



**HAL**  
open science

## Les groupes de Burger-Mozes ne sont pas kählériens

Thibaut Delcroix

► **To cite this version:**

Thibaut Delcroix. Les groupes de Burger-Mozes ne sont pas kählériens. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques., 2014, 23 (1), pp.115-127. 10.5802/afst.1399 . hal-00753204v2

**HAL Id: hal-00753204**

**<https://hal.science/hal-00753204v2>**

Submitted on 2 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LES GROUPES DE BURGER-MOZES NE SONT PAS KÄHLÉRIENS

THIBAUT DELCROIX

ABSTRACT. Burger and Mozes constructed examples of infinite simple groups which are lattices in the group of automorphisms of a cubical building. We show that there can be no morphism with finitely generated kernel from a Kähler group to one of these groups. We obtain as a consequence that these groups are not Kähler.

RÉSUMÉ. Burger et Mozes ont construit des exemples de groupes simples infinis, qui sont des réseaux dans le groupe des automorphismes d'un immeuble cubique. On montre qu'il n'existe pas de morphisme d'un groupe kählérien vers l'un de ces groupes dont le noyau soit finiment engendré. On en déduit que ces groupes ne sont pas kählériens.

## 1. INTRODUCTION

Bien que des exemples non résiduellement finis aient déjà été exhibés, l'existence de groupes fondamentaux de variétés kählériennes compactes, appelés groupes kählériens, infinis et simples n'est pas encore connue. Les candidats explicites à ce rôle sont en réalité assez peu nombreux. En effet, un groupe kählérien est de présentation finie et les exemples de groupes infinis simples de présentation finie sont des objets dont la construction n'est pas aisée.

Burger et Mozes ont exhibé dans [BM00] les premiers exemples de groupes infinis simples de présentation finie et sans torsion. Il existe une famille infinie  $\mathcal{F}_{BM}$  de groupes non isomorphes telle que tout groupe  $\Gamma$  de  $\mathcal{F}_{BM}$  est infini, simple, sans torsion et de présentation finie. Ces groupes sont des réseaux du groupe des automorphismes d'un immeuble cubique. Leur construction se fait en deux étapes.

La première est de prouver un analogue du théorème du sous-groupe normal de Margulis pour les réseaux dans les produits d'arbres, c'est-à-dire montrer que pour certains réseaux dans le groupe d'automorphismes d'un produit d'arbres, tout sous-groupe distingué est d'indice fini dans le réseau. Ceci est établi par Burger et Mozes dans le cas de réseaux dont les projections dans les groupes d'automorphismes de chacun des arbres vérifient des propriétés de transitivité forte ( $\infty$ -transitivité ou transitivité du stabilisateur de n'importe quel sommet sur chaque sphère centrée en ce sommet).

La seconde étape est de construire un réseau vérifiant les hypothèses de ce théorème du sous-groupe normal et qui soit de plus non-résiduellement fini. Un tel réseau est alors virtuellement simple, c'est-à-dire qu'il admet un sous-groupe simple d'indice fini.

La motivation de ce travail est de montrer que ces groupes ne sont pas kählériens et même une propriété plus forte : il n'existe pas de morphisme ayant un noyau de type fini d'un groupe kählérien vers un de ces groupes de Burger-Mozes.

Nous démontrons donc le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $\Gamma$  un groupe de Burger-Mozes,  $X$  une variété kählérienne et  $G := \pi_1(X)$  son groupe fondamental. Supposons qu'il existe un morphisme surjectif  $\rho : G \rightarrow \Gamma$ , alors son noyau  $\ker(\rho)$  n'est pas de type fini.*

En considérant le morphisme identité d'un groupe de Burger-Mozes, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 1.** *Les groupes de Burger-Mozes ne sont pas kählériens.*

Nous montrerons également le corollaire de manière différente en prouvant qu'un éventuel groupe kählérien infini et simple vérifierait la propriété (FA).

## 2. FACTORISATION DES ACTIONS SUR LES ARBRES DES GROUPES KÄHLÉRIENS

On rappelle qu'une *orbisurface de Riemann hyperbolique*  $S$  est un quotient du disque unité  $D$  de  $\mathbb{C}$  par un sous-groupe discret cocompact  $P$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . On appelle  $P$  le *groupe fondamental* (orbifold) de  $S$  et on le note  $\pi_1(S)$ .

