



HAL
open science

A la recherche du tore perdu (Looking for the lost torus)

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro, Frank Olaf Wagner

► **To cite this version:**

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro, Frank Olaf Wagner. A la recherche du tore perdu (Looking for the lost torus). 2012. hal-00758982v1

HAL Id: hal-00758982

<https://hal.science/hal-00758982v1>

Preprint submitted on 30 Nov 2012 (v1), last revised 19 Jan 2015 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

À LA RECHERCHE DU TORE PERDU

THOMAS BLOSSIER, AMADOR MARTIN-PIZARRO ET FRANK O. WAGNER

RÉSUMÉ. Un groupe interprétable dans le mauvais corps vert est isogène à un quotient d'un sous-groupe d'un groupe algébrique par une puissance du groupe vert. Un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique dans un corps vert ou rouge est une extension d'une puissance du groupe coloré par un groupe algébrique. En particulier, tout groupe simple définissable dans un corps coloré est algébrique.

INTRODUCTION

La conjecture d'algébricité énoncée par Cherlin et Zilber affirme que tout groupe simple infini \aleph_1 -catégorique s'interprète comme un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Cette conjecture donna naissance à une interaction entre la théorie des modèles et la théorie des groupes.

Un *mauvais groupe* serait un contre-exemple à la conjecture de dimension minimale. La dimension en question est le *rang de Morley*, c'est-à-dire le rang de Cantor-Bendixson de l'espace de types de la théorie sur un modèle suffisamment saturé. Un des premiers obstacles pour la caractérisation algébrique des sous-groupes de Borel (sous-groupes résolubles connexes maximaux) d'un groupe simple \aleph_1 -catégorique fut l'existence éventuelle d'un *mauvais corps* : un corps de rang de Morley fini muni d'un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif propre et infini. Rappelons qu'un corps de rang de Morley fini est algébriquement clos et que dans le langage pur des anneaux le rang de Morley équivaut à la dimension de Zariski.

L'existence d'un mauvais corps en caractéristique positive est improbable [17]. En caractéristique nulle, Poizat [14] utilisa la construction par amalgamation développée par Hrushovski [8, 9] pour introduire un corps de rang $\omega \cdot 2$ avec un prédicat pour un sous-groupe multiplicatif de rang ω , qui fut collapsé dans [2] pour obtenir un mauvais corps. Par ailleurs, Poizat [14] construisit également un corps avec un prédicat pour un sous-ensemble algébriquement indépendant, collapsé dans [1], et [13] un corps de caractéristique positive avec un prédicat pour un sous-groupe additif infini et d'indice infini, collapsé dans [3]. Poizat nomma les prédicats *vert*, *noir* et *rouge*, respectivement, les corps ainsi obtenus (collapsés ou non) s'appellent donc les corps *colorés*.

L'étude des groupes définissables dans les corps colorés fut entamée dans [5] où les auteurs montrèrent que tout groupe simple définissable est linéaire. Grâce à [15], ils conclurent qu'un corps rouge n'admet pas de mauvais groupe définissable,

Date: 30 novembre 2012.

1991 Mathematics Subject Classification. 03C45.

Key words and phrases. Model Theory, Amalgamation methods, Flatness, Interpretation, Groups.

Recherche conduite dans le cadre du projet MODIG ANR-09-BLAN-0047.

et un mauvais groupe définissable dans un corps vert serait un groupe linéaire constitué uniquement d'éléments semi-simples. Notons que les corps de rang de Morley fini éliminent les imaginaires ; pour les corps collapsés on peut donc remplacer *définissable* par *interprétable*. Néanmoins les techniques utilisées n'ont pas permis l'étude des groupes abéliens.

Dans cet article nous donnons une caractérisation des groupes définissables dans le corps vert collapsé en montrant le résultat suivant.

Théorème A. *Un groupe interprétable dans un corps vert collapsé est isogène à un quotient d'un sous-groupe d'un groupe algébrique par un sous-groupe central qui est lui isogène à une puissance cartésienne du sous-groupe multiplicatif vert.*

Notre méthode pour démontrer ce théorème ne s'applique pas au cas rouge collapsé : par exemple, à plusieurs reprises on utilise que les sous-groupes multiplicatifs connexes sont des tores et donc définissable sur \emptyset . Dans le cas rouge, nous devrions traiter les sous-groupes additifs donnés par des p -polynômes.

Le Théorème A nous amène naturellement à étudier les sous-groupes définissables d'un groupe algébrique. Nous les caractérisons non seulement pour le mauvais corps vert de [2], mais en général pour tous les corps colorés, quels que soient leurs couleur ou rang.

Théorème B. *Dans un corps coloré, tout sous-groupe définissable d'un groupe algébrique est l'extension d'une puissance du sous-groupe coloré par un groupe algébrique. En particulier, il n'interprète pas de mauvais groupe.*

Les corps colorés peuvent être considérés comme une fusions de deux structures fortement minimales par amalgame de Hrushovski [8]. Hrushovski construit ces fusions dans le cas où le réduit commun est l'égalité ; dans le cas où le réduit commun est un espace vectoriel sur un corps fini, cette construction est due à Baudisch, Martín Pizarro et Ziegler [4].

Hrushovski affirma que tout groupe définissable dans la fusion de deux théories fortement minimales sur l'égalité est isogène à un produit direct de deux groupes, chacun définissable dans l'une des théories initiales. Il ne donna pas de preuve, et on n'en trouve qu'une esquisse dans [7, Claim 3.1]. En nous inspirant de la preuve qu'aucun groupe infini n'est définissable dans une théorie plate, nous donnons une démonstration complète de ce résultat, et nous caractérisons, modulo un sous-groupe central, les groupes définissables dans une fusion sur un espace vectoriel.

Théorème C. (1) *Dans une fusion sur l'égalité, tout groupe définissable est isogène à un produit direct de groupes définissables dans les théories de base.*

(2) *Dans une fusion de deux théories T_1 et T_2 fortement minimales sur un \mathbb{F}_p -espace vectoriel commun, un groupe définissable est, modulo un sous-groupe central, une extension d'un \mathbb{F}_p -espace vectoriel par un produit d'un groupe T_1 -définissable et un groupe T_2 -définissable.*

1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette partie nous rappelons des résultats portant sur les groupes stables qui seront utilisés ensuite.

Définition 1.1. Soit un groupe G stable, un ensemble A de paramètres et un élément g de G . Le stabilisateur de g dans G sur A est le sous-groupe défini par

$$\text{Stab}(g/A) = \{h \in G : \exists x \models \text{stp}(g/A) (x \downarrow_A h \wedge hx \models \text{stp}(g/A) \wedge hx \downarrow_A x)\}$$

Le lemme suivant est dû à Ziegler dans le cas abélien [18, Theorem 1].

Lemme 1.2. Soit H un groupe stable et $h, h' \in H$ tels que h, h' et hh' sont deux-à-deux indépendants sur un ensemble A . Chacun des éléments a un stabilisateur (à gauche) connexe et l'élément est générique dans un translaté (à droite), qui est définissable sur $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$. De plus, les trois stabilisateurs sont conjugués.

Démonstration. Nous travaillons sur $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ pour que les types soient stationnaires. En remplaçant le rang de Morley par chaque rang local stratifié D dans la preuve de [12, Lemme 2.3], il suffit de vérifier l'inégalité

$$D(h') \leq D(\text{Stab}(h')),$$

pour la première partie.

Soit $h'' \models \text{tp}(h/hh')$ avec $h'' \downarrow h', hh'$. Les indépendances $h'' \downarrow h, h'$ et $h' \downarrow h$ donnent $h' \downarrow h, h''$ et alors

$$h' \downarrow h''^{-1}h.$$

De même, on vérifie que

$$h' \downarrow h''^{-1}hh'.$$

Comme $h, hh' \equiv h'', hh'$, on a $h, h' \equiv h'', h''^{-1}hh'$; en particulier,

$$h''^{-1}hh' \equiv h'.$$

On a donc $h''^{-1}h \in \text{Stab}(h')$.

Notons que

$$D(h) = D(h/h') = D(hh'/h') = D(hh') = D(hh'/h) = D(h'/h) = D(h').$$

Ainsi,

$$D(h''^{-1}h) \geq D(h''^{-1}h/h'') = D(h/h'') = D(h) = D(h'),$$

ce qui donne l'inégalité $D(\text{Stab}(h')) \geq D(h')$.

On voit facilement que

$$\text{Stab}(hh') = \text{Stab}(hh'/h') = \text{Stab}(h/h') = \text{Stab}(h)$$

et

$$\text{Stab}(hh') = \text{Stab}(hh'/h) = h \text{Stab}(h'/h) h^{-1} = h \text{Stab}(h') h^{-1}.$$

□

Définition 1.3. Soient G et H deux groupes. Un sous-groupe S de $G \times H$ est une *endogénie* de G dans H si

- la projection sur la première coordonnée est un sous-groupe G_S d'indice fini, et
- le *co-noyau* $\text{coker}(S) = \{h \in H : (1, h) \in S\}$ est fini.

Une endogénie induit donc un homomorphisme de G_S dans $N_H(\text{coker}(S))/\text{coker}(S)$.

Une *isogénie* de G vers H est une endogénie de noyau fini et dont l'image (la projection sur la deuxième coordonnée) est d'indice fini dans H .

Fait 1.4. Soient G et H deux groupes stables, un ensemble A de paramètres et un élément $(g, h) \in G \times H$. Si h est algébrique sur A , g et si g est générique sur A dans le translaté gN d'un sous-groupe N de G alors $\text{Stab}(g, h/A)$ définit une endogénie de N dans H . Si de plus g et h sont A -interalgébrique et h est générique sur A dans le translaté gH_1 d'un sous-groupe H_1 de H alors on obtient une isogénie de N vers H_1 .

Soit T une théorie stable avec un réduit T_0 qui a élimination géométrique des imaginaires. On utilisera l'indice 0 pour dénoter l'indépendance et la clôture algébrique au sens du réduit T_0 . Pour la classification des groupes définissables dans les parties suivantes, le résultat [5, Lemme 3.4] sera utilisé à plusieurs reprises.

Fait 1.5. Soient G un groupe connexe type-définissable sur \emptyset dans T et une suite de Morley D du générique de G que l'on ajoute au langage. Soient a, b deux génériques indépendants de G , et

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(b), \text{acl}(ab)) \cap \text{acl}(a), \\ b_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(a), \text{acl}(ab)) \cap \text{acl}(b), \\ ab_1 &= \text{acl}_0(\text{acl}(a), \text{acl}(b)) \cap \text{acl}(ab), \end{aligned}$$

où ab_1 ne signifie pas le produit de a par b_1 , mais l'uple obtenu à partir du point ab par rapport aux points a et b .

