



HAL
open science

A la recherche du tore perdu

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro, Frank Olaf Wagner

► **To cite this version:**

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro, Frank Olaf Wagner. A la recherche du tore perdu. 2013.
hal-00758982v3

HAL Id: hal-00758982

<https://hal.science/hal-00758982v3>

Preprint submitted on 24 Apr 2013 (v3), last revised 19 Jan 2015 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

À LA RECHERCHE DU TORE PERDU

THOMAS BLOSSIER, AMADOR MARTIN-PIZARRO ET FRANK O. WAGNER

RÉSUMÉ. Un groupe interprétable dans le mauvais corps vert est isogène à un quotient d'un sous-groupe d'un groupe algébrique par une puissance du groupe vert. Un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique dans un corps vert ou rouge est une extension d'une puissance du groupe coloré par un groupe algébrique. En particulier, tout groupe simple définissable dans un corps coloré est algébrique.

INTRODUCTION

La conjecture d'algébricité énoncée par Cherlin et Zilber affirme que tout groupe simple infini \aleph_1 -catégorique s'interprète comme un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Cette conjecture donna naissance à une interaction entre la théorie des modèles et la théorie des groupes.

Un *mauvais groupe* serait un contre-exemple à la conjecture de dimension minimale. La dimension en question est le *rang de Morley*, c'est-à-dire le rang de Cantor-Bendixon de l'espace de types de la théorie sur un modèle suffisamment saturé. Un des premiers obstacles pour la caractérisation algébrique des sous-groupes de Borel (sous-groupes résolubles connexes maximaux) d'un groupe simple \aleph_1 -catégorique fut l'existence éventuelle d'un *mauvais corps* : un corps de rang de Morley fini muni d'un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif propre et infini. Rappelons qu'un corps de rang de Morley fini est algébriquement clos et que dans le langage pur des anneaux le rang de Morley équivaut à la dimension de Zariski.

L'existence d'un mauvais corps en caractéristique positive est improbable [18]. En caractéristique nulle, Poizat [15] utilisa la construction par amalgamation développée par Hrushovski [9, 10] pour introduire un corps de rang $\omega \cdot 2$ avec un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif de rang ω , qui fut collapsé dans [2] pour obtenir un mauvais corps. Par ailleurs, Poizat [15] construisit également un corps avec un prédicat pour un sous-ensemble algébriquement indépendant, collapsé dans [1], et [14] un corps de caractéristique positive avec un prédicat pour un sous-groupe additif infini et d'indice infini, collapsé dans [3]. Poizat nomma les prédicats *vert*, *noir* et *rouge*, respectivement, les corps ainsi obtenus (collapsés ou non) s'appellent donc les corps *colorés*.

L'étude des groupes définissables dans les corps colorés fut entamée dans [5] où les auteurs montrèrent que tout groupe simple définissable est linéaire. Grâce à [16], ils conclurent qu'un corps rouge n'admet pas de mauvais groupe définissable,

Date: 24 avril 2013.

1991 Mathematics Subject Classification. 03C45.

Key words and phrases. Model Theory, Amalgamation methods, Flatness, Interpretation, Groups.

Recherche conduite dans le cadre du projet MODIG ANR-09-BLAN-0047.

et un mauvais groupe définissable dans un corps vert serait un groupe linéaire constitué uniquement d'éléments semi-simples. Notons que les corps de rang de Morley fini éliminent les imaginaires ; pour les corps collapsés on peut donc remplacer *définissable* par *interprétable*. Néanmoins les techniques utilisées n'ont pas permis l'étude des groupes abéliens.

Dans cet article nous donnons une caractérisation des groupes définissables dans le corps vert collapsé en montrant le résultat suivant.

Théorème A. *Un groupe interprétable dans un corps vert collapsé est isogène à un quotient d'un sous-groupe d'un groupe algébrique par un sous-groupe central qui est lui isogène à une puissance cartésienne du sous-groupe multiplicatif vert.*

Notre méthode pour démontrer ce théorème ne s'applique pas au cas rouge collapsé : par exemple, à plusieurs reprises on utilise que les sous-groupes multiplicatifs connexes sont des tores et donc définissable sur \emptyset . Dans le cas rouge, on devra traiter les sous-groupes additifs donnés par des p -polynômes.

Le théorème A nous amène naturellement à étudier les sous-groupes définissables d'un groupe algébrique. Nous les caractérisons non seulement pour le mauvais corps vert de [2], mais en général pour tous les corps colorés, quels que soient leurs couleur ou rang.

Théorème B. *Dans un corps coloré, tout sous-groupe définissable d'un groupe algébrique est l'extension d'une puissance du sous-groupe coloré par un groupe algébrique. En particulier, il n'interprète pas de mauvais groupe.*

Les corps colorés peuvent être considérés comme une fusions de deux structures fortement minimales par amalgame de Hrushovski [9]. Hrushovski construisit ces fusions dans le cas où le réduit commun est l'égalité (cas du corps noir) ; dans le cas où le réduit commun est un espace vectoriel sur un corps fini (cas du corps rouge), cette construction est due à Baudisch, Martín Pizarro et Ziegler [4]. Dans le cas du corps vert, elle reste conjecturale.

Hrushovski affirma que tout groupe définissable dans la fusion de deux théories fortement minimales sur l'égalité est isogène à un produit direct de deux groupes, chacun définissable dans l'une des théories initiales. Il ne donna pas de preuve, et on n'en trouve qu'une esquisse dans [7, Claim 3.1]. En nous inspirant de la preuve qu'aucun groupe infini n'est définissable dans une théorie plate, nous donnons une démonstration complète de ce résultat.

Théorème C. *Dans une fusion sur l'égalité, tout groupe définissable est isogène à un produit direct de groupes définissables dans les théories de base.*

1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette partie nous rappelons des résultats portant sur les groupes stables qui seront utilisés par la suite.

Définition 1.1. Soit un groupe G stable, un ensemble A de paramètres et un élément g de G . Le stabilisateur (à gauche) de g dans G sur A est le sous-groupe défini par

$$\text{Stab}(g/A) = \{h \in G : \exists x \models \text{stp}(g/A) [x \underset{A}{\downarrow} h \wedge hx \models \text{stp}(g/A)]\}.$$

Ainsi, $\text{Stab}(g/A) = \text{Stab}(g/\text{acl}^{\text{eq}}(A))$. De plus, si $h \in \text{Stab}(g/A)$ et $g' \models \text{stp}(g/A)$ avec $g' \downarrow_A h$, on voit facilement que $hg' \models \text{stp}(g/A)$ et $hg' \downarrow_A h$.

Le lemme suivant est dû à Ziegler dans le cas abélien [19, Theorem 1].

Lemme 1.2. *Soit H un groupe type-définissable dans une théorie stable et $h, h' \in H$ tels que h, h' et hh' sont deux-à-deux indépendants sur un ensemble A . Alors chacun des éléments a un stabilisateur (à gauche) connexe et l'élément est générique dans un translaté (à droite), qui est définissable sur $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$. De plus, les trois stabilisateurs sont conjugués.*

Démonstration. Nous travaillons sur $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$. En remplaçant le rang de Morley par chaque rang local stratifié D dans la preuve de [13, Lemme 2.3], il suffit de vérifier l'inégalité $D(\text{Stab}(h')) \geq D(h')$ pour la première partie.

Soit $h'' \models \text{tp}(h/hh')$ avec $h'' \downarrow_{hh'} h'$. Comme $h \downarrow hh'$ on a $h'' \downarrow hh'$ et donc $h'' \downarrow h, h'$; alors $h' \downarrow h$ donne $h' \downarrow h, h''$ et

$$h' \downarrow h''^{-1}h.$$

Comme $h, hh' \equiv h'', hh'$, on a $h, h' \equiv h'', h''^{-1}hh'$. En particulier,

$$h''^{-1}hh' \equiv h'.$$

On a donc $h''^{-1}h \in \text{Stab}(h')$. Ainsi

$$\begin{aligned} D(\text{Stab}(h')) &\geq D(h''^{-1}h) \geq D(h''^{-1}h/h'') = D(h/h'') = D(h) = D(h/h') \\ &= D(hh'/h') = D(hh') = D(hh'/h) = D(h'/h) = D(h'). \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, on voit facilement que

$$\text{Stab}(hh') = \text{Stab}(hh'/h') = \text{Stab}(h/h') = \text{Stab}(h)$$

et

$$\text{Stab}(hh') = \text{Stab}(hh'/h) = h \text{Stab}(h'/h)h^{-1} = h \text{Stab}(h')h^{-1}.$$

□

Remarque 1.3. Le lemme reste essentiellement vrai si H est hyperdéfinissable dans une théorie simple, en travaillant sur la clôture bornée $\text{bdd}(A)$: La démonstration de la première partie reste inchangée (avec la notion de stabilisateur correspondante aux théories simples) ; pour la deuxième partie, on obtient que les stabilisateurs sont commensurables. En fait, comme les stabilisateurs sont connexes sur $\text{bdd}(A)$, on a même $\text{Stab}(hh') = \text{Stab}(h)$.

Définition 1.4. Soient G et H deux groupes type-définissables. Un sous-groupe type-définissable S de $G \times H$ est une *endogénie* de G dans H si

- la projection sur G est un sous-groupe G_S d'indice borné, et
- le *co-noyau* $\text{coker}(S) = \{h \in H : (1, h) \in S\}$ est fini.

Une endogénie induit donc un homomorphisme de G_S dans $N_H(\text{coker}(S))/\text{coker}(S)$. Une *isogénie* de G vers H est une endogénie de noyau $\text{ker}(S) = \{g \in G : (g, 1) \in S\}$ fini et dont l'image (la projection sur H) est d'indice borné dans H .

Lemme 1.5. *Soient G et H deux groupes type-définissables dans une théorie stable. Soit $S \leq G \times H$ est un sous-groupe, A un ensemble de paramètres et $(g, h) \in G \times H$ avec $h \in \text{acl}(A, g)$ tel que (g, h) soit générique sur A dans le translaté $S(g, h)$ et que ce translaté soit type-définissable sur A . Alors S définit une endogénie de $\pi_1(S)$ dans H , où π_1 dénote la projection sur G . Si de plus g et h sont interalgébriques sur*

A , alors l'endogénie est une isogénie de $\pi_1(S)$ vers $\pi_2(S)$, où π_2 dénote la projection sur H .