Une application  $f$  d'une variété complexe  $X$  vers  $S$  est dite holomorphe si elle se relève en une application holomorphe du revêtement fondamental  $\tilde{X}$  de  $X$  vers  $D$ . Une telle application induit un morphisme de groupes fondamentaux  $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S)$ .

On appellera *fibration* une application holomorphe (orbifold ou non) surjective à fibres connexes. Si  $f : X \rightarrow S$  est une fibration sur une surface de Riemann alors le morphisme  $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S)$  est surjectif. Cette propriété reste vraie pour les fibrations sur des orbisurfaces de Riemann.

L'outil pour démontrer le théorème 1 est le résultat suivant.

**Théorème 2.** *Soient  $X$  une variété kählérienne compacte,  $G := \pi_1(X)$  son groupe fondamental,  $T$  un arbre infini ayant plus de trois bouts, et  $\rho : G \rightarrow \mathrm{Aut}(T)$  un morphisme tel que l'action associée de  $G$  sur  $T$  ne stabilise aucun bout, ni aucun sous-arbre propre de  $T$ .*

*Alors il existe une orbisurface de Riemann hyperbolique  $S_{\mathrm{orb}}$  et une fibration  $f : X \rightarrow S_{\mathrm{orb}}$ , telle que  $\rho$  factorise par  $f_*$ , c'est-à-dire qu'il existe un morphisme  $\phi : \pi_1(S_{\mathrm{orb}}) \rightarrow \mathrm{Aut}(T)$  tel que*

$$\rho = \phi \circ f_*.$$

L'existence de la fibration d'un revêtement fini vers une surface de Riemann est un résultat classique issu des travaux de Gromov et Schoen [GS92] dans le cas de l'action d'un amalgame sur un arbre localement fini, au moyen de la théorie des applications harmoniques à valeurs dans des complexes simpliciaux développée dans leur article. Leurs résultats sont également expliqués dans le livre [ABC<sup>+</sup>96]. Une autre preuve de leur résultat, valable pour un amalgame quelconque peut être trouvée dans [NR08].

Pour démontrer le théorème 1, l'existence d'une telle application ne suffit pas, on a besoin d'un résultat plus précis de factorisation du morphisme  $\rho$ . De tels résultats ont été récemment utilisés, pour d'autres groupes, par Corlette et Simpson [CS08], Delzant et Py [DP12] ou Py [Py]. Une condition nécessaire pour obtenir

une factorisation est la minimalité de l'action. Ici ceci correspond à ne fixer aucun sous-arbre propre. On obtiendra la factorisation voulue en remplaçant la surface de Riemann par une orbisurface de Riemann.

Bien que des résultats similaires à ce théorème soient nombreux dans la littérature, nous en donnons la démonstration détaillée.

**Démonstration. Première étape : existence d'une application harmonique équivariante**

La première étape est de construire une application harmonique équivariante non constante  $u$  du revêtement universel de  $X$  vers l'arbre  $T$ . Puisqu'on ne requiert pas que l'arbre soit localement fini, il faut faire appel aux travaux de Korevaar et Schoen.

**Proposition 1.** [KS97, Corollary 2.3.2] *Si le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte agit sur un arbre alors soit l'action fixe un bout, soit il existe une application harmonique équivariante du revêtement universel de la variété vers l'arbre.*

Les applications harmoniques sont les minimiseurs d'une certaine énergie (voir [GS92] et [KS93]). Korevaar et Schoen construisent dans [KS93] une suite minimisante formée d'applications équivariante. Pour éviter que la limite ne parte à l'infini, il est nécessaire d'imposer la condition que  $G$  ne fixe pas de bouts de  $T$ .

L'application harmonique obtenue est ici non constante par équivariance : si elle était constante alors son image serait fixée par le groupe  $G$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $G$  ne fixe pas de sous-arbre propre.

Dans la suite, on utilisera des résultats de [GS92] où les résultats des auteurs ne s'appliquent a priori qu'à des arbres localement finis. Cependant grâce à Sun [Sun03], l'image d'un voisinage assez petit d'un point par une application harmonique vers un arbre est contenue dans un sous-arbre localement fini. Ainsi, les résultats locaux s'étendent aux arbres non localement finis.