Alors a_1, b_1 et ab_1 sont indépendants deux-à-deux, chacun est 0-algébrique sur les deux autres, et en plus

$$\text{acl}(b), \text{acl}(ab) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(a).$$

Remarque 1.6. En particulier, il existe un groupe connexe 0-interprétable dont son générique est 0-interalgébrique avec a_1 .

2. DIE LIEBE FARBE

Dans cette partie nous rappelons quelques propriétés du mauvais corps obtenu dans [2] qui seront utilisées pour la démonstration du théorème A. Il s'agit d'un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle muni d'un sous-groupe propre multiplicatif divisible et sans torsion, noté \check{U} et coloré en vert, tel que $\text{RM}(K) = 2$ et $\text{RM}(\check{U}) = 1$ (où $\text{RM}(X)$ désigne le rang de Morley de X). On peut alors voir \check{U} comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel qui est fortement minimal avec toute sa structure induite. Nous travaillons dans un langage relationnel, à l'exception de la loi du groupe multiplicatif et, pour chaque $q \in \mathbb{Q}$, de la multiplication linéaire par q sur les éléments verts. À l'élément zéro près, nos structures sont donc des groupes multiplicatifs (qui se plongent dans un corps de caractéristique nulle) dont le sous-groupe vert est divisible sans torsion. Pour deux structures $A \subseteq B$ avec B finiment engendrée sur A on définit une prédimension relative

$$\delta(B/A) = 2 \text{ degtr}(B/A) - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(\check{U}(B)/\check{U}(A)) ;$$

lorsque A est vide, on l'omet. On dit que A est *autosuffisante* dans B , noté $A \leq B$, si $\delta(B_0/A) \geq 0$ pour tout $A \subseteq B_0 \subseteq B$. La sous-modularité de la prédimension donne que l'intersection de deux sous-ensembles autosuffisants l'est aussi.

L'extension $A \leq B$ est minimale s'il n'y a pas de structure intermédiaire B_0 autosuffisante dans B .

Le corps K est caractérisé par les conditions suivantes :

- $\delta(A) \geq 0$ pour tout $A \subset K$ finiment engendrée.
- Si $A \leq K$ et $A \leq B$ est une extension minimale, alors il existe un plongement de B dans K sur A avec image autosuffisant.
- Si $A \leq K$ et $A \leq B$ avec $\delta(B/A) = 0$, alors il n'y a qu'un nombre fini de plongements de B dans K sur A .

Étant donnée $A \subseteq K$, la plus petite sous-structure autosuffisante de K contenant A est sa *clôture autosuffisante* $\langle A \rangle$, qui est algébrique sur A dans la théorie T du mauvais corps K . Si A est finiment engendrée alors $\langle A \rangle$ l'est aussi. De plus,

$$RM(a/C) = U(a/C) = \delta(\langle aC \rangle / \langle C \rangle),$$

où U dénote le rang de Lascar (qui est égal au rang de Morley dans tout groupe de rang de Morley fini).

L'indépendance au sens de T est caractérisée de la manière suivante : soient a, b deux uples et C un ensemble algébriquement clos, alors

$$a \downarrow_C b \iff \langle aC \rangle \downarrow_C^0 \langle bC \rangle, \langle abC \rangle = \langle aC \rangle \cdot \langle bC \rangle \text{ et } \ddot{U}(\langle abC \rangle) = \ddot{U}(\langle aC \rangle) \cdot \ddot{U}(\langle bC \rangle)$$

où l'indice 0 fait référence au réduit au pur langage des anneaux, et donc à la théorie T_0 des corps algébriquement clos de caractéristique 0. En particulier, l'indépendance au sens de T sur un ensemble algébriquement clos entraîne l'indépendance au sens de T_0 . De plus cette caractérisation de l'indépendance permet de montrer [5] que T est relativement CM-triviale au-dessus de T_0 par rapport à l'opérateur $\langle \cdot \rangle$.

On utilisera ponctuellement la remarque suivante

Remarque 2.1. Soient $X \subset Y$ deux ensembles autosuffisants et $Z \subset \text{acl}(X)$ autosuffisant tel que $Y \cap Z = X$. Alors, $Y \downarrow_X^0 Z$.

Démonstration. Par le caractère local de la déviation, on peut supposer que Z est finiment engendré au-dessus de X . Or, comme Z est T -algébrique sur X , on a $\delta(Z/X) = 0$. La sous-modularité de la prédimension nous donne que

$$0 \leq \delta(Z/Y) \leq \delta(Z/Z \cap Y) = \delta(Z/X) = 0.$$

En particulier, on a $Z \downarrow_X^0 Y$. □

On appelle *base verte* d'une sous-structure autosuffisante A de K toute base linéaire de $\ddot{U}(A)$. Terminons par quelques remarques utiles sur les corps K :

Remarque 2.2. (1) Si une sous-structure X est autosuffisante, alors $\text{acl}_0(X)$ l'est aussi et ne contient pas de nouveaux points verts.

(2) Soit A une sous-structure autosuffisante et b un élément T -algébrique sur A . Alors il existe B finiment engendré sur A contenant Ab tel que $\delta(B/A) = 0$. Si \bar{x} est une base verte de B sur A alors $\text{degtr}(B/A) = \text{degtr}(\bar{x}/A) = |\bar{x}|/2$. En particulier, B est 0-algébrique sur ses points verts et A . Donc, si A est vert, on a $B \subseteq \text{acl}_0(\ddot{U}(B))$.

(3) Tout point x de K est la somme de deux points verts. De plus, il n'y a qu'un nombre fini de couples verts (y, z) tels que $x = y + z$. Soit B la sous-structure engendrée par l'ensemble des couples de points verts dont la somme est un point d'une sous-structure A fixée. Si A est autosuffisante alors B l'est également et $B \subseteq \text{acl}(A)$.

3. CHERCHEZ LE TORE

Dans cette partie nous allons démontrer le Théorème A énoncé dans l'introduction. Pour ce faire, nous allons décomposer le groupe en une partie 0-algébrique et une partie 0-transcendante. En utilisant cette décomposition, on construira un groupe algébrique. Finalement, on exhibera un homomorphisme non trivial de notre groupe vers une section du groupe algébrique construit.

Rappelons qu'un corps de rang de Morley fini élimine les imaginaires [16] et donc tout groupe interprétable est définissablement isomorphe à un groupe définissable. En particulier le quotient K^*/\ddot{U} est en bijection avec un groupe définissable. Hélas, pour deux uples réels a et b en bijection avec deux génériques indépendants de K^*/\ddot{U} , l'élément a_1 décrit dans le Fait 1.5 est vide. Il s'avère donc nécessaire de faire une analyse plus précise des groupes définissables et cet exemple en est notre fil conducteur.

Fixons alors un groupe infini connexe G interprétable dans le corps (K, \ddot{U}) . Grâce à l'élimination des imaginaires, on peut supposer que l'univers de G est réel. Nous ajoutons aux paramètres de la théorie ceux nécessaires pour définir G ainsi que la clôture algébrique d'une suite de Morley D du générique de G . Nous supposons en particulier que G est définissable sur \emptyset .

Prenons a, b et c trois points génériques de G indépendants, et posons

$$a_1 = \text{acl}(a) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(b), \text{acl}(ab)).$$

Alors a_1 est autosuffisant comme intersection de deux ensembles autosuffisants. Par le Fait 1.5 on a

$$\text{acl}(a) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(b), \text{acl}(ab).$$

Considérons un uple réel a_E représentant l'ensemble $\{a, a^{-1}\}$. Alors a, a^{-1} et a_E sont tous T -interalgébriques. Puisque (b, ab) et $(c^{-1}, (ca)^{-1})$ ont le même type sur a_E , on a également $a_1 = \text{acl}(a) \cap \text{acl}_0(\text{acl}(c), \text{acl}(ca))$ et

$$\text{acl}_0(\text{acl}(c), \text{acl}(ca)) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(a).$$

La clôture autosuffisante $\langle a, a^{-1} \rangle$ est une sous-structure finiment engendrée et T -algébrique sur a_E . Choisissons alors un ensemble fini Θ de générateurs de $\langle a, a^{-1} \rangle$, que l'on peut supposer T -définissable sur a_E . Par la Remarque 2.2(3), l'uple (fini) a^2 constitué de tous les couples de points verts dont la somme est un point de Θ est aussi T -définissable sur a_E . De plus, l'uple a est 0-définissable sur a^2 et a^2 engendre une sous-structure verte autosuffisante incluse dans $\text{acl}(a)$.

En utilisant la définissabilité de a^2 sur a_E et le fait que $(b, ab) \equiv_{a_E} (c^{-1}, (ca)^{-1})$, on décompose de la même façon les points b, ab, c, ca et cab . Posons

$$\begin{aligned} A^1 &= \text{acl}_0(\langle a_1, a^2, b_1, b^2, ab_1, ab^2 \rangle) & A^2 &= \text{acl}_0(\langle a_1, a^2, c_1, c^2, ca_1, ca^2 \rangle) \\ A^3 &= \text{acl}_0(\langle b_1, b^2, ca_1, ca^2, cab_1, cab^2 \rangle) & A^4 &= \text{acl}_0(\langle ab_1, ab^2, c_1, c^2, cab_1, cab^2 \rangle), \end{aligned}$$

où la multiplication est prioritaire sur les indices : par exemple cab_1 signifie $(cab)_1$ et ab^2 signifie $(ab)^2$. Par la Remarque 2.2(1), les sous-structures A^1, A^2, A^3 et A^4 sont toutes autosuffisantes.

Lemme 3.1. *L'uple $a' = \text{acl}(a) \cap A^1$ est autosuffisant et contient a_1 et a^2 . De plus a est 0-algébrique sur a' qui lui est 0-algébrique sur sa base verte. Enfin le degré de transcendance $\text{degtr}(a'/a_1)$ est fini.*

Démonstration. Puisque $a^2 \subset a' \subset \text{acl}(a^2)$, on a $\delta(a'/a^2) = 0$. Par la Remarque 2.2(2), l'uple a' est 0-algébrique sur sa base verte. Enfin, puisque

$$\text{acl}(a) \underset{a_1}{\downarrow}^0 \text{acl}(b), \text{acl}(ab),$$

on a l'inégalité

$$\text{degtr}(a'/a_1) = \text{degtr}(a'/a_1, b_1, b^2, ab_1, ab^2) \leq \text{degtr}(A^1/a_1, b_1, b^2, ab_1, ab^2).$$

Le degré de transcendance $\text{degtr}(A^1/a_1, b_1, b^2, ab_1, ab^2)$ est fini car a^2, b^2 et ab^2 sont finis et $\text{acl}_0(a_1, b_1, ab_1) = \text{acl}_0(a_1, b_1)$ est autosuffisant. \square

Notons de plus que $a' = \text{acl}(a) \cap A^2$.

