} (a^1 \cap a^2) &\subseteq X, \\ \delta(\langle a \rangle/X, a) &= 0, \\ \dim_1(a/X, a^1) &= |a^2 \setminus X|, \\ \dim_2(a/X, a^2) &= |a^1 \setminus X|, \end{aligned}$$

Ceci entraîne que a^1 et a^2 sont T_i -indépendants pour chaque i au-dessus de X . De plus, comme l'uple $a^2 \setminus X$ est un uple de points T_1 -indépendants sur $X \cup a^1$, il suit

que $X \cup a^1$ est autosuffisant dans $X \cup a$. Puisque $X \subseteq \langle a \rangle$ et $\delta(\langle a \rangle / X, a) = 0$, on a que $\langle a \rangle = X \cup a$, qui est autosuffisant. Donc $X \cup a^i$ est aussi autosuffisant pour $i = 1, 2$.

La caractérisation de l'indépendance dans la théorie de la fusion T entraîne que $a^1 \downarrow_X a^2$ et donc $a^1 \downarrow a^2$, car $X \subseteq \text{acl}(\emptyset)$. Par interalgébricité, il suit que $g^1 \downarrow g^2$.

Soit K_i la projection, qui est connexe, de K sur H_i . Elle est aussi interprétable sur \emptyset . Comme la projection d'un générique est générique, l'élément g^i est générique dans K_i . Puisque $g^1 \downarrow g^2$, l'uple $g = (g^1, g^2)$ est alors générique dans $K_1 \times K_2$. Ainsi, l'indice de K dans $K_1 \times K_2$ est fini. Or, la connexité de chaque K_i donne celle de $K_1 \times K_2$, donc $K = K_1 \times K_2$.

Comme $X \cup a^1$ est autosuffisant, $(X \cup a^1) \cap \text{acl}(\emptyset) = X$ et $a^1 \downarrow_X \text{acl}(\emptyset)$, on obtient que $\text{acl}(\emptyset) \cup a^1$ est autosuffisant, et $a^1 \downarrow_X^2 \text{acl}(\emptyset)$. Ainsi $a^1 \setminus \text{acl}(\emptyset)$ reste T_2 -indépendant sur $\text{acl}(\emptyset)$, et $\dim(a^1) = \dim_1(a^1/X) = \dim_1(a^1/\text{acl}(\emptyset))$.

Voyons maintenant que le type $\text{tp}(g^1/\text{acl}(\emptyset))$ est l'unique complétion de rang de Morley (au sens de T) maximal du type $\text{tp}_1(g^1/\text{acl}(\emptyset))$. Soit $(h, b) \models \text{tp}_1(g^1, a^1/\text{acl}(\emptyset))$. Si $b \setminus \text{acl}(\emptyset)$ n'est pas T_2 -indépendant sur $\text{acl}(\emptyset)$, alors sa prédimension chute et le rang de Morley de h est strictement inférieur à celui de g^1 . Sinon, les ensembles autosuffisants $\text{acl}(\emptyset) \cup a^1$ et $\text{acl}(\emptyset) \cup b$ sont isomorphes (au sens de T), et donc b et a ont le même T -type. Puisque g^1 est T_1 -définissable sur a^1 , il suit que h et g^1 ont même T -type. D'après la proposition 1.8, chaque groupe K_i est T_i -interprétable. \square

Proposition 5.2. *Dans une fusion (libre ou collapsée) de deux théories fortement minimales avec la DMP au dessus de l'égalité, tout groupe définissable de dimension 0 est fini.*

Démonstration. Soit G un groupe connexe définissable sur \emptyset tel que $\dim(g) = 0$ pour tout générique g de G . Pour simplifier les notations, on ajoute $\text{acl}(\emptyset)$ au langage. Puisque $\langle g \rangle = \langle g, \text{acl}(\emptyset) \rangle \subseteq \text{acl}(g)$ (et de même pour h et gh), le fait 1.9 donne des groupes T_k - \star -interprétables H_k et des morphismes $\phi_k : G \rightarrow H_k$ pour $k = 1, 2$, tels que pour deux génériques indépendants g et h , on a

$$\langle g \rangle, \langle h \rangle \downarrow_{\phi_k(gh)}^k \langle gh \rangle.$$