**Deuxième étape : donnée spectrale**

Un point  $x$  de  $\tilde{X}$  est dit *régulier* si l'image par  $u$  d'un voisinage de  $x$  est contenue dans une géodésique de  $T$ . Il est dit *singulier* sinon. Comme une géodésique de  $T$  est une copie de  $\mathbb{R}$ , l'application  $u$  peut alors être considérée au voisinage d'un point régulier comme une application à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 3.** [GS92, Theorem 6.4] *L'ensemble des points singuliers de  $\tilde{X}$  est de codimension de Hausdorff au moins 2.*

L'application  $u$  est en fait *pluriharmonique* sur l'ensemble des points réguliers par [GS92, Theorem 7.3], c'est à dire que, considérée comme une fonction à valeurs réelles au voisinage d'un point régulier, elle est vraiment une fonction pluriharmonique (i.e.  $\partial\bar{\partial}u = 0$ ). Ainsi, la différentielle de  $u$  au voisinage d'un point régulier, que l'on peut définir à valeur dans  $\mathbb{R}$ , au signe près car les géodésiques n'ont pas d'orientation fixée, est la partie réelle d'une 1-forme holomorphe  $\theta$ .

Le carré  $\beta$  de  $\theta$  est une différentielle quadratique holomorphe bien définie sur le lieu des points réguliers. Le résultat [GS92, Theorem 6.4] cité ci-dessus permet d'étendre  $\beta$  en une différentielle quadratique définie sur  $\tilde{X}$  tout entier. Puisque  $u$  est équivariante,  $\beta$  descend sur  $X$  en une différentielle quadratique holomorphe définie globalement, que l'on note encore  $\beta$ .

Considérons le revêtement fini (qui peut être ramifié)  $Y$  de  $X$  associé canoniquement à cette différentielle quadratique holomorphe. Il s'agit de la sous-variété de l'espace total du fibré cotangent  $\Omega_X$  définie par :

$$Y = \{(x, w) \in \Omega_X : w^2 = \beta(x)\}.$$

Alors le relèvement de  $\beta$  à  $Y$  est une différentielle quadratique qui est globalement le carré d'une forme différentielle holomorphe  $\alpha$ .

Si le revêtement  $Y$  est trivial, cela signifie que  $\beta$  était déjà globalement un carré sur  $X$ . Dans ce cas on note  $Y := X$  dans la suite, et il ne sera pas nécessaire de faire un quotient lors de la quatrième étape.

### Troisième étape : Construction de la fibration

On va maintenant utiliser l'article [Sim93] de Simpson pour obtenir une fibration sur une surface de Riemann. Dans cette troisième étape, on n'utilise pas entièrement la minimalité de l'action, mais juste le fait que  $G$  ne stabilise pas de paire de bouts.

Notons  $\text{Alb}(Y)$  la *variété de Albanese* de  $Y$ , c'est à dire le tore complexe défini par

$$\text{Alb}(Y) = H^0(Y, \Omega_Y)^* / H_1(Y, \mathbb{Z}).$$

Soit  $\alpha_{\text{Alb}}$  une 1-forme sur  $\text{Alb}(Y)$  telle que  $\alpha$  soit le tiré en arrière de  $\alpha_{\text{Alb}}$  par l'application d'Albanese  $x \mapsto [\alpha \mapsto \int_{x_0}^x \alpha]$  de  $Y$  vers  $\text{Alb}(Y)$  (pour un point base  $x_0 \in Y$  fixé).

Soit  $A$  la variété abélienne minimale de laquelle  $\alpha$  provient, définie par  $A := \text{Alb}(Y)/B$  où  $B$  est la somme des sous-variétés abélienne de  $\text{Alb}(Y)$  sur lesquelles  $\alpha_{\text{Alb}}$  est nulle. Notons  $\alpha_A$  la projection de  $\alpha_{\text{Alb}}$  sur  $A$ .

Enfin, notons  $Y' = Y \times_A V$  le produit fibré, de fibre  $A$ , de  $Y$  avec le revêtement universel  $V$  de  $A$ . Soit  $z_0 \in Y'$  un point qui est projeté sur  $x_0$  dans  $Y$ , et  $v_0$  sa projection dans  $V$ . Le tiré en arrière de  $\alpha_A$  à  $V$  est exact, et s'écrit donc comme la différentielle d'une unique fonction  $g_V : V \rightarrow \mathbb{C}$  qui s'annule en  $v_0$ . On note  $g$  la composition de  $g_V$  avec la projection  $Y' \rightarrow V$ .

