HAL open science

Schémas de Hilbert invariants et théorie classique des invariants

Ronan Terpereau

To cite this version:

Ronan Terpereau. Schémas de Hilbert invariants et théorie classique des invariants. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Joseph Fourier - Grenoble, 2012. Français. NNT : . hal-00749160

HAL Id: hal-00749160

https://hal.science/hal-00749160v1

Submitted on 7 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Ronan TERPEREAU

Thèse dirigée par **Michel BRION**

préparée au sein de **l'Institut Fourier**
et de **l'Ecole Doctorale MSTII**

Schémas de Hilbert invariants et théorie classique des invariants

Thèse soutenue publiquement le **5 novembre 2012**,
devant le jury composé de :

M. Michel BRION
Directeur de recherche CNRS, Université Grenoble I, Directeur de thèse
M. Hanspeter KRAFT
Professeur, Université de Bâle, Rapporteur
M. Manfred LEHN
Professeur, Université de Mayence, Examinateur
M. Laurent MANIVEL
Directeur de recherche CNRS, Université Grenoble I, Examinateur
M. Christoph SORGER
Professeur, Université de Nantes, Rapporteur
M. Mikhail ZAIDENBERG
Professeur, Université Grenoble I, Examinateur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Michel Brion pour m'avoir proposé de travailler sur un sujet aussi riche et intéressant. Michel, pendant ces trois années tu as toujours été présent pour m'aider et me motiver lorsque cela était nécessaire. Tu m'as donné beaucoup de ton temps, et tu m'as souvent fait profiter de ton intuition et de tes profondes connaissances des mathématiques. Pour tout cela, je te remercie mille fois. Merci aussi pour tous les conseils que tu as pu me donner, et pour toutes les personnes intéressées par mon sujet que tu m'as permis de rencontrer.

Un grand merci à Hanspeter Kraft et Christoph Sorger pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Merci également à Manfred Lehn, Laurent Manivel et Mikhail Zaidenberg pour avoir accepté de figurer dans mon jury. Je suis très honoré de l'intérêt que vous portez à mes travaux.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance aux personnes avec qui j'ai pu discuter de sujets connexes à celui de ma thèse : Jonas Budmiger, Tanja Becker, Stavros Papadakis et Bart Van Steirteghem. Merci aussi à ceux qui m'ont invité à parler de mes travaux : Stéphanie Cupit-Foutou, Ivan Pan, Guido Pezzini, Alvaro Rittatore et les organisateurs de GAeL XIX.

Cette thèse a été préparée au sein de l'Institut Fourier. Je tiens à remercier le personnel administratif de l'Institut Fourier qui m'a offert un très bon cadre de travail. Je remercie aussi tous les thésards et post-docs de l'Institut pour l'ambiance sympathique (et studieuse !) qui y règne. Un grand merci tout particulier à Claudia, Clélia, Christian, Guenaëlle, Junyan, Kévin, Mateusz, Mickaël et Roland.

Un merci du fond du coeur à mes amis pour tous les moments passés en votre compagnie pendant ces vingt-six dernières années. Merci pour tous les voyages, les week-ends et les soirées passées en votre compagnie.

Enfin, je tiens à remercier très chaleureusement ma famille pour son soutien constant et pour m'avoir toujours encouragé à faire ce qui me plaisait dans la vie : mes parents Evelyne et Elian, ma soeur Cindy et ma grand-mère Josiane. Maman, papa, sans vous je ne serais pas arrivé là où j'en suis et je sais que j'ai beaucoup de chance d'avoir des parents aussi formidables que vous l'êtes.

Pour finir, un immense merci à Marie, ma tendre moitié, qui a toujours été à mes côtés pendant cette thèse. Merci pour ta gentillesse et ta bonne humeur, et surtout, merci de toujours croire en moi.

Table des matières

Introduction **6**

1 Le schéma de Hilbert invariant **11**
1.1 Généralités . . . 11
1.2 Points fixes pour l'opération d'un groupe de Borel et espaces tangents . . . 14
1.3 Construction de morphismes équivariants vers des grassmanniennes . . . 15
1.4 Les différentes situations étudiées . . . 17
1.4.1 Les différentes situations étudiées . . . 17
1.4.2 Rappels concernant la théorie des représentations des groupes classiques . . . 18
1.5 Le principe de réduction et le cas du groupe spécial linéaire . . . 20
1.5.1 Le principe de réduction . . . 20
1.5.2 Cas du groupe spécial linéaire . . . 26
1.5.3 Détermination de la composante principale dans un cas simple . . . 30

2 Cas du groupe linéaire **32**
2.1 Cas de $GL(V)$ opérant dans $V^{\oplus n_1} \oplus V^{*\oplus n_2}$ . . . 32
2.1.1 Etude du morphisme de passage au quotient . . . 32
2.1.2 Etude du cas $\min(\dim(V), n_1, n_2) = 1$ . . . 38
2.1.3 Description de l'algèbre du nilcône . . . 40
2.1.4 Etude du cas $\dim(V) = 2$ . . . 41
2.1.5 Etude du cas $\dim(V) = 3$ . . . 49
2.2 Cas de $GL(V)$ opérant dans $\mu^{-1}(0)$ . . . 56
2.2.1 L'application moment . . . 56
2.2.2 Etude du morphisme de passage au quotient . . . 57
2.2.3 Réduction au cas classique pour la composante principale . . . 59
2.2.4 Réductibilité de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ . . . 61
2.2.5 Etude du cas $\dim(V) = 1$ . . . 62

3 Cas des autres groupes classiques **64**
3.1 Cas de $O(V)$ opérant dans $V^{\oplus n'}$ . . . 64
3.1.1 Etude du morphisme de passage au quotient . . . 64
3.1.2 Etude du cas $\dim(V) = 2$ . . . 67
3.1.3 Etude du cas $\dim(V) = 3$ . . . 72
3.2 Cas de $SO(V)$ opérant dans $V^{\oplus n'}$ . . . 79
3.2.1 Etude du morphisme de passage au quotient . . . 79
3.2.2 Etude du cas $\dim(V) = 3$ . . . 81
3.3 Cas de $Sp(V)$ opérant dans $V^{\oplus n'}$ . . . 87
3.3.1 Etude du morphisme de passage au quotient . . . 88
3.3.2 Description de l'algèbre du nilcône . . . 90
3.3.3 Etude du cas $\dim(V) = 4$ . . . 91
3.4 Cas de $O(V)$ et $SO(V)$ opérant dans $\mu^{-1}(0)$ . . . 95
3.4.1 L'application moment . . . 96
3.4.2 Etude des morphismes de passage au quotient . . . 97
3.4.3 Construction de morphismes équivariants et réduction . . . 98

3.4.4 Etude du cas $\dim(V) = 2$ . . . 99
3.5 Cas de $Sp(V)$ opérant dans $\mu^{-1}(0)$ . . . 100
3.5.1 L'application moment . . . 100
3.5.2 Etude du morphisme de passage au quotient . . . 101
3.5.3 Construction d'un morphisme équivariant et réduction . . . 103
3.5.4 Etude du cas $\dim(V) = 2$ . . . 104

Questions ouvertes **106**

A Résolutions crépantes de $W/\!\!/G$ et résolutions symplectiques de $\mu^{-1}(0)/\!\!/G$ **109**
A.1 Résolutions crépantes de $W/\!\!/G$ . . . 109
A.1.1 Généralités . . . 109
A.1.2 Situation 1 . . . 110
A.1.3 Situation 2 . . . 111
A.1.4 Situation 3 . . . 114
A.1.5 Situation 5 . . . 114
A.2 Résolutions symplectiques de $\mu^{-1}(0)/\!\!/G$ . . . 115
A.2.1 Généralités . . . 115
A.2.2 Situation 2 . . . 116
A.2.3 Situation 3 . . . 117
A.2.4 Situation 5 . . . 117

B Les points fixes de B' comme sous-schémas de W **119**
B.1 Situation 2 . . . 120
B.1.1 Cas $\dim(V) = 2$ . . . 120
B.1.2 Cas $\dim(V) = 3$ . . . 120
B.2 Situations 3 à 5 . . . 121
B.2.1 Cas $\dim(V) = 2$ dans la situation 3 . . . 121
B.2.2 Cas $\dim(V) = 3$ dans les situations 3 et 4 . . . 121
B.2.3 Cas $\dim(V) = 4$ dans la situation 5 . . . 121

Bibliographie **122**

Introduction

Contexte

La motivation de ce mémoire provient d'une construction classique de résolution des singularités de certaines variétés qui sont des quotients par des groupes finis. Plus précisément, soient G un groupe fini, W une représentation linéaire de dimension finie de G et $\nu : W \to W/G$ le morphisme de passage au quotient. En général, le morphisme ν n'est pas plat et le quotient W/G est singulier. On peut construire une platification universelle de ν en considérant le G-schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^G(W)$. Celui-ci paramètre les sous-schémas fermés G-stables de W dont l'anneau des coordonnées est isomorphe à la représentation régulière de G comme G-module. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Hilb}^G(W) \arrow[d, "\gamma"] \\ W \arrow[r, "\nu"'] & W/G \end{tikzcd}$$

où π est la famille universelle (plate par définition), p est la projection naturelle et γ est le morphisme *de Hilbert-Chow* qui à un sous-schéma Z de W associe le point Z/G de W/G. Le morphisme de Hilbert-Chow est propre, et c'est un isomorphisme au dessus de l'ouvert de platitude U de ν (celui-ci consiste en les G-orbites dans W dont le groupe d'isotropie est trivial). On définit la composante principale de $\mathrm{Hilb}^G(W)$ par

$$\mathrm{Hilb}^G(W)^{\mathrm{prin}} := \overline{\gamma^{-1}(U)}.$$

La restriction $\gamma : \mathrm{Hilb}^G(W)^{\mathrm{prin}} \to W/G$ est birationnelle et propre. Il est donc naturel de se demander si le morphisme γ, éventuellement restreint à $\mathrm{Hilb}^G(W)^{\mathrm{prin}}$, est une résolution des singularités de W/G. Autrement dit, on souhaite connaître les couples (G, W) tels que $\mathrm{Hilb}^G(W)$ soit une variété lisse. Et lorsque $\mathrm{Hilb}^G(W)$ est singulier, on veut savoir si sa composante principale est lisse. La réponse n'est pas connue en général, mais on a tout de même (entre autres) les résultats suivants :

- Si $\dim(W) \leq 2$, alors $\mathrm{Hilb}^G(W)$ est une variété lisse. En particulier, si $W = \mathbb{A}^2_k$ et si $G \subset SL(W)$, alors Ito et Nakamura ont montré que γ est l'unique résolution crépante de W/G (voir [IN96, IN99]). Signalons que cette construction joue un rôle clé dans la correspondance de McKay.

- Si $\dim(W) = 3$ et $G \subset SL(W)$, Bridgeland, King et Reid ont montré par des méthodes homologiques que $\mathrm{Hilb}^G(W)$ est encore une variété lisse, et que γ est une résolution crépante de W/G (voir [BKR01]).

- Si $\dim(W) = 4$, alors $\mathrm{Hilb}^G(W)$ peut être pathologique. Par exemple, si $G \subset SL_2(k)$ est le groupe tétrahédral binaire et si W est la somme directe de deux copies de la représentation standard, alors Lehn et Sorger ont montré que $\mathrm{Hilb}^G(W)^{\mathrm{prin}}$ est lisse, mais que $\mathrm{Hilb}^G(W)$ est réductible (voir [LS08]).

Par la suite, on travaille sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0, et on considère la situation plus générale où G est un groupe réductif, W est une représentation linéaire de dimension finie de G et $\nu : W \to W/\!\!/G$ est le morphisme de passage au quotient. Ici $W/\!\!/G$ désigne le quotient catégorique, c'est-à-dire le spectre de l'algèbre des invariants $k[W]^G$; celle-ci est intègre et de type fini (car G est réductif), donc $W/\!\!/G$ est une variété irréductible. En général, comme c'était déjà le cas lorsque G est fini, le quotient $W/\!\!/G$ est singulier et le morphisme ν n'est pas plat. On dispose toujours d'une platification universelle de ν ; celle-ci est donnée par le schéma de Hilbert invariant construit par Alexeev et Brion ([AB05, Bri10]). On en rappelle brièvement la définition (voir la section 1.1 pour plus de détails). On note $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des G-modules irréductibles et h une fonction de $\mathrm{Irr}(G)$ dans $\mathbb{N}$. Une telle fonction h est appelée fonction de Hilbert. Le schéma de Hilbert invariant $\mathrm{Hilb}_h^G(W)$ paramètre les sous-schémas fermés G-stables Z de W, tels que

$$k[Z] \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus h(M)}$$

comme G-module. On note

$$\mathcal{H} := \mathrm{Hilb}_h^G(W)$$

pour alléger les notations. Si $h(V_0) = 1$, où V_0 est la représentation triviale de G, alors on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\gamma"] \\ W \arrow[r, "\nu"'] & W/\!\!/G \end{tikzcd}$$

où π est la famille universelle, p est la projection naturelle et γ est un morphisme propre qui fait commuter le diagramme. Si de plus on fixe $h = h_W$, la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν, alors le morphisme *de Hilbert-Chow* $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!\!/G$ est un isomorphisme au dessus de l'ouvert de platitude U du morphisme ν. En particulier, ν est plat si et seulement si $\mathcal{H} \cong W/\!\!/G$. Par analogie avec le cas des groupes finis, on définit la composante principale de $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{H}^{\mathrm{prin}} := \overline{\gamma^{-1}(U)}.$$

La restriction $\gamma : \mathcal{H}^{\mathrm{prin}} \to W/\!\!/G$ est birationnelle et propre, d'où la

Question. *Dans quels cas le morphisme γ, éventuellement restreint à la composante principale, est-il une résolution des singularités de $W/\!\!/G$?*

Le schéma de Hilbert invariant a été très étudié ces dernières années ([Bud10, CF09, Jan07, JR09, PVS10, ...]), mais surtout en relation avec des problèmes de classification. Lorsque le groupe G est infini, la question précédente est totalement ouverte !

Résultats

Dans ce mémoire, on apporte des éléments de réponse à la question ci-dessus lorsque G est un groupe classique et que W est une représentation classique de G. Nous décrivons explicitement $\mathcal{H}$ lorsque :

- $G = SL_n(k)$ et $W := V^{\oplus n'}$ est la somme directe de n' copies de la représentation standard (théorème 1.5.11),
- $G = GL_n(k)$, $n \leq 2$, et $W := V^{\oplus n_1} \oplus V^{*\oplus n_2}$ est la somme directe de n_1 copies de la représentation standard et de n_2 copies de la représentation duale (théorèmes 2.1.16 et 2.1.25),
- $G = O_n(k)$ ou $Sp_{2n}(k)$, $n \leq 2$, et W est la somme directe de n' copies de la représentation standard (théorèmes 3.1.11 et 3.3.15).

Dans chacun de ces cas, on donne d'une part des équations pour $\mathcal{H}$, et on réalise d'autre part $\mathcal{H}$ comme l'espace total d'un fibré homogène sur une grassmannienne (ou sur un produit de deux grassmanniennes lorsque $G = GL_n(k)$). Notre description implique le

Théorème A. *Le schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}$ est une variété lisse dans les cas suivants :*

- $G = SL_n(k)$ *et* n *quelconque,*
- $G = GL_n(k)$ *et* $n \leq 2$*,*
- $G = O_n(k)$ *et* $n \leq 2$*,*
- $G = Sp_{2n}(k)$ *et* $n \leq 2$*.*

Il convient d'ajouter à cette liste les cas "triviaux" où le morphisme ν est plat et le quotient $W/\!/G$ est lisse (voir les corollaires 2.1.13, 3.1.8, 3.2.4 et 3.3.9). Cependant, nous montrons qu'en général $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ n'est pas une résolution.

Théorème B. [théorèmes 2.1.44, 3.1.25 et 3.2.8]
Le schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}$ est singulier dans les cas suivants :

- $G = GL_3(k)$ *et* $n_1, n_2 \geq 3$*,*
- $G = O_3(k)$ *et* $n' \geq 3$*,*
- $G = SO_3(k)$ *et* $n' = 3$*.*

Dans la section 1.4.1, on définit G' un sous-groupe algébrique réductif de $\mathrm{Aut}^G(W)$. L'existence d'une opération de G' dans W, $W/\!/G$ et $\mathcal{H}$, telle que tous les morphismes que l'on manipule soient G'-équivariants, joue un rôle essentiel dans ce mémoire. Par exemple, pour décrire l'ouvert de platitude du morphisme de passage au quotient $\nu : W \to W/\!/G$ pour les différents groupes classiques, il est (presque) suffisant de connaître la dimension de la fibre de ν en un point de chaque orbite de G'. De même, pour déterminer si $\mathcal{H}$ est lisse ou singulier, il suffit (par un argument de semi-continuité) de déterminer l'espace tangent de $\mathcal{H}$ en un point de chaque orbite fermée.

Tous les quotients étudiés dans ce mémoire sont munis d'une stratification naturelle

$$(*) \qquad X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_N = W/\!/G,$$

où chaque X_i est l'adhérence d'une orbite de G'. Lorsque $\mathcal{H}$ est lisse (c'est-à-dire dans les cas donnés par le théorème A), on montre que le morphisme de Hilbert-Chow γ s'identifie à la composition des éclatements successifs de certaines strates de $W/\!/G$. Donnons un exemple pour rendre les choses plus claires. Soient $G = GL_2(k)$ et $n_1, n_2 > 2$, alors $W/\!/G$ est la variété déterminantielle $X_2 := \{M \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(k) \mid \mathrm{rg}(M) \leq 2\}$. Pour résoudre les singularités de X_2, on éclate $X_0 = \{0\}$, puis on éclate la transformée stricte de $X_1 := \{M \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(k) \mid \mathrm{rg}(M) \leq 1\}$. La variété obtenue est lisse et nous montrons qu'elle est isomorphe à $\mathcal{H}$. De plus, le morphisme de Hilbert-Chow γ s'identifie à la composition de ces deux éclatements.

On s'est également intéressé aux schémas de Hilbert invariants liés aux réductions symplectiques. Plus précisément, soient G un groupe classique et

$$W := V^{\oplus d} \oplus V^{*\oplus d}$$

la somme directe de d copies de la représentation standard et de d copies de la représentation duale. La variété W est naturellement munie d'une forme symplectique qui est préservée par G. On note $\mu : W \to \mathfrak{g}^*$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, *l'application moment* pour l'opération de G dans W, et on définit la réduction symplectique de W par

$$W/\!/\!/G := \mu^{-1}(0)/\!/G.$$

Dans tous nos exemples le quotient $W/\!/G$ n'est pas symplectique (sauf lorsqu'il est trivial). En revanche, les composantes irréductibles de $W/\!/\!/G$ (munies de leur structure réduite) sont toujours symplectiques. Lorsque G est un groupe fini, de "bonnes" propriétés géométriques pour $W/\!/\!/G$ donnent de "bonnes" propriétés géométriques pour $V^{\oplus d}/\!/G$, et on espère que cela reste vrai lorsque G est un groupe réductif arbitraire. On a par exemple la

Conjecture (Kaledin, Lehn, Sorger)**.** *Si chaque composante irréductible de $W/\!/\!/G$, munie de sa structure réduite, admet une résolution symplectique, alors le quotient $V^{\oplus d}/\!/G$ est lisse.*

Tous les exemples traités dans ce mémoire vérifient cette conjecture. Par ailleurs, lorsque $W///G$ est réduit et irréductible, on a encore le morphisme de Hilbert-Chow

$$\gamma : \operatorname{Hilb}^G_{h_s}(\mu^{-1}(0)) \to W///G,$$

où h_s est la fonction de Hilbert de la fibre générique du morphisme $\mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)//G$. On note

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}} := \operatorname{Hilb}^G_{h_s}(\mu^{-1}(0))$$

pour alléger les notations (l'indice s est pour *symplectique*). Comme précédement, on se demande dans quels cas le morphisme de Hilbert-Chow γ, éventuellement restreint à la composante principale, est une résolution des singularités de $W///G$.
Lorsque $G = \mathbb{G}_m$, $O_2(k)$ ou $Sp_2(k)$, nous décrivons explicitement $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ par des équations. Mentionnons que le cas $G = Sp_2(k)$ et $d = 3$ a été traité par Becker dans [Bec10]. Puis, pour certaines valeurs de n et de d, nous décrivons la composante principale $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ comme l'espace total d'un fibré homogène sur une variété de drapeaux. Notre description implique le

Théorème C. [corollaires 2.2.18, 3.4.11 et 3.5.12]
La composante principale $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ est lisse dans les cas suivants :

- $G = GL_n(k)$ *et*
  - d *est pair et* $d \leq n+1$,
  - $n = 1$ *et* d *est quelconque,*
  - $n = 2$ *et* $d \neq 3$,
- $G = O_n(k)$ *et*
  - $d \leq \frac{n+1}{2}$,
  - $n \leq 2$ *et* d *est quelconque,*
- $G = Sp_{2n}(k)$ *et*
  - $n = 1$ *et* $d \geq 3$,
  - $n = 2$ *et* $d \geq 5$.

A cette liste s'ajoutent les cas "triviaux" où $\mathcal{H}_{\mathrm{s}} \cong W///G$. Nous avons également obtenu la

Proposition D. [proposition 2.2.20]
Si $G = GL_n(k)$ et $d \geq 2n$, le schéma $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est toujours réductible.

Toutes les réductions symplectiques $W///G$ qui apparaissent dans ce mémoire sont des adhérences d'orbites nilpotentes (ou bien des revêtements doubles d'adhérences d'orbites nilpotentes lorsque $G = SO_n(k)$). En particulier, ce sont des variétés symplectiques et elles admettent une stratification naturelle analogue à (*).

Pour démontrer les théorèmes A, B et C, on montre dans chaque cas l'existence d'un *principe de réduction* (section 1.5.1) qui permet de réaliser $\mathcal{H}$ comme l'espace total d'un fibré G'-homogène sur une base projective dont la fibre est isomorphe à un schéma de Hilbert invariant plus simple que $\mathcal{H}$. Par exemple, pour déterminer $\mathcal{H}$ lorsque $G = SL_n(k)$ et $n' \geq n$, il suffit de le déterminer pour $n' = n$. On n'a malheureusement pas pu obtenir de tel *principe de réduction* pour $SO_n(k)$. L'ingrédient clé qui fait fonctionner *le principe de réduction* est la

Proposition E. [proposition 1.3.1]
Pour tout $M \in \operatorname{Irr}(G)$, il existe un G'-sous-module $F_M \subset \operatorname{Hom}^G(M, k[W])$ de dimension finie qui engendre $\operatorname{Hom}^G(M, k[W])$ comme $k[W]^G, G'$-module, et il existe un morphisme de schémas G'-équivariant

$$\delta_M : \mathcal{H} \to \operatorname{Gr}(h_W(M), F_M^*).$$

Une fois que l'on a effectué cette étape de réduction, on fixe B' un sous-groupe de Borel de G' et on cherche les points fixes de B' dans $\mathcal{H}$ (qui sont en nombre fini dans tous mes exemples). Si $\mathcal{H}$ admet un unique point fixe z_0, alors $\mathcal{H}$ est connexe et z_0 appartient à la composante principale $\mathcal{H}^{\text{prin}}$. Sinon, on utilise la théorie des bases de Gröbner pour déterminer les points fixes de B' qui sont dans $\mathcal{H}^{\text{prin}}$. On calcule alors la dimension de l'espace tangent à $\mathcal{H}$ en chacun de ces points fixes, et on la compare avec la dimension de $\mathcal{H}^{\text{prin}}$. Si toutes ces dimensions coïncident, alors nécessairement $\mathcal{H}^{\text{prin}}$ est une composante connexe lisse de $\mathcal{H}$. Sinon, plusieurs pathologies sont possibles. Le schéma $\mathcal{H}$ peut être réductible, non réduit ou encore ses composantes irréductibles munies de leur structure réduite peuvent être singulières. Déterminer dans laquelle de ces situations l'on se trouve est un problème difficile. Je n'ai généralement pas été en mesure de le résoudre.

Il doit être souligné que la proposition E joue un rôle de premier plan dans tout ce mémoire, et qu'elle sera sans doute très utile à l'étude de futurs exemples de schémas de Hilbert invariants. On peut montrer qu'il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{E}$ de $\mathrm{Irr}(G)$ tel que le morphisme

$$\gamma \times \prod_{M \in \mathcal{E}} \delta_M : \mathcal{H} \longrightarrow W/\!/G \times \prod_{M \in \mathcal{E}} \mathrm{Gr}(h_W(M), F_M^*)$$

soit une immersion fermée (c'est une conséquence de la construction de $\mathcal{H}$ comme sous-schéma fermé du schéma de Hilbert multigradué). Ce constat suggère de choisir une représentation irréductible "simple" M_1 de G et de regarder si $\gamma \times \delta_{M_1}$ est une immersion fermée de $\mathcal{H}$. Si tel est le cas, alors il faut ensuite identifier l'image. Sinon, on on choisit une autre représentation irréductible "simple" M_2 et on regarde si $\gamma \times \delta_{M_1} \times \delta_{M_2}$ est une immersion fermée de $\mathcal{H}$. Cette procédure s'arrête en un nombre fini d'étapes et permet de construire une immersion fermée de $\mathcal{H}$ qui soit explicite et aussi simple que possible.