Lemme 3.2.

$$A^1 \underset{a'}{\downarrow}^0 \text{acl}(a), \quad A^1 \underset{a'}{\downarrow}^0 A^2 \quad \text{et} \quad A^1 \underset{a', b'}{\downarrow}^0 A^2, A^3$$

Démonstration. La première indépendance suit de la Remarque 2.1.

Comme $A^1 \underset{\text{acl}(a)}{\downarrow} A^2$, on a $A^1 \underset{\text{acl}(a)}{\downarrow}^0 A^2$ et donc $A^1 \underset{a'}{\downarrow}^0 A^2$ par transitivité.

Pour la dernière 0-indépendance, vérifions d'abord que

$$A^1 \underset{a' \cdot b'}{\downarrow}^0 \text{acl}(a) \cdot \text{acl}(b),$$

où $\text{acl}(a) \cdot \text{acl}(b)$ dénote la structure engendrée par $\text{acl}(a)$ et $\text{acl}(b)$; de même pour $a' \cdot b'$. Elles sont toutes les deux autosuffisantes car a et b sont indépendants. Suite à la Remarque 2.1, il suffit de montrer que $A^1 \cap (\text{acl}(a) \cdot \text{acl}(b)) = \text{acl}_0(a' \cdot b')$. Comme $\text{acl}(a) \cdot \text{acl}(b) \subseteq \text{acl}(a' \cdot b')$, l'ensemble $A^1 \cap (\text{acl}(a) \cdot \text{acl}(b))$ est 0-algébrique sur ses points verts et $a' \cdot b'$ par la Remarque 2.2 (2). Puisque son degré de transcendance sur $a' \cdot b'$ est fini, sa base verte e l'est aussi. Par hypothèse $e = e_a \cdot e_b$ avec $e_a \in \text{acl}(a)$ et $e_b \in \text{acl}(b)$. Notons que

$$\begin{array}{ll} e \underset{a' \cdot b'}{\downarrow}^0 e_a & \text{car } A^1 \underset{a'}{\downarrow}^0 \text{acl}(a), \\ e \underset{a' \cdot b'}{\downarrow}^0 e_b & \text{car } A^2 \underset{a'}{\downarrow}^0 \text{acl}(a), \\ e_a \underset{a' \cdot b'}{\downarrow}^0 e_b & \text{car } \text{acl}(a) \underset{a'}{\downarrow}^0 \text{acl}(b) \quad \text{par indépendance au sens de } T. \end{array}$$

Donc e est le générique d'un translaté d'un sous-groupe connexe multiplicatif d'après le Lemme 1.2. Un tel sous-groupe de $(K^*)^n$ est un tore, défini par des relations \mathbb{Q} -linéaires. La dimension linéaire d'un point générique coïncide donc avec le degré de transcendance [10].

Notons que $\delta(e/\text{acl}_0(a' \cdot b')) = \delta(A^1 \cap (\text{acl}(a) \cdot \text{acl}(b))/\text{acl}_0(a' \cdot b')) = 0$. Ainsi

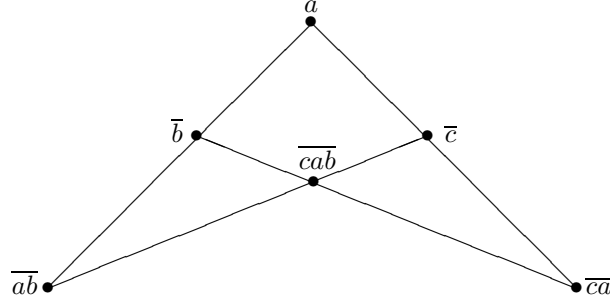
$$0 = \delta(e/\text{acl}_0(a' \cdot b')) = 2 \text{degtr}(e/a', b') - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(e/\text{acl}_0(a' \cdot b')) = \text{degtr}(e/a', b'),$$

et donc $e \in \text{acl}_0(a' \cdot b')$.

Pour terminer, observons que si on a une relation 0-algébrique entre A^1 et A^2, A^3 , cette relation se produit au-dessus d'une partie finie D' de la suite de Morley D fixée au départ. Cela donne une relation 0-algébrique entre les A'^1 et A'^2, A'^3 correspondants. Mais alors on peut envoyer c sur un élément de $D \setminus D'$ pour obtenir une copie de $A'^2 A'^3$ au-dessus de A'^1 dans $\text{acl}(a), \text{acl}(b)$. Donc cette relation 0-algébrique se produit déjà entre A^1 et $\text{acl}(a) \cdot \text{acl}(b)$. \square

Par le Lemme 3.1, choisissons un uple fini a_2 de points verts de a' maximal 0-transcendant sur a_1 . L'ensemble $\bar{a} = \langle a_1 a_2 \rangle \leq a'$ est T -algébrique sur a . Notons que a' ainsi que \bar{a} et a sont 0-algébriques sur $a_1 a_2$.

Avec les mêmes notations pour chacun des points, on obtient la T -configuration de groupe suivante :



Notons que nous avons remplacé chaque point du groupe G par une base verte au-dessus des points provenant du Fait 1.5. Nous allons modifier (une partie de) cette configuration de groupe afin de construire un groupe 0-interprétable.

On considère les clôtures autosuffisantes des droites du diagramme précédent.

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{b}, \overline{ab} \rangle) & A_2 &= \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{c}, \overline{ca} \rangle) \\ A_3 &= \text{acl}_0(\langle \bar{b}, \bar{c}, \overline{cab} \rangle) & A_4 &= \text{acl}_0(\langle \overline{ab}, \bar{c}, \overline{cab} \rangle). \end{aligned}$$

Notons que l'ensemble $A_i A_j$ est autosuffisant, car A_i et A_j sont T -indépendants au-dessus du point à l'intersection de ces deux droites. Le Lemme suivant montre la même propriété pour chaque triplet de droites.

Lemme 3.3. *L'ensemble $A_1 A_2 A_3$ est autosuffisant. De plus,*

$$A_1 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_2 \quad \text{et} \quad A_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}}^0 A_2, A_3.$$

Démonstration. Du fait que \bar{a} et a' sont 0-interalgébriques, le Lemme 3.2 implique les indépendances.

Montrons que $A_1 A_2 A_3$ est autosuffisant : la sous-modularité de la prédimension entraîne que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \delta(A_2/A_3) \leq \delta(A_2/A_2 \cap A_3) = \delta(A_2/\overline{ca}) \\ &= \delta(\langle \bar{a}, \bar{c}, \overline{ca} \rangle / \overline{ca}) = \delta(\bar{a} \cdot \overline{ca} / \overline{ca}) = \delta(\bar{a}) = \text{RM}(G), \end{aligned}$$

puisque A_3 est autosuffisant et $\delta(\langle \bar{a}, \bar{c}, \overline{ca} \rangle / \bar{a} \cdot \overline{ca}) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \delta(A_2 A_3) &\leq \delta(A_2/A_3) + \delta(A_3) \leq \text{RM}(G) + \delta(\langle \overline{ab}, \overline{cab}, \bar{c} \rangle) \\ &= \text{RM}(G) + \delta(\overline{ab} \cdot \bar{c}) = 3 \text{RM}(G). \end{aligned}$$

De plus,

$$\delta(A_1/A_2 A_3) \leq \delta(A_1/A_1 \cap A_2 A_3) = \delta(A_1/\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0,$$

d'où $\delta(A_1 A_2 A_3) \leq 3 \text{RM}(G)$. Notons que l'ensemble $A_1 A_2 A_3$ contient déjà les points génériques indépendants \bar{a} , \bar{b} et \bar{c} qui forment un uple autosuffisant de prédimension $3 \text{RM}(G)$. Donc $A_1 A_2 A_3$ est autosuffisant. \square

Pour la suite, nous choisissons une base verte adéquate de \bar{a} sur $a_1 a_2$ pour garantir que les homomorphismes de groupes seront génériques.

Lemme 3.4. *Il existe une base verte t_a de \bar{a} sur $a_1 a_2$ qui est 0-transcendante sur a_1 .*

Démonstration. Soit t_a une base verte quelconque de \bar{a} sur $a_1 a_2$. Comme a_1 est autosuffisant, toute sous-structure de \bar{a} engendrée par n éléments de a_2, t_a sur a_1 a degré de transcendance au moins $n/2$ sur a_1 . On peut alors transformer linéairement les éléments de t_a avec les points de a_2 pour que t_a soit également 0-transcendant sur a_1 . \square

Notons que t_a est aussi 0-algébrique sur $a_1 a_2$. Nous obtenons des bases vertes comme ci-dessus pour chaque point du diagramme. Les indépendances

$$\text{acl}(b) \downarrow_a^0 \text{acl}(ab) \quad \text{et} \quad \text{acl}(a) \downarrow_{a_1}^0 \text{acl}(b), \text{acl}(ab)$$

impliquent que $a_2, b_2, ab_2, t_a, t_b, t_{ab}$ est une base verte de $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \overline{ab}$ sur $a_1 \cdot b_1 \cdot ab_1$. On la complète avec une base verte t_1 (au-dessus de $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \overline{ab}$) de la droite A_1 . On fait de même pour chacune des droites A_i . Nous allons transformer ces bases afin d'obtenir des uples satisfaisant les conditions du Lemme 1.2.

Lemme 3.5. *Les uples*

$$t'_a = \frac{t_c}{t_{ca}}, \quad t'_b = \frac{t_{ca}}{t_{cab}}, \quad \text{et} \quad t'_{ab} = \frac{t_c}{t_{cab}}$$

satisfont

- (1) $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$;
- (2) t'_a est 0-transcendant sur \bar{a}, \overline{ca} et de même sur \bar{a}, \bar{c} .

Démonstration. L'égalité est évidente. Comme $t_c \downarrow_{c_1}^0 \bar{a}, \overline{ca}$ et t_c est 0-transcendant sur c_1 , il l'est aussi sur \bar{a}, \overline{ca} . Puisque $t_{ca} \in \text{acl}_0(\overline{ca})$ on voit que t'_a est 0-transcendant sur \bar{a}, \overline{ca} . \square

Proposition 3.6. *On peut transformer linéairement les uplets t_i de façon que*

- (1) $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$,
- (2) t_i est 0-algébrique sur les points de la droite A_i et la droite A_i est 0-algébrique sur ses trois points,
- (3) $|t_2| + |t_c| = |c_2|$ et $U(\bar{c}/c_1) = \delta(\bar{c}/c_1) = |t_2|$,
- (4) t_2 est 0-transcendant sur \bar{a}, \bar{c}, t'_a et sur $\bar{a}, \overline{ca}, t'_a$ (et de même pour t_3 et t_4),
- (5) t_2 est un uple vert T -générique sur \bar{a} .

En particulier, les uples \bar{a}, \bar{c}, t'_a et t_2 sont 0-indépendants. De même pour $\bar{a}, \overline{ca}, t'_a$ et t_2 .