On s'intéresse maintenant à la dimension de l'image de  $Y$  dans  $A$  par le quotient de l'application d'Albanese, pour pouvoir utiliser le résultat de Simpson.

**Lemme 1.** *La dimension de l'image de  $Y$  dans  $A$  est égale à 1.*

*Démonstration.* Si la 1-forme  $\alpha$  est identiquement nulle, alors l'application harmonique de départ  $u$  est constante, mais ce n'est pas le cas par construction. Donc la dimension de l'image de  $Y$  dans  $A$  est supérieure ou égale à 1. Supposons maintenant que la dimension de l'image de  $Y$  dans  $A$  soit supérieure ou égale à 2.

Par le théorème de Simpson [Sim93] énoncé dans le cas projectif, mais qui reste valable dans le cas kählérien, pour tout  $t \in \mathbb{C}$ , la fibre  $g^{-1}(t) \subset Y'$  est connexe et son groupe fondamental se surjecte sur celui de  $Y'$ .

Le relèvement à  $\tilde{Y}$  de cette fibre  $g^{-1}(t)$  est une réunion de composantes connexes que l'on note  $\tilde{Y}_{t,k}$ . La différentielle de  $u$  est nulle sur les composantes  $\tilde{Y}_{t,k}$  par construction de  $g$ . On choisit une telle composante  $\tilde{Y}_{t,k}$ , qui s'envoie donc sur un seul point  $q \in T$  par  $u$ .

Si  $x \in \tilde{Y}_{t,k}$  est un point, et si  $\gamma \in \pi_1(g^{-1}(t))$  alors l'image de  $x$  par  $\gamma$  est encore dans la même composante. En particulier, on a  $u(\gamma x) = q = u(x)$ . Or, par équivariance de  $u$ , on a  $u(\gamma x) = \rho(\gamma)u(x)$ , donc on obtient  $\rho(\gamma)q = q$ . En d'autres termes, l'action de  $\pi_1(g^{-1}(t))$  sur  $T$  fixe  $q$ . Puisque  $\pi_1(g^{-1}(t))$  surjecte sur  $\pi_1(Y')$ ,

l'action de  $\pi_1(Y')$  sur  $T$  fixe  $q$  également. Ceci est vérifié pour tout  $q$  dans l'image de  $u$ , donc l'action de  $\pi_1(Y')$  est triviale sur l'image de  $u$ . L'action de  $\pi_1(Y')$  est donc triviale sur le sous-arbre  $T'$  de  $T$  qui est l'enveloppe convexe de l'image de  $u$ .

Le revêtement  $Y' \rightarrow Y$  est un revêtement galoisien infini de groupe de Galois le quotient de  $\pi_1(Y)$  donné par le morphisme  $\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(A)$ . En particulier le groupe de Galois de  $Y'/Y$  est abélien. Donc  $\pi_1(Y')$  contient le sous-groupe des commutateurs de  $\pi_1(Y)$ . Si la dimension de l'image de  $Y$  dans  $A$  est supérieure ou égale à 2, alors le sous-groupe des commutateurs agit trivialement sur  $T'$ .

Ceci est impossible. En effet, les hypothèses sur l'action de  $G$  sur  $T$  impliquent que  $G$  ne fixe ni sommet, ni bout, ni paire de bouts de  $T$ . Par conséquent,  $G$  ne peut pas agir sur  $T'$  en fixant un sommet, un bout ou une paire de bouts. Il découle alors du théorème principal de [PV91] que l'image de  $G$  dans  $\text{Aut}(T')$  contient un sous-groupe libre non abélien, donc elle ne peut pas être un groupe abélien.  $\square$

On rappelle que toute application holomorphe  $\phi : X_1 \rightarrow X_2$  partant d'une variété compacte  $X_1$  admet une factorisation  $\phi = \phi_a \circ \phi_b$  appelée *factorisation de Stein* [Ste65] où  $\phi_a : X'_2 \rightarrow X_2$  est un revêtement fini sur son image et  $\phi_b : X_1 \rightarrow X'_2$  est une fibration.