Démonstration. Soit $(g', h') \models \text{stp}(g, h/A)$ avec $g', h' \perp_A g, h$. Alors $(g'g^{-1}, h'h^{-1})$ est générique dans S et indépendant de g', h' sur A . Or, $h'h^{-1} \in \text{acl}(A, g, g')$, ce qui implique $h'h^{-1} \in \text{acl}(A, g'g^{-1}, g')$ et enfin $h'h^{-1} \in \text{acl}(A, g'g^{-1})$. Ainsi $\text{coker}(S)$ est fini et S est une endogénie de $\pi_1(H)$ vers $\pi_2(H)$. Si $g \in \text{acl}(A, g)$, on obtient de la même façon $h'h^{-1} \in \text{acl}(A, g'g^{-1})$, ce qui implique que $\text{ker}(S)$ est fini. \square

Remarque 1.6. Le lemme 1.5 reste vrai avec un translaté de S à gauche plutôt qu'à droite. Si en plus g est générique dans un groupe G_1 type-définissable sur A , alors $g'g^{-1}$ est aussi générique dans G_1 et $\pi_1(S)$ est d'indice borné dans G_1 . Ainsi S définit une endogénie de G_1 dans $\pi_2(S)$. De même, si h est générique dans un sous-groupe $H_1 \leq H$, alors $\pi_2(S)$ sera d'indice borné dans H_1 .

Remarque 1.7. Si G, H et S sont hyperdéfinissables dans une théorie simple, le lemme reste encore vrai, sauf que dans la définition d'une endogénie on doit remplacer *co-noyau fini* par *co-noyau borné* (et de même pour le noyau d'une isogénie).

Soit maintenant T une théorie stable avec un réduct T_0 qui a élimination géométrique des imaginaires. On utilisera l'indice 0 pour dénoter l'indépendance et la clôture algébrique au sens du réduct T_0 . Soient G un groupe connexe type-définissable sur \emptyset dans T et a, b deux génériques indépendants de G . Les deux faits suivants seront utilisés à plusieurs reprises.

Fait 1.8. [5, Lemme 3.4] Soit D une suite de Morley du générique de G que l'on ajoute au langage. On pose

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(b), \text{acl}(ab)) \cap \text{acl}(a), \\ b_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(a), \text{acl}(ab)) \cap \text{acl}(b), \\ ab_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(a), \text{acl}(b)) \cap \text{acl}(ab), \end{aligned}$$

où ab_1 ne signifie pas le produit de a par b_1 , mais l'uple $(ab)_1$.

Alors a_1, b_1 et ab_1 sont indépendants deux-à-deux, chacun est 0-algébrique sur les deux autres, et en plus

$$\text{acl}(b), \text{acl}(ab) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(a).$$

Fait 1.9. [5, Théorème 3.1] Après adjonction de paramètres indépendants de a, b il existe un groupe connexe 0-interprétable H et un homomorphisme définissable $\phi : G \rightarrow H$ tel que

$$\text{acl}(a), \text{acl}(b) \underset{\phi(ab)}{\downarrow}^0 \text{acl}(ab).$$

En fait, on voit facilement que ab_1 est 0-interalgébrique avec $\phi(ab)$ sur les paramètres ajoutés.

Soit maintenant G un groupe T_0 -définissable, et H un sous-groupe connexe T -type-définissable, les deux sur \emptyset . Soit p le type générique de H et p_0 son T_0 -réduit. Alors $H = \text{Stab}(p)$, et $\bar{H} = \text{Stab}_0(p_0)$ est le plus petit sous-groupe T_0 -type-définissable contenant H . La proposition suivante donne un critère pour que H soit T_0 -définissable.

Proposition 1.10. *Si p est de rang maximal (rang de Lascar, de Morley, ou rangs locaux stratifiés) dans p_0 (vu comme T -type partiel), alors H est d'indice borné dans \bar{H} . Si p est l'unique complétion de p_0 de rang maximal, alors $H = \bar{H}$ est T_0 -type-définissable.*

Démonstration. Puisque $\text{Stab}_0(p_0) = \bar{H}$, le 0-type générique de \bar{H} est bien p_0 . Or, une 0-formule φ est générique pour \bar{H} au sens de T_0 si et seulement si elle l'est au sens de T , si et seulement si un nombre fini de translatés recouvre \bar{H} , si et seulement si $\varphi \wedge g\varphi$ ne devie pas sur \emptyset pour tout $h \models \bar{H}$. Donc p_0 se complète en un type générique pour \bar{H} qui doit avoir rang maximal. Ainsi p est générique pour \bar{H} , ce qui signifie que l'indice de H dans \bar{H} est borné.

Si p est la seule complétion de rang maximal, notons d'abord que \bar{H} est T_0 -connexe en tant que stabilisateur. Donc p_0 est le seul type 0-générique, qui n'a qu'une seule complétion de rang maximal : p est le seul type générique de \bar{H} . Ainsi \bar{H} est connexe, et $H = \bar{H}$. \square

2. DIE LIEBE FARBE

Dans cette partie nous rappelons quelques propriétés du mauvais corps obtenu dans [2] qui seront utilisées pour la démonstration du théorème A. Il s'agit d'un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle muni d'un sous-groupe propre multiplicatif divisible et sans torsion, noté \check{U} et coloré en vert, tel que $\text{RM}(K) = 2$ et $\text{RM}(\check{U}) = 1$ (où $\text{RM}(X)$ désigne le rang de Morley de X , qui dans tout groupe de rang de Morley fini est égal au rang de Lascar). On peut alors voir \check{U} comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel qui est fortement minimal avec toute la structure induite. Nous travaillons dans un langage relationnel, à l'exception de la loi du groupe multiplicatif et, pour chaque $q \in \mathbb{Q}$, de la multiplication linéaire par q sur les éléments verts. À l'élément zéro près, nos structures sont donc des sous-groupes multiplicatifs d'un corps de caractéristique nulle dont le sous-groupe vert est divisible sans torsion. Pour deux structures A et B on note AB la structure engendrée, qui est le sous-groupe multiplicatif engendré, clôturé par les racines vertes et augmenté de l'élément 0.

Pour deux structures $A \subseteq B$ avec B finiment engendrée sur A on définit une prédimension relative

$$\delta(B/A) = 2 \text{ degtr}(B/A) - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(\check{U}(B)/\check{U}(A)) ;$$

lorsque A est vide, on l'omet. Notons que δ est *sous-modulaire* : $\delta(A) + \delta(B) \geq \delta(AB) + \delta(A \cap B)$. On dit que A est *autosuffisante* dans B , noté $A \leq B$, si $\delta(B_0/A) \geq 0$ pour tout $A \subseteq B_0 \subseteq B$. La sous-modularité de la prédimension donne que l'intersection de deux sous-structures autosuffisantes l'est aussi.

Une extension autosuffisante $A \leq B$ est *minimale* s'il n'y a pas de structure intermédiaire propre autosuffisante dans B .

Le corps K est caractérisé par les conditions suivantes :

- $\delta(A) \geq 0$ pour tout $A \subset K$ finiment engendrée.
- Si $A \leq K$ et $A \leq B$ est une extension minimale, alors il existe un plongement de B dans K sur A avec image autosuffisante.
- Si $A \leq K$ et $A \leq B$ avec $\delta(B/A) = 0$, alors il n'y a qu'un nombre fini de plongements de B dans K sur A .

Étant donnée $A \subseteq K$, la plus petite sous-structure autosuffisante de K contenant A est sa *clôture autosuffisante* $\langle A \rangle$, qui est algébrique sur A dans la théorie T du

mauvais corps K . Si A est finiment engendrée alors $\langle A \rangle$ l'est aussi. De plus,

$$\text{RM}(a/C) = \delta(\langle aC \rangle / \langle C \rangle).$$

L'indépendance au sens de T est caractérisée de la manière suivante : soient a, b deux uples et $C = \langle aC \rangle \cap \langle bC \rangle$. Alors $a \downarrow_C b$ ssi $\delta(\langle abC \rangle / \langle bC \rangle) = \delta(\langle aC \rangle / C)$ ssi

$$\langle aC \rangle \downarrow_C^0 \langle bC \rangle, \langle abC \rangle = \langle aC \rangle \cdot \langle bC \rangle \text{ et } \ddot{U}(\langle abC \rangle) = \ddot{U}(\langle aC \rangle) \cdot \ddot{U}(\langle bC \rangle)$$

où l'indice 0 fait référence au réduit au pur langage des anneaux, et donc à la théorie T_0 des corps algébriquement clos de caractéristique 0. En particulier, l'indépendance au sens de T sur un ensemble algébriquement clos entraîne l'indépendance au sens de T_0 . Notons aussi que si A et B sont autosuffisants et indépendants sur leur intersection, alors la structure engendrée AB est juste le produit de groupes (augmentée de 0). Dans [5] on montre que T est relativement CM-triviale au-dessus de T_0 par rapport à la clôture autosuffisante.

Remarque 2.1. Soient $A \subseteq B$ autosuffisants et $C \subseteq \text{acl}(A)$ autosuffisant tel que $B \cap C = A$. Alors, $B \downarrow_A^0 C$.

Démonstration. Par le caractère local de la déviation, on peut supposer que C est finiment engendré au-dessus de A . Or, comme C est T -algébrique sur A , on a $\delta(C/A) = 0$. La sous-modularité de la prédimension nous donne que

$$0 \leq \delta(C/B) \leq \delta(C/C \cap B) = \delta(C/A) = 0.$$

On a donc égalité. Comme $\dim_{\mathbb{Q}}(\ddot{U}(BC)/\ddot{U}(B)) = \dim_{\mathbb{Q}}(\ddot{U}(C)/\ddot{U}(A))$, on obtient $\text{degr}(CB/B) = \text{degr}(C/A)$, c'est-à-dire $C \downarrow_A^0 B$. \square

On appelle *base verte* d'une sous-structure autosuffisante A de K toute base linéaire de $\ddot{U}(A)$. Terminons par quelques remarques utiles sur le corps K :

- Remarque 2.2.** (1) Si A est autosuffisante, alors $\text{acl}_0(A)$ l'est aussi et ne contient pas de nouveaux points verts.
- (2) Si A est autosuffisant et $b \in \text{acl}(A)$, alors il existe $B \supseteq Ab$ finiment engendré sur A tel que $\delta(B/A) = 0$. Si \bar{x} est une base verte de B sur A alors $\text{degr}(B/A) = \text{degr}(\bar{x}/A) = |\bar{x}|/2$. En particulier, $B \in \text{acl}_0(A, \ddot{U}(B))$; si A est vert, on a $B \subseteq \text{acl}_0(\ddot{U}(B))$.
- (3) Tout point x de K est la somme de deux points verts. De plus, il n'y a qu'un nombre fini de couples verts (y, z) tels que $x = y + z$. Soit B la sous-structure engendrée par l'ensemble des couples de points verts dont la somme est un point d'une sous-structure A fixée. Si A est autosuffisante alors B l'est également et $B \subseteq \text{acl}(A)$.

3. CHERCHEZ LE TORE

Dans cette partie nous allons démontrer le théorème A énoncé dans l'introduction. Pour ce faire, nous allons décomposer le groupe en une partie 0-algébrique et une partie 0-transcendante. En utilisant cette décomposition, on construira un groupe algébrique. Finalement, on exhibera une isogénie non trivial de notre groupe vers une section du groupe algébrique construit.