Une partie "Questions ouvertes" figure à la fin de ce mémoire. Elle permet de faire le point sur les résultats que l'on a obtenus et sur les problèmes qu'il reste à résoudre pour espérer une meilleure compréhension des schémas de Hilbert invariants. Ce mémoire s'achève par les annexes A et B. Dans l'annexe A, on montre d'une part que les résolutions de $W/\!/G$ données par le morphisme de Hilbert-Chow lorsque $\mathcal{H}$ est lisse (voir le théorème A) ne sont jamais crépantes ; on étudie d'autre part les liens entre la restriction du morphisme de Hilbert-Chow $\gamma : \mathcal{H}_{\text{s}}^{\text{prin}} \to W/\!/\!/G$ et les résolutions symplectiques de la réduction symplectique $W/\!/\!/G$. L'annexe B est consacrée à l'étude de certaines propriétés géométriques des fibres de la famille universelle $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$.

Chapitre 1

Le schéma de Hilbert invariant

1.1 Généralités

L'article d'exposition [Bri10] fournit une introduction détaillée aux schémas de Hilbert invariants. Dans cette section on donne quelques définitions et propriétés fondamentales de ces schémas.

On suppose que le lecteur a des notions de base de la théorie des schémas ([Har77]), la théorie des groupes algébriques linéaires ([Bor91]) et la théorie des représentations des groupes algébriques réductifs ([FH91]). On travaille sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0 et tous les schémas considérés par la suite sont supposés séparés et de type fini sur k. Pour nous, une variété sera toujours un schéma réduit et irréductible. Soient G un groupe algébrique réductif et $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des G-modules irréductibles. On note V_0 la représentation triviale de G. Si N est un G-module rationnel, alors on a une décomposition de N en G-modules irréductibles :

$$N \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} N_{(M)} \otimes M \tag{1.1}$$

où $N_{(M)} := \mathrm{Hom}^G(M, N)$ est l'espace vectoriel des morphismes G-équivariants de M dans N. Le G-module $N_{(M)} \otimes M$ s'appelle la composante isotypique de N associée à M et $\dim(N_{(M)})$ est la multiplicité de M dans N. On note $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels. Si pour tout $M \in \mathrm{Irr}(G)$ on a $\dim(N_{(M)}) < \infty$, alors on définit

$$\begin{array}{rccc} h & : & \mathrm{Irr}(G) & \to & \mathbb{N} \\ & & M & \mapsto & \dim(N_{(M)}) \end{array}$$

la fonction de Hilbert du G-module N. Plus généralement, on appelle fonction de Hilbert une fonction $h\colon \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{N}$.

Soient S un schéma, $\mathcal{Z}$ un G-schéma et $\pi : \mathcal{Z} \to S$ un morphisme affine, de type fini et G-invariant. D'après [Bri10, §2.3], le faisceau $\mathcal{F} := \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ admet la décomposition suivante comme $\mathcal{O}_S, G$-module :

$$\mathcal{F} \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{F}_{(M)} \otimes M \tag{1.2}$$

où l'opération de G dans $\mathcal{F}$ est induite par l'opération de G dans chaque M, et chaque $\mathcal{F}_{(M)} := \mathrm{Hom}^G(M, \mathcal{F})$ est un $\mathcal{F}^G$-module cohérent. On dit que la famille π est à multiplicités finies si $\mathcal{F}^G$ est un $\mathcal{O}_S$-module cohérent. Si de plus π est plat, alors chaque $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{F}_{(M)}$ est localement libre de rang fini (et ce rang est constant sur une base connexe). Toutes les familles considérées par la suite seront supposées plates et à multiplicités finies.

Définition 1.1.1. Soient $h\colon \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{N}$ une fonction de Hilbert et W un G-schéma affine. On définit le foncteur de Hilbert $Hilb_h^G(W) : Sch^{op} \to Ens$ par :

$$S \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{Z} \hookrightarrow S \times W \\ \pi \searrow \downarrow p_1 \\ S \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{Z} \text{ sous-schéma fermé } G\text{-stable}, \\ \pi \text{ morphisme plat}, \\ \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{F}_M \otimes M, \\ \mathcal{F}_M \text{ loc. libre de rang } h(M) \text{ sur } \mathcal{O}_S. \end{array} \right\}.$$

On fixe W un G-schéma affine. On appelle famille plate de G-sous-schémas fermés de W au dessus de S un élément $(\pi : \mathcal{Z} \to S) \in Hilb_h^G(W)(S)$, avec h est une fonction de Hilbert arbitraire. D'après [Bri10, Theorem 2.11], le foncteur $Hilb_h^G(W)$ est représenté par un schéma quasi-projectif $\mathrm{Hilb}_h^G(W)$: le schéma de Hilbert invariant associé au G-schéma affine W et à la fonction de Hilbert h. On note $\mathrm{Univ}_h^G(W) \subset W \times \mathrm{Hilb}_h^G(W)$, muni de la seconde projection, la famille universelle correspondante. Par définition, la famille universelle vérifie la propriété suivante : pour tout $(\pi : \mathcal{Z} \to S) \in Hilb_h^G(W)(S)$, il existe un unique morphisme $g : S \to \mathrm{Hilb}_h^G(W)$ tel que

$$\mathcal{Z} \cong \mathrm{Univ}_h^G(W) \times_{\mathrm{Hilb}_h^G(W)} S.$$

Remarque 1.1.2. La construction du schéma de Hilbert invariant par Alexeev et Brion repose sur une réduction (via la théorie des représentations) au schéma de Hilbert multigradué construit par Haiman et Sturmfels dans [HS04].

L'algèbre des invariants $k[W]^G \subset k[W]$ est de type fini, donc c'est l'algèbre d'un schéma affine $W/\!/G$, muni d'un morphisme de passage au quotient $\nu : W \to W/\!/G$. On dit que $W/\!/G$ est le quotient catégorique de W par G. Les propriétés du quotient $W/\!/G$ sont données dans [SB00, §3], en particulier :

- si W est irréductible (resp. réduit), alors $W/\!/G$ est irréductible (resp. réduit),
- si W est normal, alors $W/\!/G$ est normal ([SB00, §3.2, Théorème 2]),
- si W est un G-module rationnel, alors $W/\!/G$ est de Cohen-Macaulay ([SB00, §3.4, Théorème 4]),
- si W est un G-module rationnel de dimension finie et si tout caractère multiplicatif de G est trivial, alors $W/\!/G$ est de Gorenstein ([SB00, §4.4, Théorème 4]).

Le lemme 1.1.3 et la proposition 1.1.6 qui suivent sont démontrés dans [Bri10, Proposition 3.15], nous en redonnons les démonstrations avec plus de détails.

Lemme 1.1.3. *Soient G un groupe algébrique réductif, W un G-schéma affine, h une fonction de Hilbert telle que $h(V_0) = 1$, S un schéma arbitraire et $(\pi : \mathcal{Z} \to S) \in Hilb_h^G(W)(S)$. Alors il existe un morphisme $f : S \to W/\!/G$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\pi"'] & W \arrow[d, "\nu"] \\ S \arrow[r, "f"'] & W/\!/G \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Démonstration. On note $p_2 : \mathcal{Z} \to W$ le morphisme obtenu en composant l'inclusion $\mathcal{Z} \hookrightarrow S \times W$ avec la seconde projection $S \times W \to W$. Montrons que $\mathcal{F}^G \cong \mathcal{O}_S$ via le morphisme $\pi^\# : \mathcal{O}_S \to \mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}^G \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{F}_{(M)} \otimes M^G = \mathcal{F}_{V_0} \otimes {V_0}^G = \mathcal{F}_{V_0}.$$

Puis, π induit le morphisme $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_{V_0} \cong \mathcal{F}^G$ entre $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang 1. Or, pour chaque point fermé $s \in S(k)$, la fibre de $\mathcal{O}_S$ en s vaut

$$\mathcal{O}_S(s) := \mathcal{O}_{S,s}/\mathcal{M}_s = k(s) = k$$

puisque k n'admet pas d'extension de dimension finie, et la fibre de $\mathcal{F}_{V_0}$ en s vaut :

$$\mathcal{F}_{V_0}(s) \cong (\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{Z}})^G(s) = (\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{Z}})^G \otimes k(s) = ((\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}) \otimes k(s))^G = k[\mathcal{Z}_s]^G \cong k.$$

Et sur chaque fibre, le morphisme $\phi(s) : k \to k$ est un isomorphisme. Donc, d'après le lemme de Nakayama, pour chaque $s \in S(k)$, le morphisme $\phi_s : \mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{F}_{V_0,s}$ est un isomorphisme, et donc ϕ est un isomorphisme. Autrement dit, le morphisme $\pi : \mathcal{Z} \to S$ induit un isomorphisme $\pi/\!/G : \mathcal{Z}/\!/G \to S$. On note $f : S \to W/\!/G$ l'application obtenue en composant $(\pi/\!/G)^{-1}$ avec l'inclusion $\mathcal{Z}/\!/G \subset W/\!/G$ et on vérifie alors que f fait commuter le diagramme (1.3). $\square$

D'après le lemme 1.1.3 et par définition du produit fibré, on a une immersion fermée $\mathcal{Z} \hookrightarrow S\times_{W/\!/G}W$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, dotted, "\pi"'] & S\times_{W/\!/G}W \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & W \arrow[d, two heads, "\nu"] \\ & S \arrow[r, "f"'] & W/\!/G \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Soit h une fonction de Hilbert telle que $h(V_0) = 1$. Si l'on prend $S = \mathrm{Hilb}_h^G(W)$ dans le lemme 1.1.3, alors on obtient l'existence d'un morphisme $\gamma : \mathrm{Hilb}_h^G(W) \to W/\!/G$ tel que le diagramme (1.4) commute. Ce morphisme γ est appelé morphisme de Hilbert-Chow et va jouer un rôle très important par la suite. Ce morphisme est propre ([Bri10, Proposition 3.12]) et donc projectif.

On suppose dorénavant que le schéma affine W est réduit (mais non nécessairement irréductible) et que $W/\!/G$ est irréductible. D'après [Eis95, Theorem 14.4], le morphisme $\nu : W \to W/\!/G$ est plat sur un ouvert non vide de $W/\!/G$. On note $(W/\!/G)_*$ le plus grand ouvert de platitude.

Définition 1.1.4. La décomposition (1.2) implique que toutes les fibres au dessus de $(W/\!/G)_*$ ont la même fonction de Hilbert. On note h_W cette fonction de Hilbert ; celle-ci est égale à la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν. Enfin, on note $\mathcal{H} := \mathrm{Hilb}_{h_W}^G(W)$ et $\mathcal{X} := \mathrm{Univ}_{h_W}^G(W)$.

Remarque 1.1.5. Si l'une des fibres de ν au dessus de $(W/\!/G)_*$ est isomorphe au groupe G, alors $h_W(M) = \dim(M)$ puisque

$$k[G] \cong \bigoplus_{M\in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus \dim(M)}$$

comme G-module à gauche.

La proposition qui suit fournit un rôle privilégié à h_W :

Proposition 1.1.6. *Soient G un groupe algébrique réductif, W un G-schéma affine, $\nu : W \twoheadrightarrow W/\!/G$ le morphisme de passage au quotient, $(W/\!/G)_*$ l'ouvert de platitude de ν et $h = h_W$ la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν. Alors γ induit un isomorphisme*

$$\gamma^{-1}((W/\!/G)_*) \xrightarrow{\cong} (W/\!/G)_* \ .$$

Démonstration. Quitte à remplacer W par un ouvert affine G-stable contenu dans $\nu^{-1}((W/\!/G)_*)$, on peut supposer que ν est plat sur W. On souhaite montrer que, dans ce cas, $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ est un isomorphisme. On fixe S un schéma arbitraire, $(\pi : \mathcal{Z} \to S) \in Hilb_{h_W}^G(W)(S)$ et on reprend les notations du diagramme (1.4).

Par hypothèse, ν est plat sur W, donc $p_1 : S \times_{W/\!/G} W \to S$ est une famille plate dont chaque fibre F_s a pour fonction de Hilbert h_W. De même, par définition, $\pi : \mathcal{Z} \to S$ est aussi une famille plate dont toutes les fibres $\mathcal{Z}_s$ ont pour fonction de Hilbert h_W. Ensuite, on a le morphisme surjectif de $\mathcal{O}_S$-modules $p_{1*}\mathcal{O}_{S\times_{W/\!/G}W} \twoheadrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$. Mais les morphismes π et p_1 sont tous deux G-invariants, donc il s'agit en fait d'un morphisme de $\mathcal{O}_S, G$-modules. On en déduit, pour chaque $M \in \mathrm{Irr}(G)$, un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_S, G$-modules : $(p_{1*}\mathcal{O}_{S\times_{W/\!/G}W})_{(M)} \twoheadrightarrow (\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})_{(M)}$. En passant aux fibres, on obtient pour chaque $s \in S(k)$ le morphisme surjectif :

$$k[F_s]_{(M)} \twoheadrightarrow k[\mathcal{Z}_s]_{(M)}.$$

Or, par définition de $\mathcal{Z}$ et par hypothèse sur ν, les espaces vectoriels $k[\mathcal{Z}_s]_{(M)}$ et $k[F_s]_{(M)}$ ont la même dimension $h_W(M)$ et donc $k[F_s]_{(M)} \cong k[\mathcal{Z}_s]_{(M)}$. D'après le lemme de Nakayama $(p_{1*}\mathcal{O}_{S\times_{W/\!/G}W})_{(M)} \cong (\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})_{(M)}$, d'où un isomorphisme $\mathcal{Z} \cong S\times_{W/\!/G}W$. Il s'ensuit que $W/\!/G$ représente le foncteur de Hilbert, $\nu : W \to W/\!/G$ est la famille universelle et $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ est un isomorphisme. □

Définition 1.1.7. On définit la composante principale de $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{H}^{\mathrm{prin}} := \overline{\gamma^{-1}((W/\!/G)_*)}.$$

La variété $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ est une composante irréductible de $\mathcal{H}^{\mathrm{red}}$, le schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}$ muni de sa structure réduite. La restriction du morphisme de Hilbert-Chow $\gamma : \mathcal{H}^{\mathrm{prin}} \to W/\!/G$ est un isomorphisme au dessus de $(W/\!/G)_*$ et donc un morphisme birationnel et projectif.

On termine cette section avec la proposition suivante ([Bri10, Proposition 3.10]) :

Proposition 1.1.8. *Soit G' un groupe algébrique tel que $G' \subset \mathrm{Aut}^G(W)$, alors G' opère dans le schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}$ et dans $\mathcal{X} \subset W \times \mathcal{H}$ de telle sorte que tous les morphismes qui apparaissent dans le diagramme (1.4) soient G'-équivariants.*

Remarque 1.1.9. Sous les hypothèses de la proposition 1.1.8, le morphisme $\pi^\# : \mathcal{O}_{\mathcal{H}} \to \mathcal{F} := \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est un morphisme de G'-modules, et les $\mathcal{F}_{(M)}$ qui apparaissent dans la décomposition (1.2) sont des $\mathcal{O}_S, G'$-modules.

1.2 Points fixes pour l'opération d'un groupe de Borel et espaces tangents

On fixe un sous-groupe algébrique $G' \subset \mathrm{Aut}^G(W)$ et un sous-groupe de Borel $B' \subset G'$. Dans cette section, on démontre une série de lemmes qui seront utiles par la suite pour montrer des résultats de connexité et déterminer les espaces tangents en certains points de $\mathcal{H}$.

Lemme 1.2.1. *On suppose que $W/\!\!/G$ admet une unique orbite fermée pour l'opération de G' et que cette orbite est un point x. Alors chaque fermé G'-stable de $\mathcal{H}$ contient au moins un point fixe pour l'opération de B'. Si de plus $\mathcal{H}$ admet un unique point fixe de B', alors $\mathcal{H}$ est connexe.*

Démonstration. Le morphisme γ est projectif et G'-équivariant donc la fibre ensembliste $\gamma^{-1}(x)$ est une G'-variété projective. Soit C un fermé G'-stable de $\mathcal{H}$, alors $\gamma(C)$ est un fermé G'-stable de $W/\!\!/G$. Donc $x \in \gamma(C)$, autrement dit $C \cap \gamma^{-1}(x)$ est non-vide. Donc $C \cap \gamma^{-1}(x)$ contient au moins un point fixe pour l'opération de B', d'après le théorème de point fixe de Borel ([Bor91, Theorem 10.4]). Enfin, chaque composante connexe de $\mathcal{H}$ admet au moins un point fixe de B', d'où la dernière assertion du lemme. □

Lemme 1.2.2. *On suppose, comme dans le lemme 1.2.1, que $W/\!\!/G$ admet une unique orbite fermée x pour l'opération de G'. Alors on a l'équivalence :*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}} \text{ est une variété lisse} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall Z \in \mathcal{H}^{B'},\ \dim(T_Z\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}), \text{ et} \\ \mathcal{H} \text{ est connexe.} \end{cases}$$

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est clair. Montrons l'autre implication. On note $d := \dim(\mathcal{H}^{\mathrm{prin}})$. L'ensemble $E := \{Z \in \mathcal{H}^{\mathrm{red}} \mid \dim(T_Z\mathcal{H}) > d\}$ est un fermé G'-stable de $\mathcal{H}^{\mathrm{red}}$. On suppose que E est non-vide. D'après le lemme 1.2.1, le fermé E contient un point fixe de B', noté Z_0 ; alors $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) > d$ ce qui contredit notre hypothèse de départ. Il s'ensuit que E est vide et donc $\mathcal{H}$ est une variété lisse. On a supposé de plus que $\mathcal{H}$ est connexe, donc $\mathcal{H}$ est irréductible d'où $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. □

Soit $Z \in \mathcal{H}(k)$ et $I \subset k[W]$ l'idéal de Z. On note $R := k[W]/I$ l'algèbre des fonctions régulières de Z. On rappelle le résultat important suivant ([Bri10, Proposition 3.5]) :

Proposition 1.2.3. *On a un isomorphisme canonique*

$$T_Z\mathcal{H} \cong \mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R).$$

On suppose maintenant que $R \cong k[G]$ comme G-module, c'est-à-dire pour chaque $M \in \mathrm{Irr}(G)$, on a $h_W(M) = \dim(M)$. Soit N un G-sous-module de $k[W]$ contenu dans I tel que le morphisme naturel de R, G-modules $\delta :\ R \otimes N \to I/I^2$ soit surjectif ; et soit $\mathcal{R}$ un G-sous-module de $R \otimes N$ tel que l'on ait la suite exacte de R, G-modules

$$\begin{array}{ccccccc} R \otimes \mathcal{R} & \xrightarrow{\rho} & R \otimes N & \xrightarrow{\delta} & I/I^2 & \to 0 \\ & & f \otimes 1 & \mapsto & \overline{f} & \end{array} \tag{1.5}$$

où l'on note $\overline{f}$ l'image de $f \in I$ dans I/I^2.

Remarque 1.2.4. Le module N est appelé module des générateurs de I/I^2. Le module $\mathcal{R}$ est appelé module des relations entre les générateurs de I/I^2.

Lemme 1.2.5. *Si δ est un isomorphisme, alors*

$$\dim(\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R) = \dim(N).$$

Démonstration. On a l'isomorphisme canonique d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R^G(R\otimes N, R) & \cong & \mathrm{Hom}^G(N,R) \\ f & \mapsto & (n \mapsto f(1\otimes n)) \\ (r\otimes n \mapsto r\,g(n)) & \leftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

et donc

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Hom}_R^G(R\otimes N, R)) &= \dim(\mathrm{Hom}^G(N,R)) \\ &= \dim(\mathrm{Hom}^G(N, k[G])) \\ &= \dim((k[G]\otimes N^*)^G) \\ &= \dim(\mathrm{Mor}^G(G, N^*)) \\ &= \dim(N) \end{aligned}$$

où l'on note $\mathrm{Mor}^G(G, N^*)$ l'espace vectoriel des morphismes de schémas G-équivariants de G dans N^*. □

On applique le foncteur contravariant et exact à gauche $\mathrm{Hom}_R(\,.\,, R)$ à la suite exacte (1.5) puis on prend les G-invariants. On obtient alors la suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R) \arrow[r, "\delta^*"] & \mathrm{Hom}_R^G(R\otimes N, R) \arrow[r, "\rho^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R^G(R\otimes\mathcal{R}, R) \arrow[d, "\cong"] \\ & & \mathrm{Hom}^G(N,R) & \mathrm{Hom}^G(\mathcal{R}, R) \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

On a donc $T_Z\mathcal{H} \cong \mathrm{Im}(\delta^*) = \mathrm{Ker}(\rho^*)$. De plus, si l'idéal I est B'-stable, alors on peut choisir pour N et $\mathcal{R}$ des $B'\times G$-modules tels que tous les morphismes de la suite exacte (1.5) soient des morphismes de $R, B'\times G$-modules et que tous les morphismes de la suite exacte (1.6) soient des morphismes de B'-modules.

Lemme 1.2.6. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\dim(\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R)) = \dim(N) - \mathrm{rg}(\rho^*).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R)) &= \dim(\mathrm{Ker}(\rho^*)) \\ &= \dim(\mathrm{Hom}_R^G(R\otimes N, R)) - \mathrm{rg}(\rho^*) \\ &= \dim(N) - \mathrm{rg}(\rho^*) \text{ d'après le lemme 1.2.5.} \end{aligned}$$

□

1.3 Construction de morphismes équivariants vers des grassmanniennes

Soit G' un groupe algébrique tel que $G' \subset \mathrm{Aut}^G(W)$ comme précédemment. Si E un espace vectoriel et m un entier, on note $\mathrm{Gr}(m, E)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension m dans E. Le but de cette section est de démontrer la

Proposition 1.3.1. *Pour tout $M \in \mathrm{Irr}(G)$, il existe un G'-sous-module $F_M \subset k[W]_{(M)}$ de dimension finie qui engendre $k[W]_{(M)}$ comme $k[W]^G, G'$-module, et il existe un morphisme de schémas G'-équivariant*

$$\delta_M : \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(h_W(M), F_M^*).$$

Démonstration. Avec les notations du diagramme (1.4), l'inclusion $\mathcal{X} \hookrightarrow W \times_{W/\!/G} \mathcal{H}$ est $G' \times G$-équivariante et donc induit un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}, G' \times G$-modules $p_{2*}\mathcal{O}_{\mathcal{H}\times_{W/\!/G}W} \to \mathcal{F} := \pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Mais $p_{2*}\mathcal{O}_{\mathcal{H}\times_{W/\!/G}W} = \mathcal{O}_{\mathcal{H}} \otimes_{k[W/\!/G]} k[W]$, où l'on rappelle que $k[W/\!/G] = k[W]^G$ par définition de $W/\!/G$. On peut alors considérer la décomposition en $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}, G' \times G$-modules

$$\mathcal{O}_{\mathcal{H}} \otimes_{k[W/\!/G]} k[W] \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{O}_{\mathcal{H}} \otimes_{k[W/\!/G]} k[W]_{(M)} \otimes M \tag{1.7}$$

où l'opération de G' dans $\mathcal{O}_{\mathcal{H}} \otimes_{k[W/\!/G]} k[W]$ est induite par l'opération de G' dans W (et G' opère trivialement dans M). On en déduit, pour chaque $M \in \mathrm{Irr}(G)$, un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}, G'$-modules

$$\mathcal{O}_{\mathcal{H}} \otimes_{k[W/\!/G]} k[W]_{(M)} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{(M)}. \tag{1.8}$$

Il s'ensuit que l'espace vectoriel $k[W]_{(M)}$ engendre $\mathcal{F}_{(M)} = \mathrm{Hom}^G(M, \mathcal{F})$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}, G'$-module. Malheureusement, $k[W]_{(M)}$ est en général un espace vectoriel de dimension infinie. Cependant, $k[W]_{(M)}$ est un $k[W]^G$-module de type fini, donc il existe un G'-module F_M de dimension finie qui engendre $k[W]_{(M)}$ comme $k[W]^G$-module :

$$k[W]^G \otimes F_M \twoheadrightarrow k[W]_{(M)}. \tag{1.9}$$

Ensuite, on déduit de (1.8) et (1.9) le morphisme surjectif de $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}, G'$-modules :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{H}} \otimes F_M \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{(M)} \tag{1.10}$$

où l'on rappelle que $\mathcal{F}_{(M)}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$-module localement libre de rang $h_W(M)$. Or, d'après [EH01, Exercice 6.18], un tel morphisme est équivalent à la donnée d'un morphisme de schémas

$$\delta : \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(\dim(F_M) - h_W(M), F_M).$$

On vérifie que ce morphisme δ est G'-équivariant. Enfin, on a l'isomorphisme G'-équivariant

$$\mathrm{Gr}(\dim(F_M) - h_W(M), F_M) \cong \mathrm{Gr}(h_W(M), F_M^*)$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

Remarque 1.3.2. La proposition 1.3.1 reste vraie plus généralement si l'on considère une fonction de Hilbert h telle que $h(V_0) = 1$.

On termine cette section par une description ensembliste du morphisme δ_M. On rappelle que, pour tout G-module M, on a les isomorphismes canoniques suivants :

$$\begin{array}{ccccc} k[W]_{(M)} := & \mathrm{Hom}^G(M, k[W]) & \cong & (M^* \otimes k[W])^G & \cong & \mathrm{Mor}^G(W, M^*). \\ & (m \mapsto \phi(m)\, f) & & \phi \otimes f & & (w \mapsto f(w)\, \phi) \end{array} \tag{1.11}$$

Via ces isomorphismes, les éléments du G'-module $F_M \subset k[W]_{(M)}$ s'identifient à des morphismes G-équivariants de W dans M^* et l'application δ_M est donnée ensemblistement par :

$$\delta_M : \mathcal{H}(k) \to \mathrm{Gr}(\dim(F_M) - h_W(M), F_M),\ Z \mapsto \mathrm{Ker}(f_Z) \tag{1.12}$$

où

$$\begin{array}{cccc} f_Z & : & F_M & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}_{M,Z} \\ & & q & \mapsto & q_{|Z} \end{array}$$

est l'application linéaire surjective obtenue en passant aux fibres dans (1.10).