Démonstration. D'après le Lemme 3.3, l'ensemble $A_1 A_2 A_3$ est autosuffisant. Comme il contient \overline{ab}, \bar{c} et \overline{cab} , il doit contenir $\langle \overline{ab}, \bar{c}, \overline{cab} \rangle$. En particulier, la base verte de A_4 , qui l'est aussi de $\langle \overline{ab}, \bar{c}, \overline{cab} \rangle$, est combinaison linéaire des points verts de $A_1 A_2 A_3$. Par les indépendances du Lemme 3.3, il suit que pour tous $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ distincts

$$t_i \downarrow_{\bar{a}, \overline{ab}, \overline{cab}, \bar{c}, \overline{ca}}^0 t_j, t_k.$$

À transformation linéaire près, on peut supposer que

$$t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$$

dans le groupe $(K^*)^{|t_1|}$, ce qui montre (1).

Par le Lemme 1.2 appliqué à t_1 , $t_2 \cdot t_3$ et t_4 au-dessus de $\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}$, on obtient que le 0-type de t_1 sur $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$ est générique dans un translaté définissable V sur $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}, \overline{cab}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$ d'un tore de $(K^*)^{|t_1|}$. Puisque

$$t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}}^0 \overline{cab}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a},$$

le translaté V est définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab})$. Or, pour tout translaté d'un tore, sa dimension de Zariski correspond à la dimension linéaire multiplicative du point générique. D'où

$$\text{degtr}(t_1/\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}) = \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(t_1/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab})) = \delta(t_1/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab})).$$

Comme $t_1 \in A_1 = \text{acl}_0(\langle \bar{a}, \bar{b}, \overline{ab} \rangle)$, sa prédimension $\delta(t_1/\text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}))$ est négative ou nulle et donc $t_1 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab})$. Par ailleurs, la droite A_1 est 0-algébrique sur ses points verts au-dessus de a_1, b_1 par la Remarque 2.2(2) et donc A_1 est 0-algébrique sur les trois points de la droite. D'où il suit (2).

Pour (3), posons $n = \text{degtr}(A_2/\bar{a}, \bar{c}\bar{a})$. Du fait que $\delta(A_2/\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{a}) = 0$ et que $\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{a}$ est autosuffisant, la base verte c_2, t_2, t_c de A_2 sur $\bar{a} \cdot \bar{c}\bar{a}$ est de longueur $2n$. Par (2) on a

$$A_2 = \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{a}, \bar{c}\bar{a}) = \text{acl}_0(c_2, \bar{a}, \bar{c}\bar{a}).$$

Du fait que $\bar{c} \downarrow_{c_1}^0 \bar{a}, \bar{c}\bar{a}$ l'uple c_2 reste 0-transcendant sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}$ et un calcul de prédimension donne que

$$0 = \delta(c_2, t_2, t_c/\bar{a}, \bar{c}\bar{a}) = 2 \text{degtr}(c_2/\bar{a}, \bar{c}\bar{a}) - |c_2| - |t_2| - |t_c|.$$

Ainsi $|t_2| + |t_c| = |c_2|$.

Comme \bar{c} est autosuffisant, on a

$$U(\bar{c}/c_1) = \delta(\bar{c}/c_1) = 2 \text{degtr}(\bar{c}/c_1) - \dim_{\text{lin}_{\mathbb{Q}}}(\bar{c}/c_1) = 2|c_2| - |c_2| - |t_c| = |t_2|.$$

Pour (4), supposons que les $j-1$ premières coordonnées $t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ de l'uple t_2 sont 0-transcendantes sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a$ et \bar{a}, \bar{c}, t'_a . Par (3), l'une des coordonnées z de c_2 est 0-transcendante sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$. Si $t_{2,j}$ est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ alors $t_{2,j}z$ est lui 0-transcendant. De plus si $t_{2,j}$ était 0-transcendant sur $\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$, l'élément $t_{2,j}z$ l'est toujours.

Afin de conserver l'égalité $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$, on multiplie $t_{4,j}$ par z . Notons que si $t_{4,j}$ était 0-transcendant sur $\overline{ab}, \bar{c}, t'_{ab}, t_{4,1}, \dots, t_{4,j-1}$, alors $t_{4,j}z$ l'est toujours. Enfin, si $t_{4,j}$ était 0-transcendant sur $\overline{ab}, \overline{cab}, t'_{ab}, t_{4,1}, \dots, t_{4,j-1}$ mais $t_{4,j}z$ devient 0-algébrique, alors $t_{4,j}z^2$ est à nouveau 0-transcendant, ainsi que $t_{2,j}z^2$ sur les points correspondants. Le résultat suit par induction.

Pour (5), comme a et c sont T -indépendants, on a

$$c_2 \downarrow_{c_1} \bar{a}.$$

Par (3), une des coordonnées z de c_2 est T -transcendante sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ pour $j \leq |t_2|$. Si $t_{2,j}$ est T -algébrique sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$, l'élément $t_{2,j}z^n$ est T -transcendant sur $\bar{a}, t_{2,1}, \dots, t_{2,j-1}$ pour tout $n > 0$. Comme $t_{2,j}$ est 0-transcendant sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, (t_{2,i} : i \neq j)$, il y a au plus un n pour lequel $t_{2,j}z^n$ est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, (t_{2,i} : i \neq j)$. De même pour $t_{4,j}z^n$ au-dessus de $\overline{ab}, \overline{cab}, t'_{ab}, (t_{4,i} : i \neq j)$. Il existe donc un n commun permettant de préserver (1) et (4). On conclut par récurrence.

La dernière remarque suit du Lemme 3.5 et du point (4). \square

Corollaire 3.7. *La droite A_2 est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2$ et les points \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont 0-interalgébriques sur \bar{a}, t'_a, t_2 .*

Démonstration. D'après la Proposition 3.6(2), la droite A_2 est 0-algébrique sur $\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}$ et donc sur \bar{a}, \bar{c}, ca_2 . Par la Proposition 3.6, l'uple t'_a, t_2 est 0-transcendant sur \bar{a}, \bar{c} . On en déduit que

$$\text{degtr}(A_2/\bar{a}, \bar{c}) = \text{degtr}(ca_2/\bar{a}, \bar{c}) = |ca_2| = |t'_a| + |t_2| = \text{degtr}(t'_a, t_2/\bar{a}, \bar{c}),$$

d'où $A_2 = \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2)$ et en particulier $\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, t'_a, t_2)$. Par symétrie, $\bar{c} \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}\bar{a}, t'_a, t_2)$. \square

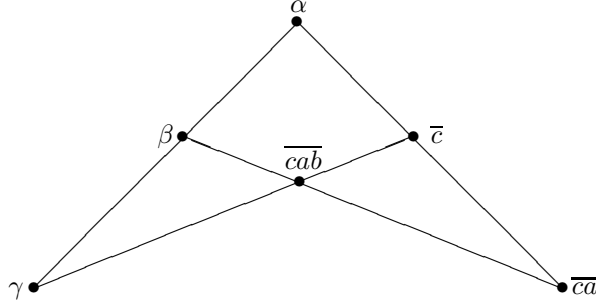
On pose

$$\alpha = \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2),$$

$$\beta = \text{acl}_0(\bar{c}\bar{a}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}) \cap \text{acl}_0(\bar{b}, t'_b, t_3), \quad \text{et}$$

$$\gamma = \text{acl}_0(\bar{c}\bar{a}\bar{b}, \bar{c}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4).$$

Proposition 3.8. *Le diagramme*



est une 0-configuration de groupe.

Démonstration. Remarquons que $a_1, t'_a \in \alpha$ et de même pour les autres points de la droite A_1 . Montrons d'abord que

$$(\star) \quad A_2 \underset{\alpha}{\downarrow}^0 \bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4.$$

Le Lemme 3.3 donne l'indépendance $A_3, A_4 \underset{\bar{c}, \bar{c}\bar{a}}{\downarrow}^0 A_2$. Celle-ci entraîne

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4 \underset{\bar{c}, \bar{c}\bar{a}}{\downarrow}^0 A_2$$

et donc $\text{Cb}(\bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4/A_2) \in \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$.

Il reste à montrer que $\text{Cb}(\bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4/A_2) \in \text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$, c'est-à-dire

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4 \underset{\bar{a}, t'_a, t_2}{\downarrow}^0 A_2.$$

Comme $A_3 \underset{\bar{b}}{\downarrow}^0 A_1$ on a $\bar{c}\bar{a}, t'_b, t_3 \underset{\bar{b}}{\downarrow}^0 A_1$. Puisque $\bar{b}, \bar{c}\bar{a}$ et t'_b, t_3 sont 0-indépendants par la Proposition 3.6, il suit que $\bar{c}\bar{a}, t'_b, t_3 \underset{\bar{b}}{\downarrow}^0 A_1$ et

$$(\dagger) \quad \bar{c}\bar{a} \underset{A_1}{\downarrow}^0 t'_b, t_3.$$

L'indépendance $A_3 \underset{\bar{b}, \bar{c}\bar{a}}{\downarrow}^0 A_1, A_2$ entraîne

$$t'_b, t_3 \underset{A_1, \bar{c}\bar{a}}{\downarrow}^0 \bar{c}, t'_a, t_2.$$

En combinant cette dernière indépendance et (†) on obtient $t'_b, t_3 \downarrow_{A_1}^0 \bar{c}, t'_a, t_2$ et donc

$$t'_b, t_3 \downarrow_{A_1, t'_a, t_2}^0 \bar{c}.$$

Comme $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$ et $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$, on a

$$(†) \quad t'_{ab}, t_4 \downarrow_{A_1, t'_a, t_2}^0 \bar{c}.$$

Ensuite $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$ implique $\bar{c} \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1$ ce qui entraîne avec (†)

$$\bar{c} \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1, t'_{ab}, t_4.$$

Par le Corollaire 3.7,

$$A_2 \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_1, t'_{ab}, t_4.$$

À nouveau les identités $t_1 \cdot t_4 = t_2 \cdot t_3$ et $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$ donnent

$$\bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4 \downarrow_{\bar{a}, t'_a, t_2}^0 A_2,$$

ce qui entraîne (★).

Nous allons maintenant vérifier que les points et les droites du diagramme satisfont les relations d'une 0-configuration de groupe.

L'indépendance (★) entraîne

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\alpha}^0 \bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, t'_{ab}, t_4,$$

ce qui implique

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\alpha}^0 \beta, \gamma;$$

c'est-à-dire les droites α, β, γ et $\alpha, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}$ sont 0-indépendants sur leur intersection. Par symétrie, chaque autre droite est 0-indépendante de α, β, γ sur l'intersection.

L'indépendance de deux droites différentes de α, β, γ sur leur intersection suit du Lemme 3.3.