Par ω -stabilité, on peut supposer que chaque H_k est T_k -interprétable. Par le lemme précédent appliqué à $\bar{\phi}(G) = (\phi_1, \phi_2)(G) \leq H_1 \times H_2$, les éléments $\phi_1(gh)$ et $\phi_2(gh)$ sont indépendants sur $\text{acl}(\emptyset)$, et

$$\dim_k(\phi_k(gh)/\text{acl}(\emptyset)) = \dim(\phi_k(gh)) \leq \dim(\text{acl}(g)) = \dim(g) = 0.$$

Ainsi $\phi_k(ab) \in \text{acl}_k(\text{acl}(\emptyset)) = \text{acl}(\emptyset)$, et

$$\langle g \rangle, \langle h \rangle \downarrow^k \langle gh \rangle.$$

Puisque g , h et gh sont deux-à-deux indépendants,

$$(\langle g \rangle \cup \langle h \rangle) \cap \langle gh \rangle = (\langle g \rangle \cap \langle gh \rangle) \cup (\langle h \rangle \cap \langle gh \rangle) = \text{acl}(\emptyset).$$

De plus, l'ensemble $\langle g \rangle \cup \langle h \rangle$ est autosuffisant. Enfin, comme

$$\delta(\langle g \rangle \cup \langle h \rangle \cup \langle gh \rangle) \leq \delta(\langle g \rangle) + \delta(\langle h \rangle) + \delta(\langle gh \rangle) = \dim(g) + \dim(h) + \dim(gh) = 0,$$

l'ensemble $\langle g \rangle \cup \langle h \rangle \cup \langle gh \rangle$ est lui aussi autosuffisant. La caractérisation de l'indépendance implique que

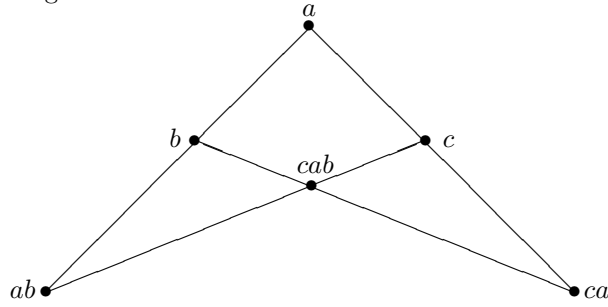
$$\langle g \rangle, \langle h \rangle \downarrow_{\text{acl}(\emptyset)} \langle gh \rangle.$$

Ainsi $gh \in \text{acl}(\emptyset)$, ce qui montre le résultat. \square

Grâce aux résultats précédents, nous sommes maintenant en mesure de montrer notre théorème C : les groupes définissables dans la fusion sur l'égalité (libre ou collapsée) sont essentiellement des produits de groupes interprétables dans chacune des théories de base.

Théorème 5.3. *Tout groupe définissable dans une fusion (libre ou collapsée) de deux théories fortement minimales avec la DMP, au-dessus de l'égalité est isogène à un produit de groupes interprétables dans chacune des théories.*

Démonstration. Étant donné un groupe G infini connexe T -définissable, soient a, b et c trois éléments génériques indépendants au-dessus de la clôture algébrique d'une suite de Morley dénombrable D , que l'on ajoute au langage comme paramètres. Considérons le diagramme suivant :



On définit les ensembles suivants de T -dimensions finies :

$$A_1 = \text{acl}(a, b, ab), \quad A_2 = \text{acl}(a, c, ca), \quad A_3 = \text{acl}(ca, cab, b), \quad A_4 = \text{acl}(ab, c, cab),$$

$$A_\emptyset = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad A_s = \bigcap_{i \in s} A_i \text{ pour } \emptyset \neq s \subseteq \{1, 2, 3, 4\}.$$