1.4 Les différentes situations étudiées

1.4.1 Les différentes situations étudiées

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur k, on note $\mathrm{Hom}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications k-linéaires de E dans F. On a toujours un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(E,F) \cong E^* \otimes F. \tag{1.13}$$

Nous allons nous intéresser aux cinq situations qui suivent.

- *Situation* 1 : soient V et V' des espaces vectoriels de dimensions n et n' respectivement. On note $W := \mathrm{Hom}(V',V)$, $G := SL(V)$ et $G' := GL(V')$. Le groupe $G' \times G$ opère dans W de la façon suivante :

$$\forall w \in W,\ \forall (g',g) \in G' \times G,\ (g',g).w := g \circ w \circ g'^{-1}. \tag{1.14}$$

- *Situation* 2 : soient V, V_1 et V_2 des espaces vectoriels de dimensions n, n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}^*$ respectivement. On note $W := \mathrm{Hom}(V_1,V) \times \mathrm{Hom}(V,V_2)$, $G := GL(V)$ et $G' := GL(V_1) \times GL(V_2)$. Le groupe $G' \times G$ opère dans W de la façon suivante :

$$\forall (u_1,u_2) \in W,\ \forall (g_1,g_2) \in G',\ \forall g \in G,\ (g_1,g_2,g).(u_1,u_2) := (g \circ u_1 \circ g_1^{-1}, g_2 \circ u_2 \circ g^{-1}). \tag{1.15}$$

- *Situation* 3 : comme la situation 1 sauf que l'on considère $G := O(V)$, le groupe des automorphismes de V qui préservent la forme quadratique q sur V définie par :

$$\forall x := (x_1,\dots,x_n) \in V,\ q(x_1,\dots,x_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{1.16}$$

- *Situation* 4 : comme la situation 1 sauf que l'on considère $G := SO(V) = O(V) \cap SL(V)$.

- *Situation* 5 : comme la situation 1 sauf que l'on suppose que n est pair et on considère $G := Sp(V)$, le groupe des automorphismes de V qui préservent la forme symplectique Ω sur V définie par :
(1.17)

$$\forall\ x := (x_1,\dots,x_n),\ y := (y_1,\dots,y_n) \in V,\ \Omega(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) := \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1}y_{2i} - y_{2i-1}x_{2i}.$$

La situation 1, qui est de loin la plus simple, sera traitée dans la section 1.5.2. Les autres situations sont plus compliquées et seront traitées dans les chapitres 2 et 3. Dans chaque situation, V est la représentation standard de G et on note V^* sa duale. Remarquons que, dans les situations 3 à 5, le groupe G préserve une forme bilinéaire non-dégénérée, et donc $V \cong V^*$ comme G-module. On remarque également que les opérations de G' et G sur W commutent dans les cinq situations, donc d'après la proposition 1.1.8, le groupe G' opère dans $W/\!/G$, dans $\mathcal{H}$ et dans $\mathcal{X}$.

Pour tous $p,q \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(k)$ l'espace vectoriel des matrices de taille $p \times q$ à coefficients dans k. Nous serons amené par la suite à faire des calculs explicites sur des idéaux de $k[W]$. On fixe donc une bonne fois pour toute des bases

- $\mathcal{B} := \{b_1,\dots,b_n\}$ de V,
- $\mathcal{B}' := \{c_1,\dots,c_{n'}\}$ de V',
- $\mathcal{B}_1 := \{e_1,\dots,e_{n_1}\}$ de V_1,
- $\mathcal{B}_2 := \{f_1,\dots,f_{n_2}\}$ de V_2,

et on note $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}'^*$, $\mathcal{B}_1^*$, $\mathcal{B}_2^*$ les bases duales associées. Via le choix de ces bases, on a des isomorphismes

- $\mathrm{Hom}(V', V) \cong \mathcal{M}_{n,n'}(k)$,
- $\mathrm{Hom}(V_1, V) \times \mathrm{Hom}(V, V_2) \cong \mathcal{M}_{n,n_1}(k) \times \mathcal{M}_{n_2,n}(k)$,
- $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cong \mathcal{M}_{n_2,n_1}(k)$.

Dans la situation 2, on note

$$B_1 := \mathrm{Stab}_{G'}(\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \ldots, \langle e_1, \ldots, e_{n_1-1} \rangle),$$
$$B_2 := \mathrm{Stab}_{G'}(\langle f_1 \rangle, \langle f_1, f_2 \rangle, \ldots, \langle f_1, \ldots, f_{n_2-1} \rangle).$$

Autrement dit, B_1 (resp. B_2) est le sous-groupe de Borel de $GL_{n_1}(k)$ (resp. $GL_{n_2}(k)$) formé des matrices triangulaires supérieures. Pour $i = 1, 2$, on note U_i le radical unipotent de B_i et T_i le tore maximal des matrices diagonales de B_i. Alors $B' := B_1 \times B_2$ est un sous-groupe de Borel de G', son radical unipotent est $U' := U_1 \times U_2$ et $T' := T_1 \times T_2$ est un tore maximal de B'. Enfin, on note B le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires inférieures de $G \cong GL_n(k)$, U le radical unipotent de B et T le tore maximal des matrices diagonales de B.

Dans les situations 1, 3, 4 et 5, on note

$$B' := \mathrm{Stab}_{G'}(\langle c_1 \rangle, \langle c_1, c_2 \rangle, \ldots, \langle c_1, \ldots, c_{n'-1} \rangle).$$

Autrement dit, B' est le sous-groupe de Borel de G' formé des matrices triangulaires supérieures. On note U' le radical unipotent de B' et T' le tore maximal des matrices diagonales de B'. Enfin, on fixe B un sous-groupe de Borel de G, on note U le radical unipotent de B et T un tore maximal dans B.

1.4.2 Rappels concernant la théorie des représentations des groupes classiques

Notre référence pour la théorie des représentations des groupes classiques est [FH91]. Dans cette section, on fixe des notations et on rappelle quelques faits qui nous seront utiles par la suite. Soient

- E un espace vectoriel de dimension finie d,
- G un sous-groupe fermé, connexe et réductif de $GL(E)$,
- B un sous-groupe de Borel de G,
- T un tore maximal de B.

Le groupe des caractères $\Lambda := \mathcal{X}(T)$ ne dépend pas (à isomorphisme près) des choix de B et T et est appelé le réseau des poids de G. On note $\Phi = \Phi(G, T)$ les racines de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, c'est-à-dire les poids de T dans $\mathfrak{g}$ pour l'action adjointe. Le choix de B définit le sous-ensemble $\Phi_+ \subset \Phi$ des racines positives. On note Π le sous-monoïde de Λ engendré par les éléments de Φ_+ et on définit un ordre partiel sur Λ de la façon suivante :

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \mu \leq \lambda \Leftrightarrow \lambda - \mu \in \Pi.$$

Si M est un G-module irréductible, alors M admet un unique plus haut poids λ pour l'ordre partiel $\leq$ et ce poids détermine entièrement M. On note alors $M = E_\lambda$. On appelle poids dominants, noté Λ_+, l'ensemble des poids qui apparaissent comme plus hauts poids de G-modules irréductibles. On a donc une correspondance bijective

$$\lambda \in \Lambda_+ \leftrightarrow E_\lambda \in \mathrm{Irr}(G).$$

La formule des dimensions de Weyl permet d'exprimer explicitement la dimension de E_λ en fonction de λ ([FH91, Corollary 24.6]).

Remarque 1.4.1. En pratique, on utilisera la notation $S^\lambda(E)$ (resp. $\Gamma_\lambda(E)$) pour désigner E_λ lorsque $G = GL(E)$ (resp. $G = SO(E)$ ou $G = Sp(E)$).

Cas du groupe linéaire

Soit $G := GL(E)$ le groupe linéaire, alors Λ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d et on note $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d\}$ une base de Λ. Pour un choix approprié de B, on a

$$\Lambda_+ = \{r_1\epsilon_1 + \ldots + r_d\epsilon_d \in \Lambda \mid r_1 \geq \ldots \geq r_d\}.$$

Si $r_d \geq 0$ (resp. $r_1 \leq 0$), alors la représentation $S^\lambda(E)$ est polynomiale (resp. duale d'une représentation polynomiale). En particulier, lorsque $r_d \geq 0$, alors $E \mapsto S^\lambda(E)$ est un foncteur appelé foncteur de Schur. Si $r_1.r_d < 0$, alors il existe $1 \leq t \leq d$ tel que $r_t \geq 0 \geq r_{t+1}$ et un unique d-uplet $(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que

$$\lambda = k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \ldots + k_t\epsilon_t - k_{t+1}\epsilon_{t+1} - \ldots - k_d\epsilon_d. \tag{1.18}$$

Cas du groupe spécial orthogonal

Soit $G := SO(E)$ le groupe spécial orthogonal, alors Λ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d', où $d' := E(\frac{d}{2})$ est la partie entière inférieure de $\frac{d}{2}$. On note $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{d'}\}$ une base de Λ. Pour un choix approprié de B, on a

$$\Lambda_+ = \left\{ r_1\epsilon_1 + \ldots + r_{d'}\epsilon_{d'} \in \Lambda \;\middle|\; \begin{array}{ll} r_1 \geq \ldots \geq r_{d'-1} \geq \pm r_{d'} & \text{si } d = 2d' \\ r_1 \geq \ldots \geq r_{d'} \geq 0 & \text{si } d = 2d'+1 \end{array} \right\}.$$

Cas du groupe orthogonal

Soit $G := O(E)$ le groupe orthogonal, alors on a la suite exacte naturelle de groupes :

$$0 \longrightarrow SO(E) \longrightarrow O(E) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \tag{1.19}$$

où $\mathbb{Z}_2$ désigne le groupe d'ordre 2. Cette suite est scindée, donc

$$O(E) \cong SO(E) \ltimes \mathbb{Z}_2 \tag{1.20}$$

où l'on identifie $\mathbb{Z}_2$ à $\left\{\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}\right\}$. Et ce produit est direct lorsque d est impair. On distingue alors deux cas.

1. Si d est impair, alors les représentations irréductibles de G sont paramétrées par les couples $(\lambda, s) \in \Lambda_+ \times \{\pm 1\}$, où Λ_+ est l'ensemble des poids dominants de $SO(E)$. On note M_0 (resp. ϵ) la représentation triviale (resp. signe) de $\mathbb{Z}_2$. La représentation irréductible de $O(E) \cong SO(E) \times \mathbb{Z}_2$ associée à (λ, s) est :
   - $\Gamma_\lambda(E)^+ := \Gamma_\lambda(E) \otimes M_0$ si $s = 1$,
   - $\Gamma_\lambda(E)^- := \Gamma_\lambda(E) \otimes \epsilon$ si $s = -1$.
2. Si d est pair, alors une représentation irréductible de $O(E)$ est soit une représentation irréductible de $SO(E)$ stabilisée par $\mathbb{Z}_2$ (par exemple la représentation standard si $d \geq 4$), soit la somme directe de deux représentations irréductibles de $SO(E)$ échangées par $\mathbb{Z}_2$. Plus précisément, si $\lambda = r_1\epsilon_1 + \ldots + r_{d'}\epsilon_{d'} \in \Lambda_+$, alors on peut considérer la représentation de $O(E)$ induite :
   - si $r_{d'} \neq 0$, alors
   $$\mathrm{Ind}_{SO(E)}^{O(E)}(\Gamma_\lambda(E)) \cong \Gamma_\lambda(E) \oplus \Gamma_{\lambda'}(E)$$
   comme $SO(E)$-module, avec $\lambda' = r_1\epsilon_1 + \ldots + r_{d'-1}\epsilon_{d'-1} - r_{d'}\epsilon_{d'}$. Le $O(E)$-module $\mathrm{Ind}_{SO(E)}^{O(E)}(\Gamma_\lambda(E))$ est irréductible et $\mathbb{Z}_2$ opère en échangeant $\Gamma_\lambda(E)$ et $\Gamma_{\lambda'}(E)$.

- si $r_{d'} = 0$, alors
$$\mathrm{Ind}_{SO(E)}^{O(E)}(\Gamma_\lambda(E)) \cong \Gamma_\lambda(E) \oplus \Gamma_\lambda(E)$$
comme $SO(E)$-module. Le $O(E)$-module $\mathrm{Ind}_{SO(E)}^{O(E)}(\Gamma_\lambda(E))$ se décompose en deux modules irréductibles $\Gamma_\lambda(E)^+$ et $\Gamma_\lambda(E)^-$ sur lesquels $\mathbb{Z}_2$ opère trivialement et par le signe respectivement.

Et toutes les représentations irréductibles de $O(E)$ sont de cette forme.

Cas du groupe symplectique

On suppose que $d = 2d'$ pour un certain $d' \geq 1$ et soit $G := Sp(E)$ le groupe symplectique. Alors Λ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d' et on note $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{d'}\}$ une base de Λ. Pour un choix approprié de B, on a
$$\Lambda_+ = \{r_1\epsilon_1 + \ldots + r_{d'}\epsilon_{d'} \in \Lambda \mid r_1 \geq \ldots \geq r_{d'} \geq 0\}.$$

1.5 Le principe de réduction et le cas du groupe spécial linéaire

1.5.1 Le principe de réduction

On utilise la proposition 1.3.1 pour construire, dans les situations 1,2,3 et 5, un morphisme G'-équivariant ρ de $\mathcal{H}$ vers un espace homogène G'/P où P est un sous-groupe parabolique de G'. Puis, on montre que la fibre schématique de ρ en eP s'identifie à un schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}'$ plus "simple" que $\mathcal{H}$ (proposition 1.5.6). On obtient ensuite un résultat analogue pour la famille universelle $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$ (proposition 1.5.9).

Construction d'un morphisme $\mathcal{H} \to G'/P$ dans la situation 2

Dans le lemme qui suit, on utilise la théorie classique des invariants pour déterminer un G'-sous-module de dimension finie de $\mathrm{Hom}^G(V^*, k[W])$ (resp. $\mathrm{Hom}^G(V, k[W])$) qui engendre ce $k[W]^G$-module. La référence que nous utiliserons systématiquement pour les résultats de la théorie classique des invariant est [Pro07].

Lemme 1.5.1. *1. Le $k[W]^G$-module $k[W]_{(V)}$ est engendré par $\mathrm{Hom}^G(V, W^*)$.*

2. Le $k[W]^G$-module $k[W]_{(V^*)}$ est engendré par $\mathrm{Hom}^G(V^*, W^*)$.

Démonstration. Les preuves étant analogues pour la représentation standard et sa duale, on se contente de traiter uniquement le cas de la représentation standard, c'est-à-dire de montrer que le morphisme naturel

$$k[W]^G \otimes \mathrm{Hom}^G(V, W^*) \to k[W]_{(V)} \tag{1.21}$$

de $k[W]^G, G'$-modules est surjectif. On identifie $k[W]$, l'algèbre des fonctions régulières sur W, avec $S(W^*)$, l'algèbre symétrique de W. Alors

$$\begin{aligned} k[W]_{(V)} &\cong (S(W^*) \otimes V^*)^G \\ &\cong \bigoplus_{p \geq 0, q \geq 0} (S^p(V^{*n_1}) \otimes S^q(V^{n_2}) \otimes V^*)^G \\ &\cong \bigoplus_{\substack{p_1, \ldots, p_{n_1} \geq 0, \\ q_1, \ldots, q_{n_2} \geq 0}} (S^{p_1}(V^*) \otimes \cdots \otimes S^{p_{n_1}}(V^*) \otimes S^{q_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{q_{n_2}}(V) \otimes V^*)^G. \end{aligned}$$

On fixe $(p_1, \ldots p_{n_1}, q_1, \ldots, q_{n_2}) \in \mathbb{N}^{n_1+n_2}$. Alors

$$\begin{aligned} &(S^{p_1}(V^*) \otimes \cdots \otimes S^{p_{n_1}}(V^*) \otimes S^{q_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{q_{n_2}}(V) \otimes V^*)^G \\ &\cong \left(k[V \oplus \cdots \oplus V \oplus V^* \oplus \cdots \oplus V^* \oplus V]_{(p_1, \ldots, p_{n_1}, q_1, \ldots, q_{n_2}, 1)}\right)^G \end{aligned}$$

est l'espace des invariants multihomogènes de multidegré $(p_1, \ldots, p_{n_1}, q_1, \ldots, q_{n_2}, 1)$. On applique l'opérateur de polarisation $\mathcal{P}$ défini dans [Pro07, §3.21] :

$$\begin{aligned}&\left(k[V \oplus \cdots \oplus V \oplus V^* \oplus \cdots \oplus V^* \oplus V]_{(p_1,\ldots,p_{n_1},q_1,\ldots,q_{n_2},1)}\right)^G\\ &\xrightarrow{\mathcal{P}} \left(k[V^{p_1} \oplus \cdots \oplus V^{p_{n_1}} \oplus V^{*q_1} \oplus \cdots \oplus V^{*q_{n_2}} \oplus V]_{\text{multi}}\right)^G.\end{aligned}$$

D'après le premier théorème fondamental pour $GL(V)$ (voir [Pro07, §9.1.4]), on a nécessairement $p + 1 = q$, avec $p := p_1 + \ldots + p_{n_1}$ et $q := q_1 + \ldots + q_{n_2}$ et

$$\left(k[V^{p_1} \oplus \cdots \oplus V^{p_{n_1}} \oplus V^{*q_1} \oplus \cdots \oplus V^{*q_{n_2}} \oplus V]_{\text{multi}}\right)^G$$

est engendré comme espace vectoriel par

$$\left\{ f_\sigma := \prod_{i=1}^{q} (i \mid \sigma(i)),\ \sigma \in \Sigma_q \right\}$$

où l'on note Σ_q le groupe des permutations de $1, \ldots, q$ et pour chaque couple (i, j), $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, q$, la forme bilinéaire $(i \mid j)$ sur $V^p \oplus V^{*q}$ est définie par

$$\forall v_1, \ldots, v_q \in V,\ \forall \phi_1, \ldots, \phi_q \in V^*,\ (i \mid j) : (v_1, \ldots, v_q, \phi_1, \ldots, \phi_q) \mapsto \phi_j(v_i). \tag{1.22}$$

Ensuite, d'après [Pro07, §3.2.2, Theorem], le $k[W]^G$-module

$$\left(S^{p_1}(V^*) \otimes \cdots \otimes S^{p_{n_1}}(V^*) \otimes S^{q_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{q_{n_2}}(V) \otimes V\right)^G$$

est engendré comme espace vectoriel par

$$\{\mathcal{R} f_\sigma,\ \sigma \in \Sigma_q\}$$

où l'on note $\mathcal{R}$ l'opérateur de restitution défini dans [Pro07, §3.2.2].
On fixe $\sigma \in \Sigma_q$, alors

$$\begin{aligned} f_\sigma = \prod_{i=1}^{q} (i \mid \sigma(i)) &= \left(\prod_{i, \sigma(i) \neq q} (i \mid \sigma(i)) \right) \times (\sigma^{-1}(q) \mid q) \\ &= f'_\sigma \times (\sigma^{-1}(q) \mid q). \end{aligned}$$

Donc, pour tous $v_1, \ldots, v_{n_1}, v \in V$ et pour tous $\phi_1, \ldots, \phi_{n_2} \in V^*$, on a

$$\mathcal{R} f_\sigma(v_1, \ldots, v_{n_1}, \phi_1, \ldots, \phi_{n_2}, v) = (\mathcal{R} f'_\sigma(v_1, \ldots, v_{n_1}, \phi_1, \ldots, \phi_{n_2})) \times \phi_{i_0}(v)$$

pour un certain $1 \leq i_0 \leq n_2$. Or $\mathcal{R} f'_\sigma(v_1, \ldots, v_{n_1}, \phi_1, \ldots, \phi_{n_2}) \in k[W]^G$ et $(v \mapsto (\phi_{i_0} \mapsto \phi_{i_0}(v))) \in \mathrm{Hom}^G(V, W^*)$ d'où le résultat. □

On note $F_1 := \mathrm{Hom}^G(V, W^*)$ et $F_2 := \mathrm{Hom}^G(V^*, W^*)$. On a

$$W^* \cong (V_1 \otimes V^*) \oplus (V \otimes V_2^*)$$

comme $G' \times G$-module et donc $F_1 \cong V_2^*$ et $F_2 \cong V_1$ comme G'-modules.
Ecrivons explicitement ces deux isomorphismes dans les bases que l'on a fixées, cela nous sera utile lors de la démonstration du lemme 1.5.5. On a :

$$V_2^* \cong F_1 = \mathrm{Hom}^G(V, W^*),\ f_i^* \to \left(v \to \left([0], [0 \quad \cdots \quad 0 \quad v \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\right)\right) \tag{1.23}$$

où $v \in V$ et $\left([0], [0 \quad \cdots \quad 0 \quad v \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\right) \in W^* \cong \mathrm{Hom}(V, V_1) \times \mathrm{Hom}(V_2, V)$. Le vecteur colonne v occupe la i-ème colonne et les autres colonnes sont toutes nulles.

De manière analogue, on a :

$$V_1 \cong F_2 = \mathrm{Hom}^G(V^*, W^*),\ e_j \to \left(\phi \to \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [0] \right) \right) \tag{1.24}$$

où $\phi \in V^*$ et $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [0] \right) \in W^*$. Le vecteur ligne ϕ occupe la j-ème ligne et les autres lignes sont toutes nulles.

Puis, via l'isomorphisme (1.11), le G'-module F_1 s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mor}^G(W, V^*)$ engendré par les n_2 projections linéaires $p_1, \ldots, p_{n_2}$ de $W \cong (V_1^* \otimes V) \oplus (V^* \otimes V_2)$ sur V^* et le G'-module F_2 s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mor}^G(W, V)$ engendré par les n_1 projections linéaires $q_1, \ldots, q_{n_1}$ de W sur V. Avec ces notations, le lemme 1.5.1 admet la reformulation suivante : tout morphisme G-équivariant de W dans V^* (resp. de W dans V) peut s'écrire comme combinaison linéaire de la forme $\sum_i f_i p_i$ (resp. $\sum_i f_i q_i$), où $f_i \in k[W]^G$. Par la suite, on fera parfois l'abus d'écrire

$$F_1 = \langle p_i, i = 1, \ldots, n_2 \rangle \subset \mathrm{Mor}^G(W, V^*),$$
$$F_2 = \langle q_j, j = 1, \ldots, n_1 \rangle \subset \mathrm{Mor}^G(W, V).$$

On note $m_1 := h_W(V^*)$, $m_2 := h_W(V)$ et on fait l'hypothèse suivante : $1 \leq m_i \leq n_i$, pour $i = 1, 2$. Cette hypothèse sera toujours vérifiée dans les exemples que nous allons traiter. Le but est simplement d'éviter de construire des morphismes triviaux. La proposition 1.3.1 nous donne des morphismes G'-équivariants :

$$\rho_1 :\ \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(m_1, V_1^*),\ Z \mapsto \mathrm{Ker}(q \to q_{|Z}) \ \text{ où } \ q \in F_2,$$

et

$$\rho_2 :\ \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(m_2, V_2),\ Z \mapsto \mathrm{Ker}(q \to q_{|Z}) \ \text{ où } \ q \in F_1.$$

Les grassmanniennes $\mathrm{Gr}(m_1, V_1^*)$ et $\mathrm{Gr}(m_2, V_2)$ sont des espaces homogènes pour les opérations naturelles de $GL(V_1)$ et $GL(V_2)$ respectivement, et donc $\mathrm{Gr}(m_1, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(m_2, V_2)$ est un espace homogène pour l'opération de $G' = GL(V_1) \times GL(V_2)$. On note E_1 le sous-espace vectoriel de V_1^* engendré par les m_1 premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}_1^*$ et on note E_2 le sous-espace vectoriel de V_2 engendré par les m_2 premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$. On a un isomorphisme G'-équivariant

$$\mathrm{Gr}(m_1, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(m_2, V_2) \cong G'/P \tag{1.25}$$

où P est le stabilisateur de $(E_1, E_2) \in \mathrm{Gr}(m_1, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(m_2, V_2)$ dans G', et donc un sous-groupe parabolique. On compose le morphisme $\rho_1 \times \rho_2$ avec l'isomorphisme (1.25), on obtient un morphisme G'-équivariant :

$$\rho :\ \mathcal{H} \to G'/P.$$

Construction d'un morphisme $\mathcal{H} \to G'/P$ dans les situations 1, 3 et 5

On commence par énoncer le

Lemme 1.5.2. *Le $k[W]^G$-module $k[W]_{(V^*)}$ est engendré par* $\mathrm{Hom}^G(V^*, W^*)$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 1.5.1. Les ingrédients clés sont d'une part les opérateurs de polarisation et de restitution ([Pro07, §3.2]) et d'autre part le premier théorème fondamental pour les groupes classiques ([Pro07, §11.2.1]). □

Remarque 1.5.3. Le lemme 1.5.2 est faux pour $G = SO(V)$ si $n' \geq \dim(V) \geq 2$. En effet, on vérifie que le $k[W]^G$-module $k[W]_{(V^*)}$ est engendré par $\mathrm{Hom}^G(V^*, W^* \oplus k[W]_{n-1})$. On écarte par la suite le cas $n' < \dim(V)$ car alors nous verrons que $W/\!/SO(V) \cong W/\!/O(V)$ et on obtient des résultats identiques dans les situations 3 et 4.