D'après le Corollaire 3.7 appliqué aux droites A_4 et A_3 , on a $\bar{c}\bar{a}\bar{b} \in \text{acl}_0(\bar{a}\bar{b}, \bar{c}, t'_{ab}, t_4)$ et $\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\bar{b}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}, t'_b, t_3)$, ce qui implique $\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\bar{b}, \bar{c}\bar{a}\bar{b}, t'_b, t_3, \bar{a}\bar{b}, \bar{c}, t'_{ab}, t_4)$. Par (★) on conclut

$$\bar{c}\bar{a} \in \text{acl}_0(\alpha, \bar{c}).$$

De même, $\bar{c} \in \text{acl}_0(\alpha, \bar{c}\bar{a})$. Donc α, \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont deux-à-deux 0-interalgébriques sur le troisième.

Par la Proposition 3.6,

$$\bar{a}, t'_a, t_2 \downarrow^0 \bar{c} \quad \text{et} \quad \bar{a}, t'_a, t_2 \downarrow^0 \bar{c}\bar{a}.$$

Ainsi α, \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont deux à deux 0-indépendants. Cela montre les propriétés pour la droite $\alpha, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}$. Par symétrie, on obtient les mêmes propriétés pour les droites $\beta, \bar{c}\bar{a}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}$ et $\gamma, \bar{c}\bar{a}\bar{b}, \bar{c}$.

Pour la droite α, β, γ , l'indépendance $A_2 \downarrow_{\bar{c}\bar{a}}^0 A_3$ implique $\alpha \downarrow_{\bar{c}\bar{a}}^0 \beta$. Comme $\alpha \downarrow^0 \bar{c}\bar{a}$ on a $\alpha \downarrow^0 \beta$. Les points α, β et γ sont donc deux-à-deux 0-indépendants.

De plus $\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\alpha}^0 \beta, \gamma$ et $\overline{cab} \in \text{acl}_0(\beta, \bar{c}\bar{a})$ impliquent

$$\gamma \downarrow_{\alpha, \beta}^0 \bar{c}, \bar{c}\bar{a}, \overline{cab}.$$

D'où $\gamma \in \text{acl}_0(\alpha, \beta)$.

Il s'agit bien d'une 0-configuration de groupe. □

Le théorème de la configuration de groupe [6] nous donne, sur quelques paramètres indépendants qu'on ajoute au langage, un groupe T_0 -définissable 0-connexe H et des éléments génériques indépendants $h, h' \in H$ tels que α est 0-interalgébrique avec h , ainsi que β avec h' , et γ avec hh' . Par contre h et h' ne sont pas nécessairement T -indépendants, et leur T -type n'est pas forcément générique dans H .

Pour la suite, nous utiliserons le rapport entre h et le générique a du groupe G de départ.

Lemme 3.9. *Les uples h et t'_a, t_2 sont 0-interalgébriques sur \bar{a} , et \bar{a}, t_2 sont T -algébriques sur h . Enfin,*

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_h^0 \bar{a}, t'_a, t_2.$$

Démonstration. Comme α et h sont 0-interalgébriques, il suffit de démontrer le lemme pour α à la place de h .

Par définition, l'uple α est dans $\text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$. Réciproquement, par la Proposition 3.6, l'indépendance $\bar{c} \downarrow_{\bar{a}}^0 t'_a, t_2$ donne $\bar{c} \downarrow_{\bar{a}, \alpha}^0 t'_a, t_2$. D'où

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\bar{a}, \alpha}^0 t'_a, t_2,$$

car \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont 0-interalgébriques sur α . Comme $t'_a, t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$, on conclut que

$$t'_a, t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \alpha).$$

Remarquons maintenant que la Proposition 3.6 entraîne également

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\alpha}^0 \bar{a}, t'_a, t_2.$$

Comme \bar{c} et $\bar{c}\bar{a}$ sont T -indépendants, l'ensemble $\bar{c} \cdot \bar{c}\bar{a}$ est autosuffisant, ainsi que $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Donc $\langle \alpha \rangle$ est dans $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Par l'indépendance précédente, on a

$$\langle \alpha \rangle \downarrow_{\alpha}^0 \bar{a}, t'_a, t_2 \quad \text{et} \quad \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\langle \alpha \rangle}^0 \bar{a}, t'_a, t_2.$$

Alors

$$\delta(\bar{a}, t'_a, t_2 / \alpha) = \delta(\bar{a}, t'_a, t_2 / \langle \alpha \rangle) = \delta(\bar{a}, t'_a, t_2 / \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})) = 0.$$

On conclut que \bar{a}, t_2 est T -algébrique sur $\langle \alpha \rangle$, qui est elle T -algébrique sur α . □

Grâce à cette interalgébricité, nous allons définir un morphisme entre G et le groupe H construit.

Posons $r = |t'_a|$ et $s = |t_2|$. Soit

$$S = \text{Stab}_0(h, t'_a, t_2 / \bar{a})$$

le 0-stabilisateur de (h, t'_a, t_2) dans $H \times (K^*)^{r+s}$. Puisque $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$ implique $h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{b}, \overline{ab}$, on a $S = \text{Stab}_0(h, t'_a, t_2 / \bar{a}, \bar{b}, \overline{ab})$.

Lemme 3.10. *Le point (h, t'_a, t_2) est 0-générique sur \bar{a} dans le translaté $S \cdot (h, t'_a, t_2)$, qui est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a})$. En particulier, le stabilisateur S est connexe.*

Démonstration. Vérifions que (h, t'_a, t_2) et (h', t'_b, t_3) satisfont les hypothèses du Lemme 1.2. Remarquons tout d'abord que

$$(h, t'_a, t_2) \cdot (h', t'_b, t_3) = (hh', t'_{ab}, t_1 \cdot t_4).$$

Nous allons montrer

$$(\dagger) \quad h, t'_a, t_2, t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}}^0 h', t'_b, t_3,$$

ce qui entraîne en particulier $h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}}^0 h', t'_b, t_3$. Par symétrie, (\dagger) donne également $hh', t'_{ab}, t_4, t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}}^0 h', t'_b, t_3$ et $hh', t'_{ab}, t_4, t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}}^0 h, t'_a, t_2$, ce qui permet de conclure.

Notons que l'indépendance $A_1 A_2 \downarrow_{\bar{b}, \bar{ca}}^0 A_3$ implique

$$h, t'_a, t_1, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}, \bar{ca}}^0 h', t'_b, t_3.$$

Pour (\dagger) , il suffit maintenant de vérifier que

$$h, t'_a, t_1, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}}^0 \bar{ca}.$$

Comme $A_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_1$, on a $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{ca}}^0 \bar{b}, \bar{ab}, t_1$. La Proposition 3.6 donne $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{ca}$ et donc $t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}}^0 \bar{b}, \bar{ab}, \bar{ca}, t_1$. Comme h est 0-algébrique sur \bar{a}, t'_a, t_2 , on obtient $h, t'_a, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}, t_1}^0 \bar{ca}$. Enfin $A_1 \downarrow_{\bar{a}}^0 A_2$ donne $t_1 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}}^0 \bar{ca}$, d'où on conclut

$$h, t'_a, t_1, t_2 \downarrow_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{ab}}^0 \bar{ca}.$$

□

Comme la paire (t'_a, t_2) est 0-générique sur \bar{a} , la projection de S sur les deux dernières coordonnées est générique dans $(K^*)^{r+s}$, et donc surjective par connexité de K^* .

Par la Remarque 1.6, il existe un groupe algébrique H_1 (que l'on suppose définissable sur \emptyset) et des éléments génériques indépendants $h_1, h'_1 \in H_1$ tels que a_1 est 0-interalgébrique avec h_1 , ainsi que b_1 avec h'_1 , et ab_1 avec $h_1 h'_1$. Comme a_1 est contenu dans α , on a $h_1 \in \text{acl}_0(h)$. Par le Fait 1.4, on obtient une endogénie ϕ de H sur H_1 définissable dans le langage de pur corps. Dénotons par N la composante connexe dans T_0 de $\ker(\phi)$.

Comme h est 0-générique dans H , il est 0-générique dans le translaté Nh sur son paramètre canonique, qui lui est 0-interalgébrique avec $\phi(h) = h_1$ et donc avec a_1 . Comme h est 0-algébrique sur c, ca et

$$c, ca \downarrow_{a_1}^0 \bar{a},$$

on conclut que h est 0-générique dans Nh sur \bar{a} . De plus, la 0-interalgébricité entre h et t'_a, t_2 sur \bar{a} entraîne par le Fait 1.4 que le stabilisateur S induit une isogénie T_0 -définissable entre N et $(K^*)^{r+s}$. Ainsi, le sous-groupe N est l'enveloppe T_0 -définissable de sa torsion, car c'est le cas de $(K^*)^{r+s}$. Comme H normalise N , il

normalise la n -torsion de N pour tout $n < \omega$. Celle-ci est finie et donc fixée puisque H est 0-connexe. Le groupe H centralise toute la torsion de N et $N \leq Z(H)$.

Lemme 3.11. *Le stabilisateur S est T_0 -définissable sans paramètres et ne dépend pas de \bar{a} .*

Démonstration. Considérons le stabilisateur $S' = \text{Stab}_0(h', t'_b, t_3/\bar{b})$, qui induit également une isogénie ϕ' de N sur $(K^*)^{r+s}$. Celle-ci est T_0 -définissable sur \bar{b} . Alors, le groupe $N \times (K^*)^{r+s}$ est isogène via $(\phi', \text{id}_{(K^*)^{r+s}})$ à $(K^*)^{r+s} \times (K^*)^{r+s}$. L'image de S par $(\phi', \text{id}_{(K^*)^{r+s}})$ est un sous-groupe connexe 0-algébrique d'un tore et donc définissable sans paramètres. Comme S est connexe, il est T_0 -définissable sur \bar{b} . Puisque \bar{a} et \bar{b} sont 0-indépendants, il est T_0 -définissable sur \emptyset . \square

Rappelons que t_2 est un uple vert générique sur \bar{a} par la Proposition 3.6(5). Il se peut que l'uple (t_2, t'_a) ne le soit pas. Cependant, nous allons modifier h pour supprimer t'_a .

Comme S est une isogénie, il existent $h_0, h'_0 \in N$ tels que $(h_0, t'_a, \bar{1})$ et $(h'_0, t'_b, \bar{1})$ sont dans S . Alors, l'élément $(h_0 h'_0, t'_{ab}, \bar{1}) \in S$ car $t'_a \cdot t'_b = t'_{ab}$. On pose $k = h h_0^{-1}$ et $k' = h' h'_0^{-1}$. Le translaté à droite

$$S \cdot (h, t'_a, t_2) = S \cdot (k, \bar{1}, t_2)$$

est 0-algébrique sur \bar{a} par le Lemme 1.2. On obtient ainsi que $k \in \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)$ car h est 0-algébrique sur (\bar{a}, t'_a, t_2) et (h, t'_a, t_2) est 0-générique dans ce translaté par le Lemme 3.10. De même $k' \in \text{acl}_0(\bar{b}, t_3)$ et $kk' \in \text{acl}_0(\bar{ab}, t_3)$. Comme S est une isogénie définissable sur \emptyset , on a $h_0 \in \text{acl}_0(t'_a)$. De plus $t'_a \in \text{acl}_0(h)$ et donc

$$k \in \text{acl}_0(h) \subseteq \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{ca}).$$

De manière analogue, on déduit que $k' \in \text{acl}_0(h') \in \text{acl}_0(\bar{ca}, \bar{cab})$ et $kk' \in \text{acl}_0(hh') \in \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{cab})$.