La factorisation de Stein de  $Y \rightarrow A$  donne, puisque la dimension de l'image de  $Y$  dans  $A$  est 1,

$$Y \longrightarrow S' \longrightarrow A$$

où  $S'$  est une surface de Riemann compacte, et  $f' : Y \rightarrow S'$  est une fibration.

#### Quatrième étape : factorisation de la représentation

La partie réelle de  $\alpha$  est une 1-forme fermée car c'est localement la différentielle de  $u$ , et définit donc un feuilletage singulier. Les fibres de  $f'$  sont contenues dans les feuilles de ce feuilletage, puisque  $f'$  factorise  $Y \rightarrow A$ . On en déduit que l'application  $u$  est localement constante sur le relèvement des fibres de  $f'$ .

L'image du groupe fondamental d'une fibre générique est un groupe  $H$  distingué dans  $\pi_1(Y)$ . En effet, notons  $S'_{\text{reg}}$  la surface de Riemann  $S'$  privée des points singuliers de  $f'$ , et  $Y_{\text{reg}}$  son image réciproque. Alors  $f' |_{S'_{\text{reg}}}$  vérifie la propriété de relèvement des homotopies, et on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(Y_{\text{reg}}) \longrightarrow \pi_1(S'_{\text{reg}}) \longrightarrow 1$$

où  $\pi_1(F)$  est le groupe fondamental d'une fibre. En particulier,  $\pi_1(F)$  est distingué dans  $\pi_1(Y_{\text{reg}})$ . Or le morphisme  $\pi_1(Y_{\text{reg}}) \rightarrow \pi_1(Y)$  induit par l'inclusion est surjectif, donc l'image de  $\pi_1(F)$  est distinguée dans  $\pi_1(Y)$ .

D'autre part, l'image  $H$  du groupe fondamental d'une fibre générique fixe au moins un point de  $T$ , puisqu'il fixe point par point l'image du relèvement de la fibre. Notons  $T'$  le sous-arbre de  $T$  fixé par  $H$ . Si  $g \in \pi_1(Y)$  et  $p \in T'$  alors

$$H \cdot g \cdot p = g \cdot H \cdot p = g \cdot p$$

donc  $g \cdot p \in T'$ . On en déduit que  $T'$  est stabilisé par  $G$  donc  $T'$  est en fait l'arbre  $T$  tout entier par minimalité de l'action. Par conséquent, l'image du groupe fondamental d'une fibre générique est triviale dans  $\rho(G)$ .

En considérant  $S'_o$  la base orbifold [Cam11, Définition 4.2] de la fibration  $f'$ , on a alors une suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(S'_o) \longrightarrow 1$$

où  $F$  est une fibre générique de  $f'$ , par [Cam11, Proposition 12.9]. Notons  $\rho' : \pi_1(Y) \rightarrow \rho(G)$  le morphisme induit par  $\rho$ . Comme l'image de  $\pi_1(F)$  dans  $\rho(G)$  est triviale, on en déduit que  $\rho'$  factorise par  $\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(S'_o)$ .

Pour descendre la factorisation à  $X$ , on va construire un quotient de  $S'$  par le groupe  $\Lambda$  du revêtement  $Y/X$ . Pour cela, on montre que ce groupe agit sur les fibres régulières de  $f' : Y \rightarrow S'$ . En effet, soit  $\Sigma$  une hypersurface connexe de  $Y$ . Supposons que l'image du groupe fondamental de  $\Sigma$  par  $\rho'$  soit triviale, alors  $\Sigma$  est inclus dans une fibre de  $f'$ . Sinon la restriction de  $f'$  à  $\Sigma$  serait non constante, donc surjective sur la surface de Riemann  $S'$  et par factorisation de Stein une fibration sur un revêtement étale fini de  $S'$ . En particulier, l'image de  $\pi_1(\Sigma)$  serait d'indice fini dans  $\pi_1(S'_o)$  et par la factorisation obtenue précédemment, on obtiendrait que l'image de  $\rho'$  dans  $\rho(G)$  serait finie, ce qui est impossible.

Les fibres régulières de  $f'$  sont donc les hypersurfaces maximales de  $Y$  dont le groupe fondamental a une image triviale. On en déduit que le groupe (fini)  $\Lambda$  agit sur les fibres régulières de  $f'$ . Ceci fournit une action sur  $S'$ .