On a $\mathrm{Hom}^G(V^*, W^*) \cong V'$ comme G'-module. On note $m := h_W(V^*)$ et on suppose que $1 \leq m \leq n'$. Cette hypothèse sera toujours vérifiée dans les exemples que nous traiterons. La proposition 1.3.1 nous donne un morphisme G'-équivariant :

$$\mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(m, V'^*).$$

On note E le sous-espace vectoriel de V'^* engendré par les m premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}'^*$ et P le stabilisateur de E dans G'. Alors $\mathrm{Gr}(m, V'^*) \cong G'/P$, d'où un morphisme G'-équivariant :

$$\rho : \ \mathcal{H} \to G'/P.$$

Réduction

Soient P un sous-groupe parabolique de G' et F un P-schéma. On considère G' comme une P-variété pour l'opération par multiplication à droite de P :

$$\forall g' \in G', \ \forall p \in P, \ p.g' := g'p^{-1}.$$

On rappelle que si P est un sous-groupe parabolique de G', alors le morphisme de passage au quotient $G' \to G'/P$ est localement trivial pour la topologie de Zariski. D'après [Jan03, §I.5.16], le quotient du P-schéma $G' \times F$ par l'opération du groupe P est naturellement muni d'une structure de G'-schéma. Il s'ensuit que, si X est un G'-schéma muni d'un morphisme G'-équivariant vers G'/P, alors on a un isomorphisme G'-équivariant

$$X \cong G' \times^P F \tag{1.26}$$

où F est la fibre schématique en eP. Et de nombreuses propriétés géométriques et topologiques de X peuvent se lire sur F : lissité, connexité, irréductibilité,...

On se place maintenant dans l'une des situations 1,2,3 ou 5. Le morphisme $\rho : \ \mathcal{H} \to G'/P$ est G'-équivariant et donc, d'après ce qui précède, on a un isomorphisme G'-équivariant

$$\mathcal{H} \cong G' \times^P F$$

où F est la fibre schématique de ρ en eP. Pour déterminer $\mathcal{H}$ comme G'-schéma, on est donc ramené à déterminer F comme P-schéma.

Notation 1.5.4. Si E est un sous-espace vectoriel de V', on note $E^\perp$ l'orthogonal de E dans V'^*. On note :

- $W' := \begin{cases} \mathrm{Hom}(V_1/E_1^\perp, V) \times \mathrm{Hom}(V, E_2) & \text{dans la situation 2,} \\ \mathrm{Hom}(V'/E^\perp, V) & \text{dans les situations 1, 3 et 5} \end{cases}$
- $\mathcal{H}' := \mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W')$,
- $\mathcal{X}' := \mathrm{Univ}^G_{h_W}(W')$ et $\pi' : \ \mathcal{X}' \to \mathcal{H}'$ la famille universelle.

Lemme 1.5.5. *La fibre F du morphisme ρ est isomorphe au schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}'$ et l'opération de P dans F coïncide, via cet isomorphisme, avec l'opération de P dans $\mathcal{H}'$ induite par l'opération de P dans W'.*

Démonstration. On donne ici la démonstration dans la situation 2, la démonstration dans les autres situations est analogue.
Par définition de F, pour tout schéma S, on a :

$$\mathrm{Mor}(S, F) = \left\{ \begin{array}{c} \begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, hook] \arrow[dr, dotted, "\pi"'] & S \times W \arrow[d, "p_1"] \\ & S \end{tikzcd} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \mathcal{Z} \text{ sous-schéma fermé } G\text{-invariant}, \\ \pi \text{ morphisme plat}, \\ \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{Z}} = \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}G} \mathcal{F}_M \otimes M, \\ \mathcal{F}_M \text{ loc. libre de rang } h_W(M) \text{ sur } \mathcal{O}_S, \\ \forall s \in S(k), \ \rho(\mathcal{Z}_s) = E_1 \times E_2. \end{array} \right\}.$$

Or

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{Z}_s) = E_1 \times E_2 &\Leftrightarrow p_{n+1|\mathcal{Z}_s} = \cdots = p_{n_1|\mathcal{Z}_s} = q_{n+1|\mathcal{Z}_s} = \cdots = q_{n_2|\mathcal{Z}_s} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{Z}_s \subset \mathrm{Hom}(V'/E_1^{\perp}, V) \times \mathrm{Hom}(V, E_2) = W'.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}(S,F) &= \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{Z} \hookrightarrow S \times W' \\ \pi \searrow \downarrow p_1 \\ S \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{Z} \text{ sous-schéma fermé } G\text{-invariant}, \\ \pi \text{ morphisme plat}, \\ \pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} = \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}G} \mathcal{F}_M \otimes M, \\ \mathcal{F}_M \text{ loc. libre de rang } h_W(M) \text{ sur } \mathcal{O}_S. \end{array} \right\} \\ &= Hilb^G_{h_W}(W')(S) \\ &\cong \mathrm{Mor}(S, \mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W'))\end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme est une conséquence directe de la définition du schéma de Hilbert invariant comme foncteur représentable. Il s'ensuit que $F \cong \mathcal{H}'$ comme P-schéma. □

D'où la

Proposition 1.5.6. *On a un isomorphisme G'-équivariant*

$$\begin{array}{rcccl} \psi_1 & : & G' \times^P \mathcal{H}' & \cong & \mathcal{H} \\ & & (g', z)P & \mapsto & g'.z \end{array}$$

Remarque 1.5.7. La fonction de Hilbert h_W qui apparaît dans la définition de $\mathcal{H}'$ et de $\mathcal{X}'$ n'est pas égale à la fonction de Hilbert $h_{W'}$ de la fibre générique du morphisme de passage au quotient $W' \to W'//G$ en général et on n'a donc pas de "vraie" réduction dans ce cas. Cependant, dans la plupart des exemples que nous traiterons, on aura bien $h_{W'} = h_W$.

Ensuite, soit $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$ la famille universelle. On note δ la composée

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H} \xrightarrow{\rho} G'/P.$$

Le morphisme δ est G'-équivariant et munit $\mathcal{X}$ d'une structure de fibré G'-homogène. On note F' la fibre schématique de δ en eP, alors d'après (1.26) on a un isomorphisme G'-équivariant

$$\mathcal{X} \cong G' \times^P F'.$$

Donc, pour déterminer $\mathcal{X}$ comme G'-schéma, on est ramené à déterminer F' comme P-schéma.

Lemme 1.5.8. *On a un isomorphisme $F' \cong \mathcal{X}'$ et le morphisme $\pi_{|F'} : F' \to \mathcal{H}'$ s'identifie à la famille universelle $\pi' : \mathcal{X}' \to \mathcal{H}'$. De plus, l'opération de P dans F' coïncide, via cet isomorphisme, avec l'opération de P dans $\mathcal{X}'$ induite par l'opération de P dans W'.*

Démonstration. On identifie $\mathcal{H}'$ à un sous-schéma fermé de $\mathcal{H}$ grâce au lemme 1.5.5. Par définition du schéma de Hilbert invariant, on a le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \hookrightarrow & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{H}' & \hookrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

qui induit le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} G' \times^P \mathcal{X}' & \hookrightarrow & G' \times^P \mathcal{X} & \xrightarrow{\cong} & G'/P \times \mathcal{X} \\ {\scriptstyle Id \times \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id \times \pi} & & \downarrow{\scriptstyle Id \times \pi} \\ G' \times^P \mathcal{H}' & \hookrightarrow & G' \times^P \mathcal{H} & \xrightarrow[\cong]{} & G'/P \times \mathcal{H} \end{array}$$

On en déduit que le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} G' \times^P \mathcal{X}' \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "Id\times\pi'"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ G' \times^P \mathcal{H}' \arrow[r, "\psi_1"'] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

où l'on note ψ_2 le morphisme obtenu en composant le morphisme $G' \times^P \mathcal{X}' \to G'/P \times \mathcal{X}$ avec la seconde projection $G'/P \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. D'après la proposition 1.5.6, le morphisme ψ_1 est un isomorphisme, donc ψ_2 également. On a donc

$$\begin{tikzcd} G' \times^P \mathcal{X}' \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & G' \times^P F' \arrow[dl] \\ & G'/P & \end{tikzcd}$$

et donc $\mathcal{X}' \cong F'$ comme P-schéma. □

D'où la

Proposition 1.5.9. *On a un isomorphisme G'-équivariant*

$$\begin{array}{rcccc} \psi_2 & : & G' \times^P \mathcal{X}' & \cong & \mathcal{X} \\ & & (g', x)P & \mapsto & g'.x \end{array}$$

Corollaire 1.5.10. *On a le diagramme commutatif de G'-schémas suivant :*

$$\begin{tikzcd} G' \times^P \mathcal{X}' \arrow[r, "G' \times^P \pi'"] \arrow[d, "\psi_2"'] & G' \times^P \mathcal{H}' \arrow[r, "G' \times^P \gamma'"] \arrow[d, "\psi_1"'] & G' \times^P W'//G \arrow[d, "\phi"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "\pi"'] \arrow[dr, dotted, "\delta"'] & \mathcal{H} \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "\rho"] & W//G \\ & G'/P & \end{tikzcd} \tag{1.27}$$

où

- *$G' \times^P \pi'$ et $G' \times^P \gamma'$ sont les morphismes induits par π' et γ' respectivement,*
- *ψ_1 et ψ_2 sont les isomorphismes des propositions 1.5.6 et 1.5.9 respectivement,*
- *ϕ est le morphisme induit par l'inclusion de $W'//G$ dans $W//G$ comme sous-variété P-stable,*
- *$\gamma' : \mathcal{H}' \to W'//G$ est le morphisme de Hilbert-Chow.*

Démonstration. D'après ce qui précède, la seule chose à vérifier est que le carré de droite est commutatif. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\gamma"] \\ W'//G \arrow[r, "\phi"'] & W//G \end{tikzcd} \tag{1.28}$$

où la flèche du haut est l'immersion fermée donnée par le lemme 1.5.5. Par définition du morphisme de Hilbert-Chow (voir la section 1.1), le diagramme (1.28) est commutatif. Puis le diagramme

$$\begin{tikzcd} G' \times^P \mathcal{H}' \arrow[r] \arrow[d, "G' \times^P \gamma'"'] & G' \times^P \mathcal{H} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "G' \times^P \gamma"] & G'/P \times \mathcal{H} \arrow[d, "Id\times\gamma"] \\ G' \times^P W'//G \arrow[r] & G' \times^P W//G \arrow[r, "\cong"'] & G'/P \times W//G \end{tikzcd} \tag{1.29}$$

est aussi commutatif et le résultat s'ensuit. □

Par la suite, lorsque nous mentionnerons le principe de réduction, nous ferons implicitement référence aux propositions 1.5.6 et 1.5.9. Dans la section 1.5.2, nous illustrons le principe de réduction en traitant le cas de la situation 1. Nous verrons que dans cette situation, le principe de réduction permet de "trivialiser" l'étude du schéma de Hilbert invariant.

1.5.2 Cas du groupe spécial linéaire

On se place dans la situation 1 : on a $G := SL(V)$, $G' := GL(V')$ et $W := \mathrm{Hom}(V', V)$. L'opération de $G' \times G$ dans W est donnée par (1.14). On note $C(\mathrm{Gr}(n, V'^*)) \subset \Lambda^n(V'^*)$ le cône affine au dessus de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(n, V'^*)$ identifiée à une sous-variété fermée de $\mathbb{P}(\Lambda^n(V'^*))$ via le plongement de Plücker ([Sha94, §4.1, Example 1]). Dans toute cette section, les points de $\mathrm{Gr}(n, V'^*)$ sont ainsi vus comme des points de $\mathbb{P}(\Lambda^n(V'^*))$. On note $Bl_0(C(\mathrm{Gr}(n, V'^*)))$ la variété obtenue en éclatant $C(\mathrm{Gr}(n, V'^*))$ en 0. C'est aussi l'espace total du fibré en droite $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(n,V'^*)}(-1)$ sur $\mathrm{Gr}(n, V'^*)$, c'est-à-dire

$$Bl_0(C(\mathrm{Gr}(n, V'^*))) = \{(x, L) \in C(\mathrm{Gr}(n, V'^*)) \times \mathrm{Gr}(n, V'^*) \mid x \in L\}.$$

Nous allons démontrer le

Théorème 1.5.11. *Si $n' = n > 1$, alors $\mathcal{H} \cong \mathbb{A}^1_k$ et γ est un isomorphisme.*
Si $n' > n > 1$, alors $\mathcal{H} \cong Bl_0(C(\mathrm{Gr}(n, V'^*)))$ et γ est l'éclatement de $C(\mathrm{Gr}(n, V'^*))$ en 0.
En particulier $\mathcal{H}$ est toujours une variété lisse et donc γ est une résolution de $W/\!/G$ lorsque ce quotient est singulier.

Remarque 1.5.12. Si $n' < n$, alors nous verrons que $W/\!/G = \{0\}$, donc le morphisme de passage au quotient $\nu : W \to W/\!/G$ est plat et donc $\mathcal{H} \cong \{0\}$ d'après le corollaire 1.5.18. De même, si $n = 1$, alors nous verrons que ν est l'identité, donc ν est plat et $\mathcal{H} \cong V'^*$.

Le cas $n' = n > 1$ est le corollaire 1.5.18. Le cas $n' > n > 1$ est la proposition 1.5.20. La famille universelle $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$ lorsque $1 < n < n'$ est étudiée à la fin de cette section.

Etude du morphisme de passage au quotient

Notation 1.5.13. On rappelle que l'on identifie $W \cong \mathcal{M}_{n,n'}(k)$ via les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ fixées dans la section 1.4.1. On notera parfois $w \in W$ sous forme de vecteurs colonnes ou de vecteurs lignes de la façon suivante :

- $w = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_{n'} \end{bmatrix}$ où les C_i sont les vecteurs colonnes de la matrice w et s'identifient naturellement à des éléments de V,
- $w = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ où les L_j sont les vecteurs lignes de la matrice w et s'identifient naturellement à des éléments de V'^*.

D'après le premier théorème fondamental pour $SL(V)$ (voir [Pro07, §11.1.2]) l'algèbre des invariants $k[W]^G$ est engendrée par les $[i_1, \ldots, i_n]$, où pour tout $w \in W$ et pour tout n-uplet $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n'$, on définit $[i_1, \ldots, i_n]$ par :

$$[i_1, \ldots, i_n](w) := \det\left(\begin{bmatrix} C_{i_1} & \cdots & C_{i_n} \end{bmatrix}\right). \tag{1.30}$$

On a le morphisme naturel $G' \times G$-équivariant

$$\mathrm{Hom}(V', V) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n(V'), \Lambda^n(V)),\ w \mapsto \Lambda^n(w),$$

et $\Lambda^n(V) \cong V_0$, d'où un isomorphisme $\mathrm{Hom}(\Lambda^n(V'), \Lambda^n(V)) \cong \Lambda^n(V'^*)$. Le morphisme de passage au quotient $\nu : W \to W/\!/G$ est obtenu en composant ces deux morphismes :

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathrm{Hom}(V', V) & \to & \Lambda^n(V'^*) \\ & w & \mapsto & L_1 \wedge \ldots \wedge L_n. \end{array}$$

On distingue trois cas de figure :

- si $n' < n$, alors $W/\!/G = \Lambda^n(V'^*) = \{0\}$ et le morphisme ν est trivial,
- si $n' = n$, alors $W/\!/G = \Lambda^n(V'^*) \cong \mathbb{A}^1_k$ et $\nu(w) = \det(w)$,
- si $n' > n$, alors $W/\!/G = C(\mathrm{Gr}(n, V'^*))$.

En particulier, lorsque $n' > n$, on a $\nu(W) = \Lambda^n(V'^*)$ si et seulement si $n = 1$ ou $n = n' - 1$.

Lemme 1.5.14. *La variété quotient $W/\!/G$ est lisse sauf lorsque $1 < n < n' - 1$, auquel cas $W/\!/G$ admet une unique singularité en 0.*

Démonstration. Si $n = 1$ ou $n' - 1 \leq n$, alors $W/\!/G$ est un espace affine, donc une variété lisse. Si $1 < n < n'-1$, alors $W/\!/G = C(\mathrm{Gr}(n, V'^*))$ est un cône affine dans $\Lambda^n(V'^*)$ mais n'est pas un espace affine. Et $\mathrm{Gr}(n, V'^*)$ est une variété lisse, donc le cône $C(\mathrm{Gr}(n, V'^*))$ est singulier uniquement en 0. □

La variété $W/\!/G$ est normale ([SB00, §3.2, Théorème 2]) et de Gorenstein ([SB00, §4.4, Théorème 4]) car le groupe des caractères de G est trivial. Lorsque $n' \geq n$, la variété $W/\!/G$ est la réunion de deux orbites pour l'opération de G' : l'orbite fermée $\{0\}$ et l'orbite ouverte $U := W/\!/G - \{0\}$.

Lemme 1.5.15. *Lorsque $n' \geq n$, la fibre de ν en un point de U est isomorphe à G.*

Démonstration. On identifie $V \cong k^n$ et $V' \cong k^{n'}$ via les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ fixées précédement. On définit $A \in W \cong \mathcal{M}_{n,n'}(k)$ par

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on pose $B := \nu(A) = c_1^* \wedge \ldots \wedge c_n^*$. Alors $B \in U$ et nous allons montrer que $\nu^{-1}(B) \cong SL_n(k)$. On a

$$\nu^{-1}(B) = \{w \in W \mid L_1 \wedge \ldots \wedge L_n = c_1^* \wedge \ldots \wedge c_n^*\}.$$

On décompose chaque $L_i \in V'^*$ dans la base $\mathcal{B}'^*$:

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ L_i = \sum_{j=1}^{n'} a_{i,j} c_j^*.$$

Alors

$$L_1 \wedge \ldots \wedge L_n = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq n'} \det\left(\begin{bmatrix} C_{j_1} & \cdots & C_{j_n} \end{bmatrix}\right)\ c_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge c_{j_n}^*$$

et donc nécessairement

$$\det\left(\begin{bmatrix} C_{j_1} & \cdots & C_{j_n} \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } (j_1, \ldots, j_n) \neq (1, \ldots, n), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'ensuit que les C_j sont nuls, pour $j = n+1, \ldots, n'$, et que la matrice carrée de taille n définie par $\begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$ appartient à $SL_n(k)$. Réciproquement, une matrice $w \in W$ de la forme $\begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ vérifie $\nu(w) = B$. On en déduit que la fibre de ν en B est isomorphe à G. □

En fait le lemme 1.5.15 est une conséquence d'un résultat de Luna ([SB00, §2.1, Theorem 6]) qui dit que, si $n' \geq n$, alors ν est un G-fibré principal au dessus de l'ouvert U.

Proposition 1.5.16.
- *Si $n' \leq n$ ou $n = 1$, alors ν est plat sur $W/\!/G$ tout entier.*
- *Si $n' > n > 1$, alors U est l'ouvert de platitude de ν dans $W/\!/G$.*

Démonstration. Si $n' < n$, alors le morphisme ν est trivial donc plat sur $W/\!/G = \{0\}$.
Si $n' = n$, alors $W/\!/G \cong \mathbb{A}^1_k$ et ν est le déterminant. Dans ce cas, d'après [Har77, Exercice 10.9], le morphisme ν est plat sur $W/\!/G$ tout entier.
On suppose enfin $n' > n$. On sait que ν est plat sur un ouvert non-vide de $W/\!/G$, donc nécessairement ν est plat sur U par G'-homogénéité. Ensuite, on vérifie que $\nu^{-1}(0) = \{w \in W \mid \mathrm{rg}(w) \leq n-1\}$ est

de dimension $(n'+1)(n-1)$. D'après le lemme 1.5.15, la dimension de la fibre de ν en un point de U vaut n^2-1. Les fibres d'un morphisme plat ont nécessairement toutes la même dimension, donc si $n>1$, l'ouvert U est l'ouvert de platitude de ν. En revanche, si $n=1$, alors $W/\!\!/G$ est lisse et toutes les fibres de ν ont la même dimension donc d'après [Har77, Exercice 10.9], le morphisme ν est plat sur $W/\!\!/G$. □

Corollaire 1.5.17. *Si $n' \geq n$, la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν est donnée par :*

$$\forall M \in \mathrm{Irr}(G),\ h_W(M) = \dim(M).$$

On déduit des propositions 1.1.6 et 1.5.16 le

Corollaire 1.5.18. *Le morphisme de Hilbert-Chow γ est un isomorphisme dans les cas suivants :*

- *$n' < n$ et alors $\mathcal{H}$ est un point réduit correspondant au schéma W tout entier,*
- *$n' = n$, alors $\mathcal{H} \cong \mathbb{A}^1_k$ et $\det\colon W \to \mathbb{A}^1_k$ est la famille universelle,*
- *$n' > n = 1$, alors $\mathcal{H} \cong V'^*$ et $Id\colon V'^* \to V'^*$ est la famille universelle.*

Détermination de $\mathcal{H}$ lorsque $1 < n < n'$

Soient

- $E := \langle c_1^*, \ldots, c_n^* \rangle \in \mathrm{Gr}(n, V'^*)$ et $P := \mathrm{Stab}_{G'}(E)$,
- L_0 l'image de E par le plongement de Plücker $\mathrm{Gr}(n, V'^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^n V'^*)$,
- $W' := \mathrm{Hom}(V'/E^\perp, V)$ et $\nu'\colon W' \to W'/\!\!/G$ le morphisme de passage au quotient,
- $\mathcal{H}' := \mathrm{Hilb}^G_{h_{W'}}(W') \cong \mathbb{A}^1_k$ d'après le corollaire 1.5.18,
- $\mathcal{X}' := \mathrm{Univ}^G_{h_{W'}}(W')$ et $\pi'\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{H}'$ la famille universelle.

D'après la proposition 1.5.6, on a un isomorphisme G'-équivariant

$$\mathcal{H} \cong G' \times^P \mathcal{H}'$$

où P opère dans $\mathcal{H}'$ par multiplication par l'inverse du déterminant. En particulier $\mathcal{H}$ est une variété lisse. On a vu que $W/\!\!/G = \mathrm{Gr}(n, V'^*)$ et donc $\mathbb{P}(W/\!\!/G) = \mathrm{Gr}(n, V'^*) \cong G'/P$. On rappelle que l'on a défini un morphisme G'-équivariant $\rho\colon \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(n, V'^*)$ dans la section 1.5.1.

Lemme 1.5.19. *Le morphisme $\gamma \times \rho$ envoie $\mathcal{H}$ dans $Bl_0(W/\!\!/G)$.*

Démonstration. D'après la proposition 1.5.16, le morphisme ν est plat sur U. Donc, d'après la proposition 1.1.6, le morphisme γ se restreint en un isomorphisme de $\gamma^{-1}(U)$ sur U. On note Z_0 l'unique point de $\mathcal{H}$ tel que $\gamma(Z_0) = c_1^* \wedge \ldots \wedge c_n^*$. On vérifie que

$$Q := \mathrm{Stab}_{G'}(c_1^* \wedge \ldots \wedge c_n^*) = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix},\ A \in SL_n(k),\ B \in \mathcal{M}_{n'-n,n}(k) \text{ et } C \in GL_{n'-n}(k) \right\}.$$

Le morphisme γ est G'-équivariant donc Z_0 est stable par Q. Ensuite, ρ est aussi G'-équivariant, donc $\rho(Z_0)$ est une droite Q-stable de $W/\!\!/G$. Mais $W/\!\!/G$ admet une unique droite Q-stable qui est la droite $\langle c_1^* \wedge \ldots \wedge c_n^* \rangle$ et donc $\gamma(Z_0) \in \rho(Z_0)$. Il s'ensuit que $(\gamma \times \rho)(Z_0) \in Bl_0(W/\!\!/G)$. Puis, comme $\gamma \times \rho\colon \mathcal{H} \to W/\!\!/G \times \mathbb{P}(W/\!\!/G)$ est G'-équivariant et que $Bl_0(W/\!\!/G)$ est G'-stable, pour chaque $Z \in \gamma^{-1}(U)$, on a $(\gamma \times \rho)(Z) \in Bl_0(W/\!\!/G)$. Enfin $Bl_0(W/\!\!/G)$ est un fermé de $W/\!\!/G \times \mathbb{P}(W/\!\!/G)$, donc $(\gamma \times \rho)^{-1}(Bl_0(W/\!\!/G))$ est un fermé de $\mathcal{H}$ contenant $\gamma^{-1}(U)$, d'où le morphisme de variétés $\gamma \times \rho\colon \mathcal{H} \to Bl_0(W/\!\!/G)$. □

La seconde projection $p_2\colon Bl_0(W/\!\!/G) \to G'/P$ est un morphisme G'-équivariant et munit donc $Bl_0(W/\!\!/G)$ d'une structure de fibré en droites G'-homogène au dessus de G'/P. On note D_0 la fibre schématique de p_2 en eP et on vérifie que l'opération de P dans $D_0 \cong \mathbb{A}^1_k$ coïncide avec l'opération de P dans $\mathcal{H}'$. D'après (1.26), on a un isomorphisme G'-équivariant

$$Bl_0(W/\!\!/G) \cong G' \times^P D_0.$$

Proposition 1.5.20. *Le morphisme $\gamma \times \rho : \mathcal{H} \to Bl_0(W/\!/G)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[rr, "\gamma\times\rho"] & & Bl_0(W/\!/G) \\ G'\times^P\mathcal{H}' \arrow[u, "\cong"] \arrow[rr, dotted, "\theta"] \arrow[dr] & & G'\times^P D_0 \arrow[u, "\cong"'] \arrow[dl] \\ & G'/P & \end{tikzcd} \tag{1.31}$$

où l'on note θ le morphisme de variétés induit par $\gamma \times \rho$ tel que le carré commute. Par construction, le morphisme θ est G'-équivariant. Soit $\theta_e : \mathcal{H}' \to D_0$ le morphisme P-équivariant obtenu en restreignant θ à la fibre en $eP \in G'/P$. D'après le corollaire 1.5.10, le morphisme θ_e s'identifie au morphisme de Hilbert-Chow $\gamma' : \mathcal{H}' \to W'/\!/G$; ce dernier est un isomorphisme d'après le corollaire 1.5.18. Il s'ensuit que θ, et donc $\gamma \times \rho$, est un isomorphisme. □

La famille universelle lorsque $1 < n < n'$

On rappelle que l'on note $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$ la famille universelle. Soit T (resp. $\underline{V'}$, $\underline{V}$) le fibré tautologique (resp. les fibrés triviaux de fibre V',V) au dessus de la grassmanienne $\mathrm{Gr}(n, V'^*)$. Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\cong G' \times^P \mathcal{X}' \text{ d'après la proposition 1.5.9,} \\ &\cong G' \times^P W' \text{ d'après le corollaire 1.5.18.} \end{aligned}$$

Autrement dit, le morphisme $\rho \circ \pi : \mathcal{X} \to G'/P$ permet d'identifier $\mathcal{X}$ à l'espace total du fibré vectoriel

$$\mathrm{Hom}(\underline{V'}/T^\perp, \underline{V}) \cong T \otimes \underline{V}.$$

Notre but est d'obtenir une description alternative de $\mathcal{X}$ comme sous-variété de $W \times \mathbb{P}(W/\!/G)$. On rappelle que $\mathbb{P}(W/\!/G) = \mathrm{Gr}(n, V'^*)$ et donc, un point de $\mathbb{P}(W/\!/G)$ peut être considéré comme une droite de $W/\!/G$ ou bien comme un sous-espace de dimension n de V'^* suivant le contexte.