Rappelons qu'un corps de rang de Morley fini élimine les imaginaires [17] et donc tout groupe interprétable est définissablement isomorphe à un groupe définissable. En particulier le quotient K^*/\ddot{U} est en bijection avec un groupe définissable. Hélas,

pour deux uples réels a et b en bijection avec deux génériques indépendants de K^*/\ddot{U} , l'élément a_1 décrit dans le fait 1.8 est vide. Il s'avère donc nécessaire de faire une analyse plus précise des groupes définissables et cet exemple en est notre fil conducteur.

Fixons alors un groupe infini connexe G interprétable dans le corps (K, \ddot{U}) . Grâce à l'élimination des imaginaires, on peut supposer que l'univers de G est réel. Nous ajoutons aux paramètres de la théorie ceux nécessaires pour définir G ainsi que la clôture algébrique d'une suite de Morley D du générique de G . Nous supposons en particulier que G est définissable sur \emptyset .

Prenons a , b et c trois points génériques de G indépendants, et posons

$$a_1 = \text{acl}(a) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(b), \text{acl}(ab))$$

où l'indice 0 réfère au réduit à la théorie des corps algébriquement clos purs. Alors a_1 est autosuffisant comme intersection de deux sous-structures autosuffisants. Le fait 1.8 donne

$$\text{acl}(a) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(b), \text{acl}(ab).$$

Considérons un uple réel a_E représentant l'ensemble $\{a, a^{-1}\}$. Alors a , a^{-1} et a_E sont tous 0-interalgébriques. Puisque (b, ab) et $(c^{-1}, (ca)^{-1})$ ont le même type sur a_E , on a également $a_1 = \text{acl}(a) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(c), \text{acl}(ca))$ et

$$\text{acl}_0(\text{acl}(c), \text{acl}(ca)) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(a).$$

La clôture autosuffisante $\langle a, a^{-1} \rangle$ est une sous-structure finiment engendrée et algébrique sur a_E . Soit Θ un ensemble fini a_E -définissable qui engendre $\langle a, a^{-1} \rangle$. Par la remarque 2.2(3), l'ensemble (fini) a^2 constitué de tous les couples de points verts dont la somme est un point de Θ est aussi définissable sur a_E . De plus, l'uple a est 0-algébrique sur a^2 , et a^2 engendre une sous-structure verte autosuffisante incluse dans $\text{acl}(a)$.

En utilisant la définissabilité de a^2 sur a_E et le fait que $(b, ab) \equiv_{a_E} (c^{-1}, (ca)^{-1})$, on décompose de la même façon les points b , ab , c , ca et cab . Posons

$$\begin{aligned} A^1 &= \text{acl}_0(\langle a_1, a^2, b_1, b^2, ab_1, ab^2 \rangle) & A^2 &= \text{acl}_0(\langle a_1, a^2, c_1, c^2, ca_1, ca^2 \rangle) \\ A^3 &= \text{acl}_0(\langle b_1, b^2, ca_1, ca^2, cab_1, cab^2 \rangle) & A^4 &= \text{acl}_0(\langle ab_1, ab^2, c_1, c^2, cab_1, cab^2 \rangle), \end{aligned}$$

où la multiplication est prioritaire sur les indices : par exemple cab_1 signifie $(cab)_1$ et ab^2 signifie $(ab)^2$. Par la remarque 2.2(1), les sous-structures A^1 , A^2 , A^3 et A^4 sont toutes autosuffisantes. Soit $a' = \text{acl}(a) \cap A^1$. Alors $a' = \text{acl}(a) \cap A^2$ car $A^1 \equiv_{a_E} A^2$. Notons que $\text{acl}(a) = \text{acl}(a')$. De même, on pose $b' = \text{acl}(b) \cap A^1 = \text{acl}(b) \cap A^3$.

Lemme 3.1. *L'uple a' est autosuffisant et contient a_1 et a^2 . De plus, $a \in \text{acl}_0(a')$ et $a' \in \text{acl}_0(\ddot{U}(a'))$. Le degré de transcendance $\text{degtr}(a'/a_1)$ est fini.*

Démonstration. Comme intersection de deux sous-structures autosuffisantes, a' l'est aussi. Puisque $a^2 \subseteq a' \subseteq \text{acl}(a^2)$, on a $\delta(a'/a^2) = 0$. Par la remarque 2.2(2), l'uple a' est 0-algébrique sur sa base verte. Enfin, puisque

$$\text{acl}(a) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(b), \text{acl}(ab),$$

on a l'inégalité

$$\text{degtr}(a'/a_1) = \text{degtr}(a'/a_1, b_1, b^2, ab_1, ab^2) \leq \text{degtr}(A^1/a_1, b_1, b^2, ab_1, ab^2).$$

Le degré de transcendance $\text{degtr}(A^1/a_1, b_1, b^2, ab_1, ab^2)$ est fini car a^2, b^2 et ab^2 sont finis et $\text{acl}_0(a_1, b_1, ab_1) = \text{acl}_0(a_1, b_1)$ est autosuffisant. \square

Lemme 3.2.

$$A^1 \downarrow_{a'}^0 \text{acl}(a), \quad A^1 \downarrow_{a'}^0 A^2 \quad \text{et} \quad A^1 \downarrow_{a', b'}^0 A^2, A^3$$

Démonstration. La première indépendance suit de la remarque 2.1.

Comme $A^1 \downarrow_{\text{acl}(a)} A^2$, on a $A^1 \downarrow_{\text{acl}(a)}^0 A^2$ et donc $A^1 \downarrow_{a'}^0 A^2$ par transitivité.

Pour la dernière 0-indépendance, vérifions d'abord que

$$A^1 \downarrow_{a' b'}^0 \text{acl}(a) \text{acl}(b).$$

Comme a et b sont indépendants, $a' b'$ et $\text{acl}(a) \text{acl}(b)$ le sont aussi. Grâce à la remarque 2.1, il suffit de montrer que $A^1 \cap (\text{acl}(a) \text{acl}(b)) = \text{acl}_0(a' b')$. Comme $\text{acl}(a) \text{acl}(b) \subseteq \text{acl}(a' b')$, l'ensemble $A^1 \cap (\text{acl}(a) \text{acl}(b))$ est 0-algébrique sur ses points verts et $a' b'$ par la remarque 2.2 (2). Puisque son degré de transcendance sur $a' b'$ est fini, sa base verte e l'est aussi. Par hypothèse $e = e_a \cdot e_b$ avec $e_a \in \text{acl}(a)$ et $e_b \in \text{acl}(b)$, où le produit est pris coordonnée par coordonnée. Notons que

$$\begin{array}{lcl} e \downarrow_{a' b'}^0 e_a & \text{car} & A^1 \downarrow_{a'}^0 \text{acl}(a), \\ e \downarrow_{a' b'}^0 e_b & \text{car} & A^2 \downarrow_{a'}^0 \text{acl}(a), \quad \text{et} \\ e_a \downarrow_{a' b'}^0 e_b & \text{car} & \text{acl}(a) \downarrow_{a'}^0 \text{acl}(b) \quad \text{par indépendance au sens de } T. \end{array}$$

Donc e est le générique d'un translaté d'un sous-groupe connexe multiplicatif d'après le lemme 1.2. Un tel sous-groupe de $(K^*)^n$ est un tore, défini par des relations \mathbb{Q} -linéaires. La dimension linéaire d'un point générique coïncide donc avec le degré de transcendance [11].

Notons que $\delta(e/\text{acl}_0(a' b')) = \delta(A^1 \cap (\text{acl}(a) \text{acl}(b))/\text{acl}_0(a' b')) = 0$. Ainsi

$$0 = \delta(e/\text{acl}_0(a' b')) = 2 \text{degtr}(e/a', b') - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(e/\text{acl}_0(a', b')) = \text{degtr}(e/a', b'),$$

et donc $e \in \text{acl}_0(a' b')$.

Pour terminer, observons qu'une relation 0-algébrique entre A^1 et A^2, A^3 se produit déjà au-dessus d'une partie finie D' de la suite de Morley D fixée au départ. Cela donne une relation 0-algébrique entre les A^{i1} et A^{i2}, A^{i3} correspondants. Mais alors on peut envoyer c sur un élément de $D \setminus D'$ pour obtenir une copie de A^{i2}, A^{i3} au-dessus de A^{i1} dans $\text{acl}(a), \text{acl}(b)$. Donc cette relation 0-algébrique se produit déjà entre A^1 et $\text{acl}(a) \text{acl}(b)$. \square

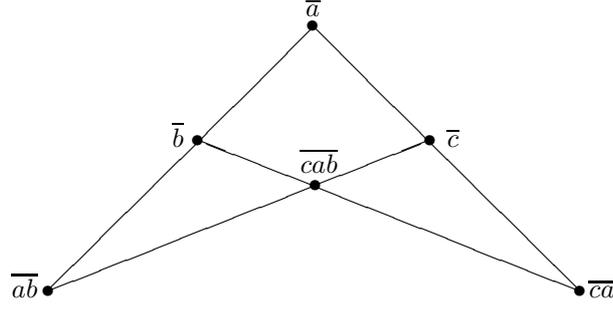
Soit a_2 un uple fini de points verts de a' maximal 0-transcendant sur a_1 , qui existe d'après le lemme 3.1. La structure $\bar{a} = \langle a_1 a_2 \rangle \leq a'$ est algébrique sur a . Notons que a' ainsi que \bar{a} et a sont 0-algébriques sur $a_1 a_2$.

Avec les mêmes notations pour chacun des points, on obtient le quadrangle algébrique suivant :

Notons que nous avons remplacé chaque point du groupe G par une base verte au-dessus des points provenant du fait 1.8. Nous allons modifier (une partie de) ce quadrangle afin de construire un groupe 0-interprétable.

On considère les clôtures autosuffisantes des droites du diagramme précédent.

$$\begin{array}{ll} A_1 = \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{b}, \overline{ab} \rangle) & A_2 = \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{c}, \overline{ca} \rangle) \\ A_3 = \text{acl}_0(\langle \bar{b}, \bar{c}, \overline{cb} \rangle) & A_4 = \text{acl}_0(\langle \overline{ab}, \bar{c}, \overline{cab} \rangle). \end{array}$$



Notons que $A_i A_j$ est autosuffisant, car A_i et A_j sont indépendants au-dessus du point à l'intersection de ces deux droites. Le lemme suivant montre la même propriété pour chaque triplet de droites.

Lemme 3.3. *La structure $A_1 A_2 A_3$ est autosuffisante. De plus,*

$$A_1 \underset{\bar{a}}{\downarrow}^0 A_2 \quad \text{et} \quad A_1 \underset{\bar{a}, \bar{b}}{\downarrow}^0 A_2, A_3.$$

Démonstration. Du fait que \bar{a} et a' sont 0-interalgébriques, le lemme 3.2 implique les indépendances.