On vérifie maintenant que k satisfait les propriétés analogues à celles de h .

Lemme 3.12. *L'intersection*

$$\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{ca}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2) = \text{acl}_0(k).$$

De plus

$$\bar{c}, \bar{ca} \underset{k}{\downarrow}^0 \bar{a}, t_2.$$

Enfin, k et t_2 sont 0-interalgébriques sur \bar{a} , et \bar{a}, t_2 est T -algébrique sur k .

Démonstration. Les remarques précédentes montrent que $k \in \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{ca}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)$. Comme $a_1 \subset \text{acl}_0(h) = \text{acl}_0(\bar{c}, \bar{ca}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t'_a, t_2)$ et

$$\bar{c}, \bar{ca} \underset{h}{\downarrow}^0 \bar{a}, t'_a, t_2,$$

le Lemme 3.6 donne :

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{c}, \bar{ca}, t'_a, t_2/a_1) &= \text{degtr}(\bar{c}, \bar{ca}/a_1) + \text{degtr}(\bar{a}, t'_a, t_2/a_1) - \text{degtr}(h/a_1) \\ |a_2| + |c_2| + |ca_2| &= |c_2| + |ca_2| + |a_2| + |t'_a| + |t_2| - \text{degtr}(h/a_1). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{degtr}(h/a_1) = r + s$. Comme $\text{degtr}(h_0/a_1) = \text{degtr}(t'_a/a_1) = r$ et $kh_0 = h$, on obtient $\text{degtr}(k/a_1) \geq s$. Donc,

$$\text{degtr}(\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{ca}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)/a_1) \geq s.$$

Pour vérifier que $\text{degtr}(k/a_1) = s$, il suffit donc de montrer que $\text{degtr}(\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)/a_1) \leq s$. Or,

$$\begin{aligned} & \text{degtr}(\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)/a_1) \\ & \leq \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1) + \text{degtr}(\bar{a}, t_2/a_1) - \text{degtr}(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a}, t_2/a_1) \\ & = |c_2| + |ca_2| + |a_2| + |t_2| - |a_2| - |c_2| - |ca_2| = s. \end{aligned}$$

En particulier, on a $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}) \cap \text{acl}_0(\bar{a}, t_2) = \text{acl}_0(k, a_1)$. Pour montrer que cette intersection est égale à $\text{acl}_0(k)$, vérifions que $a_1 \in \text{acl}_0(k)$. Comme $\text{degtr}(k/a_1) = s$ et $\text{degtr}(k/h_0a_1) = \text{degtr}(h/h_0a_1) = \text{degtr}(h/a_1) - \text{degtr}(h_0/a_1) = r + s - r = s$, on a $k \downarrow_{a_1}^0 h_0$. La 0-interalgébricité de h_0 et t'_a et la Proposition 3.6 entraîne $a_1 \downarrow^0 h_0$. Par transitivité, on a $h_0 \downarrow^0 a_1, k$ et donc $h_0 \downarrow_k^0 a_1$. Puisque $a_1 \in \text{acl}_0(h)$, on conclut que $a_1 \in \text{acl}_0(k)$. De plus,

$$\text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/k) = \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/a_1) - \text{degtr}(k/a_1) = |c_2| + |ca_2| - s$$

et

$$\begin{aligned} \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}/\bar{a}, t_2) &= \text{degtr}(\bar{c}, \bar{c}\bar{a}, \bar{a}, t_2/a_1) - \text{degtr}(\bar{a}, t_2/a_1) \\ &= |c_2| + |ca_2| + |a_2| - |a_2| - |t_2| = |c_2| + |ca_2| - s, \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2.$$

Le dernier énoncé se démontre comme dans la Proposition 3.8 : on sait déjà que $k \in \text{acl}_0(\bar{a}, t_2)$. Réciproquement, l'indépendance $\bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2$ et le fait que $t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}\bar{a})$ impliquent $t_2 \in \text{acl}_0(\bar{a}, k)$.

Comme $\bar{c} \cdot \bar{c}\bar{a}$ est autosuffisant, la clôture autosuffisante $\langle k \rangle$ est dans $\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})$. Ainsi,

$$\langle k \rangle \downarrow_k^0 \bar{a}, t_2 \quad \text{et} \quad \bar{c}, \bar{c}\bar{a} \downarrow_{\langle k \rangle}^0 \bar{a}, t_2.$$

Alors,

$$\delta(\bar{a}, t_2/k) = \delta(\bar{a}, t_2/\langle k \rangle) = \delta(\bar{a}, t_2/\text{acl}_0(\bar{c}, \bar{c}\bar{a})) = 0.$$

On conclut que \bar{a} et t_2 sont T -algébriques sur $\langle k \rangle$, et donc sur k . \square

Soit

$$S' = \text{Stab}_0(k, t_2/\bar{a})$$

le 0-stabilisateur de (k, t_2) dans $H \times (K^*)^s$. De façon analogue aux Lemmes 3.10 et 3.11, le groupe S' est T_0 -définissable sans paramètres et (k, t_2) est 0-générique sur \bar{a} dans le translaté $S' \cdot (k, t_2)$, qui est T_0 -définissable sur $\text{acl}_0(\bar{a})$.

On pose

$$\Gamma = \{n \in N : \exists t \in \ddot{U}^s (n, t) \in S'\}.$$

Alors S' induit une isogénie entre Γ et \ddot{U}^s par la Proposition 3.6 (5). Comme N est central dans H , le groupe Γ l'est aussi.

La proposition suivante termine la preuve du Théorème A.

Proposition 3.13. *Le groupe G est isogène à un sous-groupe de H/Γ , où le groupe H est algébrique et Γ est central dans H et isogène à une puissance du sous-groupe coloré \ddot{U} .*

Démonstration. On considère le stabilisateur

$$S^* = \text{Stab}(a, k\Gamma)$$

de $\text{tp}(a, k\Gamma)$ dans $G \times (H/\Gamma)$.

Notons d'abord que $\Gamma \cdot k = k\Gamma$ est la projection sur la première coordonnée de $S'(k, t_2) \cap H \times \check{U}^s$, car t_2 est vert. On a donc $k\Gamma \in \text{acl}(a)$, car $(k, t_2)S'$ est définissable sur $\text{acl}(a)$. De même $k'\Gamma \in \text{acl}(b)$ et $kk'\Gamma \in \text{acl}(ab)$. L'égalité

$$k\Gamma \cdot k'\Gamma = kk'\Gamma,$$

avec le fait que a et b sont deux génériques indépendants dans G nous permet par le Lemme 1.2 de conclure que $(a, k\Gamma)$ est générique dans un translaté de S^* .

Puisque a est générique dans G , qui est connexe, la projection de S^* sur la première coordonnée est surjective. On en déduit que S^* induit une endogénie de G dans H/Γ .

Pour vérifier que le noyau de cette endogénie est fini, il suffit de montrer que a et $k\Gamma$ sont interalgébriques. Comme \check{U} est de rang de Lascar 1, on a $U(\Gamma) = s$ et $U(k\Gamma) \geq U(k) - s$. Or, puisque t_2 est vert générique sur \bar{a} , on a $U(t_2/\bar{a}) = U(t_2/a) = s$. Puisque k et t_2 sont 0-interalgébriques sur \bar{a} , on obtient que $U(k/a) = s$. Ainsi

$$U(k\Gamma) \geq U(k) - s = U(k/a) + U(a) - s = U(a) \geq U(k\Gamma).$$

On a l'interalgébricité souhaitée. \square

4. SOUS-GROUPES COLORÉS

Le Théorème A ainsi que le [5, Corollaire 4.3] nous amènent à étudier les sous-groupes définissables d'un groupe algébrique. Ceci s'avère simple, dans les cas collapsé ou non :

Théorème 4.1.

- Dans un corps rouge, tout sous-groupe définissable connexe d'un groupe algébrique est une extension des points rouges d'un sous-groupe additif par un groupe algébrique.
- Dans un corps vert, tout sous-groupe définissable connexe d'un groupe algébrique est une extension des points verts d'un tore par un groupe algébrique.
- Tout groupe simple définissable dans un corps coloré est algébrique.
- Dans le cas noir, tout groupe définissable est algébrique.

Le dernier point a été montré dans le cas non-collapsé [13, Proposition 2.4] dont la preuve ci-dessous s'inspire.

Démonstration. De façon analogue à la partie 2, on notera T la théorie du corps coloré et l'indice 0 fera référence au réduit du pur corps algébriquement clos.

Soit G un sous-groupe connexe définissable d'un groupe algébrique. Prenons deux génériques indépendants a et b et notons c leur produit. Alors $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ sont en amalgame libre ; par hypothèse c est 0-algébrique sur a et b . Ainsi

$$\langle c \rangle \subset \langle \text{acl}_0(a, b) \rangle \subset \text{acl}_0(\langle a, b \rangle) = \text{acl}_0(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle),$$

par la Remarque 2.2(1) qui est valable pour tout corps coloré (collapsé ou non).

Cela entraîne que la base colorée t de $\langle c \rangle$ est une combinaison linéaire de r et s , les bases respectives de $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$. On peut alors supposer que $t = r \cdot s$ dans le cas vert (ou $t = r + s$ dans le cas rouge). Puisque (a, r) , (b, s) et (c, t) sont deux-à-deux indépendants et que r est T -algébrique sur a , d'après le Lemme 1.2 et le Fait 1.4,

le stabilisateur $\text{Stab}(a, r)$ induit une endogénie définissable ϕ de G vers les points colorés d'un sous-groupe algébrique d'une puissance cartésienne de K^+ (ou de K^* dans le cas vert). Comme le quotient d'un groupe algébrique par un groupe fini est encore algébrique, on peut supposer que ϕ est un endomorphisme.

Pour montrer que le noyau $\ker \phi$ est un groupe algébrique, il suffit de le montrer pour sa composante T -connexe N , car on travaille à l'intérieur d'un groupe algébrique.

Soit n générique dans N sur a . Le point na est donc générique dans G et indépendant de n et de a . De plus, les clôtures autosuffisantes $\langle na \rangle$ et $\langle a \rangle$ ont les mêmes points colorés, le groupe engendré par r qui est clairement autosuffisant et donc égal à $\langle r \rangle$.