Proposition 1.5.21. *On a un isomorphisme G'-équivariant*

$$\mathcal{X} \cong \{(w, L) \in W \times \mathbb{P}(W/\!/G) \mid L^\perp \subset \mathrm{Ker}(w)\}.$$

Et la famille universelle s'identifie à $(w, L) \in \mathcal{X} \mapsto (\nu(w), L) \in Bl_0(W/\!/G)$.

Démonstration. On note $\mathcal{Z} := \{(w, L) \in W \times \mathbb{P}(W/\!/G) \mid L^\perp \subset \mathrm{Ker}(w)\}$. La seconde projection est un morphisme G'-équivariant vers l'espace homogène $\mathbb{P}(W/\!/G) \cong G'/P$, donc d'après (1.26), on a un isomorphisme G'-équivariant $\mathcal{Z} \cong G' \times^P \mathrm{Hom}(V'/L_0^\perp, V)$. Autrement dit, $\mathcal{Z}$ s'identifie à l'espace total du fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(\underline{V'}/T^\perp, \underline{V})$ au dessus de $\mathrm{Gr}(n, V'^*)$, et donc $\mathcal{Z} \cong \mathcal{X}$ comme G'-variété. Ensuite, d'après le corollaire 1.5.10, la famille universelle s'identifie à la composition des morphismes suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, "\cong"] \arrow[rrr, bend right] & G' \times^P W' \arrow[r, "G'\times^P\nu'"] & G' \times^P W'/\!/G \arrow[r, "\cong"] & Bl_0(W/\!/G) \end{tikzcd}$$

Et on vérifie que le morphisme obtenu est bien $(w, L) \in \mathcal{Z} \mapsto (\nu(w), L) \in Bl_0(W/\!/G)$. □

Remarque 1.5.22. Soit $Z \subset W$ un sous-schéma fermé G-stable tel que $k[Z] \cong k[G]$ comme G-module. Alors Z s'identifie à un point (x, L) de $\mathcal{H}$ et est défini comme sous-schéma de W par

$$Z = \{w \in W \mid L^\perp \subset \mathrm{Ker}(w) \text{ et } \nu(w) = x\}.$$

En particulier :
- Si $x \neq 0$, alors Z est isomorphe à $SL_n(k)$.
- Si $x = 0$, alors Z est isomorphe à la variété déterminantielle $\{M \in \mathcal{M}_n(k) \mid \det(M) = 0\}$.

1.5.3 Détermination de la composante principale dans un cas simple

Dans la section 1.5.2, la détermination de $\mathcal{H}$ s'est faite en trois étapes :

1. étudier le morphisme de passage au quotient $W \to W/\!\!/G$,
2. montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ avec le principe de réduction,
3. montrer que $\gamma \times \rho$ est un isomorphisme entre $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ et $Bl_0(W/\!\!/G)$.

Nous allons voir que l'étape 3 est en fait un cas particulier d'un énoncé plus général (proposition 1.5.23).

Soient, comme dans la section 1.1, G un groupe algébrique réductif, W un G-schéma affine réduit et $G' \subset \mathrm{Aut}^G(W)$ un sous-groupe algébrique. On suppose que G' contient un sous-groupe central isomorphe à $\mathbb{G}_m$ tel que

- l'opération associée de $\mathbb{G}_m$ dans $W/\!\!/G$ a un point fixe 0 qui est l'unique orbite fermée,
- le quotient $X := (W/\!\!/G\backslash\{0\})/\mathbb{G}_m$ est une unique orbite de G'.

En particulier $W/\!\!/G$ est la réunion de deux G'-orbites : $\{0\}$ et $U := W/\!\!/G\backslash\{0\}$. On suppose de plus l'existence d'un morphisme G'-équivariant $\rho\colon \mathcal{H} \to X$. Cette hypothèse est, a priori, très forte, mais elle sera vérifiée dans plusieurs exemples que nous traiterons par la suite. Le morphisme de passage au quotient $\nu\colon W \to W/\!\!/G$ est plat sur un ouvert non-vide, donc sur U par G'-homogénéité. Si ν est plat partout, alors $\mathcal{H} \cong W/\!\!/G$ et γ est un isomorphisme. Sinon, on a la

Proposition 1.5.23. *Sous les hypothèses précédentes, le morphisme $\gamma\times\rho$ envoie isomorphiquement $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ dans $Bl_0(W/\!\!/G) := \{(f, L) \in W/\!\!/G \times X \mid f \in L\}$.*

Démonstration. On a un morphisme G'-équivariant $\gamma \times \rho : \mathcal{H}^{\mathrm{prin}} \to W/\!\!/G \times X$. Soit $y_0 \in U$ et $H := \mathrm{Stab}_{G'}(y_0)$, alors d'après la proposition 1.1.6, il existe un unique $z_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\gamma(z_0) = y_0$. Le morphisme γ est G'-équivariant, donc $H \subset \mathrm{Stab}_{G'}(z_0)$. De même, le morphisme ρ est G'-équivariant, donc $H \subset P_0 := \mathrm{Stab}_{G'}(\rho(z_0))$. On note H' le sous-groupe algébrique de G' engendré par H et par $\mathbb{G}_m$. On a $H' \subset P_0$ et

$$\dim(H') = 1 + \dim(H) = 1 + \dim(G') - \dim(W/\!\!/G) = \dim(G') - \dim(\mathbb{P}(W/\!\!/G)) = \dim(P_0).$$

On en déduit que $H' = P_0$ et donc H stabilise un unique point de $\mathbb{P}(W/\!\!/G)$ qui est le point correspondant à la droite $\langle y_0\rangle$ de $W/\!\!/G$. Il s'ensuit que, pour tout $z \in \gamma^{-1}(U)$, on a $\gamma \times \rho(z) \in Bl_0(W/\!\!/G)$. Puis, $(\gamma \times \rho)^{-1}(Bl_0(W/\!\!/G))$ est un fermé de $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ qui contient l'ouvert $\gamma^{-1}(U)$, donc c'est $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ tout entier. On a donc montré que $\gamma \times \rho$ envoie $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ dans $Bl_0(W/\!\!/G)$, il reste à voir que c'est un isomorphisme.
On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^{\mathrm{prin}} \arrow[rr, "\gamma\times\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Bl_0(W/\!\!/G) \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{1.32}$$

où p_2 est la seconde projection. Tous les morphismes qui apparaissent dans ce diagramme sont G'-équivariants. On fixe $x \in X$ et soit $P := \mathrm{Stab}_{G'}(x)$, alors $X \cong G'/P$. On note F_1 et F_2 les fibres schématiques en eP des morphismes ρ et p_2 respectivement. D'après (1.26), on a des isomorphismes G'-équivariant $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}} \cong G' \times^P F_1$ et $Bl_0(W/\!\!/G) \cong G' \times^P F_2$ et la restriction de $\gamma \times \rho$ à F_1 donne un morphisme P-équivariant $f\colon F_1 \to F_2$ tel que $\gamma\times\rho$ s'identifie à $G' \times^P f$, le morphisme induit par f. Le morphisme γ est birationnel et propre (voir la section 1.1), donc $\gamma \times \rho$ est birationnel et propre, et donc f également. On a bien sûr $F_2 \cong \mathbb{A}^1_k$, et donc f un isomorphisme. Le résultat s'ensuit. □

On fait maintenant l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. On a le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Bl_0(W/\!\!/G) \times_{W/\!\!/G} W \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & W \arrow[d, "\nu"] \\ Bl_0(W/\!\!/G) \arrow[r, "p_1"'] & W/\!\!/G \end{tikzcd}$$

où q_1, q_2 sont les projections naturelles. La variété $\mathcal{Z} := \overline{q_1^{-1}(p_1^{-1}(U))}$ est une composante irréductible de $Bl_0(W/\!\!/G) \times_{W/\!\!/G} W$ et on a le

Corollaire 1.5.24. *Le morphisme $q_1 : \mathcal{Z} \to Bl_0(W/\!\!/G)$ s'identifie à la famille universelle.*

Démonstration. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[rr, "q_1"] \arrow[dr, dotted, "\delta"'] & & Bl_0(W/\!\!/G) \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

où δ est défini comme la composition $p_2 \circ q_1$. On fixe $x_0 \in X$ et on note F_1' et F_2' les fibres schématiques en x_0 des morphismes δ et p_2 respectivement. On a $F_2' \cong \mathbb{A}^1_k$, donc d'après [Har77, Proposition 9.7], le morphisme $q_{1|F_1'}$ est plat et donc q_1 est plat. Par la propriété universelle du schéma de Hilbert invariant, il existe un morphisme $\psi : Bl_0(W/\!\!/G) \to \mathcal{H}$ tel que le diagramme suivant soit cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r] \arrow[d, "q_1"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Bl_0(W/\!\!/G) \arrow[r, "\psi"'] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

D'après la proposition 1.1.6 et par définition de la famille $q_1 : \mathcal{Z} \to Bl_0(W/\!\!/G)$, le morphisme $(\gamma \times \rho) \circ \psi$ est l'identité sur l'orbite ouverte de $Bl_0(W/\!\!/G)$, et donc sur $Bl_0(W/\!\!/G)$ tout entier. Or, d'après la proposition 1.5.23, $\gamma \times \rho$ est un isomorphisme et donc ψ est un isomorphisme. Le résultat s'ensuit. □

On finit cette section par quelques remarques sur les résultats obtenus.

- Le morphisme ψ qui apparaît dans la preuve du corollaire 1.5.24 est l'inverse du morphisme $\gamma \times \rho$ de la proposition 1.5.23.
- La variété $Bl_0(W/\!\!/G)$ est la réunion de deux G'-orbites, et donc la famille universelle $q_1 : \mathcal{Z} \to Bl_0(W/\!\!/G)$ admet deux types de fibres : les fibres générales, qui sont les fibres en n'importe quel point (x, L), avec $x \neq 0$, et les fibres spéciales, qui sont les fibres en n'importe quel point $(0, L)$. La fibre générale de q_1 est bien sûr isomorphe à la fibre générale du morphisme de passage au quotient $W \to W/\!\!/G$.

Chapitre 2

Cas du groupe linéaire

2.1 Cas de $GL(V)$ opérant dans $V^{\oplus n_1} \oplus V^{*\oplus n_2}$

On se place dans la situation 2 : on a $G := GL(V)$, $G' := GL(V')$, $W := \mathrm{Hom}(V_1, V) \times \mathrm{Hom}(V, V_2)$ et l'opération de $G' \times G$ dans W est donnée par (1.15).

2.1.1 Etude du morphisme de passage au quotient

Les résultats essentiels de cette section sont les propositions 2.1.9 et 2.1.11 qui décrivent les fibres et l'ouvert de platitude de ν. La plupart des résultats de cette section se trouvent dans [Kra84, §II.4.1]. Cependant, d'une part le livre [Kra84] est écrit dans la langue de Goethe, ce qui peut être une difficulté pour certains lecteurs, et d'autre part, nos formulations, notations et méthodes sont quelque peu différentes. Donc, dans un souci de cohérence et de complétude, nous pensons que cette section a pleinement sa place dans ce mémoire.

D'après le premier théorème fondamental pour $GL(V)$ (voir [Pro07, §9.1.4]), la k-algèbre des invariants $k[W]^G$ est engendrée par les invariants $(i \mid j)$, où pour chaque couple (i, j), $i = 1, \ldots, n_1$, $j = 1, \ldots, n_2$, la forme bilinéaire $(i \mid j)$ sur $W \cong (V_1^* \otimes V) \oplus (V^* \otimes V_2) \cong V^{\oplus n_1} \oplus V^{*\oplus n_2}$ est définie par (1.22).
Il s'ensuit que le morphisme de passage au quotient $\nu : W \to W/\!/G$ est donné par :

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathrm{Hom}(V_1, V) \times \mathrm{Hom}(V, V_2) & \to & \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \\ & (u_1, u_2) & \mapsto & u_2 \circ u_1. \end{array}$$

Et donc

$$W/\!/G = \{f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \ \mid \ \mathrm{rg}(f) \leq n\} =: \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq n}$$

est une variété déterminantielle.
Si $n_1, n_2 > n$, alors la variété $W/\!/G$ est de dimension $nn_1 + nn_2 - n^2$, de Cohen-Macaulay ([ACGH85, Theorem 3.1]), normale et son lieu singulier est $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq n-1}$ ([ACGH85, § II.2.2]). Nous verrons dans la section A.1 que $W/\!/G$ est de Gorenstein si et seulement si $n_1 = n_2$.
Sinon, $W/\!/G = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ est un espace affine.
On note

$$N := \min(n_1, n_2, n).$$

L'opération de G' dans W induit une opération dans $W/\!/G$ telle que ν soit G'-équivariant. Cette opération est donnée par

$$\forall (g_1, g_2) \in G', \ \forall f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2), \ (g_1, g_2).f := g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$$

La variété quotient $W/\!/G$ se décompose en $N + 1$ orbites pour cette opération :

$$U_i := \{f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \ \mid \ \mathrm{rg}(f) = i\} \tag{2.1}$$

pour $i = 0, \ldots, N$, les adhérences de ces orbites sont imbriquées de la façon suivante :

$$\{0\} = \overline{U_0} \subset \overline{U_1} \subset \cdots \subset \overline{U_N} = W/\!/G. \tag{2.2}$$

En effet, pour chaque $i = 0, \dots, N$, on a $\overline{U_i} = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq i}$. En particulier, l'orbite U_N est un ouvert dense de $W/\!/G$.

Définition 2.1.1. On appelle nilcône de ν, noté $\mathcal{N}(W, G)$, la fibre schématique en 0 du morphisme ν.

Certaines propriétés géométriques de $\mathcal{N}(W, G)$ sont étudiées dans [KS11]. En particulier, le schéma $\mathcal{N}(W, G)$ est toujours réduit mais il est irréductible si et seulement si $n_1 + n_2 \leq n$ ([KS11, Theorem 9.1]). Nous allons déterminer les composantes irréductibles de $\mathcal{N}(W, G)$ et leurs dimensions. Soit $m \in \{0, \dots, n\}$, on définit

$$X_m := \left\{ (u_1, u_2) \in W \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Im}(u_1) \subset \mathrm{Ker}(u_2), \\ \mathrm{rg}(u_1) \leq \min(n_1, m), \\ \dim(\mathrm{Ker}(u_2)) \geq \max(n - n_2, m). \end{array} \right\}$$

et soit

$$\begin{tikzcd} & Z_m \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X_m & & \mathrm{Gr}(m, V) \end{tikzcd}$$

où

$$Z_m := \{(u_1, u_2, L) \in \mathrm{Hom}(V_1, V) \times \mathrm{Hom}(V, V_2) \times \mathrm{Gr}(m, V) \;\mid\; \mathrm{Im}(u_1) \subset L \subset \mathrm{Ker}(u_2)\}$$

et les p_i sont les projections naturelles. On fixe $L_0 \in \mathrm{Gr}(m, V)$. La seconde projection munit Z_m d'une structure de fibré vectoriel homogène au dessus de $\mathrm{Gr}(m, V)$, de fibre en L_0 isomorphe à $F_m := \mathrm{Hom}(V_1, L_0) \times \mathrm{Hom}(V/L_0, V_2)$. Autrement dit, on a $Z_m = \mathrm{Hom}(\underline{V_1}, T) \times \mathrm{Hom}(\underline{V}/T, \underline{V_2})$ où T est le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(m, V)$ et $\underline{V}, \underline{V_1}, \underline{V_2}$ désignent les fibrés triviaux de fibres V, V_1 et V_2 respectivement. Donc Z_m est une variété lisse de dimension :

$$\begin{aligned} \dim(Z_m) &= \dim(\mathrm{Gr}(m, V)) + \dim(\mathrm{Hom}(V_1, L_0) \times \mathrm{Hom}(V/L_0, V_2)) \\ &= m(n - m) + n_1 m + (n - m) n_2. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.2. *Chaque X_m est un fermé irréductible de W et les composantes irréductibles de $\mathcal{N}(W, G)$ sont :*

$$\begin{cases} X_i, \; i = \max(0, n - n_2), \max(0, n - n_2) + 1, \dots, \min(n, n_1) & \text{si } n < n_1 + n_2, \\ X_{n_1} & \text{si } n \geq n_1 + n_2. \end{cases}$$

De plus, lorsque $m \leq n_1$ ou $m \geq n - n_2$, l'application $p_1 : Z_m \to X_m$ est birationnelle.

Démonstration. Déjà, par définition, les X_m sont des fermés de W. Le morphisme p_1 est surjectif, et Z_m est irréductible, donc X_m est irréductible. Ensuite

$$\mathcal{N}(W, G) = \{(u_1, u_2) \in \mathrm{Hom}(V_1, V) \times \mathrm{Hom}(V, V_2) \;\mid\; \mathrm{Im}(u_1) \subset \mathrm{Ker}(u_2)\} = \bigcup_{i=0}^{n} X_i.$$

Si $n_1 \leq n - n_2$, alors

$$\begin{cases} X_0 \subset \dots \subset X_{n_1}, \\ X_{n_1} = \dots = X_{n - n_2}, \\ X_{n - n_2} \supset \dots \supset X_n, \end{cases}$$

donc $X = X_{n_1}$.
Si $n_1 > n - n_2$, alors

$$\begin{cases} X_0 \subset \dots \subset X_{\max(0, n - n_2)}, \\ X_{\min(n, n_1)} \supset \dots \supset X_n, \end{cases}$$

et on vérifie comme conséquence de la définition des X_m qu'il n'y a pas d'autre relation d'inclusion. Ensuite, soient

$$Z'_m := \{(u_1, u_2, L) \in Z_m \;\mid\; \mathrm{rg}(u_1) = \min(m, n_1) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(u_2)) = \max(m, n - n_2)\}$$

et

$$X'_m := \{(u_1, u_2) \in X_m \mid \mathrm{rg}(u_1) = \min(m, n_1) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(u_2)) = \max(m, n - n_2)\}.$$

Alors Z'_m (resp. X'_m) est un ouvert dense de Z_m (resp. de X_m) et on a $Z'_m = p_1^{-1}(X'_m)$. Si $m \leq n_1$ ou $m \geq n - n_2$, alors $p_1 : Z'_m \to X'_m$ est un isomorphisme, donc p_1 est birationnelle. □

Corollaire 2.1.3. *La dimension de $\mathcal{N}(W, G)$ est :*

- nn_2 *lorsque* $n \leq n_2 - n_1$,
- nn_1 *lorsque* $n \leq n_1 - n_2$,
- $\frac{1}{4}n(n + 2n_1 + 2n_2) + \frac{1}{4}(n_1 - n_2)^2$ *lorsque* $|n_1 - n_2| < n < n_1 + n_2$ *et* $n + n_1 - n_2$ *est pair,*
- $\frac{1}{4}n(n + 2n_1 + 2n_2) + \frac{1}{4}(n_1 - n_2)^2 - \frac{1}{4}$ *lorsque* $|n_1 - n_2| < n < n_1 + n_2$ *et* $n + n_1 - n_2$ *est impair,*
- $nn_1 + nn_2 - n_1n_2$ *lorsque* $n \geq n_1 + n_2$.

Démonstration. D'après la proposition 2.1.2, il nous suffit de calculer la dimension des X_m pour certains m particuliers. On note $P(m) := m(n-m) + n_1m + n_2(n-m)$ la dimension de Z_m. Lorsque $m \leq n_1$ ou $m \geq n - n_2$, on a $\dim(X_m) = \dim(Z_m) = P(m)$.

Si $n \geq n_1 + n_2$, alors

$$\dim(\mathcal{N}(W, G)) = \dim(X_{n_1}) = nn_1 + nn_2 - n_1n_2.$$

Si $n < n_1 + n_2$, alors

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{N}(W, G)) &= \dim\left(\bigcup_{i=\max(0,n-n_2)}^{\min(n,n_1)} X_i\right)\\ &= \max_{i=\max(0,n-n_2),\ldots,\min(n,n_1)} \dim(X_i)\\ &= \max_{i=\max(0,n-n_2),\ldots,\min(n,n_1)} P(i).\end{aligned}$$

On est donc ramené à étudier les variations du polynôme P :

$$P'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(n + n_1 - n_2) =: m'.$$

Si $m' \leq \max(0, n - n_2)$, alors $m' \leq 0$ et donc $\dim(\mathcal{N}(W, G)) = P(0) = nn_2$.
Si $m' \geq \min(n, n_1)$, alors $m' \geq n$ et donc $\dim(\mathcal{N}(W, G)) = P(n) = nn_1$.
Si $\max(0, n-n_2) < m' < \min(n, n_1)$, on a deux possibilités : ou bien $m' \in \mathbb{N}$ et alors $\dim(\mathcal{N}(W, G)) = P(m')$, ou bien $m' \notin \mathbb{N}$ et alors $\dim(\mathcal{N}(W, G)) = P(m' + \frac{1}{2})$.
Et ces différents cas fournissent le résultat annoncé. □

Nous allons maintenant nous intéresser à la description géométrique des fibres de ν au dessus de chaque orbite U_i. On rappelle que par homogénéité toutes les fibres au dessus d'une orbite donnée sont isomorphes, il suffit donc de décrire la fibre de ν en un point de chaque orbite.

Notation 2.1.4. Soit $0 \leq r \leq N$, on note

$$J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n_1-r} \\ 0_{n_2-r,r} & 0_{n_2-r,n_1-r} \end{bmatrix}$$

où I_r est la matrice identité de taille r. La matrice J_r s'identifie à un élément de U_r via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cong \mathcal{M}_{n_2,n_1}(k)$.

On fixe $r \in \{0, \ldots, N\}$ et on définit

$$w_r := \left(\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \in W$$

et G_r le stabilisateur de w_r dans G. On note E_r (resp. E_r^*) la représentation standard (resp. duale) de G_r et V_0 la représentation triviale de G_r.

Lemme 2.1.5.

$$G_r = \left\{ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},\ M \in GL_{n-r}(k) \right\} \cong GL_{n-r}(k)$$

et $V = rV_0 \oplus E_r$ *comme* G_r*-module.*

Démonstration. On écrit $g \in GL(V)$ sous forme d'une matrice par blocs : $g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, alors

$$g.\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = I_r \text{ et } C = 0$$

puis

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.g^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = 0$$

d'où $g = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$ avec $M \in GL_{n-r}(k)$. Réciproquement, si g est de cette forme, alors $g \in G_r$. Ensuite, le sous-espace vectoriel de V engendré par les $n-r$ derniers vecteurs de la base $\mathcal{B}$ est la représentation standard de G_r et G_r opère trivialement dans le sous-espace vectoriel de V engendré par les r premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}$. □

Lemme 2.1.6. *L'orbite* $G.w_r \subset W$ *est fermée dans* W*, et c'est l'unique orbite fermée contenue dans* $\nu^{-1}(J_r)$*.*

Démonstration. On a $\nu(w_r) = J_r$ et d'après le lemme 2.1.5, $G_r \cong GL_{n-r}(k)$ est un sous-groupe réductif de G. On applique [SB00, §I.6.2.5, Theorem 10] qui nous fournit l'équivalence :

$$G.w_r \text{ est fermée dans } W \Leftrightarrow C_G(G_r).w_r \text{ est fermée dans } W.$$

Puis $C_G(G_r) = \left\{ \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \lambda I_{n-r} \end{bmatrix},\ M \in GL_r(k),\ \lambda \in \mathbb{G}_m \right\}$, où $\mathbb{G}_m$ est le groupe multiplicatif. Donc

$$C_G(G_r).w_r = \left\{ \left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right),\ M \in GL_r(k) \right\}$$

est un fermé de W, et donc $G.w_r$ est une orbite fermée de $\nu^{-1}(J_r)$.
Enfin, d'après [SB00, §II.3.1, Théorème 1], la fibre $\nu^{-1}(J_r)$ contient une unique orbite fermée, d'où le résultat. □

Définition 2.1.7. Soit $x \in W$ tel que l'orbite $G.x$ est fermée dans W et G_x le stabilisateur de x dans G. Alors, d'après [SB00, §6.2.1], le G_x-module $T_x(G.x)$ admet un supplémentaire G_x-stable M_x dans W. La représentation M_x de G_x ainsi construite est appelée représentation slice de G en x.