Montrons que $A_1 A_2 A_3$ est autosuffisant. Par sous-modularité,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \delta(A_2/A_3) \leq \delta(A_2/A_2 \cap A_3) = \delta(A_2/\bar{c}\bar{a}) \\ &= \delta(\langle \bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \rangle / \bar{c}\bar{a}) = \delta(\langle \bar{a}, \bar{c}\bar{a} / \bar{c}\bar{a} \rangle) = \delta(\bar{a}) = \text{RM}(G), \end{aligned}$$

puisque A_3 est autosuffisant et $\delta(\langle \bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \rangle / \bar{a}\bar{c}\bar{a}) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \delta(A_2 A_3) &\leq \delta(A_2/A_3) + \delta(A_3) \leq \text{RM}(G) + \delta(\langle \bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}, \bar{c} \rangle) \\ &= \text{RM}(G) + \delta(\bar{a}\bar{b} \bar{c}) = 3 \text{RM}(G). \end{aligned}$$

De plus,

$$\delta(A_1/A_2 A_3) \leq \delta(A_1/A_1 \cap A_2 A_3) = \delta(A_1/\bar{a}\bar{b}) = 0,$$

d'où $\delta(A_1 A_2 A_3) \leq 3 \text{RM}(G)$. Notons que $A_1 A_2 A_3$ contient déjà les points génériques indépendants \bar{a} , \bar{b} et \bar{c} qui engendrent une structure autosuffisante de prédimension $3 \text{RM}(G)$. Donc $A_1 A_2 A_3$ est autosuffisant. \square

Maintenant, nous allons construire une base verte de \bar{a} sur $a_1 a_2$ avec de bonnes propriétés.

Lemme 3.4. *Il existe une base verte t_a de \bar{a} sur $a_1 a_2$ qui est 0-transcendante sur a_1 .*

Démonstration. Soit t_a une base verte quelconque de \bar{a} sur $a_1 a_2$. Comme a_1 est autosuffisant, toute sous-structure de \bar{a} engendrée par n éléments de a_2 , t_a sur a_1 a degré de transcendance au moins $n/2$ sur a_1 . On peut alors transformer linéairement les éléments de t_a avec les points de a_2 pour que t_a soit également 0-transcendant sur a_1 . \square

Notons que t_a est aussi 0-algébrique sur $a_1 a_2$. Nous obtenons des bases vertes comme ci-dessus pour chaque point du diagramme. Les indépendances

$$\text{acl}(b) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(ab) \quad \text{et} \quad \text{acl}(a) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(b), \text{acl}(ab)$$

impliquent que $a_2, b_2, ab_2, t_a, t_b, t_{ab}$ est une base verte de $\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}$ sur $a_1 b_1 a b_1$.

Lemme 3.5. *Les uples*

$$t'_a = \frac{t_c}{t_{ca}}, \quad t'_b = \frac{t_{ca}}{t_{cab}}, \quad \text{et} \quad t'_{ab} = \frac{t_c}{t_{cab}}$$

satisfont

- (1) $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$;
- (2) t'_a est 0-transcendant sur \bar{a}, \bar{ca} et de même sur \bar{a}, \bar{c} .

Démonstration. L'égalité est évidente. Comme $t_c \downarrow_{c_1}^0 \bar{a}, \bar{ca}$ et t_c est 0-transcendant sur c_1 , il l'est aussi sur \bar{a}, \bar{ca} . Puisque $t_{ca} \in \text{acl}_0(\bar{ca})$ on voit que t'_a est 0-transcendant sur \bar{a}, \bar{ca} . \square

Soit t_1 une base verte de A_1 sur $\bar{a}\bar{b}\bar{ab}$, et de même pour les autres droites. Nous allons transformer ces bases afin qu'ils satisfassent les conditions du lemme 1.2.

Proposition 3.6. *On peut transformer linéairement les uplets t_i de façon que*

- (1) $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$,
- (2) t_i , ainsi que A_i , est 0-algébrique sur les trois points de la droite A_i ,
- (3) $|t_2| + |t_c| = |c_2|$ et $\text{RM}(\bar{c}/c_1) = \delta(\bar{c}/c_1) = |t_2|$,
- (4) t_2 est 0-transcendant sur \bar{a}, \bar{c}, t'_a et sur \bar{a}, \bar{ca}, t'_a (et de même pour t_3 et t_4),
- (5) t_2 est un uple vert T -générique sur \bar{a} .

Ainsi, les uples \bar{a}, \bar{c}, t'_a et t_2 , tout comme \bar{a}, \bar{ca}, t'_a et t_2 , sont 0-indépendants.

Démonstration. La structure $A_1A_2A_3$ est autosuffisante par le lemme 3.3. Comme elle contient \bar{ab}, \bar{c} et \bar{cab} , elle doit contenir $\langle \bar{ab}, \bar{c}, \bar{cab} \rangle$. En particulier, la base verte de A_4 , qui l'est aussi de $\langle \bar{ab}, \bar{c}, \bar{cab} \rangle$, est combinaison linéaire des points verts de $A_1A_2A_3$. À transformation linéaire près, on a donc $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$, ce qui montre (1).

Par les indépendances du lemme 3.3, pour tous $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ distincts on a

$$t_i \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}, \bar{cab}, \bar{c}, \bar{ca}}^0 t_j, t_k.$$

Par le lemme 1.2 appliqué à $t_1, t_2 \cdot t_3$ et t_4 au-dessus de $\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}, \bar{cab}, \bar{c}, \bar{ca}$, le 0-type de t_1 sur $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}, \bar{cab}, \bar{c}, \bar{ca})$ est générique dans un translaté définissable V sur $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}, \bar{cab}, \bar{c}, \bar{ca})$ d'un tore de $(K^*)^{|t_1|}$. Puisque

$$t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}}^0 \bar{cab}, \bar{c}, \bar{ca},$$

le translaté V est définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab})$. Or, pour tout translaté d'un tore, sa dimension de Zariski correspond à la dimension linéaire multiplicative du point générique. Donc

$$\text{degtr}(t_1/\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}) = \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(t_1/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab})) = \delta(t_1/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab})) \leq 0,$$

puisque $t_1 \in A_1 = \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{ab} \rangle)$. Ainsi $t_1 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab})$. Alors

$$A_1 = \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{ab} \rangle) = \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}, t_1) = \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}).$$

Pour (3), posons $n = \text{degtr}(A_2/\bar{a}, \bar{ca})$. Du fait que $\delta(A_2/\bar{a}\bar{ca}) = 0$ et que $\bar{a}\bar{ca}$ est autosuffisant, la base verte c_2, t_2, t_c de A_2 sur $\bar{a}\bar{ca}$ est de longueur $2n$. Par (2) on a

$$A_2 = \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{a}, \bar{ca}) = \text{acl}_0(c_2, \bar{a}, \bar{ca}).$$

Du fait que $\bar{c} \downarrow_{c_1}^0 \bar{a}, \bar{c}\bar{a}$ l'uple c_2 reste 0-transcendant sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}$ et un calcul de prédimension donne que

$$0 = \delta(c_2, t_2, t_c/\bar{a}, \bar{c}\bar{a}) = 2 \operatorname{degtr}(c_2/\bar{a}, \bar{c}\bar{a}) - |c_2| - |t_2| - |t_c|.$$

Ainsi $|t_2| + |t_c| = |c_2|$. Comme \bar{c} est autosuffisant, on en déduit

$$\operatorname{RM}(\bar{c}/c_1) = \delta(\bar{c}/c_1) = 2 \operatorname{degtr}(\bar{c}/c_1) - \dim_{\mathbb{Q}}(\bar{c}/c_1) = 2|c_2| - |c_2| - |t_c| = |t_2|.$$

Pour (4), supposons que les $j-1$ premières coordonnées $t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ de l'uple t_2 sont 0-transcendantes sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a$ et sur \bar{a}, \bar{c}, t'_a . Par (3), l'une des coordonnées z de c_2 est 0-transcendante sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$. Si $t_{2,j}$ est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ alors $t_{2,j}z$ est lui 0-transcendant. De plus si $t_{2,j}$ était 0-transcendant sur $\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$, l'élément $t_{2,j}z$ l'est toujours.

Afin de conserver l'égalité $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$, on multiplie $t_{4,j}$ par z . Notons que si $t_{4,j}$ était 0-transcendant sur $\bar{a}\bar{b}, \bar{c}, t'_{ab}, t_{4,1}, \dots, t_{4,j-1}$, alors $t_{4,j}z$ l'est toujours. Enfin, si $t_{4,j}$ était 0-transcendant sur $\bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_{4,1}, \dots, t_{4,j-1}$ mais $t_{4,j}z$ devient 0-algébrique, alors $t_{4,j}z^2$ est à nouveau 0-transcendant, ainsi que $t_{2,j}z^2$ sur les points correspondants. Le résultat suit par induction.

Pour (5), comme a et c sont indépendants, on a

$$c_2 \downarrow_{c_1} \bar{a}.$$

Par (3), une des coordonnées z de c_2 est T -transcendante sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ pour $j \leq |t_2|$. Si $t_{2,j}$ est algébrique sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$, l'élément $t_{2,j}z^n$ est T -transcendant sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ pour tout $n > 0$. Comme $t_{2,j}$ est 0-transcendant sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, (t_{2,i} : i \neq j)$, il y a au plus un n pour lequel $t_{2,j}z^n$ est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, (t_{2,i} : i \neq j)$. De même pour $t_{4,j}z^n$ au-dessus de $\bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, (t_{4,i} : i \neq j)$. Il existe donc un n commun permettant de préserver (1) et (4). On conclut par récurrence.