De manière analogue à [11, lemme 15], on trouve des ensembles finis autosuffisants $\text{acl}(\emptyset) \subseteq B_i \subseteq A_i$, pour $i \in \{1, \dots, 4\}$, tels que, si on note

$$B_\emptyset = \bigcup_{i=1}^n B_i \quad \text{et} \quad B_s = \bigcap_{i \in s} B_i \text{ pour } \emptyset \neq s \subseteq \{1, 2, 3, 4\},$$

alors

$$\begin{aligned} \dim(B_\emptyset) &= \dim(A_\emptyset) = 3 \dim(a), \\ \dim(B_i) &= \delta(B_i) = \delta(A_i) = 2 \dim(a), \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ \dim(B_{ij}) &= \delta(B_{ij}) = \delta(A_{ij}) = \dim(a) \quad \text{pour } i \neq j, \\ A_s &= B_s = \emptyset \quad \text{pour } |s| \geq 3. \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \dim(a) &= 3 \dim(a) - 4 \cdot 2 \dim(a) + 6 \dim(a) \\ &= \sum_{s \subseteq \{1, 2, 3, 4\}} (-1)^{|s|} \dim(A_s) \leq \sum_{s \subseteq \{1, 2, 3, 4\}} (-1)^{|s|} \delta(B_s) \\ &= \sum_{\substack{s \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \\ |s| \leq 2}} (-1)^{|s|} \dim_1(B_s) + \sum_{\substack{s \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \\ |s| \leq 2}} (-1)^{|s|} \dim_2(B_s), \end{aligned} \quad (\dagger)$$

où la première inégalité ci-dessus suit du fait que $\dim(A_\emptyset/B_{1234}) \leq \delta(B_\emptyset/B_{1234})$ et l'égalité finale provient de la modularité de la cardinalité.

Pour $k = 1, 2$, on obtient par sous-modularité :

$$\begin{aligned}
\dim_k(B_\emptyset) &= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2B_3B_4/B_1) \\
&\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2B_3B_4/B_{12}B_{13}B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2B_3B_4) - \dim_k(B_{12}B_{13}B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3B_4/B_2) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) \\
&\quad - \dim_k(B_{14}) \\
&\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3B_4/B_{23}B_{24}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) \\
&\quad - \dim_k(B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3B_4) - \dim_k(B_{23}B_{24}) \\
&\quad - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4/B_3) - \dim_k(B_{23}B_{24}) \\
&\quad - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\
&\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4/B_{34}) - \dim_k(B_{23}B_{24}) \\
&\quad - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4) - \dim_k(B_{34}) \\
&\quad - \dim_k(B_{23}B_{24}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) - \dim_k(B_{14}).
\end{aligned}$$

Comme $B_{23} \downarrow B_{24}$ implique $B_{23} \downarrow^k B_{24}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\dim_k(B_\emptyset) &\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4) - \dim_k(B_{34}) \\
&\quad - \dim_k(B_{14}) - \dim_k(B_{23}) - \dim_k(B_{24}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}).
\end{aligned}$$

En développant les séries alternées dans (\dagger) , on obtient

$$\begin{aligned}
\dim(a) &\leq \sum_{k=1}^2 (\dim_k(B_{12}) + \dim_k(B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14})) \\
&= \Delta_1 + \Delta_2,
\end{aligned}$$

où $\Delta_k = \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14})$.

Puisque $B_{12} \subseteq \text{acl}(a)$, $B_{13} \subseteq \text{acl}(b)$ et $B_{14} \subseteq \text{acl}(ab)$, le fait 1.9 donne des groupes T_k - \star -interprétables H_k et des morphismes $\phi_k : G \rightarrow H_k$ pour $k = 1, 2$, tels que

$$B_{12}, B_{13} \downarrow_{\phi_k(ab)}^k B_{14}.$$

Par ω -stabilité, comme $B_{12} \cup B_{13}$ est fini, on peut supposer que les H_k sont T_k -interprétables. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Delta_k &= \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) \\
&\leq \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}\bar{\phi}(ab)) \\
&= \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/\bar{\phi}_k(ab)) \\
&= \dim_k(\phi_k(ab)) - \dim_k(\phi_k(ab)/B_{12}B_{13}) \\
&\leq \dim_k(\phi_k(ab)).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\dim(ab) = \dim(a) \leq \Delta_1 + \Delta_2 \leq \dim_1(\phi_1(ab)) + \dim_2(\phi_2(ab)).$$