Lemme 2.1.8. *On a un isomorphisme de* G_r*-modules :*

$$M_{w_r} \cong (n_1 - r)E_r \oplus (n_2 - r)E_r^* \oplus r(n_1 + n_2 - r)V_0.$$

Démonstration. Par définition de la représentation slice M_{w_r} de G_r, on a $M_{w_r} \cong W/T_{w_r}(G.w_r)$ comme G_r-module. On déduit du lemme 2.1.5 la décomposition de W comme G_r-module :

$$\begin{aligned} W &\cong (V_1^* \otimes V) \oplus (V^* \otimes V_2) \\ &\cong (V_1^* \otimes (rV_0 \oplus E_r)) \oplus ((rV_0 \oplus E_r^*) \otimes V_2) \\ &\cong (V_1^* \otimes E_r) \oplus (E_r^* \otimes V_2) \oplus ((V_1^* \otimes rV_0) \oplus (rV_0 \otimes V_2)) \\ &\cong n_1 E_r \oplus n_2 E_r^* \oplus r(n_1 + n_2)V_0. \end{aligned}$$

Puis $T_{w_r}(G.w_r) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_r$ où l'on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}_r$ l'algèbre de Lie de G_r. Or

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &\cong V^* \otimes V\\ &\cong (rV_0 \oplus E_r^*) \otimes (rV_0 \oplus E_r)\\ &\cong (rV_0 \otimes rV_0) \oplus (rV_0 \otimes E_r) \oplus (E_r^* \otimes rV_0) \oplus (E_r^* \otimes E_r)\end{aligned}$$

et

$$\mathfrak{g}_r \cong E_r^* \otimes E_r$$

donc

$$\begin{aligned}T_{w_r}(G.w_r) &\cong (rV_0 \otimes rV_0) \oplus (rV_0 \otimes E_r) \oplus (E_r^* \otimes rV_0)\\ &\cong rE_r \oplus rE_r^* \oplus r^2V_0\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}M_{w_r} &\cong W/T_{w_r}(G.w_r)\\ &\cong (n_1 - r)E_r \oplus (n_2 - r)E_r^* \oplus r(n_1 + n_2 - r)V_0\end{aligned}$$

comme G_r-module. □

On note $\nu_M :\ M_{w_r} \to M_{w_r}/\!/G_r$ le morphisme de passage au quotient et

$$\mathcal{N}(N_{w_r}, G_r) := {\nu_M}^{-1}(\nu_M(0))$$

le nilcône de ν_M. Le groupe G_r opère naturellement dans G par multiplication à droite, ainsi que dans $\mathcal{N}(M_{w_r}, G_r)$ par définition de ν_M. On peut donc considérer le quotient

$$G \times^{G_r} \mathcal{N}(M_{w_r}, G_r)$$

qui est naturellement muni d'une structure de G-schéma d'après [Jan03, §I.5.14].
Ensuite, on définit $(W/\!/G)^{(G_r)} \subset W/\!/G$ l'ensemble des G-orbites fermées de W telles que G_r est conjugué au stabilisateur d'un point de ces orbites. En particulier, $G.w_r \in (W/\!/G)^{(G_r)}$ d'après le lemme 2.1.6. On note $W^{(G_r)} := \nu^{-1}((W/\!/G)^{(G_r)}) \subset W$. Alors, d'après [SB00, §6.2.3, Theorem 8], les ensembles $(W/\!/G)^{(G_r)}$ et $W^{(G_r)}$ sont des sous-variétés lisses de $W/\!/G$ et W respectivement. Il s'ensuit que $\nu' := \nu_{|W^{(G_r)}} :\ W^{(G_r)} \to (W/\!/G)^{(G_r)}$ est un morphisme de variétés, et en fait, toujours d'après [SB00, §6.2.3, Theorem 8], c'est même une fibration de fibre isomorphe (comme schéma) à

$$F_{w_r} := G \times^{G_r} \mathcal{N}(M_{w_r}, G_r).$$

En particulier, on a

$$\nu^{-1}(J_r) = {\nu'}^{-1}(J_r) \cong G \times^{G_r} \mathcal{N}(M_{w_r}, G_r).$$

Soient F_1, F_2 et F_3 des espaces vectoriels de dimensions $n_1 - r$, $n_2 - r$ et $r(n_1 + n_2 - r)$ respectivement dans lesquels G_r opère trivialement. D'après le lemme 2.1.8 on a un isomorphisme de G_r-modules

$$M_{w_r} \cong \mathrm{Hom}(F_1, E_r) \times \mathrm{Hom}(E_r, F_2) \times F_3.$$

Ensuite, le morphisme de passage au quotient ν_M est donné par :

$$\begin{array}{rccl}\nu_M : & \mathrm{Hom}(F_1, E_r) \times \mathrm{Hom}(E_r, F_2) \times F_3 & \to & \mathrm{Hom}(F_1, F_2) \times F_3.\\ & (u_1', u_2', x) & \mapsto & (u_2' \circ u_1', x)\end{array}$$

Donc $\mathcal{N}(M_{w_r}, G_r) := \nu_M^{-1}(\nu_M(0)) = \nu_M'^{-1}(0) \cong {\nu_M'}^{-1}(0)$ avec

$$\begin{array}{rccl}\nu_M' : & \mathrm{Hom}(F_1, E_r) \times \mathrm{Hom}(E_r, F_2) & \to & \mathrm{Hom}(F_1, F_2).\\ & (u_1', u_2') & \mapsto & u_2' \circ u_1'\end{array}$$

La proposition qui suit résume notre étude de la fibre du morphisme ν en J_r, pour $r = 0, \ldots, N$.

Proposition 2.1.9. *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme G-équivariant*

$$\nu^{-1}(J_r) \cong G\times^{G_r} {\nu'_M}^{-1}(0).$$

En particulier, si l'on note $H := G_N$, on a

$$\nu^{-1}(J_N) \cong \begin{cases} G & si\ N = n, \\ G/H & si\ N = n_1 = n_2 < n, \\ G\times^H \mathrm{Hom}(E_N, F_2) & si\ N = n_1 < \min(n, n_2), \\ G\times^H \mathrm{Hom}(F_1, E_N) & si\ N = n_2 < \min(n, n_1). \end{cases}$$

où H opère de la façon suivante dans $\mathrm{Hom}(F_1, E_N) \times \mathrm{Hom}(E_N, F_2)$ *:*

$$\forall h \in H,\ \forall (u'_1, u'_2) \in \mathrm{Hom}(F_1, E_N) \times \mathrm{Hom}(E_N, F_2),\ h.(u'_1, u'_2) := (h \circ u'_1, u'_2 \circ h^{-1}).$$

Comme pour le cas $G = SL_n(k)$ étudié dans la section 1.5.2, si $N = n$, alors [SB00, §2.1, Theorem 6] implique que ν est un G-fibré principal au dessus de l'ouvert U_N.

Corollaire 2.1.10. *Soit $r \in \{0, \dots, N\}$, alors la dimension de la fibre du morphisme ν en J_r vaut :*

- $n n_2 + n r - n_2 r$ *lorsque* $n - r \leq n_2 - n_1$,
- $n n_1 + n r - n_1 r$ *lorsque* $n - r \leq n_1 - n_2$,
- $\frac{1}{2}(n-r)(n_1+n_2) + \frac{1}{4}(r+n)^2 + \frac{1}{4}(n_1-n_2)^2$ *lorsque* $|n_1 - n_2| < n - r < n_1 + n_2 - 2r$ *et* $n + n_1 - n_2 - r$ *est pair,*
- $\frac{1}{2}(n-r)(n_1+n_2) + \frac{1}{4}(r+n)^2 + \frac{1}{4}(n_1-n_2)^2 - \frac{1}{4}$ *lorsque* $|n_1 - n_2| < n - r < n_1 + n_2 - 2r$ *et* $n + n_1 - n_2 - r$ *est impair,*
- $nn_1 + nn_2 - n_1 n_2$ *lorsque* $n \geq n_1 + n_2 - r$.

Démonstration. D'après la proposition 2.1.9 :

$$\begin{aligned} \dim(\nu^{-1}(J_r)) &= \dim(G\times^{G_r} {\nu'_M}^{-1}(0)) \\ &= \dim(G) + \dim({\nu'_M}^{-1}(0)) - \dim(G_r) \\ &= n^2 - (n-r)^2 + \dim({\nu'_M}^{-1}(0)) \\ &= 2nr - r^2 + \dim({\nu'_M}^{-1}(0)). \end{aligned}$$

Enfin, le corollaire 2.1.3 donne $\dim({\nu'_M}^{-1}(0))$ en fonction de n, n_1, n_2 et r. Le résultat annoncé s'ensuit. □

Pour chaque triplet (n, n_1, n_2), le corollaire 2.1.10 permet d'une part de calculer la dimension de la fibre générique de ν, d'autre part de déterminer l'ouvert de platitude de ν.

Proposition 2.1.11. *La dimension de la fibre générique et l'ouvert de platitude de ν sont donnés par le tableau suivant :*

configuration	*dim. de la fibre générique*	*ouvert de platitude*
$n > \max(n_1, n_2)$	$nn_1 + nn_2 - n_1 n_2$	$U_N \cup \dots \cup U_{\max(n_1+n_2-n-1,0)}$
$n = \max(n_1, n_2)$	n^2	$U_N \cup U_{N-1}$
$\min(n_1, n_2) \leq n < \max(n_1, n_2)$	$nn_1 + nn_2 - n_1 n_2$	U_N
$n < \min(n_1, n_2)$	n^2	U_N

Démonstration. On sait que ν est plat sur U_N. On distingue alors deux cas de figure.
• Soit $W/\!/G$ est une variété lisse (c'est-à-dire $n \geq n_1$ ou $n \geq n_2$), auquel cas d'après [Har77, Exercice 10.9], le morphisme ν est plat sur l'orbite U_r, $0 \leq r \leq N-1$ si et seulement si la dimension de la fibre au dessus de U_r est égale à la dimension de la fibre au dessus de U_N. Il s'agit donc, pour chaque triplet (n, n_1, n_2), de déterminer les valeurs de r telles que la dimension de la fibre $\nu^{-1}(J_r)$

coïncide avec la dimension de la fibre générique.
• Soit $W/\!/G$ n'est pas une variété lisse (c'est-à-dire $n_1, n_2 > n$), alors le critère précédent ne s'applique plus. Cependant, les fibres d'un morphisme plat ont nécessairement toutes la même dimension, or d'après le corollaire 2.1.10, la dimension de la fibre de ν en $J_r \in U_r$, $r = 0, \dots, N-1$, est strictement plus grande que la dimension de la fibre générique, donc U_N est l'ouvert de platitude de ν. □

Corollaire 2.1.12. *Le morphisme ν est plat sur $W/\!/G$ tout entier si et seulement si $n \geq n_1 + n_2 - 1$ et dans ce cas $W/\!/G = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.*

Le corollaire qui suit est une conséquence de la proposition 1.1.6 et du corollaire 2.1.12 :

Corollaire 2.1.13. *Si $n \geq n_1 + n_2 - 1$, alors $\mathcal{H} \cong \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ et γ est un isomorphisme.*

On s'intéresse, dans la proposition qui suit, à la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν. Autrement dit on va déterminer, pour chaque $M \in \mathrm{Irr}(G)$, la multiplicité $h_W(M)$ du G-module M dans le G-module $k[\nu^{-1}(J_N)]$. On note comme précédement $H := G_N \cong GL_{n-N}(k)$ le stabilisateur de w_N dans G.

Proposition 2.1.14. *La fonction de Hilbert de la fibre générique de ν est donnée par :*

$$\forall M \in \mathrm{Irr}(G),\ h_W(M) = \begin{cases} \dim(M) & \text{si } N = n, \\ \dim(M^H) & \text{si } N = n_1 = n_2 < n, \\ \dim((M \otimes k[\mathrm{Hom}(E_N, F_2)])^H) & \text{si } N = n_1 < \min(n, n_2), \\ \dim((M \otimes k[\mathrm{Hom}(F_1, E_N)])^H) & \text{si } N = n_2 < \min(n, n_1). \end{cases}$$

Démonstration. On utilise la description de la fibre de ν en un point de U_N fournie par la proposition 2.1.9.
• Si $N = n$, alors

$$k[\nu^{-1}(J_N)] \cong k[G] \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^* \otimes M$$

comme $G \times G$-module, d'où $h_W(M) = \dim(M)$.
• Si $N = n_1 = n_2 < n$, alors

$$k[\nu^{-1}(J_N)] \cong k[G/H] \cong k[G]^H \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{*H} \otimes M$$

comme G-module à gauche et $\dim(M^{*H}) = \dim(M^H)$, puisque H est réductif.
• Si $N = n_1 < \min(n_2, n)$, alors

$$\begin{aligned} k[\nu^{-1}(J_N)] &\cong k[G \times^H \mathrm{Hom}(E_N, F_2)] \\ &\cong k[G \times \mathrm{Hom}(E_N, F_2)]^H \\ &\cong (k[G] \otimes k[\mathrm{Hom}(E_N, F_2)])^H \\ &\cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^* \otimes (M \otimes k[\mathrm{Hom}(E_N, F_2)])^H \end{aligned}$$

d'où $h_W(M) = \dim\Big((M \otimes k[\mathrm{Hom}(E_N, F_2)])^H\Big)$.
De même, si $N = n_2 < \min(n_1, n)$, alors $h_W(M) = \dim\Big((M \otimes k[\mathrm{Hom}(F_1), E_N])^H\Big)$. □

Remarque 2.1.15. Lorsque $N = n_1 = n_2 < n$ et $M = r_1\epsilon_1 + \dots + r_n\epsilon_n$, on peut calculer $\dim(M^H)$ explicitement en fonction des r_i en utilisant les bases dites de "Gelfand-Tsetlin" (voir par exemple [Mol06]).

2.1.2 Etude du cas $\min(\dim(V), n_1, n_2) = 1$

Dans cette section, on traite le cas $\min(n, n_1, n_2) = 1$ qui est très similaire à la situation 1 traitée dans la section 1.5.2. On a $W/\!/G = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 1} = U_1 \cup \{0\}$ et $\rho : \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(h_W(V^*), V_1^*) \times \mathrm{Gr}(h_W(V), V_2)$ est le morphisme construit dans la section 1.5.1. Si $n \geq n_1 + n_2 - 1$, alors $\mathcal{H} \cong \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ d'après le corollaire 2.1.12, on peut donc exclure ce cas par la suite. Il reste les cas suivants (où la fonction de Hilbert h_W est calculée grâce à la proposition 2.1.14) :

- si $n = 1$, alors $h_W(V^*) = h_W(V) = 1$,
- si $n_2 > n_1 = 1$, alors $h_W(V^*) = n_2$ et $h_W(V) = 1$,
- si $n_1 > n_2 = 1$, alors $h_W(V) = n_1$ et $h_W(V^*) = 1$.

Si $n = 1$, alors on a le morphisme $\rho\colon \mathcal{H} \to \mathbb{P}(V_1^*) \times \mathbb{P}(V_2)$. Puis, le plongement de Segre donne

$$\mathbb{P}(V_1^*) \times \mathbb{P}(V_2) \cong \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 1}) = \mathbb{P}(W/\!\!/G) \tag{2.3}$$

et on peut donc considérer le morphisme $\rho\colon \mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!\!/G)$.

Si $\min(n_1, n_2) = 1 < n$, alors comme n_1 et n_2 jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $n_2 > n_1 = 1$. On a le morphisme G'-équivariant $\rho\colon \mathcal{H} \to \mathbb{P}(V_2)$, où $GL(V_1)$ opère trivialement dans $\mathbb{P}(V_2)$. Or, $\mathbb{P}(W/\!\!/G) \cong \mathbb{P}(V_1^* \otimes V_2) \cong \mathbb{P}(V_2)$ comme G'-variété et on peut donc considérer, comme dans le cas $n = 1$, le morphisme $\rho\colon \mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!\!/G)$.

Dans tous les cas, on obtient un morphisme G'-équivariant $\mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!\!/G)$, où la variété projective $\mathbb{P}(W/\!\!/G)$ est G'-homogène, et donc on peut appliquer la proposition 1.5.23 pour déterminer $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. On note

$$Bl_0(W/\!\!/G) := \{(f, L) \in W/\!\!/G \times \mathbb{P}(W/\!\!/G) \mid f \in L\} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W/\!\!/G)}(-1)$$

l'éclatement de $W/\!\!/G$ en 0. On a la

Théorème 2.1.16. *Si* $\min(n_1, n_2, n) = 1$ *et* $n < n_1 + n_2 - 1$*, alors on a un isomorphisme* G'*-équivariant*

$$\mathcal{H}^{\mathrm{prin}} \cong Bl_0(W/\!\!/G)$$

et le morphisme de Hilbert-Chow s'identifie à l'éclatement $Bl_0(W/\!\!/G) \to W/\!\!/G$*.*
De plus, si $n = 1$*, alors* $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ *et la famille universelle est le morphisme* $(u_1, u_2, L) \in \mathcal{X} \mapsto (u_2 \circ u_1, L) \in \mathcal{H}$*, où la variété* $\mathcal{X}$ *est définie par*

$$\mathcal{X} \cong \left\{ (u_1, u_2, L) \in W \times \mathbb{P}(W/\!\!/G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(u_1), \\ \mathrm{Im}(u_2) \subset \mathrm{Im}(L). \end{array} \right\}.$$

Démonstration. La première partie de la proposition découle de la proposition 1.5.23.
Ensuite, si $n = 1$, alors d'après la proposition 1.5.6 et le corollaire 2.1.13, on a un isomorphisme de G'-schémas $\mathcal{H} \cong G' \times^P \mathbb{A}^1_k$, où P est un sous-groupe parabolique de G', et donc $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. Enfin, pour montrer la partie de la proposition qui concerne la famille universelle $\mathcal{X} \to \mathcal{H}$, on procède comme pour la proposition 1.5.21. □

Remarque 2.1.17. Si $n = 1$, on considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(V_1^*) \times \mathbb{P}(V_2) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathbb{P}(V_1^*) & & \mathbb{P}(V_2) \end{tikzcd}$$

où p_1 et p_2 sont les projections naturelles. On note T_1 (resp. T_2) le tiré en arrière du fibré tautologique de $\mathbb{P}(V_1^*)$ (resp. de $\mathbb{P}(V_2)$) et $\underline{V}$ le fibré trivial de fibre V au dessus de $\mathbb{P}(V_1^*) \times \mathbb{P}(V_2)$. D'après la proposition 1.5.9 et le corollaire 2.1.13, la variété $\mathcal{X}$ s'identifie à l'espace total du fibré vectoriel

$$(T_1 \otimes \underline{V}) \oplus (\underline{V^*} \otimes T_2)$$

au dessus de $\mathbb{P}(V_1^*) \times \mathbb{P}(V_2)$.

Remarque 2.1.18. Soient $n = 1$ et $Z \subset W$ un sous-schéma fermé $\mathbb{G}_m$-stable tel que $k[Z] \cong k[\mathbb{G}_m]$ comme $\mathbb{G}_m$-module. Alors Z s'identifie à un point (f, L) de $\mathcal{H}$ et est défini comme sous-schéma de W par

$$Z = \left\{ (u_1, u_2) \in W \;\middle|\; \begin{array}{l} u_2 \circ u_1 = f, \\ \mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(u_1), \\ \mathrm{Im}(u_2) \subset \mathrm{Im}(L). \end{array} \right\}.$$

En particulier :
- Si $f \neq 0$, alors Z est isomorphe à $\mathbb{G}_m$.
- Si $f = 0$, alors Z est la réunion de deux droites qui se coupent en l'origine.

2.1.3 Description de l'algèbre du nilcône

Dans les sections 2.1.4 et 2.1.5, nous allons étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$ respectivement. Comme pour le cas cas $n = 1$ étudié dans la section 2.1.2, nous allons utiliser le principe de réduction (voir la section 1.5.1) pour nous ramener du cas $n_1, n_2 \geq n$ au cas $n_1 = n_2 = n$. Le résultat essentiel de cette section est la proposition 2.1.21 qui donne la description de l'algèbre du nilcône $\mathcal{N}(W, G)$ comme $G' \times G$-module lorsque $n_1 = n_2 = n$. Cette description nous sera très utile par la suite.

Notation 2.1.19. On note J l'idéal engendré par les G-invariants homogènes de degré positif de $k[W]$.

L'idéal J est $G' \times G$-stable par définition. On note

$$sl(V) := \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \mathrm{tr}(f) = 0\} \tag{2.4}$$

le G-module irréductible de plus haut poids $\epsilon_1 - \epsilon_n$, où $\mathrm{tr}(f)$ désigne la trace de l'endomorphisme f. On a $V^* \otimes V \cong \mathrm{End}(V) \cong sl(V) \oplus V_0$ et

$$\begin{aligned} k[W]_2 &= S^2((V_1 \otimes V^*) \oplus (V \otimes V_2^*)) \\ &= S^2(V_1 \otimes V^*) \oplus (V_1 \otimes V^* \otimes V \otimes V_2^*) \oplus S^2(V \otimes V_2^*) \\ &= (S^2(V_1) \otimes S^2(V^*)) \oplus (\Lambda^2(V_1) \otimes \Lambda^2(V^*)) \oplus (V_1 \otimes V^* \otimes V \otimes V_2^*) \\ &\quad \oplus (S^2(V) \otimes S^2(V_2^*)) \oplus (\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V_2^*)) \\ &= (S^2(V_1) \otimes S^2(V^*)) \oplus (S^2(V) \otimes S^2(V_2^*)) \oplus (\Lambda^2(V_1) \otimes \Lambda^2(V^*)) \\ &\quad \oplus (\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V_2^*)) \oplus (V_1 \otimes V_2^* \otimes sl(V)) \oplus (V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0) \end{aligned} \tag{2.5}$$

comme $G' \times G$-module. Donc $J \cap k[W]_2 = V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0 \cong \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ comme $G' \times G$-module et ce module engendre l'idéal J.

On rappelle que l'on a défini les sous-groupes B', T', U' de G' (resp. B, T, U de G) dans la section 1.4.1 et que l'on identifie $\mathrm{Hom}(V_1, V)$ à $\mathcal{M}_{n,n_1}(k)$ (resp. $\mathrm{Hom}(V, V_2)$ à $\mathcal{M}_{n_2,n}(k)$) via les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. La proposition qui suit est prouvée dans [KS11, §9] :

Proposition 2.1.20. *Soient x_i, $1 \leq i \leq n$, le i-ème mineur principal de $\mathrm{Hom}(V_1, V)$ et y_j, $1 \leq j \leq n$, le j-ième mineur antiprincipal (c'est-à-dire extrait en partant du coin inférieur droit) de $\mathrm{Hom}(V, V_2)$. Alors la $T' \times T$-algèbre $(k[W]/J)^{U' \times U}$ est engendrée par les x_i et les y_j et les relations entre ces générateurs sont engendrées par les monômes $\{x_i y_j \mid i + j > n\}$. Autrement dit, on a une suite exacte*

$$0 \to J' \to k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \to (k[W]/J)^{U' \times U} \to 0$$

où J' est l'idéal monomial engendré par $\{x_i y_j \mid i + j > n\}$.

On reprend les notations de la section 1.4.2. On a la

Proposition 2.1.21. *Soit $\lambda \in \Lambda+$, alors la composante isotypique associée au G-module $S^\lambda(V)$ dans $k[W]/J$ est :*

- $S^\lambda(V_2^*) \otimes S^\lambda(V)$ *si* $r_n \geq 0$,
- $S^\lambda(V_1^*) \otimes S^\lambda(V)$ *si* $r_1 \leq 0$,
- $S^{k_n \epsilon_1 + k_{n-1} \epsilon_2 + \ldots + k_{t+1} \epsilon_{n-t}}(V_1) \otimes S^{k_1 \epsilon_1 + \ldots + k_t \epsilon_t}(V_2^*) \otimes S^\lambda(V)$ *sinon.*

De plus, la représentation $S^\lambda(V)$ apparaît dans $k[W]_p/(J \cap k[W]_p)$ si et seulement si $p = \sum_i k_i$.

Démonstration. D'après la proposition 2.1.20, on a un isomorphisme de $T \times T'$-algèbres :

$$(k[W]/J)^{U \times U'} \cong k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]/J'.$$

D'après [Pro07, §11.4.2], on a les isomorphismes de $T' \times T$-modules suivants :

$$\begin{cases} k[x_1, \ldots, x_n] \cong k[V_1^* \otimes V]^{U \times U'}, \\ k[y_1, \ldots, y_n] \cong k[V^* \otimes V_2]^{U \times U'}. \end{cases}$$

Donc la formule de Cauchy-Littlewood ([Ful97, §8.3, Corollary 3]) nous permet de conclure lorsque $r_n \geq 0$ ou $r_1 \leq 0$. Il reste à étudier le cas $r_1.r_n < 0$. On vérifie que le poids du monôme

$$x_{n-t}^{k_{t+1}} x_{n-t-1}^{k_{t+2}-k_{t+1}} x_{n-t-2}^{k_{t+3}-k_{t+2}} \cdots x_1^{k_n-k_{n-1}} y_t^{k_t} y_{t-1}^{k_{t-1}-k_t} y_{t-2}^{k_{t-2}-k_{t-1}} \cdots y_1^{k_1-k_2}$$

est

$$(\lambda,\ k_n\epsilon_1 + k_{n-1}\epsilon_2 + \ldots + k_{t+1}\epsilon_{1+n-(t+1)},\ -k_t\epsilon_{1+n-t} - \ldots - k_1\epsilon_n)$$

et que λ détermine uniquement ce monôme. Il s'ensuit que la composante isotypique du G-module $S^\lambda(V)$ dans $k[W]/J$ est

$$S^{k_n\epsilon_1+k_{n-1}\epsilon_2+\ldots+k_{t+1}\epsilon_{n-t}}(V_1) \otimes S^{k_1\epsilon_1+\ldots+k_t\epsilon_t}(V_2^*) \otimes S^\lambda(V).$$

En particulier, la représentation $S^\lambda(V)$ apparaît dans $k[W]_p/(J \cap k[W]_p)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} p &= (k_n - k_{n-1}) + 2(k_{n-1} - k_{n-2}) + \ldots + (n-t)k_{t+1} + (k_1 - k_2) + 2(k_2 - k_3) + \ldots + tk_t \\ &= k_1 + k_2 + \ldots + k_n. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.22. Si M est une représentation polynomiale ou la duale d'une représentation polynomiale, alors il découle de la proposition 2.1.21 que la multiplicité de M dans $k[W]/J$ est égale à sa dimension.