Par le Lemme 1.2 et le fait que N est connexe et normale dans G , on a

$$N = \text{Stab}(n/r) = \text{Stab}(a/r) = \text{Stab}(na/r).$$

Le sous-groupe N est en particulier un sous-groupe du groupe algébrique $H = \text{Stab}_0(na/\text{acl}(r))$, le 0-stabilisateur de $\text{tp}_0(na/\text{acl}(r))$ dans le groupe algébrique ambiant. (Par $\text{acl}(r)$, on désigne la clôture algébrique réel de r .)

Dans le cas collapsé, nous avons élimination des imaginaires car il s'agit de corps de rang de Morley fini [16]. Dans le cas non-collapsé, tout type sur un ensemble autosuffisant est stationnaire [13, Dernier paragraphe p.1348]. En particulier, le type $\text{tp}(na/\text{acl}(r))$ est stationnaire.

Nous allons maintenant vérifier que $\text{tp}(na/\text{acl}(r))$ est l'unique type T -générique dans $H \cdot a$. Par la caractérisation de la T -indépendance au-dessus d'un ensemble autosuffisant, on obtient les indépendances :

$$n \downarrow^0_{\text{acl}(r)} a, \quad na \downarrow^0_{\text{acl}(r)} a \quad \text{et} \quad na \downarrow^0_{\text{acl}(r)} n.$$

Le Lemme 1.2 montre alors que H est connexe au sens de T_0 et que $\text{tp}_0(na/\text{acl}(r))$ est 0-générique dans le translaté $H \cdot na = H \cdot a$.

Prenons un élément x dans $H \cdot a$ qui est T -générique sur r . À priori, la clôture $\langle x, \text{acl}(r) \rangle$ peut contenir des points colorés qui ne sont pas dans $\text{acl}(r)$, néanmoins nous avons l'inégalité suivante :

$$\text{RM}(x/\text{acl}(r)) \leq \delta(x/\text{acl}(r)) \leq 2 \text{degtr}(x/\text{acl}(r)).$$

Notons que $\text{tp}_0(x/\text{acl}(r)) = \text{tp}_0(na/\text{acl}(r))$, car x est aussi 0-générique dans le translaté $H \cdot a$. En particulier, $\text{degtr}(x/\text{acl}(r)) = \text{degtr}(na/\text{acl}(r))$.

Comme les points colorés de $\langle na \rangle$ sont tous contenus dans $\langle r \rangle$, la clôture autosuffisante $\langle na \rangle$ est la sous-structure engendrée par na et $\langle r \rangle$. Comme na et $\text{acl}(r)$ sont en amalgame libre au-dessus de $\langle r \rangle$, il suit que $\langle na, \text{acl}(r) \rangle$ est la sous-structure engendrée par na et $\text{acl}(r)$. Donc $2 \text{degtr}(na/\text{acl}(r)) = \text{RM}(na/\text{acl}(r))$.

On a alors que $\text{RM}(x/\text{acl}(r)) = \delta(x/\text{acl}(r)) = 2 \text{degtr}(x/\text{acl}(r))$ et $\text{tp}_0(x/\text{acl}(r)) = \text{tp}_0(na/\text{acl}(r))$, ce qui entraîne que

$$\langle x, \text{acl}(r) \rangle \simeq \langle na, \text{acl}(r) \rangle,$$

et donc $\text{tp}(x/\text{acl}(r)) = \text{tp}(na/\text{acl}(r))$. Le type $\text{tp}(na/\text{acl}(r))$ est l'unique T -générique dans $H \cdot a$ et ainsi $N = H$.

Si G est un groupe infini définissable simple, le [5, Corollaire 3.9] implique que G est à isomorphisme près un sous-groupe d'un groupe algébrique (et même linéaire).

L'image de G par ϕ doit être triviale car elle est incluse dans un groupe abélien. On conclut que G est algébrique.

Enfin, dans le cas noir, l'hypothèse de simplicité n'est pas nécessaire car les bases noires r , s et t obtenues au début de la preuve sont nécessairement triviales. \square

5. LA FUSION AU DESSUS DE L'ÉGALITÉ

Dans cette partie, nous décrirons complètement les groupes définissables dans une fusion T de deux théories fortement minimales T_1 et T_2 à langages disjoints ayant élimination des imaginaires [8]. Rappelons que T est fortement minimale et son rang de Morley est induit par la prédimension

$$\delta(X) = \dim_1(X) + \dim_2(X) - |X|,$$

où \dim_1 et \dim_2 sont les rangs de Morley respectifs de T_1 et T_2 .

Nous commençons par étudier les sous-groupes T -définissables d'un produit de groupes T_i -définissables.

Lemme 5.1. *Soient H_i des groupes T_i -définissables pour $i = 1, 2$. Tout sous-groupe connexe K de $H_1 \times H_2$ T -définissable est de la forme $K_1 \times K_2$ avec $K_i \leq H_i$ définissable dans la théorie T_i .*

Si le groupe K est définissable sur l'ensemble A , les groupes K_1 et K_2 le sont sur $\text{acl}(A)$. La démonstration qui suit s'inspire de la preuve que la théorie de l'ensemble *ab initio* est plate [9].

Démonstration. On peut supposer que le langage est relationnel et que les groupes H_1 , H_2 et K sont définissables sur \emptyset . Chaque élément g de K s'exprime sous la forme $g = (g^1, g^2)$. Pour le générique g de K , nous allons vérifier que la projection de K dans la coordonnée i est égale au T_i -stabilisateur de g^i et que les coordonnées g^1 et g^2 sont T -indépendantes. Pour cela, nous considérons une suite de Morley $(g_i)_{i < \omega}$ du générique de K .

Remarquons que $\langle g_i g_j^{-1} \rangle \cap \langle g_{i'} g_{j'}^{-1} \rangle = Z \subseteq \text{acl}(\emptyset)$ est indépendant de $(i, j) \neq (i', j')$. L'ensemble Z est autosuffisant comme intersection de deux ensembles autosuffisants. On considère X le plus petit sous-ensemble de $\text{acl}(\emptyset)$ contenant Z clos par acl_1 et acl_2 . Cet ensemble X reste autosuffisant car sa prédimension sur Z est nulle.

Fixons $n > 0$. Pour chaque $i < j < n$, l'élément $g_i g_j^{-1}$ est aussi générique et par connexité a même type que g_0 . Il suit que

$$\dim_1((g_i^1 g_j^{1-1})_{0 \leq i < j < n} / X) \leq \dim_1((g_k^1)_{0 < k < n} / X) \leq (n-1) \dim_1(g_0^1 / X).$$

Notons

$$Y = \bigcup_{0 \leq i < j < n} \langle g_i g_j^{-1} \rangle.$$

Alors

$$\begin{aligned} \dim_1(Y/X) &= \dim_1((g_i^1 g_j^{1-1})_{i < j < n} / X) + \dim_1(Y / (g_i^1 g_j^{1-1})_{i < j < n} X) \\ &\leq (n-1) \dim_1(g_0^1 / X) + \sum_{i < j} \dim_1(\langle g_i g_j^{-1} \rangle / g_i^1 g_j^{1-1} X) \\ &\leq (n-1) \dim_1(g_0^1 / X) + \binom{n}{2} \dim_1(\langle g_0 \rangle / g_0^1 X). \end{aligned}$$

De même,

$$\dim_2(Y/X) \leq (n-1) \dim_2(g_0^2/X) + \binom{n}{2} \dim_2(\langle g_0 \rangle / g_0^2 X).$$

Comme X est autosuffisant, on a $\delta(Y/X) \geq 0$. Comme Y est la réunion d'ensembles deux à deux disjoints au-dessus de X , on obtient en calculant cette prédimension :

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta(Y/X) &= \dim_1(Y/X) + \dim_2(Y/X) - |Y \setminus X| \\ &= \text{epi} \leq (n-1) \left(\dim_1(g_0^1/X) + \dim_2(g_0^2/X) \right) \\ &\quad + \binom{n}{2} \left(\dim_1(\langle g_0 \rangle / g_0^1 X) + \dim_2(\langle g_0 \rangle / g_0^2 X) - |\langle g_0 \rangle \setminus X| \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (\star) \quad 0 &\leq \dim_1(\langle g_0 \rangle / g_0^1 X) + \dim_2(\langle g_0 \rangle / g_0^2 X) - |\langle g_0 \rangle \setminus X| \\ &= \delta(\langle g_0 \rangle / g_0 X) + \dim_1(g_0 / g_0^1 X) + \dim_2(g_0 / g_0^2 X) - |g_0 \setminus X|. \end{aligned}$$

Notons que $\dim_1(g_0 / g_0^1 X) \leq |g_0^2 \setminus X|$, avec égalité si et seulement si $g_0^2 \setminus X$ est un uple de points T_1 -indépendants sur $g_0^1 X$. De même pour $\dim_2(g_0 / g_0^2 X)$. Comme

$$|g_0 \setminus X| = |g_0^1 \setminus X| + |g_0^2 \setminus X|,$$

on en déduit que

$$\dim_1(g_0 / g_0^1 X) + \dim_2(g_0 / g_0^2 X) - |g_0 \setminus X| \leq 0.$$

De plus, $\delta(\langle g_0 \rangle / g_0 X) \leq 0$ et donc par (\star) , on a

$$\begin{aligned} \delta(\langle g_0 \rangle / g_0 X) &= 0 \\ \dim_1(g_0 / g_0^1 X) &= |g_0^2 \setminus X| \\ \dim_2(g_0 / g_0^2 X) &= |g_0^1 \setminus X|, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que g_0^1 et g_0^2 sont T_i -indépendants pour chaque i au-dessus de X . En plus, l'ensemble $g_0 X$ est autosuffisant. Par la caractérisation de l'indépendance dans la théorie de la fusion T , on obtient que g_0^1 est T -indépendant de g_0^2 sur X , et donc ils sont T -indépendants car X est contenu dans $\text{acl}(\emptyset)$.

De plus, comme l'uple $g_0^2 \setminus X$ est un uple de points T_1 -indépendants sur $g_0^1 X$, il suit que $g_0^1 X$ est autosuffisant dans $g_0 X$, qui est lui-même autosuffisant. On en déduit que le type $\text{tp}(g_0^1/X)$ est l'unique type de rang maximal dans le type stationnaire $\text{tp}_1(g_0^1/X)$, car les éléments de $g_0^1 \setminus X$ sont T_2 -indépendants sur X .