La dernière remarque suit du lemme 3.5 et du point (4). \square

Corollaire 3.7. *La droite A_2 est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2$ et les points \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont 0-interalgébriques sur \bar{a}, t'_a, t_2 .*

Démonstration. D'après la proposition 3.6(2), la droite A_2 est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}$ et donc sur \bar{a}, \bar{c}, ca_2 . Par la proposition 3.6, l'uple t'_a, t_2 est 0-transcendant sur \bar{a}, \bar{c} . On en déduit que

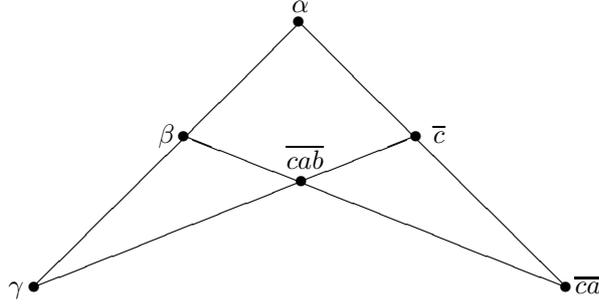
$$\operatorname{degtr}(A_2/\bar{a}, \bar{c}) = \operatorname{degtr}(ca_2/\bar{a}, \bar{c}) = |ca_2| = |t'_a| + |t_2| = \operatorname{degtr}(t'_a, t_2/\bar{a}, \bar{c}),$$

d'où $A_2 = \operatorname{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2)$ et en particulier $\bar{c}\bar{a} \in \operatorname{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2)$. Par symétrie, $\bar{c} \in \operatorname{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_2)$. \square

On pose

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \operatorname{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2), \\ \beta &= \operatorname{acl}_0(\bar{c}\bar{a}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}) \cap \operatorname{acl}_0(\bar{b}, t'_b, t_3), \quad \text{et} \\ \gamma &= \operatorname{acl}_0(\bar{c}\bar{a}\bar{b}, \bar{c}) \cap \operatorname{acl}_0(\bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4). \end{aligned}$$

Proposition 3.8. *Le diagramme est un quadrangle 0-algébrique.*



Démonstration. Remarquons que $a_1, t'_a \in \alpha$ et $b_1, t'_b \in \beta$, ainsi que $ab_1, t'_{ab} \in \gamma$. Montrons d'abord que

$$(\star) \quad A_2 \downarrow_{\alpha}^0 \bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4.$$

Le lemme 3.3 donne l'indépendance $A_3, A_4 \downarrow_{\bar{c}, \overline{ca}}^0 A_2$. Celle-ci entraîne

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4 \downarrow_{\bar{c}, \overline{ca}}^0 A_2$$

et donc $\text{Cb}(\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4/A_2) \in \text{acl}_0(\bar{c}, \overline{ca})$.

Il reste à montrer que $\text{Cb}(\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4/A_2) \in \text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$, c'est-à-dire

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4 \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_2.$$

Comme $A_3 \downarrow_{\bar{b}}^0 A_1$ on a $\overline{ca}, t'_b, t_3 \downarrow_{\bar{b}}^0 A_1$. Puisque \bar{b}, \overline{ca} et t'_b, t_3 sont 0-indépendants par la proposition 3.6, il suit que $\overline{ca}, t'_b, t_3 \downarrow_{\bar{b}}^0 A_1$ et

$$(\dagger) \quad \overline{ca} \downarrow_{A_1}^0 t'_b, t_3.$$

L'indépendance $A_3 \downarrow_{\bar{b}, \overline{ca}}^0 A_1, A_2$ entraîne $t'_b, t_3 \downarrow_{A_1, \overline{ca}}^0 \bar{c}, t'_a, t_2$; par transitivité avec

(\dagger) on obtient $t'_b, t_3 \downarrow_{A_1}^0 \bar{c}, t'_a, t_2$ et donc

$$t'_b, t_3 \downarrow_{A_1, t'_a, t_2}^0 \bar{c}.$$

Comme $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$ et $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$, on a

$$(\ddagger) \quad t'_{ab}, t_4 \downarrow_{A_1, t'_a, t_2}^0 \bar{c}.$$

Ensuite $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$ implique $\bar{c} \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1$ ce qui entraîne avec (\ddagger)

$$\bar{c} \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1, t'_{ab}, t_4.$$

Comme $A_2 \subseteq \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2)$ d'après le corollaire 3.7,

$$A_2 \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1, t'_{ab}, t_4.$$

À nouveau les identités $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$ et $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$ donnent

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4 \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_2,$$

ce qui entraîne (\star).

Nous allons maintenant vérifier que les points et les droites du diagramme satisfont les relations d'un quadrangle 0-algébrique.

L'indépendance (\star) entraîne

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\alpha}^0 \bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, t'_{ab}, t_4,$$

ce qui implique

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\alpha}^0 \beta, \gamma;$$

c'est-à-dire les droites (α, β, γ) et $(\alpha, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$ sont 0-indépendants sur leur intersection α . Par symétrie, chaque autre droite est 0-indépendante de (α, β, γ) sur l'intersection.

L'indépendance de deux droites différentes de (α, β, γ) sur leur intersection suit du lemme 3.3.

D'après le corollaire 3.7 appliqué aux droites A_3 et A_4 , on a $\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\bar{b}, \overline{cab}, t'_b, t_3)$ et $\overline{cab} \in \text{acl}_0(\bar{ab}, \bar{c}, t'_{ab}, t_4)$, ce qui implique $\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\bar{b}, t'_b, t_3, \overline{ab}, \bar{c}, t'_{ab}, t_4)$. Par (\star) on conclut

$$\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\alpha, \bar{c}).$$

De même, $\bar{c} \in \text{acl}_0(\alpha, \bar{c}\bar{a})$. Donc α, \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont deux-à-deux 0-interalgébriques sur le troisième.

Par la proposition 3.6,

$$\bar{a}, t'_a, t_2 \downarrow^0 \bar{c} \quad \text{et} \quad \bar{a}, t'_a, t_2 \downarrow^0 \bar{c}\bar{a}.$$

Ainsi α, \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont deux à deux 0-indépendants. Cela montre les propriétés pour la droite $(\alpha, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Par symétrie, on obtient les mêmes propriétés pour les droites $(\beta, \overline{cab}, \bar{c}\bar{a})$ et $(\gamma, \overline{cab}, \bar{c})$.

Pour la droite (α, β, γ) , l'indépendance $A_2 \downarrow_{\bar{c}\bar{a}}^0 A_3$ implique $\alpha \downarrow_{\bar{c}\bar{a}}^0 \beta$. Comme $\alpha \downarrow^0 \bar{c}\bar{a}$ on a $\alpha \downarrow^0 \beta$. Les points α, β et γ sont donc deux-à-deux 0-indépendants.

De plus, $\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\alpha}^0 \beta, \gamma$ et $\overline{cab} \in \text{acl}_0(\beta, \bar{c}\bar{a})$ impliquent

$$\gamma \downarrow_{\alpha, \beta}^0 \bar{c}, \bar{c}\bar{a}, \overline{cab}.$$

D'où $\gamma \in \text{acl}_0(\alpha, \beta)$. Il s'agit bien d'un quadrangle 0-algébrique. \square

Le théorème de la configuration de groupe [8] (voir aussi [6] ou [12, Theorem 5.4.5 et Remark 5.4.9]) nous donne, sur quelques paramètres indépendants qu'on ajoute au langage, un groupe T_0 -définissable 0-connexe H et des éléments 0-génériques 0-indépendants $h, h' \in H$ tels que α est 0-interalgébrique avec h , ainsi que β avec h' , et γ avec hh' . Par contre h et h' ne sont pas nécessairement indépendants, et leur T -type n'est pas forcément générique dans H .

Pour la suite, nous utiliserons le rapport entre h et le générique a du groupe G de départ.

Lemme 3.9. *Les uples h et t'_a, t_2 sont 0-interalgébriques sur \bar{a} , et \bar{a}, t_2 sont algébriques sur h . De plus,*

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_h^0 \bar{a}, t'_a, t_2.$$

Démonstration. Comme α et h sont 0-interalgébriques, il suffit de démontrer le lemme pour α à la place de h .

Par définition, l'uple α est dans $\text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$. Réciproquement, par la proposition 3.6, l'indépendance $\bar{c} \downarrow_{\bar{a}}^0 t'_a, t_2$ donne $\bar{c} \downarrow_{\bar{a}, \alpha}^0 t'_a, t_2$. D'où

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\bar{a}, \alpha}^0 t'_a, t_2,$$

car \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont 0-interalgébriques sur α . Comme $t'_a, t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$, on conclut que

$$t'_a, t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \alpha).$$

Remarquons maintenant que la proposition 3.6 entraîne également

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\alpha}^0 \bar{a}, t'_a, t_2.$$

Comme \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont indépendants, $\bar{c}\bar{c}\bar{a}$ est autosuffisant, ainsi que $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Donc $\langle \alpha \rangle$ est dans $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Par l'indépendance précédente, on a

$$\langle \alpha \rangle \downarrow_{\alpha}^0 \bar{a}, t'_a, t_2 \quad \text{et} \quad \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\langle \alpha \rangle}^0 \bar{a}, t'_a, t_2.$$

Alors

$$\delta(\bar{a}, t'_a, t_2/\alpha) = \delta(\bar{a}, t'_a, t_2/\langle \alpha \rangle) = \delta(\bar{a}, t'_a, t_2/\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})) = \delta(A_2/\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})) = 0.$$

On conclut que \bar{a}, t_2 est algébrique sur $\langle \alpha \rangle$, qui est elle algébrique sur α . \square

Cette interalgébricité nous permettra de définir un homomorphisme de G vers H . Posons $r = |t'_a|$ et $s = |t_2|$. Soit

$$S = \text{Stab}_0(h, t'_a, t_2/\bar{a})$$

le 0-stabilisateur de (h, t'_a, t_2) dans $H \times (K^*)^{r+s}$. Puisque $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$ implique $h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{b}, \bar{a}\bar{b}$, on a $S = \text{Stab}_0(h, t'_a, t_2/\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b})$.

Lemme 3.10. *Le point (h, t'_a, t_2) est 0-générique sur \bar{a} dans le translaté $S \cdot (h, t'_a, t_2)$, qui est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a})$. En particulier, le stabilisateur S est connexe.*

Démonstration. Vérifions que (h, t'_a, t_2) et (h', t'_b, t_3) satisfont les hypothèses du lemme 1.2. Remarquons tout d'abord que

$$(h, t'_a, t_2) \cdot (h', t'_b, t_3) = (hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4).$$

Nous allons montrer

$$(\dagger) \quad h, t'_a, t_2, t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 h', t'_b, t_3,$$

et en particulier $h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 h', t'_b, t_3$. Par symétrie, (\dagger) donne également

$$hh', t'_{ab}, t_4, t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 h', t'_b, t_3 \quad \text{et} \quad hh', t'_{ab}, t_4, t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 h, t'_a, t_2,$$

ce qui permet de conclure.

Comme $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$, on a $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{c}\bar{a}}^0 \bar{b}, \bar{a}\bar{b}, t_1$. On a $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{c}\bar{a}$ d'après la proposition 3.6, et donc $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{b}, \bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}, t_1$. Comme h est 0-algébrique sur \bar{a}, t'_a, t_2 , on obtient $h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}, t_1}^0 \bar{c}\bar{a}$. Enfin $A_1 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_2$ donne $t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 \bar{c}\bar{a}$, d'où on conclut

$$h, t'_a, t_1, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}}^0 \bar{c}\bar{a}.$$

Enfin, l'indépendance $A_1 A_2 \downarrow_{\bar{b}, \bar{c}\bar{a}}^0 A_3$ implique

$$h, t'_a, t_1, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}}^0 h', t'_b, t_3 ;$$

on en déduit (†) par transitivité. \square

Comme la paire (t'_a, t_2) est 0-générique sur \bar{a} , la projection de S sur les deux dernières coordonnées est 0-générique dans $(K^*)^{r+s}$, et donc surjective par connexité de K^* .