Définition 2.1.23. Si I est un idéal homogène de $k[W]$, on appelle fonction de Hilbert classique de I la fonction définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f_I(p) := \dim\left(k[W]_p/(k[W]_p \cap I)\right).$$

Corollaire 2.1.24. *Si I un idéal G-stable et homogène de $k[W]$ contenant J et qui a pour fonction de Hilbert h, alors la fonction de Hilbert classique de I est donnée par :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f_I(p) = \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{Z}^n \\ r_1\geq\ldots\geq r_n \\ |r_1|+\ldots+|r_n|=p}} h(S^{r_1\epsilon_1+\ldots+r_n\epsilon_n}(V)) \dim(S^{r_1\epsilon_1+\ldots+r_n\epsilon_n}(V)).$$

Démonstration. Soit $\lambda = r_1\epsilon_1 + \ldots + r_n\epsilon_n \in \Lambda+$, alors d'après la proposition 2.1.21 le G-module $S^\lambda(V)$ apparaît dans $k[W]_p/(k[W]_p \cap I)$ uniquement si $p = |r_1| + \ldots + |r_n|$. La multiplicité de chaque G-module étant fixée par la fonction de Hilbert h de I, on en déduit la dimension de chaque $k[W]_p/(k[W]_p \cap I)$ par la formule annoncée. □

2.1.4 Etude du cas $\dim(V) = 2$

Dans toute cette section, on fixe $n = 2$. On a $G \cong GL_2(k)$, $W/\!\!/G = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 2}$ et $\rho :\ \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2)$ est le morphisme construit dans la section 1.5.1. On note

$$Y_0 := \{(f, L) \in W/\!\!/G \times \mathbb{P}(W/\!\!/G) \mid f \in L\} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W/\!\!/G)}(-1)$$

l'éclatement de $W/\!\!/G$ en l'origine et Y_1 l'éclatement de Y_0 le long de la transformée stricte de $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 1}$. Nous verrons à la fin de cette section que Y_1 est isomorphe à l'éclatement de la section nulle du fibré $\mathrm{Hom}(\underline{V_1}/T_1^\perp, T_2)$ au dessus de $\mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2)$ où T_1 (resp. T_2) est le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(2, V_1^*)$ (resp. de $\mathrm{Gr}(2, V_2)$) et $\underline{V_1}$ désigne le fibré trivial de fibre V_1 au dessus de $\mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2)$. Le but de cette section est de démontrer le

Théorème 2.1.25. *Si $n_1, n_2 \geq 2$, alors $\mathcal{H} \cong Y_1$ est une variété lisse et γ est une résolution des singularités de $W/\!\!/G$.*

Lorsque $n_1 = n_2 = 2$, alors on a $Y_1 = Y_0$ et γ est l'éclatement en 0 de $W/\!\!/G$. Pour démontrer le théorème 2.1.25, on commence par établir le cas particulier $n_1 = n_2 = 2$ (proposition 2.1.41). Le cas général $n_1, n_2 \geq 2$ est ensuite traité à l'aide du principe de réduction (voir la section 1.5.1).

Remarque 2.1.26. Si $n_1 + n_2 \leq 3$, alors $\mathcal{H} \cong W/\!\!/G$ est une variété lisse et γ est un isomorphisme d'après le corollaire 2.1.13.

Remarque 2.1.27. Les cas particuliers ($n_1 = 1$, $n_2 > 2$) et ($n_2 = 1$, $n_1 > 2$) ont été traités dans la section 2.1.2.

On suppose dans un premier temps que $n_1 = n_2 = 2$.

Points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'

On souhaite montrer que $\mathcal{H}$ est une variété lisse. D'après le lemme 1.2.2, il suffit de montrer que les points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B' sont tous dans $\mathcal{H}^{\text{prin}}$ et de vérifier que la dimension de l'espace tangent à $\mathcal{H}$ en chacun de ces points fixes est égale à la dimension de $\mathcal{H}^{\text{prin}}$. On commence donc par déterminer les points fixes de B' dans $\mathcal{H}$.

Notation 2.1.28. On note $D := \langle e_1 \otimes f_2^* \rangle$ l'unique droite B'-stable de $V_1 \otimes V_2^*$.
On note I l'idéal de $k[W]$ engendré par $(V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0) \oplus (D \otimes sl(V)) \subset k[W]_2$.

Remarque 2.1.29. L'idéal I est homogène, $B' \times G$-stable et contient l'idéal J engendré par les G-invariants homogènes de degré positif de $k[W]$.

Théorème 2.1.30. *L'idéal I est l'unique point fixe de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'.*

Démonstration. Soit $Z \in \mathcal{H}(k)$, vu comme sous-schéma fermé de W, et I_Z l'idéal de Z dans $k[W] \cong S(W^*) = \bigoplus_{p \geq 0} S^p(W^*)$ où l'on identifie comme précédemment $k[W]$, l'algèbre des fonctions régulières sur W, avec $S(W^*)$, l'algèbre symétrique de W^*. Alors

$$Z \in \mathcal{H}^{B'} \Leftrightarrow \forall b \in B',\ \forall f \in I_Z,\ b.f \in I_Z.$$

En particulier, I_Z est nécessairement un idéal homogène puisqu'il est stable pour l'opération du groupe des matrices scalaires inversibles qui est un sous-groupe de B'.
Donc, les points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B' correspondent exactement aux idéaux homogènes I_Z de $k[W]$ tels que :
i) I_Z est $B' \times G$-stable,
ii) $k[W]/I_Z = \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus \dim(M)}$ comme G-module.
Comme $k[W]$ est une algèbre graduée et que I_Z est un idéal homogène, $k[W]/I_Z$ est encore une algèbre graduée :

$$k[W]/I_Z = \bigoplus_{p \geq 0} k[W]_p/(I_Z \cap k[W]_p).$$

Nous allons donc pouvoir étudier I_Z degré par degré.
• Composante de degré 0 :
On a $I_Z \cap k[W]_0 = 0$, sinon I_Z contient les constantes de $k[W]$ et donc $I_Z = k[W]$.
• Composante de degré 1 :
On a $I_Z \cap k[W]_1 \neq k[W]_1$, sinon $k[W]/I_Z = V_0$ comme G-module.
• Composante de degré 2 : on utilise la décomposition (2.5).
Pour avoir la décomposition souhaitée de $k[W]/I_Z$ comme G-module, on a nécessairement $k[W]_2 \cap I_Z \supseteq sl(V) \oplus 4V_0$. En effet, le G-module $k[W]/I_Z$ contient déjà une copie de la représentation triviale (les constantes), il ne peut donc pas en contenir d'autre. Ensuite, $k[W]_2$ contient 4 copies de $sl(V)$ qui est un G-module de dimension 3, donc $k[W]_2 \cap I_Z$ contient au moins une copie de $sl(V)$. Comme $k[W]_2 \cap I_Z$ est B'-stable, il contient $D \otimes sl(V)$ car D est l'unique droite B'-stable de $V_1 \otimes V_2^*$. Il s'ensuit que I_Z contient $(V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0) \oplus (D \otimes sl(V))$ et donc $I_Z \supset I$. Le lemme qui suit implique que cette inclusion est en fait une égalité et achève ainsi la démonstration du théorème 2.1.30 :

Lemme 2.1.31. *L'idéal I a pour fonction de Hilbert h_W.*

Preuve du lemme : On rappelle que par définition de h_W, pour chaque $M \in \mathrm{Irr}(G)$, $h_W(M) = \dim(M)$ et donc il faut montrer que

$$k[W]/I = \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus \dim(M)}$$

comme G-module. On a l'inclusion d'idéaux $J \subset I$, d'où la suite exacte de $B' \times G$-modules :

$$0 \to I/J \to k[W]/J \to k[W]/I \to 0$$

et donc

$$k[W]/I \cong \frac{k[W]/J}{I/J}$$

comme $B' \times G$-module. La proposition 2.1.21 nous fournit la décomposition isotypique du G-module $k[W]/J$:
-Si M est un G-module polynomial (ou le dual d'un G-module polynomial), alors la multiplicité de M dans $k[W]/J$ est $\dim(M)$.
-Sinon, $M = S^{k_1\epsilon_1 - k_2\epsilon_2}(V)$ pour un unique couple $k_1, k_2 > 0$ et la multiplicité de $S^{k_1\epsilon_1-k_2\epsilon_2}(V)$ dans $k[W]/J$ est égale à $\dim(S^{k_2}(V_1) \otimes S^{k_1}(V_2^*)) = (k_1+1)(k_2+1)$.
On note $w \in W$ sous la forme $w = \left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_{22} & y_{12} \\ y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}\right)$ et on identifie $k[W]$ à $k[x_{ij}, y_{ij},\ 1 \leq i, j \leq 2]$. D'après la proposition 2.1.20, on a

$$(k[W]/J)^U \cong k[x_{11}, x_{12}, x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}, y_{11}, y_{12}, y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12}]/K$$

où

$$\begin{aligned} K = (&x_{11}(y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12}), x_{12}(y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12}), \\ &y_{11}(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}), y_{12}(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}), \\ &(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})(y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12})). \end{aligned}$$

Et $(I/J)^U$ est l'idéal de $(k[W]/J)^U$ engendré par $x_{11}y_{11}$. Donc

$$I/J = \bigoplus_{k_1,k_2>0} \left(D.\left(S^{k_2-1}(V_1) \otimes S^{k_1-1}(V_2^*)\right)\right) \otimes S^{k_1\epsilon_1-k_2\epsilon_2}(V)$$

comme $B' \times G$-module. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} k[W]/I =& V_0 \oplus k[V_1^* \otimes V]_+ \oplus k[V^* \otimes V_2]_+ \\ &\oplus \left(\bigoplus_{k_1,k_2>0} \frac{S^{k_2}(V_1) \otimes S^{k_1}(V_2^*)}{(D.(S^{k_2-1}(V_1) \otimes S^{k_1-1}(V_2^*)))} \otimes S^{k_1\epsilon_1-k_2\epsilon_2}(V) \right) \end{aligned}$$

comme $B' \times G$-module, où $k[V_1^* \otimes V]_+$ (resp. $k[V^* \otimes V_2]_+$) désigne l'idéal maximal homogène de $k[V_1^* \otimes V]$ (resp. de $k[V^* \otimes V_2]$).
On remarque que les multiplicités des représentations polynomiales (et de leurs duales) dans $k[W]/I$ sont les mêmes que dans $k[W]/J$. En revanche, la multiplicité de $S^{k_1\epsilon_1-k_2\epsilon_2}(V)$ dans $k[W]/I$ est :

$$\begin{aligned} \dim\left(\frac{S^{k_2}(V_1) \otimes S^{k_1}(V_2^*)}{(D.(S^{k_2-1}(V_1) \otimes S^{k_1-1}(V_2^*)))}\right) &= (k_1+1)(k_2+1) - k_1k_2 \\ &= k_1 + k_2 + 1 \\ &= \dim(S^{k_1\epsilon_1-k_2\epsilon_2}(V)). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.32. On a $\mathrm{Stab}_{G'}(I) = B'$, donc l'unique orbite fermée de $\mathcal{H}$ est isomorphe à $G'/B' \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Le corollaire qui suit découle du lemme 1.2.1 et du théorème 2.1.30.

Corollaire 2.1.33. *Le schéma $\mathcal{H}$ est connexe.*

Espace tangent de $\mathcal{H}$ en I

On note $Z_0 := \mathrm{Spec}(k[W]/I)$. Nous allons démontrer la

Proposition 2.1.34. $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 4$.

On identifie $k[W]$ à $k[x_{ij}, y_{ij},\ 1 \leq i, j \leq 2]$ comme dans la preuve du lemme 2.1.31 et on explicite des bases de certains $B' \times G$-modules qui apparaissent dans $k[W]_2$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 := y_{22}x_{11} + y_{12}x_{21} \\ f_2 := y_{22}x_{12} + y_{12}x_{22} \\ f_3 := y_{21}x_{11} + y_{11}x_{21} \\ f_4 := y_{21}x_{12} + y_{11}x_{22} \end{array}\right\} \text{ est une base de } V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0,$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 := x_{11}y_{11} \\ h_2 := x_{11}y_{21} \\ h_3 := x_{21}y_{11} \\ h_4 := x_{21}y_{21} \end{array}\right\} \text{ est une base de } D \otimes V^* \otimes V \cong D \otimes (sl(V) \oplus V_0).$$

On reprend les notations de la section 1.2. Soient $R := k[W]/I$ et

$$N := \langle f_1, f_2, f_3, f_4, h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle \subset k[W]$$

qui est un $B' \times G$-module qui engendre l'idéal I. D'après [GS, Macaulay2], les relations entre les générateurs ci-dessus du R-module I/I^2 sont données dans la table 2.1.

x21y12+x11y22	0	y11	0	0	0	-y21	0	0	0	x22y21	x12y21	0
x22y12+x12y22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x21y11+x11y21	-1	-y12	0	0	-x11	0	-y21	x22	0	-x22y22	-x12y22	0
x22y11+x12y21	0	0	0	x11	0	0	0	-x21	0	x21y22	0	0
x11y11	0	-y22	-y21	-x22	x21	0	0	0	0	0	x22y22	x22y21
x11y21	1	y12	y11	-x12	x11	y22	y21	-x22	-x21	0	x12y22	x12y21
x21y11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x21y21	0	0	0	0	0	y12	y11	x12	x11	0	0	0

Table 2.1 – Relations entre les générateurs de I/I^2

La colonne de gauche nous donne les générateurs considérés et chaque autre colonne fournit une relation entre les générateurs des lignes correspondantes. En particulier, on a les relations suivantes données par les colonnes 6, 5 et 4 respectivement :

$$\begin{cases} r_1 := -f_1 \otimes y_{21} + h_2 \otimes y_{22} + h_4 \otimes y_{12}, \\ r_2 := -f_3 \otimes x_{11} + h_1 \otimes x_{21} + h_2 \otimes x_{11}, \\ r_3 := f_4 \otimes x_{11} - h_1 \otimes x_{22} - h_2 \otimes x_{12}. \end{cases}$$

On a $\dim(N) = 7$ et donc d'après le lemme 1.2.6 on a $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 7 - \mathrm{rg}(\rho^*)$. D'après le lemme 1.2.1, la variété $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ contient au moins un point fixe pour l'opération de B', donc $Z_0 \in \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ et donc $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) \geq \dim(\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}) = 4$. Donc, pour montrer la proposition 2.1.34, il suffit de montrer le

Lemme 2.1.35. $\mathrm{rg}(\rho^*) \geq 3$.

Démonstration. Pour $i = 1, \ldots, 4$, on définit $\psi_i \in \mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$ par

$$\begin{cases} \psi_i(h_j \otimes 1) = 0 & \text{pour } j = 1, \ldots, 4, \\ \psi_i(f_j \otimes 1) = \delta_i^j & \text{pour } j = 1, \ldots, 4, \end{cases}$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker qui vaut 1 lorsque $i = j$, et qui vaut 0 sinon. Les ψ_i forment une famille libre de $\mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$, nous allons voir que $\rho^*(\psi_1)$, $\rho^*(\psi_3)$ et $\rho^*(\psi_4)$ forment une famille libre de $\mathrm{Hom}_R^G(R \otimes \mathcal{R}, R)$ ce qui démontrera le lemme. Soient λ_1, λ_3, $\lambda_4 \in k$ tels que

$$\sum_{i=1,3,4} \lambda_i \, \rho^*(\psi_i) = 0. \tag{2.6}$$

On évalue (2.6) en $r_1 \otimes 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_{i=1,3,4} \lambda_i \, \rho^*(\psi_i)(r_1 \otimes 1) \\ &= \textstyle\sum_{i=1,3,4} \lambda_i \, \psi_i(r_1) \\ &= \textstyle\sum_{i=1,3,4} \lambda_i \, \psi_i(-f_1 \otimes y_{21} + h_2 \otimes y_{22} + h_4 \otimes y_{12}) \\ &= -\lambda_1 \, y_{21}. \end{aligned}$$

On évalue (2.6) en $r_2 \otimes 1$, on obtient : $0 = -\lambda_3\, x_{11}$.
On évalue (2.6) en $r_3 \otimes 1$, on obtient : $0 = \lambda_4\, x_{11}$.
On en déduit que $(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) = (0,0,0)$ et donc $\rho^*(\psi_1)$, $\rho^*(\psi_3)$ et $\rho^*(\psi_4)$ forment bien une famille libre dans $\mathrm{Im}(\rho^*)$. □

Remarque 2.1.36. D'après [GS, Macaulay2], une famille de générateurs du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$ est donnée dans la table 2.2.

x21y12+x11y22	0	x21	x11	0	0	y22	0	y12	0	0
x22y12+x12y22	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x21y11+x11y21	0	0	0	0	0	y21	x21	y11	x11	0
x22y11+x12y21	0	0	0	y21	y11	0	x22	0	x12	0
x11y11	0	0	0	0	0	y11	x11	0	0	x12y12
x11y21	0	0	0	0	0	y21	0	0	x11	x12y22
x21y11	0	0	0	0	0	0	x21	y11	0	-x12y22
x21y21	0	0	0	0	0	0	0	y21	x21	x22y22

TABLE 2.2 – Générateurs du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$

La colonne de gauche donne des générateurs du R-module I/I^2 et chaque autre colonne représente un R-morphisme qui à l'élément de I/I^2 de la colonne de gauche associe l'élément de R situé sur la même ligne. On note Φ_i le morphisme associé à la colonne $i+1$. On vérifie que les quatre morphismes Φ_1, Φ_{11}, $y_{12}\Phi_8+y_{22}\Phi_{10}$, $x_{12}\Phi_7+x_{22}\Phi_9$ sont G-équivariants et linéairement indépendants. Ils forment donc une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R)$. Ensuite, d'après la suite exacte (1.6), le module $\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R)$ s'identifie à un B'-sous-module de $\mathrm{Hom}^G(N, R) \cong (V_1^* \otimes V_2) \oplus \left(D^* \otimes \frac{V_1 \otimes V_2^*}{D}\right)$. Or Φ_{11}, $y_{12}\Phi_8 + y_{22}\Phi_{10}$ et $x_{12}\Phi_7 + x_{22}\Phi_9$ définissent des éléments de $D^* \otimes \frac{V_1 \otimes V_2^*}{D}$ tandis que Φ_1 définit un élément de $V_1^* \otimes V_2$, donc nécessairement $\langle \Phi_1 \rangle$ est l'unique droite B'-stable de $V_1^* \otimes V_2$ et donc

$$\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R) \cong D^* \oplus \left(D^* \otimes \frac{V_1 \otimes V_2^*}{D}\right)$$

comme B'-module.

On déduit du lemme 1.2.2 et de ce qui précède le

Corollaire 2.1.37. *$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ est une variété lisse de dimension* 4.

Construction d'un morphisme G'-équivariant $\delta : \mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!/G)$

Le lemme qui suit découle de la théorie classique des invariants de manière analogue au lemme 1.5.1.

Lemme 2.1.38. *Le $k[W]^G$-module $k[W]_{(sl(V))}$ est engendré par $\mathrm{Hom}^G(sl(V), k[W]_2)$.*

Lemme 2.1.39. *On a un isomorphisme de G'-modules*

$$\mathrm{Hom}^G(sl(V), k[W]_2) \cong V_1 \otimes V_2^*.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}^G(sl(V), k[W]_2) &\cong \mathrm{Hom}^G(sl(V), V_1 \otimes V^* \otimes V \otimes V_2^*) \text{ d'après (2.5)},\\ &\cong V_1 \otimes V_2^* \text{ puisque } V^* \otimes V \cong sl(V) \oplus V_0.\end{aligned}$$

□

La proposition 1.3.1 et le lemme 2.1.39 nous donnent un morphisme G'-équivariant :

$$\mathcal{H} \to \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2^*).$$

Puis $V_1 \otimes V_2^* = \det(V_1) \otimes V_1^* \otimes V_2 \otimes \det^{-1}(V_2)$ comme G'-module donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2^*) &= \mathbb{P}(\det(V_1) \otimes V_1^* \otimes V_2 \otimes \det^{-1}(V_2)) \\ &= \mathbb{P}(V_1^* \otimes V_2) \\ &= \mathbb{P}(W/\!\!/G) \end{aligned} \tag{2.7}$$

comme G'-variétés. On a donc un morphisme G'-équivariant :

$$\delta : \mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!\!/G). \tag{2.8}$$

Le morphisme $\gamma \times \delta$ est un isomorphisme entre $\mathcal{H}$ et Y_0

On rappelle que l'on note

$$Y_0 := \{(f, L) \in W/\!\!/G \times \mathbb{P}(W/\!\!/G) \mid f \in L\} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W/\!\!/G)}(-1)$$

l'éclatement en 0 de $W/\!\!/G = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. L'opération de G' dans $W/\!\!/G$ induit une opération de G' dans $W/\!\!/G \times \mathbb{P}(W/\!\!/G)$ qui préserve Y_0. On montre alors, en procédant comme dans la preuve du lemme 1.5.19, que le morphisme $\gamma \times \delta$ envoie $\mathcal{H}$ dans Y_0. Ensuite, on a le

Lemme 2.1.40. *Le morphisme $\gamma \times \delta : \mathcal{H} \to Y_0$ est quasi-fini.*

Démonstration. On note comme précédement Z_0 l'unique point fixe de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B' et soit $y_0 := (\gamma \times \delta)(Z_0)$. Nous allons montrer dans un premier temps que l'ensemble $(\gamma \times \delta)^{-1}(y_0)$ est formé de Z_0. Soit $Z \in \mathcal{H}$ tel que $(\gamma \times \delta)(Z) = y_0$. D'une part $\gamma(Z) = 0$, donc $I_Z \supset V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0$. D'autre part $\delta(Z) = \delta(Z_0) = D \in \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2^*)$, donc $I_Z \supset D \otimes sl(V)$. Le lemme 2.1.31 permet alors de conclure que $Z = Z_0$. Puis

$$E := \{Z \in \mathcal{H} \text{ tel que la fibre en } y := (\gamma \times \delta)(Z) \text{ est de dimension } \geq 1\}$$

est un fermé (G'-stable) de $\mathcal{H}$ d'après [Har77, Exercice II.3.22]. D'après le lemme 1.2.1 et ce qui précède, l'ensemble E est vide et le résultat s'ensuit. □

Proposition 2.1.41. *Le morphisme $\gamma \times \delta : \mathcal{H} \to Y_0$ est un isomorphisme.*

Démonstration. La variété Y_0 est lisse, donc normale et le morphisme $\gamma \times \delta : \mathcal{H} \to Y_0$ est birationnel, propre et quasi-fini d'après le lemme 2.1.40, donc d'après le théorème principal de Zariski, c'est un isomorphisme. □

Cas $n_1, n_2 \geq 2$

Nous allons utiliser le principe de réduction (voir la section 1.5.1) afin de traiter le cas général du théorème 2.1.25 en nous ramenant au cas $n_1 = n_2 = 2$.

Notation 2.1.42. Pour tout $L \in \mathbb{P}(W/\!\!/G) = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 2})$, on note :

- $\mathrm{Ker}(L) := \mathrm{Ker}(l)$,
- $\mathrm{Im}(L) := \mathrm{Im}(l)$,
- $\mathrm{rg}(L) := \mathrm{rg}(l)$,

où l est n'importe quel élément non-nul de L.
Si $\mathrm{rg}(L) = 2$, on note $L \wedge L := \langle l \wedge l \rangle \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2)))$.
Enfin, on note $\iota_1 : \mathrm{Gr}(2, V_1^*) \to \mathbb{P}(\Lambda^2(V_1^*))$ et $\iota_2 : \mathrm{Gr}(2, V_2) \to \mathbb{P}(\Lambda^2(V_2))$ les plongements de Plücker de $\mathrm{Gr}(2, V_1^*)$ et $\mathrm{Gr}(2, V_2)$ respectivement.

On considère la variété

$$\mathcal{Z} := \left\{ (f, L, E_1, E_2) \in W/\!\!/G \times \mathbb{P}(W/\!\!/G) \times \mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in L, \\ E_1^\perp \subset \mathrm{Ker}(L), \\ \mathrm{Im}(L) \subset E_2. \end{array} \right\}$$

alors on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Z} \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ Y_0 & & \mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2) \end{tikzcd}$$

où q_1 et q_2 sont les projections naturelles. La variété Y_1 a été définie au début de la section 2.1.4.