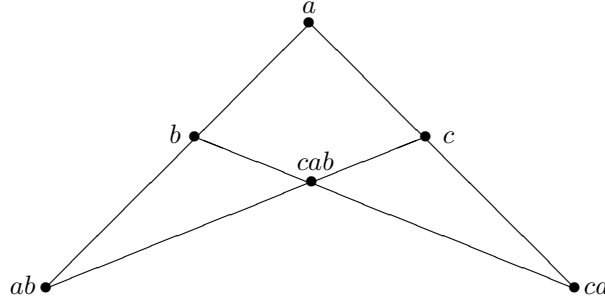
On applique le Lemme 1.2 aux éléments g_0^1 , g_1^1 et $g_0^1 \cdot g_1^1$ au-dessus de X dans le groupe H_1 et on obtient que le $\text{tp}_1(g_0^1/X)$ est le générique d'un translaté d'un sous-groupe K_1 , qui est T_1 -définissable sur X , ainsi que son translaté. Comme le type $\text{tp}(g_0^1/X)$ est l'unique type de rang maximal dans $\text{tp}_1(g_0^1/X)$, on en déduit que l'uple g_0^1 est l'unique T -générique dans K_1 (au-dessus de X). La projection de K sur sa première coordonnée est alors égale à K_1 . De même, l'uple g_0^2 est T -générique dans la projection K_2 de K sur sa seconde coordonnée et le groupe K_2 est un sous-groupe de H_2 qui est T_2 -définissable sur X .

Enfin, comme g_0^1 et g_0^2 sont indépendants et T -génériques dans K_1 et K_2 respectivement, le point $g_0 = (g_0^1, g_0^2)$ est T -générique dans $K_1 \times K_2$ et donc $K = K_1 \times K_2$, par connexité. \square

Grâce au lemme précédent, nous sommes maintenant en mesure de montrer l'assertion faite dans [9] : les groupes définissables dans la fusion sur l'égalité sont essentiellement des produits de groupes définissables dans chacune des théories de base. Hrushovski introduit la notion de géométrie plate pour vérifier que sa construction *ab initio* n'admet aucun groupe infini définissable. Sa démonstration n'utilise que la relation combinatoire portant sur les quatre droites de la configuration du groupe. Pour montrer le théorème suivant, nous avons cherché une notion analogue relative, mais finalement il suffit de suivre l'esprit de sa démonstration.

Théorème 5.2. *Tout groupe connexe définissable dans une fusion fortement minimale de deux théories fortement minimales, avec élimination des imaginaires, au-dessus de l'égalité est isogène à un produit de groupes définissables dans chacune des théories.*

Démonstration. Considérons G un groupe infini connexe T -définissable. Par la suite on travaille toujours au-dessus d'une suite de Morley dénombrable D . Considérons le diagramme suivant, où on identifie trois points génériques indépendants a , b et c avec leurs clôtures algébriques respectives.



On définit les ensembles suivants de T -dimensions finies :

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle a, b, ab \rangle, & A_2 &= \langle a, c, ca \rangle, \\ A_3 &= \langle ca, cab, b \rangle, & A_4 &= \langle ab, c, cab \rangle, \\ A_\emptyset &= \bigcup_{i=1}^n A_i, & A_s &= \bigcap_{i \in s} A_i \text{ pour } \emptyset \neq s \subset \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

De manière analogue à [9, lemme 15], on trouve des ensembles finis autosuffisants $B_i \subseteq A_i$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$ tels que, si on note

$$B_\emptyset = \bigcup_{i=1}^n B_i \text{ et } B_s = \bigcap_{i \in s} B_i \text{ pour } \emptyset \neq s \subset \{1, 2, 3, 4\},$$

alors

$$\delta(\langle A_\emptyset \rangle) = \delta(\langle B_\emptyset \rangle) \text{ et } \delta(B_s) = \dim(A_s)$$

pour tout $s \neq \emptyset$. L'ensemble B_{1234} est autosuffisant comme intersection d'ensembles autosuffisants. De plus, il est contenu dans $\text{acl}(\emptyset)$, car a et b sont T -indépendants.

On a

$$\begin{aligned} \text{RM}(G) &= \sum_{s \subset \{1,2,3,4\}} (-1)^{|s|} \dim(A_s/B_{1234}) \leq \sum_{s \subset \{1,2,3,4\}} (-1)^{|s|} \delta(B_s/B_{1234}) \\ &= \sum_{s \subset \{1,2,3,4\}} (-1)^{|s|} \dim_1(B_s/B_{1234}) + \sum_{s \subset \{1,2,3,4\}} (-1)^{|s|} \dim_2(B_s/B_{1234}). \end{aligned} \quad (\dagger)$$

La première inégalité ci-dessus suit du fait que $\dim(A_\emptyset) \leq \delta(B_\emptyset)$. L'égalité vient de la modularité de la cardinalité.

Par la suite, on travaille au-dessus de B_{1234} , que l'on suppose ainsi vide. Pour chaque $k = 1, 2$, on a par sous-modularité

$$\begin{aligned}
\dim_k(B_\emptyset) &= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2B_3B_4/B_1) \\
&\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2B_3B_4/B_{12}B_{13}B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2B_3B_4) - \dim_k(B_{12}B_{13}B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3B_4/B_2) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) \\
&\quad - \dim_k(B_{14}) \\
&\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3B_4/B_{23}B_{24}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) \\
&\quad - \dim_k(B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3B_4) - \dim_k(B_{23}B_{24}) \\
&\quad - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4/B_3) - \dim_k(B_{23}B_{24}) \\
&\quad - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\
&\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4/B_{34}) - \dim_k(B_{23}B_{24}) \\
&\quad - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) - \dim_k(B_{14}) \\
&= \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4) - \dim_k(B_{34}) \\
&\quad - \dim_k(B_{23}B_{24}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) - \dim_k(B_{14}).
\end{aligned}$$

Comme $B_{23} \downarrow B_{24}$ implique $B_{23} \downarrow^k B_{24}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\dim_k(B_\emptyset) &\leq \dim_k(B_1) + \dim_k(B_2) + \dim_k(B_3) + \dim_k(B_4) - \dim_k(B_{34}) \\
&\quad - \dim_k(B_{14}) - \dim_k(B_{23}) - \dim_k(B_{24}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}).
\end{aligned}$$

En développant les séries alternées dans (†), on obtient

$$\begin{aligned}
RM(G) &\leq \sum_{k=1}^2 (\dim_k(B_{12}) + \dim_k(B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14})) \\
&= \Delta_1 + \Delta_2,
\end{aligned}$$

où $\Delta_k = \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14})$.

Par le Fait 1.5, on a

$$a, b \downarrow^k_{\gamma_k} ab$$

où $\gamma_k = \text{acl}_k(a, b) \cap ab$, et en particulier,

$$B_{12}B_{13} \downarrow^k_{\gamma_k} B_{14}.$$

Par la Remarque 1.6, on peut supposer de plus que γ_k est le générique dans le sens de la théorie T_k d'un groupe \star -définissable H_k . Par superstabilité, comme H_k est une limite inductive de groupes T_k -définissables, il existe un sous-uple fini γ'_k générique d'un groupe T_k -définissable connexe H'_k tel que

$$B_{12}B_{13} \downarrow^k_{\gamma'_k} B_{14},$$

puisque $B_{12}B_{13}$ est fini.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/B_{14}) = \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}/\gamma'_k) \\ &= \dim_k(\gamma'_k) + \dim_k(B_{12}B_{13}) - \dim_k(B_{12}B_{13}\gamma'_k) \\ &= \dim_k(\gamma'_k) - \dim_k(\gamma'_k/B_{12}B_{13}) \leq \dim_k(\gamma'_k). \end{aligned}$$

Le Fait 1.4 donne une endogénie T -définissable

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow H'_1 \times H'_2 \\ ab &\mapsto (\gamma'_1, \gamma'_2) \end{aligned}$$

En quotientant $H'_1 \times H'_2$ par un produit de groupes finis contenant le conoyau, on peut supposer que φ est un homomorphisme de groupes, par élimination des imaginaires dans T_1 et T_2 .

Le Lemme 5.1 entraîne que l'image $\varphi(G)$ est un produit de groupes définissables dans chacune des théories. De plus, le point (γ'_1, γ'_2) est générique dans $\varphi(G)$ et ses coordonnées sont T -indépendantes. Enfin,

$$\text{RM}(G) \leq \dim_1(\gamma'_1) + \dim_2(\gamma'_2) = \dim(\gamma'_1, \gamma'_2)$$

entraîne que ab et (γ'_1, γ'_2) sont T -interalgébriques et donc G est isogène avec un produit de groupes définissables dans chacune des théories. \square

Question. Existe-t-il une caractérisation analogue pour les groupes définissables dans la fusion fortement minimale au-dessus d'un espace vectoriel sur un corps fini ?

RÉFÉRENCES

- [1] J. T. Baldwin, K Holland, *Constructing ω -Stable Structures : Rank 2 Fields*, J. Symb. Logic, **65**, 371-391 (2000).
- [2] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).
- [3] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Red fields*, J. Symb. Logic, **72**, 207-225 (2007).
- [4] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, M. Ziegler, *Fusion over a vector space*, J. Math. Logic **6**, 141-162 (2006).
- [5] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Géométries relatives*, soumis.
- [6] E. Bouscaren, *The Group Configuration—after E. Hrushovski*. Dans : *The Model Theory of Groups*, 199-209, Notre Dame Math. Lectures, 11, University of Notre Dame Press (1989).
- [7] A. Hasson, *Some questions concerning Hrushovski's amalgamation constructions*, J. Inst. Math. Jussieu, **7**, 793-823 (2008).
- [8] E. Hrushovski, *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields*, Isr. J. Math., **79**, 129-151 (1992).
- [9] E. Hrushovski, *A new strongly minimal set*, Ann. Pure Appl. Logic, **62**, 147-166 (1993).
- [10] Y. Mustafin, Thèse de doctorat, Lyon (2003).
- [11] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*, Oxford Logic Guides, 33. *Oxford University Press* (1996).
- [12] B. Poizat, *Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique, Nur al-Mantiq wal-Ma 'rifah* (1987). Traduction anglaise : *Stable groups*. Mathematical Surveys and Monographs, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).
- [13] B. Poizat, *Le carré de l'égalité*, J. Symb. Logic, **64**, 1339-1355 (1999).
- [14] B. Poizat, *L'égalité au cube*, J. Symb. Logic, **66**, 1647-1676 (2001).
- [15] B. Poizat, *Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner*, J. Symb. Logic, **66**, n° 4, 1637-1646 (2001).
- [16] F. O. Wagner, *Fields of finite Morley rank*, J. Symb. Logic, **66**, n° 2, 703-706 (2001).

- [17] F. O. Wagner, *Bad fields in positive characteristic*, Bull. London Math. Soc., **35**, 499–502 (2003).
- [18] M. Ziegler, *A Note on generic Types*, unpublished, (2006), (<http://arxiv.org/math.L0/0608433>).

UNIVERSITÉ DE LYON ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; CNRS ; INSA DE LYON F-69621 ; ECOLE CENTRALE DE LYON ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208, 43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE

E-mail address: `blossier@math.univ-lyon1.fr`

E-mail address: `pizarro@math.univ-lyon1.fr`

E-mail address: `wagner@math.univ-lyon1.fr`