Par le fait 1.9, il existe un groupe algébrique H_1 (que l'on suppose définissable sur \emptyset) et des éléments génériques indépendants $h_1, h'_1 \in H_1$ tels que a_1 est 0-interalgébrique avec h_1 , ainsi que b_1 avec h'_1 , et ab_1 avec $h_1 h'_1$. Comme a_1 est contenu dans α , on a $h_1 \in \text{acl}_0(h)$; de même $h'_1 \in \text{acl}_0(h')$ et $h_1 h'_1 \in \text{acl}_0(hh')$. D'après les lemmes 1.2 et 1.5 et la remarque 1.6, le stabilisateur $\text{Stab}(h, h_1)$ induit une endogénie ϕ de H sur H_1 T_0 -définissable. Soit N la 0-composante connexe de $\ker(\phi)$.

Comme h est 0-générique dans H , il est 0-générique dans le translaté Nh sur son paramètre canonique; ce dernier est 0-interalgébrique avec $\phi(h) = h_1$ et donc avec a_1 . Comme h est 0-algébrique sur $\bar{c}, \bar{c}\bar{a}$ et

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{a_1}^0 \bar{a},$$

on conclut que h est 0-générique dans Nh sur \bar{a} . De plus, la 0-interalgébricité entre h et t'_a, t_2 sur \bar{a} entraîne par le lemme 1.5 que le stabilisateur S induit une isogénie T_0 -définissable entre N et $(K^*)^{r+s}$. Ainsi, le sous-groupe N est l'enveloppe T_0 -définissable de sa torsion, car c'est le cas de $(K^*)^{r+s}$. Comme H normalise N , il normalise la n -torsion de N pour tout $n < \omega$. Celle-ci est finie et donc fixée puisque H est 0-connexe. Ainsi H centralise toute la torsion de N , et $N \leq Z(H)$.

Lemme 3.11. *Le stabilisateur S est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\emptyset)$.*

Démonstration. Considérons le stabilisateur $S' = \text{Stab}_0(h', t'_b, t_3/\bar{b})$, qui induit également une isogénie ϕ' de N sur $(K^*)^{r+s}$. Celle-ci est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{b})$. Alors, le groupe $N \times (K^*)^{r+s}$ est isogène via $(\phi', \text{id}_{(K^*)^{r+s}})$ à $(K^*)^{r+s} \times (K^*)^{r+s}$. L'image de S par $(\phi', \text{id}_{(K^*)^{r+s}})$ est un sous-groupe connexe 0-algébrique d'un tore et donc définissable sans paramètres. Comme S est connexe, il est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{b})$. Puisque \bar{a} et \bar{b} sont 0-indépendants, S est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\emptyset)$. \square

Rappelons que t_2 est un uple vert générique sur \bar{a} par la proposition 3.6(5). Il se peut que l'uple (t_2, t'_a) ne le soit pas. Cependant, nous allons modifier h pour supprimer t'_a .

Comme S est une isogénie, il existent $h_0, h'_0 \in N$ tels que $(h_0, t'_a, \bar{1})$ et $(h'_0, t'_b, \bar{1})$ sont dans S . Alors, l'élément $(h_0 h'_0, t'_{ab}, \bar{1}) \in S$ car $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$. On pose $k = h h_0^{-1}$ et $k' = h' h'_0^{-1}$. Le translaté à droite

$$S \cdot (h, t'_a, t_2) = S \cdot (k, \bar{1}, t_2)$$

est 0-algébrique sur \bar{a} par le lemme 1.2; comme S est une isogénie définissable sur \emptyset on obtient $k \in \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)$. De même, $k' \in \text{acl}_0(\bar{b}, t_3)$ et $kk' \in \text{acl}_0(\bar{a}\bar{b}, t_3)$. De plus $t'_a \in \text{acl}_0(h)$ et $h_0 \in \text{acl}_0(t'_a)$, d'où

$$k \in \text{acl}_0(h) \subseteq \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}).$$

Par symétrie, $k' \in \text{acl}_0(h') \subseteq \text{acl}_0(\bar{c}\bar{a}, \bar{c}\bar{a}\bar{b})$ et $kk' \in \text{acl}_0(hh') \subseteq \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}\bar{b})$.

On vérifie maintenant que k satisfait les propriétés analogues à celles de h .

Lemme 3.12. *On a*

$$\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2) = \text{acl}_0(k).$$

De plus

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2.$$

Enfin, k et t_2 sont 0-interalgébriques sur \bar{a} , et \bar{a}, t_2 est algébrique sur k .

Démonstration. Les remarques précédentes montrent que $k \in \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)$. Comme $a_1 \subset \text{acl}_0(h) = \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$ et

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_h^0 \bar{a}, t'_a, t_2,$$

le lemme 3.6 donne :

$$\text{degtr}(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_2/a_1) = \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1) + \text{degtr}(\bar{a}, t'_a, t_2/a_1) - \text{degtr}(h/a_1)$$

$$|a_2| + |c_2| + |ca_2| = |c_2| + |ca_2| + |a_2| + |t'_a| + |t_2| - \text{degtr}(h/a_1).$$

Ainsi $\text{degtr}(h/a_1) = r + s$. Comme $\text{degtr}(h_0/a_1) = \text{degtr}(t'_a/a_1) = r$ et $kh_0 = h$, on obtient $\text{degtr}(k/a_1) \geq s$. De l'autre coté,

$$\begin{aligned} \text{degtr}(k/a_1) &\leq \text{degtr}(\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)/a_1) \\ &\leq \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1) + \text{degtr}(\bar{a}, t_2/a_1) - \text{degtr}(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}, t_2/a_1) \\ &= |c_2| + |ca_2| + |a_2| + |t_2| - |a_2| - |c_2| - |ca_2| = s. \end{aligned}$$

En particulier, on a $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2) = \text{acl}_0(k, a_1)$. Pour montrer que cette intersection est égale à $\text{acl}_0(k)$, vérifions que $a_1 \in \text{acl}_0(k)$. Comme $\text{degtr}(k/a_1) = s$ et

$$\text{degtr}(k/h_0a_1) = \text{degtr}(h/h_0a_1) = \text{degtr}(h/a_1) - \text{degtr}(h_0/a_1) = r + s - r = s,$$

on a $k \downarrow_{a_1}^0 h_0$. La 0-interalgéblicité de h_0 et t'_a et la proposition 3.6 entraîne $a_1 \downarrow_{a_1}^0 h_0$. Par transitivité, on a $h_0 \downarrow_{a_1}^0 a_1, k$ et donc $h_0 \downarrow_k^0 a_1$. Puisque $a_1 \in \text{acl}_0(h)$, on conclut que $a_1 \in \text{acl}_0(k)$. De plus,

$$\text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/k) = \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1) - \text{degtr}(k/a_1) = |c_2| + |ca_2| - s$$

et

$$\begin{aligned} \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/\bar{a}, t_2) &= \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}, \bar{a}, t_2/a_1) - \text{degtr}(\bar{a}, t_2/a_1) \\ &= |c_2| + |ca_2| + |a_2| - |a_2| - |t_2| = |c_2| + |ca_2| - s, \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2.$$

Comme $t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$, on en déduit $t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, k)$, ce qui donne la 0-interalgéblicité de k et t_2 sur \bar{a} . Enfin, puisque $\bar{c}\bar{c}\bar{a}$ est autosuffisant, la clôture autosuffisante $\langle k \rangle$ est dans $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Ainsi,

$$\langle k \rangle \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2 \quad \text{et} \quad \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\langle k \rangle}^0 \bar{a}, t_2.$$

Alors,

$$\delta(\bar{a}, t_2/k) = \delta(\bar{a}, t_2/\langle k \rangle) = \delta(\bar{a}, t_2/\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})) = 2|a_2| - |a_2| - |t_a| - |t_2| = 0.$$

On conclut que \bar{a} et t_2 sont algébriques sur $\langle k \rangle$, et donc sur k . \square

Soit

$$S' = \text{Stab}_0(k, t_2/\bar{a})$$

le 0-stabilisateur de (k, t_2) dans $H \times (K^*)^s$. De façon analogue aux lemmes 3.10 et 3.11, le groupe S' est T_0 -définissable sans paramètres et (k, t_2) est 0-générique sur \bar{a} dans le translaté $S' \cdot (k, t_2)$, qui est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a})$.

On pose

$$\Gamma = \{n \in N : \exists t \in \ddot{U}^s (n, t) \in S'\}.$$

Alors S' induit une isogénie entre Γ et \ddot{U}^s par le lemme 1.5, la remarque 1.6 et la proposition 3.6(5). Comme N est central dans H , le groupe Γ l'est aussi.

La proposition suivante termine la preuve du théorème A.

Proposition 3.13. *Le groupe G est isogène à un sous-groupe de H/Γ , où le groupe H est algébrique et Γ est central dans H et isogène à une puissance du sous-groupe coloré \ddot{U} .*

Démonstration. On considère le stabilisateur

$$S^* = \text{Stab}(a, k\Gamma)$$

de $\text{tp}(a, k\Gamma)$ dans $G \times (H/\Gamma)$.

Notons d'abord que $\Gamma \cdot k = k\Gamma$ est la projection sur la première coordonnée de $S'(k, t_2) \cap (H \times \ddot{U}^s)$ puisque t_2 est vert. Ainsi $k\Gamma \in \text{acl}(a)$, car $S'(k, t_2)$ est définissable sur $\text{acl}(a)$. De même $k'\Gamma \in \text{acl}(b)$ et $kk'\Gamma \in \text{acl}(ab)$. Comme

$$(a, k\Gamma) \cdot (b, k'\Gamma) = (ab, kk'\Gamma)$$

et a, b et ab sont deux-à-deux indépendants, $(a, k\Gamma)$ est générique dans un translaté de S^* d'après le lemme 1.2. Or, a est générique dans G . Donc S^* induit une endogénie de G dans H/Γ par le lemme 1.5 et la remarque 1.6.

Pour vérifier que le noyau de cette endogénie est fini, il suffit de montrer que a et $k\Gamma$ sont interalgébriques. Comme $\text{RM}(\ddot{U}) = 1$, on a $\text{RM}(\Gamma) = s$ et $\text{RM}(k\Gamma) \geq \text{RM}(k) - s$. Comme t_2 est vert générique sur \bar{a} , on a $\text{RM}(t_2/\bar{a}) = \text{RM}(t_2/a) = s$. Puisque k et t_2 sont 0-interalgébriques sur \bar{a} , on obtient que $\text{RM}(k/a) = s$. Ainsi

$$\text{RM}(k\Gamma) \geq \text{RM}(k) - s = \text{RM}(k/a) + \text{RM}(a) - s = \text{RM}(a) \geq \text{RM}(k\Gamma).$$

On a bien interalgébraicité entre a et $k\Gamma$. □

4. SOUS-GROUPES COLORÉS

Le théorème A ainsi que [5, Corollaire 4.3] nous amènent à étudier les sous-groupes définissables d'un groupe algébrique. Ceci s'avère simple, dans les cas collapsé ou non :

Théorème 4.1.