On note  $S$  le quotient par cette action, c'est une orbisurface de Riemann, et on a un morphisme  $f : X \rightarrow S$ . Nous répétons alors le raisonnement effectué pour  $Y$  et  $S'$ . Les groupes fondamentaux des fibres de  $f$  ont une image triviale par  $\rho$ , donc en notant  $S_o$  la base orbifolde de la fibration  $f$ , on obtient le résultat attendu, toujours par [Cam11, Proposition 12.9].  $\square$

### 3. CAS DES AMALGAMES

Le théorème 2 s'applique en particulier aux groupes kählériens qui sont des amalgames.

En effet (voir [Ser77, 1.4.1 Théorème 6]), si  $G = G_1 *_{\Delta} G_2$  alors on peut construire un arbre  $T$  semi-homogène sur lequel  $G$  agit sans inversion avec les propriétés suivantes :

- il y a deux orbites de sommets sous l'action de  $G$ , deux sommets adjacents étant dans des orbites distinctes ;
- le stabilisateur d'un sommet de la première orbite est isomorphe à  $G_1$  et celui d'un sommet de la seconde est isomorphe à  $G_2$  ;
- enfin, le stabilisateur d'une arête est isomorphe à  $\Delta$ .

L'amalgame  $G$  est dit non trivial lorsque l'indice de  $\Delta$  dans  $G_i$  est supérieur ou égal à 2 pour  $i = 1$  ou  $2$ . On ne considère dans la suite que des amalgames non triviaux. Il est facile de voir que  $G$  agit dans ce cas sur l'arbre  $T$  sans stabiliser ni bout, ni sous-arbre propre. De plus, l'arbre  $T$  a une infinité de bouts dès que l'amalgame est *strict*, c'est-à-dire si l'indice de  $\Delta$  dans  $G_1$  est supérieur à 2, et l'indice de  $\Delta$  dans  $G_2$  est supérieur à 3.

Nous souhaitons préciser des conséquences du théorème 2, premièrement sur les groupes kählériens simples, et deuxièmement sur les noyaux des représentations de groupes kählériens dans des groupes d'automorphismes d'arbres. En application de ces résultats, nous obtiendrons les résultats souhaités sur les groupes de Burger-Mozes.

En effet, Burger et Mozes ont montré que les groupes qu'ils ont construits sont des amalgames stricts :

**Proposition 2.** [BM00, Theorem 5.5] *Soit  $\Gamma \in \mathcal{F}_{BM}$ , alors  $\Gamma$  admet des sous-groupes  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta$ , tels que  $\Delta$  est d'indice 2 dans  $\Gamma_1$ , d'indice  $2n$  dans  $\Gamma_2$ , où*

$2 < n \in \mathbb{N}$ , et que  $\Gamma$  s'écrit sous forme d'amalgame de la manière suivante :

$$\Gamma = \Gamma_1 *_{\Delta} \Gamma_2.$$

#### 4. GROUPES KÄHLÉRIENS SIMPLES ET PROPRIÉTÉ (FA)

L'existence d'une fibration sur une orbisurface de Riemann, indépendamment de la factorisation, impose des restrictions sur les actions possibles d'un groupe kählérien sur un arbre. Ici, on va montrer qu'un groupe kählérien simple vérifierait la propriété (FA) de Serre, et ceci implique que les groupes de Burger et Mozes ne sont pas kählériens.

**Définition 1.** Un groupe  $G$  vérifie la *propriété (FA)* si toute action sans inversion de  $G$  sur un arbre  $T$  fixe au moins un sommet de  $T$ .

Serre a caractérisé les groupes ayant la propriété (FA) de la manière suivante.

**Théorème 4.** [Ser77, Théorème 15] *Soit  $G$  un groupe, alors  $G$  a la propriété (FA) si et seulement s'il vérifie les trois propriétés suivantes :*

- *ce n'est pas un amalgame non trivial ;*
- *il n'a pas de quotient isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ;*
- *il est de type fini.*

Cette caractérisation est déterminante pour notre résultat, puisque le théorème 2 permet d'exclure les possibilités pour un groupe n'ayant pas la propriété (FA).

**Proposition 3.** *Soit  $G$  un groupe kählérien. Si  $G$  est simple alors  $G$  a la propriété (FA).*

*Démonstration.* Soit  $X$  une variété kählérienne compacte et  $G := \pi_1(X)$  son groupe fondamental. Supposons que  $G$  est simple.