Considérons le morphisme

$$\bar{\phi} = (\phi_1, \phi_2) : G \rightarrow H_1 \times H_2.$$

Par le lemme 5.1, l'image $\bar{\phi}(G)$ est un produit de groupes définissables dans chacune des théories et $\bar{\phi}(ab)$ est son point générique. De plus, les coordonnées $\phi_1(ab)$ et $\phi_2(ab)$ sont T -indépendantes et

$$\dim(\phi_k(ab)) = \dim_k(\phi_k(ab)).$$

Ceci entraîne que

$$\dim(ab) \leq \dim_1(\bar{\phi}_1(ab)) + \dim_2(\bar{\phi}_2(ab)) = \dim(\bar{\phi}(ab)).$$

Comme $\bar{\phi}(ab)$ est algébrique sur ab , on conclut que $\dim(ab/\bar{\phi}(ab)) = 0$.

Rappelons que ab est générique dans $ab \cdot \ker \bar{\phi}$ sur son paramètre canonique, qui est $\bar{\phi}(ab)$. Comme la dimension ne dépend pas du translaté, le noyau de $\bar{\phi}$ a dimension 0. Il est donc fini, d'après la proposition 5.2. Il suit que ab et $\bar{\phi}(ab)$ sont T -interalgébriques et on conclut par le lemme 1.5 que le groupe G est isogène avec un produit de groupes interprétables dans chacune des théories. \square

Question. Peut-on aussi décrire les groupes interprétables dans la fusion au-dessus de l'égalité ?

Existe-t-il une caractérisation analogue pour les groupes définissables dans la fusion fortement minimale au-dessus d'un espace vectoriel sur un corps fini ?

RÉFÉRENCES

- [1] J. T. Baldwin, K. Holland, *Constructing ω -stable structures : Rank 2 fields*, J. Symb. Logic, **65**, 371-391 (2000).
- [2] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).
- [3] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Red fields*, J. Symb. Logic, **72**, 207-225 (2007).
- [4] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Fusion over a vector space*, J. Math. Logic **6**, 141-162 (2006).
- [5] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Hrushovski's fusion*, dans : *Algebra, logic, set theory*, 15-32, Stud. Log. 4, Coll. Publ. London (2007).
- [6] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Géométries relatives*, J. Europ. Math. Soc., to appear. HAL-00514393.
- [7] E. Bouscaren, *The Group Configuration—after E. Hrushovski*, dans : *The Model Theory of Groups*, 199-209, Notre Dame Math. Lectures 11, University of Notre Dame Press (1989).
- [8] A. Hasson, *Some questions concerning Hrushovski's amalgamation constructions*, J. Inst. Math. Jussieu, **7**, 793-823 (2008).
- [9] E. Hrushovski, *Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, Berkely (1986).
- [10] E. Hrushovski, *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields*, Isr. J. Math., **79**, 129-151 (1992).
- [11] E. Hrushovski, *A new strongly minimal set*, Ann. Pure Appl. Logic, **62**, 147-166 (1993).
- [12] Y. Mustafin, Thèse de doctorat, Lyon (2003).
- [13] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*, Oxford Logic Guides, 33. *Oxford University Press* (1996).
- [14] B. Poizat, *Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah* (1987). Traduction anglaise : *Stable groups*. Mathematical Surveys and Monographs, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).
- [15] B. Poizat, *Le carré de l'égalité*, J. Symb. Logic, **64**, 1339-1355 (1999).
- [16] B. Poizat, *L'égalité au cube*, J. Symb. Logic, **66**, 1647-1676 (2001).

- [17] B. Poizat, *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner*, J. Symb. Logic, **66**, n° 4, 1637–1646 (2001).
- [18] F. O. Wagner, *Fields of finite Morley rank*, J. Symb. Logic, **66**, 703–706 (2001).
- [19] F. O. Wagner, *Bad fields in positive characteristic*, Bull. London Math. Soc., **35**, 499–502 (2003).
- [20] M. Ziegler, *A Note on generic Types*, unpublished, (2006), (<http://arxiv.org/math.LO/0608433>).
- [21] M. Ziegler, *Fusion of structures of finite Morley rank*, dans : *Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **349**, 225–248, Cambridge Univ. Press, (2008).

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: `blossier@math.univ-lyon1.fr`
E-mail address: `pizarro@math.univ-lyon1.fr`
E-mail address: `wagner@math.univ-lyon1.fr`