- Dans un corps rouge, tout sous-groupe définissable connexe d'un groupe algébrique est une extension des points rouges d'un sous-groupe additif par un groupe algébrique.
- Dans un corps vert, tout sous-groupe définissable connexe d'un groupe algébrique est une extension des points verts d'un tore par un groupe algébrique.
- Tout groupe simple définissable dans un corps coloré est algébrique.
- Dans le cas noir, tout groupe définissable est algébrique.

Le dernier point a été montré dans le cas non-collapsé [14, Proposition 2.4] dont la preuve ci-dessous s'inspire.

Démonstration. De façon analogue à la partie 2, on notera T la théorie du corps coloré et l'indice 0 fera référence au réduct du pur corps algébriquement clos.

Soit G un sous-groupe connexe définissable d'un groupe algébrique. Prenons deux génériques indépendants a et b et notons c leur produit. Alors $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ sont en amalgame libre ; par hypothèse c est 0-algébrique sur a et b . Ainsi

$$\langle c \rangle \subset \langle \text{acl}_0(a, b) \rangle \subset \text{acl}_0(\langle a, b \rangle) = \text{acl}_0(\langle a \rangle \langle b \rangle),$$

par la remarque 2.2(1) qui est valable pour tout corps coloré (collapsé ou non).

Cela entraîne que la base colorée t de $\langle c \rangle$ est une combinaison linéaire de r et s , les bases colorées respectives de $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$. On peut alors supposer que $t = r \cdot s$ dans le cas vert (ou $t = r + s$ dans le cas rouge). Puisque (a, r) , (b, s) et (c, t) sont deux-à-deux indépendants et que r est algébrique sur a , d'après les lemmes 1.2 et 1.5 et la remarque 1.6, le stabilisateur $\text{Stab}(a, r)$ induit une endogénie définissable ϕ de G vers les points colorés d'un sous-groupe algébrique d'une puissance cartésienne de K^+ (ou de K^* dans le cas vert). Comme le quotient d'un groupe algébrique par un groupe fini est encore algébrique, on peut supposer que $\text{coker} \phi = \{1\}$ et ϕ est un homomorphisme ; il est surjectif puisque r est linéairement indépendant.

Soit $N = \ker \phi$, et n générique dans N sur a . Alors $\text{tp}(na)$ est générique dans G , et $\text{tp}(na/a)$ est générique dans Na ; comme Na est définissable sur $\phi(a) = r$, a fortiori $\text{tp}(na/r)$ est générique dans Na . De plus, comme $(n, \bar{1}) \in \text{Stab}(a, r)$, les clôtures autosuffisantes $\langle na \rangle$ et $\langle a \rangle$ ont les mêmes points colorés, le groupe engendré par r , qui est clairement autosuffisant et donc égal à $\langle r \rangle$. Ainsi $\langle a \rangle$ est le groupe engendré par a et r , et $\langle na \rangle$ celui engendré par na et r . Si $x \models \text{tp}_0(na/r)$, alors

$$\begin{aligned} RM(x/r) &= \delta(\langle x, r \rangle / \langle r \rangle) \leq \delta(x/r) = 2 \text{degtr}(x/r) - \dim \text{lin}(\ddot{U}(x, r)/r) \\ &\leq 2 \text{degtr}(x/r) \leq 2 \text{degtr}(na/r) = 2 \text{degtr}(na/r) - \dim \text{lin}(\ddot{U}(na, r)/r) \\ &= \delta(na/r) = \delta(\langle na, r \rangle / \langle r \rangle) = RM(na/r). \end{aligned}$$

Ainsi $RM(\text{tp}_0(na/r)) = RM(na/r)$, et $\text{tp}(na/r)$ est la seule complétion de $\text{tp}_0(na/r)$ de rang maximal. Donc N est 0-définissable d'après la proposition 1.10, c'est-à-dire algébrique.

Si G est un groupe infini définissable simple, [5, Corollaire 3.9] implique que G est à isomorphisme près un sous-groupe d'un groupe algébrique (et même linéaire). L'image de G par ϕ doit être triviale car elle est incluse dans un groupe abélien. On conclut que $G = \ker \phi$ est algébrique.

Enfin, dans le cas noir, l'hypothèse de simplicité n'est pas nécessaire car les bases noires r , s et t obtenues au début de la preuve sont nécessairement triviales. \square

5. LA FUSION AU DESSUS DE L'ÉGALITÉ

Dans cette partie, nous décrirons complètement les groupes définissables dans une fusion T de deux théories fortement minimales T_1 et T_2 à langages disjoints ayant élimination des imaginaires [9]. Rappelons que T est fortement minimale et son rang de Morley est induit par la prédimension

$$\delta(X) = \dim_1(X) + \dim_2(X) - |X|,$$

où \dim_1 et \dim_2 sont les rangs de Morley respectifs de T_1 et T_2 .

Nous commençons par étudier les sous-groupes T -définissables d'un produit de groupes T_i -définissables.

Lemme 5.1. *Soient H_i des groupes T_i -définissables pour $i = 1, 2$. Tout sous-groupe T -définissable connexe K de $H_1 \times H_2$ est de la forme $K_1 \times K_2$, où $K_i \leq H_i$ est T_i -définissable.*

Si le groupe K est définissable sur l'ensemble A , les groupes K_1 et K_2 le sont sur $\text{acl}(A)$. La démonstration qui suit s'inspire de la preuve de la platitude dans la théorie de l'ensemble *ab initio* [10].

Démonstration. On peut supposer que le langage est relationnel et que les groupes H_1 , H_2 et K sont définissables sur \emptyset . Chaque élément g de K s'exprime sous la forme $g = (g^1, g^2)$. Pour le générique g de K , nous allons vérifier que g^1 et g^2 sont T -indépendantes. Pour cela, nous considérons une suite de Morley $(g_i)_{i < \omega}$ du générique de K .

Remarquons que $\langle g_i g_j^{-1} \rangle \cap \langle g_{i'} g_{j'}^{-1} \rangle = Z \subseteq \text{acl}(\emptyset)$ est indépendant de $(i, j) \neq (i', j')$. L'ensemble Z est autosuffisant comme intersection de deux ensembles autosuffisants. On considère X le plus petit sous-ensemble de $\text{acl}(\emptyset)$ contenant Z clos par acl_1 et acl_2 . Cet ensemble X reste autosuffisant car sa prédimension sur Z est nulle.

Fixons $n > 0$. Pour chaque $i < j < n$, l'élément $g_i g_j^{-1}$ est aussi générique et par connexité a même type que g_0 sur X . Il suit que

$$\dim_1((g_i^1 g_j^{1-1})_{i < j < n} / X) \leq \dim_1((g_k^1)_{k < n} / X) \leq n \dim_1(g_0^1 / X).$$

Notons

$$Y = \bigcup_{0 \leq i < j < n} \langle g_i g_j^{-1} \rangle.$$

Alors

$$\begin{aligned} \dim_1(Y/X) &= \dim_1((g_i^1 g_j^{1-1})_{i < j < n} / X) + \dim_1(Y / (g_i^1 g_j^{1-1})_{i < j < n}, X) \\ &\leq n \dim_1(g_0^1 / X) + \sum_{i < j} \dim_1(\langle g_i g_j^{-1} \rangle / g_i^1 g_j^{1-1}, X) \\ &\leq n \dim_1(g_0^1 / X) + \binom{n}{2} \dim_1(\langle g_0 \rangle / g_0^1, X). \end{aligned}$$

De même,

$$\dim_2(Y/X) \leq n \dim_2(g_0^2 / X) + \binom{n}{2} \dim_2(\langle g_0 \rangle / g_0^2, X).$$

Comme X est autosuffisant, on a $\delta(Y/X) \geq 0$. Comme Y est la réunion d'ensembles deux-à-deux disjoints au-dessus de X , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta(Y/X) &= \dim_1(Y/X) + \dim_2(Y/X) - |Y \setminus X| \\ &\leq n (\dim_1(g_0^1 / X) + \dim_2(g_0^2 / X)) \\ &\quad + \binom{n}{2} (\dim_1(\langle g_0 \rangle / g_0^1, X) + \dim_2(\langle g_0 \rangle / g_0^2, X) - |\langle g_0 \rangle \setminus X|). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (*) \quad 0 &\leq \dim_1(\langle g_0 \rangle / g_0^1, X) + \dim_2(\langle g_0 \rangle / g_0^2, X) - |\langle g_0 \rangle \setminus X| \\ &= \delta(\langle g_0 \rangle / g_0, X) + \dim_1(g_0 / g_0^1, X) + \dim_2(g_0 / g_0^2, X) - |g_0 \setminus X|. \end{aligned}$$

Notons que $\dim_1(g_0/g_0^1, X) \leq |g_0^2 \setminus g_0^1, X|$, avec égalité si et seulement si $g_0^2 \setminus g_0^1, X$ est un uple de points T_1 -indépendants sur g_0^1, X . De même pour $\dim_2(g_0/g_0^2, X)$. Comme

$$|g_0 \setminus X| = |g_0^1 \setminus g_0^2, X| + |g_0^2 \setminus g_0^1, X| + |(g_0^1 \cap g_0^2) \setminus X|,$$

on en déduit que

$$\dim_1(g_0/g_0^1, X) + \dim_2(g_0/g_0^2, X) - |g_0 \setminus X| \leq |(g_0^1 \cap g_0^2) \setminus X|.$$

De plus, $\delta(\langle g_0 \rangle/g_0, X) \leq 0$ et donc par (\star) , on a

$$\begin{aligned} (g_0^1 \cap g_0^2) &\subseteq X, \\ \delta(\langle g_0 \rangle/g_0, X) &= 0, \\ \dim_1(g_0/g_0^1, X) &= |g_0^2 \setminus X|, \\ \dim_2(g_0/g_0^2, X) &= |g_0^1 \setminus X|, \end{aligned}$$

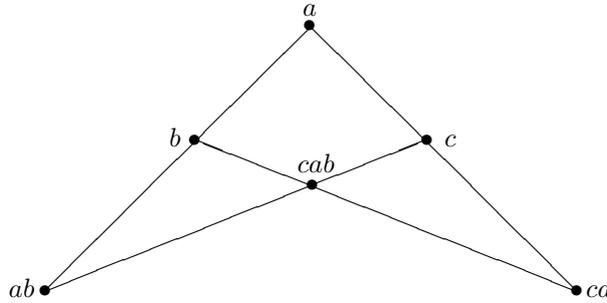
ce qui entraîne que g_0^1 et g_0^2 sont T_i -indépendants pour chaque i au-dessus de X . De plus, comme l'uple $g_0^2 \setminus X$ est un uple de points T_1 -indépendants sur g_0^1, X , il suit que g_0^1, X est autosuffisant dans g_0, X , qui est lui-même autosuffisant. Par la caractérisation de l'indépendance dans la théorie de la fusion T , on obtient que $g_0^1 \perp_X g_0^2$, et donc $g_0^1 \perp g_0^2$ comme $X \subseteq \text{acl}(\emptyset)$. Enfin, le type $\text{tp}(g_0^1/X)$ est l'unique type de rang maximal dans le type stationnaire $\text{tp}_1(g_0^1/X)$, car les éléments de $g_0^1 \setminus X$ sont T_2 -indépendants sur X .