- Puisque  $X$  est compacte, son groupe fondamental est de type fini.
- Si  $G$  a un quotient isomorphe à  $\mathbb{Z}$  alors  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  puisque  $G$  est simple. Or  $\mathbb{Z}$  n'est pas kählérien car son rang est impair.
- Si  $G$  peut s'écrire comme un amalgame non trivial, on distingue deux cas, selon que l'amalgame est strict ou non.
  - Si  $G$  est un amalgame non strict, alors  $G$  a pour image dans le groupe d'automorphisme de la chaîne doublement infinie le groupe diédral infini qui n'est pas simple (il contient  $\mathbb{Z}$  comme groupe distingué d'indice deux par exemple).
  - Enfin, si  $G$  est un amalgame strict, alors on peut appliquer le théorème 2. On obtient un morphisme surjectif de  $G$  vers le groupe fondamental d'une orbisurface de Riemann hyperbolique  $S$ . C'est un isomorphisme car  $G$  est simple.

Un groupe d'orbisurface hyperbolique est résiduellement fini (on peut appliquer le théorème de Mal'cev puisqu'un groupe d'orbisurface hyperbolique est un sous-groupe finiment engendré de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ).

Or  $G$  n'est pas résiduellement fini (car simple infini), donc on aboutit à une contradiction.

On prouve ainsi, par le théorème 4, que le groupe  $G$  a la propriété (FA).  $\square$

*Démonstration du corollaire 1.* Supposons que  $X$  soit une variété kählérienne compacte dont le groupe fondamental  $\pi_1(X)$  est isomorphe à  $\Gamma$ . En particulier,  $\pi_1(X)$  est un groupe kählérien simple. Par la proposition 3, ce groupe a la propriété (FA).



Or  $\Gamma$  est un amalgame strict, et agit sur l'arbre associé sans inversion et sans sommet fixé, donc on aboutit à une contradiction.  $\square$

Le résultat n'est bien sûr pas vrai dans le cas d'un groupe simple infini non kählérien, et les groupes de Burger-Mozes sont des contre-exemples.

## 5. RESTRICTIONS SUR LES NOYAUX

**Proposition 4.** *Soient  $T$  un arbre infini ayant plus de trois bouts, et  $H$  un sous-groupe de  $\text{Aut}(T)$  qui ne stabilise ni bout, ni sous-arbre propre de  $T$ . Soient  $G$  un groupe kählérien et  $\rho : G \rightarrow H$  un morphisme surjectif. Alors*

- soit le noyau de  $\rho$  n'est pas de type fini,
- soit  $H$  est isomorphe à un groupe d'orbisurface de Riemann hyperbolique.

*Démonstration.* Notons  $X$  une variété kählérienne compacte de groupe fondamental isomorphe à  $G$ .

Appliquons le théorème 2 à  $G$ . On obtient une orbisurface de Riemann hyperbolique  $S$ , une application holomorphe  $f : X \rightarrow S$ , surjective à fibres connexes, et un morphisme  $\phi : \pi_1(S) \rightarrow H$  tel que  $\rho = \phi \circ f_*$ . Notons  $K$  le noyau de  $\rho$  et  $N$  celui de  $\phi$ . Notons aussi  $\Sigma = \pi_1(S)$ .

Puisque  $\rho$  est surjectif, on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \xrightarrow{\rho} H \longrightarrow 1.$$

En appliquant  $f_*$  à cette suite exacte, on obtient une suite exacte :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \Sigma \xrightarrow{\phi} H \longrightarrow 1.$$

En effet,  $N$  est l'image par  $f_*$  de  $K$  car  $f_*$  est surjectif, et  $\rho = \phi \circ f_*$ . Le groupe  $N$  est par conséquent un quotient de  $K$ .

Pour montrer la proposition, il suffit de considérer le cas où  $K$  est de type fini. Dans ce cas, comme  $N$  est un quotient de  $K$ ,  $N$  est aussi de type fini.

Or, un groupe fondamental  $\Sigma$  d'une orbisurface de Riemann vérifie la propriété suivante (voir [Gri63] ou [Gre60]) : les sous-groupes distingués de type fini non triviaux de  $\Sigma$  sont d'indice fini.

Ce résultat implique que  $N$  est trivial car  $H$  est nécessairement un groupe infini. Cela signifie que  $H$  est isomorphe à  $\Sigma$  puisque  $\phi$  est surjective de noyau trivial.  $\square$

Nous avons maintenant tous les outils pour montrer le théorème 1 :

*Démonstration du théorème 1.* Soit  $\Gamma$  un groupe de Burger-Mozes,  $G$  un groupe kählérien et  $\rho : G \rightarrow \Gamma$  un morphisme surjectif. Supposons de plus que le noyau  $K$  de  $\rho$  soit de type fini. Alors par la proposition 4,  $\Gamma$  est isomorphe à un groupe d'orbisurface hyperbolique. On a vu qu'un tel groupe est résiduellement fini, ceci implique donc que  $\Gamma$  est résiduellement fini et on aboutit encore à une contradiction avec la simplicité du groupe infini  $\Gamma$ .  $\square$

Par contre, si  $H$  est un groupe de type fini quelconque, alors il existe une infinité de groupes kählériens qui admettent un morphisme surjectif sur  $H$ . En effet, les groupes de surfaces sont des groupes kählériens, qui admettent des quotients libres. En choisissant une surface de genre suffisamment élevé, on peut trouver un morphisme surjectif vers un groupe libre au nombre de générateur arbitrairement grand.

**Remerciements :** Je remercie mon directeur de thèse Philippe Eyssidieux pour m'avoir proposé d'étudier ces questions.

## RÉFÉRENCES

- [ABC<sup>+</sup>96] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick, and D. Toledo. *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, volume 44 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [BM00] M. Burger and S. Mozes. Lattices in product of trees. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (92) :151–194 (2001), 2000.
- [Cam11] F. Campana. Orbifolides géométriques spéciales et classification biméromorphe des variétés kählériennes compactes. *J. Inst. Math. Jussieu*, 10(4) :809–934, 2011.
- [CS08] K. Corlette and C. Simpson. On the classification of rank-two representations of quasiprojective fundamental groups. *Compos. Math.*, 144(5) :1271–1331, 2008.
- [DP12] T. Delzant and P. Py. Kähler groups, real hyperbolic spaces and the Cremona group. *Compos. Math.*, 148(1) :153–184, 2012.
- [Gre60] L. Greenberg. Discrete groups of motions. *Canad. J. Math.*, 12 :415–426, 1960.
- [Gri63] H. B. Griffiths. The fundamental group of a surface, and a theorem of Schreier. *Acta Math.*, 110 :1–17, 1963.
- [GS92] M. I. Gromov and R. Schoen. Harmonic maps into singular spaces and  $p$ -adic superrigidity for lattices in groups of rank one. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (76) :165–246, 1992.
- [KS93] N. Korevaar and R. Schoen. Sobolev spaces and harmonic maps into metric space targets. *Comm. Anal. Geom.*, 1 :561–659, 1993.
- [KS97] N. Korevaar and R. Schoen. Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces. *Comm. Anal. Geom.*, 5(2) :333–387, 1997.
- [NR08] T. Napier and M. Ramachandran. Filtered ends, proper holomorphic mappings of Kähler manifolds to Riemann surfaces, and Kähler groups. *Geom. Funct. Anal.*, 17(5) :1621–1654, 2008.
- [PV91] I. Pays and A. Valette. Sous-groupes libres dans les groupes d’automorphismes d’arbres. *Enseign. Math. (2)*, 37(1-2) :151–174, 1991.
- [Py] P. Py. Coxeter groups and kähler groups. arXiv :1211.1493v2 [math.GT].
- [Ser77] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [Sim93] C. Simpson. Lefschetz theorems for the integral leaves of a holomorphic one-form. *Compositio Math.*, 87(1) :99–113, 1993.
- [Ste65] K. Stein. On factorization of holomorphic mappings. In *Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964)*, pages 1–7. Springer, Berlin, 1965.
- [Sun03] X. Sun. Regularity of harmonic maps to trees. *Amer. J. Math.*, 125(4) :737–771, 2003.

INSTITUT FOURIER, CNRS UMR 5582, UNIVERSITÉ GRENOBLE 1, 100 RUE DES MATHS, BP 74, 38402 SAINT-MARTIN D’HÈRES, FRANCE  
*E-mail address:* thibaut.delcroix@ujf-grenoble.fr