Soit H_i la projection de K sur H_i . Comme la projection d'un générique est générique, g_0^i est générique dans H_i ; puisque $g_0^1 \perp g_0^2$ l'élément $g_0 = (g_0^1, g_0^2)$ est générique dans $H_1 \times H_2$. Ainsi l'indice de K dans $H_1 \times H_2$ est fini. Mais la connexité de K implique la connexité de H_i , et donc de $H_1 \times H_2$, ce qui donne $K = H_1 \times H_2$. Enfin, H_i est T_i -type-définissable d'après la proposition 1.10 pour $i = 1, 2$. \square

Grâce au lemme précédent, nous sommes maintenant en mesure de montrer l'assertion faite dans [10] : les groupes définissables dans la fusion sur l'égalité sont essentiellement des produits de groupes définissables dans chacune des théories de base.

Théorème 5.2. *Tout groupe connexe définissable dans une fusion fortement minimale de deux théories fortement minimales, avec élimination des imaginaires, au-dessus de l'égalité est isogène à un produit de groupes définissables dans chacune des théories.*

Démonstration. Considérons G un groupe infini connexe T -définissable. Par la suite on travaille toujours au-dessus d'une suite de Morley dénombrable D . Considérons le diagramme suivant.



On définit les ensembles suivants de T -dimensions finies :

$$A_1 = \text{acl}(a, b, ab), \quad A_2 = \text{acl}(a, c, ca), \quad A_3 = \text{acl}(ca, cab, b), \quad A_4 = \text{acl}(ab, c, cab),$$

$$A_\emptyset = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad A_s = \bigcap_{i \in s} A_i \text{ pour } \emptyset \neq s \subseteq \{1, 2, 3, 4\}.$$

De manière analogue à [10, lemme 15], on trouve des ensembles finis autosuffisants $\text{acl}(\emptyset) \subseteq B_i \subseteq A_i$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$ tels que, si on note

$$B_\emptyset = \bigcup_{i=1}^n B_i \quad \text{et} \quad B_s = \bigcap_{i \in s} B_i \text{ pour } \emptyset \neq s \subseteq \{1, 2, 3, 4\},$$

alors

$$\begin{aligned} \delta(\langle B_\emptyset \rangle) &= \delta(\langle A_\emptyset \rangle) = \text{RM}(A_\emptyset) = 3 \text{RM}(G), \\ \delta(\langle B_i \rangle) &= \delta(B_i) = \delta(A_i) = \text{RM}(A_i) = 2 \text{RM}(G), \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ \delta(\langle B_{ij} \rangle) &= \delta(B_{ij}) = \delta(A_{ij}) = \text{RM}(A_{ij}) = \text{RM}(G) \quad \text{pour } i \neq j, \\ A_s &= B_s = \text{acl}(\emptyset) \quad \text{pour } |s| \geq 3. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \text{RM}(G) &= 3 \text{RM}(G) - 4 \cdot 2 \text{RM}(G) + 6 \text{RM}(G) \\ &= \sum_{s \subseteq \{1, 2, 3, 4\}} (-1)^{|s|} \delta(\langle A_s \rangle / B_{1234}) \leq \sum_{s \subseteq \{1, 2, 3, 4\}} (-1)^{|s|} \delta(B_s / B_{1234}) \quad (\dagger) \\ &= \sum_{s \subseteq \{1, 2, 3, 4\}} (-1)^{|s|} \dim_1(B_s / B_{1234}) + \sum_{s \subseteq \{1, 2, 3, 4\}} (-1)^{|s|} \dim_2(B_s / B_{1234}). \end{aligned}$$

La première inégalité ci-dessus suit du fait que $\delta(\langle A_\emptyset \rangle / B_{1234}) \leq \delta(B_\emptyset / B_{1234})$. L'égalité vient de la modularité de la cardinalité.

Par la suite, on travaille au-dessus de $\text{acl}(\emptyset)$ qu'on nomme au langage. Pour chaque $k = 1, 2$, on a par sous-modularité

$$\begin{aligned} \dim_k(B_\emptyset) &= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2 B_3 B_4 / B_1) \\ &\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2 B_3 B_4 / B_{12} B_{13} B_{14}) \\ &= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2 B_3 B_4) - \dim_k(B_{12} B_{13} B_{14}) \\ &= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3 B_4 / B_2) - \dim_k(B_{12} B_{13} / B_{14}) \\ &\quad - \dim_k(B_{14}) \\ &\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3 B_4 / B_{23} B_{24}) - \dim_k(B_{12} B_{13} / B_{14}) \\ &\quad - \dim_k(B_{14}) \\ &= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3 B_4) - \dim_k(B_{23} B_{24}) \\ &\quad - \dim_k(B_{12} B_{13} / B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\ &= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4 / B_3) - \dim_k(B_{23} B_{24}) \\ &\quad - \dim_k(B_{12} B_{13} / B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\ &\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4 / B_{34}) - \dim_k(B_{23} B_{24}) \\ &\quad - \dim_k(B_{12} B_{13} / B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\ &= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4) - \dim_k(B_{34}) \\ &\quad - \dim_k(B_{23} B_{24}) - \dim_k(B_{12} B_{13} / B_{14}) - \dim_k(B_{14}). \end{aligned}$$

Comme $B_{23} \downarrow B_{24}$ implique $B_{23} \downarrow^k B_{24}$, nous avons

$$\begin{aligned} \dim_k(B_\emptyset) &\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4) - \dim_k(B_{34}) \\ &\quad - \dim_k(B_{14}) - \dim_k(B_{23}) - \dim_k(B_{24}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}). \end{aligned}$$

En développant les séries alternées dans (†), on obtient

$$\begin{aligned} RM(G) &\leq \sum_{k=1}^2 (\dim_k(B_{12}) + \dim_k(B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14})) \\ &= \Delta_1 + \Delta_2, \end{aligned}$$

où $\Delta_k = \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14})$.

????? Par le fait 1.8, on a

$$a, b \downarrow^k_{\gamma_k} ab$$

où $\gamma_k = \text{acl}_k(\text{acl}(a), \text{acl}(b)) \cap \text{acl}(ab)$, et en particulier,

$$B_{12}B_{13} \downarrow^k_{\gamma_k} B_{14}.$$

Par le fait 1.9, on peut supposer de plus que γ_k est le générique dans le sens de la théorie T_k d'un groupe \star -définissable H_k . Par superstabilité, comme H_k est une limite inductive de groupes T_k -définissables, il existe un sous-uple fini γ'_k générique d'un groupe T_k -définissable connexe H'_k tel que

$$B_{12}B_{13} \downarrow^k_{\gamma'_k} B_{14},$$

puisque $B_{12}B_{13}$ est fini. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) = \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/\gamma'_k) \\ &= \dim_k(\gamma'_k) + \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}\gamma'_k) \\ &= \dim_k(\gamma'_k) - \dim_k(\gamma'_k/B_{12}B_{13}) \leq \dim_k(\gamma'_k). \end{aligned}$$

Le lemme 1.5??? donne une endogénie T -définissable

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow H'_1 \times H'_2 \\ ab &\mapsto (\gamma'_1, \gamma'_2) \end{aligned}$$

En quotientant $H'_1 \times H'_2$ par un produit de groupes finis contenant le conoyau, on peut supposer que φ est un homomorphisme de groupes, par élimination des imaginaires dans T_1 et T_2 .

Le lemme 5.1 entraîne que l'image $\varphi(G)$ est un produit de groupes définissables dans chacune des théories. De plus, le point (γ'_1, γ'_2) est générique dans $\varphi(G)$ et ses coordonnées sont T -indépendantes. Enfin,

$$RM(G) \leq \dim_1(\gamma'_1) + \dim_2(\gamma'_2) = \dim(\gamma'_1, \gamma'_2)$$

entraîne que ab et (γ'_1, γ'_2) sont T -interalgébriques et donc G est isogène avec un produit de groupes définissables dans chacune des théories. \square

Question. Existe-t-il une caractérisation analogue pour les groupes définissables dans la fusion fortement minimale au-dessus d'un espace vectoriel sur un corps fini ?

RÉFÉRENCES

- [1] J. T. Baldwin, K Holland, *Constructing ω -Stable Structures : Rank 2 Fields*, J. Symb. Logic, **65**, 371-391 (2000).
- [2] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).
- [3] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Red fields*, J. Symb. Logic, **72**, 207-225 (2007).
- [4] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Fusion over a vector space*, J. Math. Logic **6**, 141-162 (2006).
- [5] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Géométries relatives*, soumis.
- [6] E. Bouscaren, *The Group Configuration—after E. Hrushovski*. Dans : *The Model Theory of Groups*, 199-209, Notre Dame Math. Lectures, 11, University of Notre Dame Press (1989).
- [7] A. Hasson, *Some questions concerning Hrushovski's amalgamation constructions*, J. Inst. Math. Jussieu, **7**, 793-823 (2008).
- [8] E. Hrushovski, *Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, Berkely (1986).
- [9] E. Hrushovski, *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields*, Isr. J. Math., **79**, 129-151 (1992).
- [10] E. Hrushovski, *A new strongly minimal set*, Ann. Pure Appl. Logic, **62**, 147-166 (1993).
- [11] Y. Mustafin, Thèse de doctorat, Lyon (2003).
- [12] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*, Oxford Logic Guides, 33. *Oxford University Press* (1996).
- [13] B. Poizat, *Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah* (1987). Traduction anglaise : Stable groups. Mathematical Surveys and Monographs, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).
- [14] B. Poizat, *Le carré de l'égalité*, J. Symb. Logic, **64**, 1339-1355 (1999).
- [15] B. Poizat, *L'égalité au cube*, J. Symb. Logic, **66**, 1647-1676 (2001).
- [16] B. Poizat, *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner*, J. Symb. Logic, **66**, n° 4, 1637-1646 (2001).
- [17] F. O. Wagner, *Fields of finite Morley rank*, J. Symb. Logic, **66**, n° 2, 703-706 (2001).
- [18] F. O. Wagner, *Bad fields in positive characteristic*, Bull. London Math. Soc., **35**, 499-502 (2003).
- [19] M. Ziegler, *A Note on generic Types*, unpublished, (2006), (<http://arxiv.org/math.LO/0608433>).

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,
 43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: blossier@math.univ-lyon1.fr
E-mail address: pizarro@math.univ-lyon1.fr
E-mail address: wagner@math.univ-lyon1.fr