Lemme 2.1.43. *On a un isomorphisme de variétés $Y_1 \cong \mathcal{Z}$ et via cet isomorphisme, l'éclatement $Y_1 \to Y_0$ s'identifie au morphisme $q_1 : \mathcal{Z} \to Y_0$.*

Démonstration. On commence par remarquer que, si $L \in \mathbb{P}(W/\!/G)$ est tel que $\mathrm{rg}(L) = 2$ et si l un élément non-nul de L, alors $l \wedge l \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1}$ et donc $L \wedge L \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1})$. On note F_0 la transformée stricte de $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 1}$ via l'éclatement $Y_0 \to \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 2}$ et on considère

$$\alpha : \ Y_0 \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1})$$

l'application rationnelle définie sur

$$U := \{(f, L) \in Y_0 \ \mid \mathrm{rg}(L) = 2\} = Y_0 \backslash F_0$$

par $\alpha(f, L) = L \wedge L$. On note

$$\Gamma \subset Y_0 \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1})$$

le graphe de l'application α. Alors

$$\Gamma = \{(f, L, E) \in U \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1}) \mid L \wedge L = E\}.$$

L'adhérence de Γ dans $Y_0 \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1})$ est donnée par

$$\overline{\Gamma} = \left\{ (f, L, E) \in Y_0 \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1}) \ \middle| \ \begin{array}{l} \forall l \in L, \ l \wedge l \in E, \\ \mathrm{Im}(E) \in \iota_2(\mathrm{Gr}(2, V_2)), \\ \mathrm{Ker}(E)^{\perp} \in \iota_1(\mathrm{Gr}(2, V_1^*)). \end{array} \right\}$$

où $\mathrm{Im}(E) := \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(E) := \mathrm{Ker}(g)$ pour n'importe quel élément non-nul $g \in E$.

<u>Fait :</u> le morphisme $\overline{\Gamma} \to Y_0, \ (f, L, E) \mapsto (f, L)$ est l'éclatement de Y_0 le long du fermé F_0.
On commence par construire un recouvrement de Y_0 par des ouverts affines. On a $\mathbb{P}(W/\!/G) \subset \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2)) \cong \mathbb{P}(\mathcal{M}_{n_2, n_1}(k))$, où l'on rappelle que l'on identifie $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ avec $\mathcal{M}_{n_2, n_1}(k)$ via les bases fixées dans la section 1.4.1. Quels que soient $1 \leq i \leq n_2$ et $1 \leq j \leq n_1$, on note $O_{i,j}$ l'ouvert affine de $\mathbb{P}(\mathcal{M}_{n_2, n_1}(k))$ obtenu en fixant la coordonnée (i, j) égale à 1. Puis, on note $Y_0^{i,j} := \{(f, l) \in W/\!/G \times (\mathbb{P}(W/\!/G) \cap O_{i,j}) \mid f \in \langle l \rangle\}$ qui est un ouvert affine (éventuellement vide) de Y_0. Alors $Y_0 = \bigcup_{i,j} Y_0^{i,j}$ est un recouvrement de Y_0 par des ouverts affines. Ensuite, on note $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de F_0 dans Y_0. Alors $\mathcal{I}_{|Y_0^{i,j}}$ est l'idéal de $k[Y_0^{i,j}]$ engendré par les mineurs de taille 2 de la matrice l. Et la restriction de α à $Y_0^{i,j}$ est l'application rationnelle $\alpha_{i,j} : \ Y_0^{i,j} \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1})$ définie sur $U_{i,j} := \{(f, l) \in Y_0^{i,j} \mid \mathrm{rg}(l) = 2\}$ par $\alpha_{i,j}(f, l) = \langle l \wedge l \rangle$. On note $\Gamma_{i,j} \subset Y_0^{i,j} \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1})$ le graphe de l'application $\alpha_{i,j}$, alors d'après [EH01, Proposition IV.22], le morphisme $\overline{\Gamma_{i,j}} \to Y_0^{i,j}, \ (f, l, E) \mapsto (f, l)$ est l'éclatement de $Y_0^{i,j}$ le long du fermé $F_0 \cap Y_0^{i,j}$. Enfin, ces éclatements se recollent pour donner le morphisme $\overline{\Gamma} \to Y_0, \ (f, L, E) \mapsto (f, L)$ ce qui montre le fait annoncé.

Il reste à voir que $\overline{\Gamma}$ est isomorphe à $\mathcal{Z}$. On a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1}) & \cong & \mathbb{P}(\Lambda^2(V_1)^*) \times \mathbb{P}(\Lambda^2(V_2)) \\ E & \mapsto & (\mathrm{Ker}(E)^{\perp}, \mathrm{Im}(E)) \end{array}$$

donné par le plongement de Segre. On en déduit un isomorphisme

$$\overline{\Gamma} \cong \left\{ (f, L, L_1, L_2) \in Y_0 \times \mathbb{P}(\Lambda^2(V_1)^*) \times \mathbb{P}(\Lambda^2(V_2)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall l \in L, \quad \text{on a} \begin{cases} \mathrm{Ker}(l \wedge l)^\perp \subset L_1, \\ \mathrm{Im}(l \wedge l) \subset L_2, \end{cases} \\ L_1 \in \iota_1(\mathrm{Gr}(2, V_1^*)), \\ L_2 \in \iota_2(\mathrm{Gr}(2, V_2)). \end{array} \right\}.$$

Soit $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 2}$, alors $f \wedge f \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2(V_1), \Lambda^2(V_2))^{\leq 1}$ et on a deux cas de figure : si $\mathrm{rg}(f) \leq 1$, alors $f \wedge f = 0$, sinon $\mathrm{Im}(f \wedge f) = L_2$ pour un certain $L_2 \in \iota_2(\mathrm{Gr}(2, V_2))$ et $\mathrm{Ker}(f \wedge f)^\perp = L_1$ pour un certain $L_1 \in \iota_1(\mathrm{Gr}(2, V_1^*))$. Pour $i = 1, 2$, on note E_i l'antécédent de L_i par ι_i. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f \wedge f) = L_2 &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = E_2, \\ \mathrm{Ker}(f \wedge f)^\perp = L_1 &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)^\perp = E_1. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\overline{\Gamma} \cong \{(f, L, E_1, E_2) \in Y_0 \times \mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2) \mid \; E_1^\perp \subset \mathrm{Ker}(L) \text{ et } \mathrm{Im}(L) \subset E_2\} = \mathcal{Z}.$$

□

On identifie la variété Y_1 à $\mathcal{Z}$ grâce au lemme 2.1.43. L'opération naturelle de G' dans $W/\!/G \times \mathbb{P}(W/\!/G) \times \mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2)$ stabilise Y_1. On fixe $(E_1, E_2) \in \mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2)$, alors on a un isomorphisme $\mathrm{Gr}(2, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(2, V_2) \cong G'/P$ où P est le stabilisateur de (E_1, E_2) dans G'. La projection $q_2 : \; Y_1 \to G'/P$ est un morphisme G'-équivariant et donc, d'après (1.26), on a un isomorphisme G'-équivariant

$$Y_1 \cong G' \times^P F''$$

où F'' est la fibre schématique du morphisme q_2 en (E_1, E_2). On a

$$\begin{aligned} F'' &= \{(f, L) \in \mathrm{Hom}(V_1/E_1^\perp, E_2) \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V_1/E_1^\perp, E_2)) \mid f \in L\} \\ &= Bl_0(\mathrm{Hom}(V_1/E_1^\perp, E_2)) \end{aligned}$$

qui est l'éclatement en 0 de $\mathrm{Hom}(V_1/E_1^\perp, E_2)$. Et P opère dans F'' de la façon suivante :

$$\forall p = (p_1, p_2) \in P, \forall (f, L) \in F'', \; p.(f, L) = (p_2 \circ f \circ p_1^{-1}, \langle p_2 \circ l \circ p_1^{-1} \rangle)$$

où l est n'importe quel élément non nul de L.
Avec les notations du début de la section 2.1.4, on remarque que Y_1 est l'espace total du fibré $Bl_0(\mathrm{Hom}(\underline{V_1}/T_1^\perp, T_2))$ au dessus de G'/P ; celui-ci s'obtient en éclatant la section nulle dans le fibré $\mathrm{Hom}(\underline{V_1}/T_1^\perp, T_2)$.
Par ailleurs, d'après les propositions 1.5.6 et 2.1.41, on a un isomorphisme G'-équivariant

$$\mathcal{H} \cong G' \times^P Bl_0(\mathrm{Hom}(V_1/E_1^\perp, E_2))$$

où l'opération de P dans $Bl_0(\mathrm{Hom}(V_1/E_1^\perp, E_2))$ coïncide avec celle de P dans F''. On a donc un isomorphisme G'-équivariant :

$$\mathcal{H} \cong Y_1. \tag{2.9}$$

On reprend les notations de la section 1.5.1 :

- $W' := \mathrm{Hom}(V_1/E_1^\perp, V) \times \mathrm{Hom}(V, E_2) \subset W$,
- $\mathcal{H}' := \mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W') \subset \mathcal{H}$,
- $\gamma' : \; \mathcal{H}' \to W'/\!/G$ le morphisme de Hilbert-Chow,
- $\delta' : \; \mathcal{H}' \to \mathbb{P}(W'/\!/G)$ le morphisme (2.8).

D'après la proposition 2.1.14, on a $h_{W'} = h_W$, et donc $\mathcal{H}'$ est simplement le schéma de Hilbert invariant étudié précédement (avec $n_1 = n_2 = 2$). Puis, d'après la proposition 2.1.41, $\gamma' \times \delta' : \mathcal{H}' \to Bl_0(W'/\!/G)$ est un isomorphisme P-équivariant et donc le morphisme induit $G' \times^P \mathcal{H}' \to G' \times^P Bl_0(W'/\!/G)$ est un isomorphisme G'-équivariant. Les observations précédentes et le corollaire 1.5.10 nous donnent le diagramme commutatif suivant :

(2.10)
$$\begin{tikzcd}
G' \times^P \mathcal{H}' \arrow[rr, "G' \times^P \gamma'"] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, "\psi_1"', "\cong"] & & G' \times^P W'/\!/G \arrow[dd, "\phi"] \\
& G' \times^P Bl_0(W'/\!/G) \arrow[ur, "pr_{1,2}"'] \arrow[dd, "\cong"] & \\
\mathcal{H} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\cong"'] & & W/\!/G \\
& Y_1 \arrow[ur, "pr_1"'] &
\end{tikzcd}$$

où

$$\begin{array}{rccc} pr_{1,2} & : & G' \times^P Bl_0(W'/\!/G) & \to & G' \times^P W'/\!/G \\ & & (g', f, L)P & \mapsto & (g', f)P \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} pr_1 & : & Y_1 & \to & W/\!/G \\ & & (f, L, E_1, E_2) & \mapsto & f. \end{array}$$

On identifie $\mathcal{H}$ à Y_1 grâce à l'isomorphisme (2.9), alors γ s'identifie à la composition des éclatements $Y_1 \to Y_0 \to W/\!/G$. En particulier γ est une résolution de $W/\!/G$.

2.1.5 Etude du cas $\dim(V) = 3$

Dans toute cette section, on fixe $n = 3$. On a $G \cong GL_3(k)$, $W/\!/G = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq 3}$ et $\rho : \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(3, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(3, V_2)$ est le morphisme construit dans la section 1.5.1. Nous allons démontrer le

Théorème 2.1.44. *Si $n_1, n_2 \geq 3$, alors $\mathcal{H}$ est connexe et singulier.*

Lorsque $n_1 = n_2 = 3$, la connexité de $\mathcal{H}$ est donnée par le corollaire 2.1.52 et la non-lissité de $\mathcal{H}$ est donnée par le corollaire 2.1.57. Le cas général $n_1, n_2 \geq 3$ se déduit immédiatement du cas particulier $n_1 = n_2 = 3$ par la proposition 1.5.6.

Remarque 2.1.45. Si $n_1 + n_2 \leq 4$, alors $\mathcal{H} \cong W/\!/G$ est une variété lisse et γ est un isomorphisme d'après le corollaire 2.1.13.

Remarque 2.1.46. Les cas particuliers suivants ne sont pas traités par le théorème 2.1.25 :

- $n_1 = 2$ et $n_2 \geq 3$,
- $n_2 = 2$ et $n_1 \geq 3$,

mais les cas particuliers $n_1 = 1$ ou $n_2 = 1$ ont été traités dans la section 2.1.2.

On suppose dorénavant que $n_1 = n_2 = 3$.

Points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'

On souhaite montrer que $\mathcal{H}$ est singulier. D'après le lemme 1.2.2, il suffit de déterminer un point fixe de $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ pour l'opération de B' tel que la dimension de l'espace tangent à $\mathcal{H}$ en ce point soit différente de la dimension de $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. On commence donc par déterminer les points fixes de B' dans $\mathcal{H}$.

On rappelle que

$$\begin{aligned} k[W]_2 = {} & (S^2(V_1) \otimes S^2(V^*)) \oplus (S^2(V) \otimes S^2(V_2^*)) \oplus (\Lambda^2(V_1) \otimes \Lambda^2(V^*)) \\ & \oplus (\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V_2^*)) \oplus (V_1 \otimes V_2^* \otimes sl(V)) \oplus (V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0) \end{aligned}$$

comme $G' \times G$-module (c'est l'isomorphisme (2.5)). Et on a

$$\begin{aligned}
(2.11) \qquad k[W]_3 &= S^3((V_1 \otimes V^*) \oplus (V \otimes V_2^*)) \\
&= S^3(V_1 \otimes V^*) \oplus (S^2(V_1 \otimes V^*) \otimes V \otimes V_2^*) \\
&\oplus (V_1 \otimes V^* \otimes S^2(V \otimes V_2^*)) \oplus S^3(V \otimes V_2^*) \\
&= S^3(V_1 \otimes V^*) \oplus (((S^2(V_1) \otimes S^2(V^*)) \oplus (\Lambda^2(V_1) \otimes \Lambda^2(V^*))) \otimes V \otimes V_2^*) \\
&\oplus (V_1 \otimes V^* \otimes ((S^2(V) \otimes S^2(V_2^*)) \oplus (\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V_2^*)))) \oplus S^3(V \otimes V_2^*) \\
&= S^3(V_1 \otimes V^*) \oplus S^3(V \otimes V_2^*) \\
&\oplus (S^2(V_1) \otimes V_2^* \otimes (V^* \oplus S^{\epsilon_1 - 2\epsilon_3}(V))) \oplus (\Lambda^2(V_1) \otimes V_2^* \otimes (V^* \oplus S^{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}(V))) \\
&\oplus (V_1 \otimes S^2(V_2^*) \otimes (V \oplus S^{2\epsilon_1 - \epsilon_3}(V))) \oplus (V_1 \otimes \Lambda^2(V_2^*) \otimes (V \oplus S^{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)))
\end{aligned}$$

comme $G' \times G$-module.

Notation 2.1.47. On note

- $E := \langle e_1 \otimes (f_2^* \wedge f_3^*),\ e_2 \otimes (f_2^* \wedge f_3^*),\ e_1 \otimes (f_1^* \wedge f_3^*) \rangle$,
- $F := \langle (e_1 \wedge e_2) \otimes f_3^*,\ (e_1 \wedge e_2) \otimes f_2^*,\ (e_1 \wedge e_3) \otimes f_3^* \rangle$,

qui sont des B'-sous-modules de $V_1 \otimes \Lambda^2(V_2^*)$ et $\Lambda^2(V_1) \otimes V_2^*$ respectivement.
On note D l'unique droite B'-stable de $V_1 \otimes V_2^*$.
Enfin, on note I l'idéal de $k[W]$ engendré par $(V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0) \oplus (D \otimes sl(V)) \subset k[W]_2$ et par $(F \otimes S^{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)) \oplus (E \otimes S^{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)) \subset k[W]_3$.

Remarque 2.1.48. L'idéal I est homogène, $B' \times G$-stable et contient l'idéal J engendré par les G-invariants homogènes de degré positif de $k[W]$.

Théorème 2.1.49. *L'idéal I est l'unique point fixe de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'.*

Démonstration. Les points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B' correspondent exactement aux idéaux homogènes I_Z de $k[W]$ tels que :
i) I_Z est $B' \times G$-stable,
ii) $k[W]/I_Z = \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus \dim(M)}$ comme G-module.
Soit I_Z un tel point fixe, alors on peut étudier I_Z degré par degré. En raisonnant comme dans la preuve du théorème 2.1.30 pour l'étude des composantes de degré 0, 1 et 2 de I_Z, on montre que I_Z contient

$$(V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0) \oplus (D \otimes sl(V)) \subset k[W]_2.$$

En particulier $I_Z \supset J$. On s'intéresse maintenant à la composante de degré 3 de I_Z. On a les dimensions suivantes :

$$\begin{cases} \dim(S^{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)) = \dim(S^{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)) = 6, \\ \dim(\Lambda^2(V_1) \otimes V_2^*) = \dim(V_1 \otimes \Lambda^2(V_2^*)) = 9. \end{cases}$$

Donc pour avoir la décomposition souhaitée de $k[W]/I_Z$ comme G-module, $k[W]_3 \cap I_Z$ contient nécessairement trois copies de $S^{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)$ et trois copies de $S^{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)$. Comme $k[W]_3 \cap I_Z$ est B'-stable, il contient $(M_2 \otimes S^{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)) \oplus (M_1 \otimes S^{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3}(V))$ où M_2 (resp. M_1) est un sous-espace B'-stable de dimension 3 de $V_1 \otimes \Lambda^2(V_2^*)$ (resp. de $\Lambda^2(V_1) \otimes (V_2^*)$). On note $E_1 := V_1 \otimes \langle f_2^* \wedge f_3^* \rangle$, $E_2 := E$ et $E_3 := \langle e_1 \rangle \otimes \Lambda^2(V_2^*)$ qui sont des B'-sous-modules de $V_1 \otimes \Lambda^2(V_2^*)$, et on note $F_1 := \Lambda^2(V_1) \otimes \langle f_3^* \rangle$, $F_2 := F$ et $F_3 := \langle e_1 \wedge e_2 \rangle \otimes V_2^*$ qui sont des B'-sous-modules de $\Lambda^2(V_1) \otimes V_2^*$. On vérifie que les B'-modules E_1, E_2 et E_3 (resp. F_1, F_2 et F_3) sont les seuls B'-sous-modules de dimension 3 de $V_1 \otimes \Lambda^2(V_2^*)$ (resp. de $\Lambda^2(V_1) \otimes V_2^*$). On a donc a priori neuf façons de choisir des générateurs pour I_Z en degré 3 : pour $1 \leq i, j \leq 3$, on note $I_{i,j}$ l'idéal de $k[W]$ engendré par $(V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0) \oplus (D \otimes sl(V)) \subset k[W]_2$ et par $(F_i \otimes S^{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)) \oplus (E_j \otimes S^{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3}(V)) \subset k[W]_3$. Alors $I_{2,2} = I$ et le lemme qui suit montre que nécessairement $I_Z \supset I$.

Lemme 2.1.50. *Si I_Z est un idéal G-stable contenant $I_{i,j}$ avec $(i,j) \neq (2,2)$, alors I_Z ne peut pas avoir la fonction de Hilbert h_W.*

Preuve du lemme. On suppose par exemple que $j = 3$ et soit i quelconque. On note $w \in W$ sous la forme

$$w = \left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_{33} & y_{23} & y_{13} \\ y_{32} & y_{22} & y_{12} \\ y_{31} & y_{21} & y_{11} \end{bmatrix} \right)$$

et on identifie $k[W]$ à $k[x_{ij}, y_{ij},\ 1 \leq i, j \leq 3]$. D'après la proposition 2.1.20, l'idéal $(I_{i,3}/J)^U$ de $(k[W]/J)^U$ contient les éléments suivants :

$$\begin{cases} x_{11}(y_{22}y_{11} - y_{21}y_{12}), \\ x_{11}(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{11}(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}), \end{cases}$$

qui forment une base du $B' \times T$-sous-module $E_3 \otimes (S^{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3}(V))^U$ de $(k[W]/J)^U$.
D'après la proposition 2.1.21, le G-module $S^{\epsilon_1+\epsilon_2-2\epsilon_3}(V)$ apparaît dans $k[W]/J$ uniquement dans $k[W]_4/(k[W]_4 \cap J)$ et avec une multiplicité égale à 18, cette multiplicité étant égale à la dimension de l'espace vectoriel engendré dans $(k[W]/J)^U$ par l'ensemble K suivant :

$$K \begin{cases} x_{11}^2(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{12}^2(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{13}^2(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{11}x_{12}(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{11}x_{13}(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{12}x_{13}(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{11}^2(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{12}^2(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{13}^2(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{11}x_{12}(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{11}x_{13}(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{12}x_{13}(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{11}^2(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}), \\ x_{12}^2(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}), \\ x_{13}^2(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}), \\ x_{11}x_{12}(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}), \\ x_{11}x_{13}(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}), \\ x_{12}x_{13}(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}). \end{cases}$$

Montrons que la multiplicité du G-module $S^{\epsilon_1+\epsilon_2-2\epsilon_3}(V)$ dans $k[W]_4/(k[W]_4 \cap I_{i,3})$ est strictement inférieure à $\dim(S^{\epsilon_1+\epsilon_2-2\epsilon_3}(V)) = 10$. Pour calculer cette multiplicité, il suffit de calculer la dimension de l'espace vectoriel engendré par $K' \subset K$ dans $(k[W]/J)^U$, où K' est obtenu en supprimant les éléments de K qui appartiennent à l'idéal $(I_{i,3}/J)^U$. On obtient :

$$K' \begin{cases} x_{12}^2(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{13}^2(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{12}x_{13}(y_{22}y_{11} - y_{12}y_{21}), \\ x_{12}^2(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{13}^2(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{12}x_{13}(y_{23}y_{11} - y_{13}y_{21}), \\ x_{12}^2(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}), \\ x_{13}^2(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}), \\ x_{12}x_{13}(y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}). \end{cases}$$

Donc K' engendre un espace vectoriel de dimension 9, et donc on ne va jamais avoir 10 copies de $S^{\epsilon_1+\epsilon_2-2\epsilon_3}(V)$ dans un quotient de $k[W]/I_{i,3}$, ce qui montre le lemme pour $j = 3$. Le cas $j = 1$ se démontre de manière analogue. □

D'après le lemme 1.2.1, le schéma $\mathcal{H}$ admet au moins un point fixe I_Z pour B' et d'après le lemme 2.1.50, on a nécessairement $I_Z \supset I$. Puis, d'après le corollaire 2.1.24, l'idéal I_Z admet la

fonction de Hilbert classique suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f_{I_Z}(p) = \sum_{\substack{(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{Z}^3 \\ r_1\geq r_2\geq r_3 \\ |r_1|+|r_2|+|r_3|=p}} (\dim(S^{r_1\epsilon_1+r_2\epsilon_2+r_3\epsilon_3}(V)))^2.$$

D'après la formule des dimensions de Weyl, on a

$$\dim(S^{r_1\epsilon_1+r_2\epsilon_2+r_3\epsilon_3}(V)) = \frac{1}{2}(1+r_1-r_2)(2+r_1-r_3)(1+r_2-r_3).$$

Donc

$$f_{I_Z}(p) = \sum_{\substack{(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{Z}^3 \\ r_1\geq r_2\geq r_3 \\ |r_1|+|r_2|+|r_3|=p}} \frac{1}{4}(1+r_1-r_2)^2(2+r_1-r_3)^2(1+r_2-r_3)^2.$$

Après développement puis simplification, on obtient :

$$\forall p \geq 0,\ f_{I_Z}(p) = 1 + \frac{122}{35}p + \frac{1654}{315}p^2 + \frac{547}{120}p^3 + \frac{91}{36}p^4 + \frac{37}{40}p^5 + \frac{79}{360}p^6 + \frac{13}{420}p^7 + \frac{1}{504}p^8.$$

Par ailleurs, un calcul direct avec [GS, Macaulay2] de la fonction de Hilbert classique de l'idéal I nous donne $f_I = f_{I_Z}$ et donc $I_Z = I$, ce qui achève la preuve du théorème 2.1.49. □

Remarque 2.1.51. On a $\mathrm{Stab}_{G'}(I) = B'$, donc l'unique orbite fermée de $\mathcal{H}$ est isomorphe à G'/B'.

Le corollaire qui suit découle du lemme 1.2.1 et du théorème 2.1.49.

Corollaire 2.1.52. *Le schéma $\mathcal{H}$ est connexe.*

Espace tangent de $\mathcal{H}$ en I

On note $Z_0 := \mathrm{Spec}(k[W]/I)$. Nous allons démontrer la

Proposition 2.1.53. $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 12$.

Pour démontrer cette proposition, nous allons procéder comme pour la proposition 2.1.34. Cette section est essentiellement calculatoire et on recommande donc au lecteur qui souhaite s'épargner un mal de tête d'en admettre les résultats sans trop s'attarder sur les démonstrations.
On identifie $k[W]$ à $k[x_{ij}, y_{ij},\ 1 \leq i,j \leq 3]$ comme dans la preuve du lemme 2.1.50 et on explicite des bases de certains G-modules qui apparaissent dans $k[W]$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 := y_{33}x_{11} + y_{23}x_{21} + y_{13}x_{31} \\ f_2 := y_{33}x_{12} + y_{23}x_{22} + y_{13}x_{32} \\ f_3 := y_{33}x_{13} + y_{23}x_{23} + y_{13}x_{33} \\ f_4 := y_{32}x_{11} + y_{22}x_{21} + y_{12}x_{31} \\ f_5 := y_{32}x_{12} + y_{22}x_{22} + y_{12}x_{32} \\ f_6 := y_{32}x_{13} + y_{22}x_{23} + y_{12}x_{33} \\ f_7 := y_{31}x_{11} + y_{21}x_{21} + y_{11}x_{31} \\ f_8 := y_{31}x_{12} + y_{21}x_{22} + y_{11}x_{32} \\ f_9 := y_{31}x_{13} + y_{21}x_{23} + y_{11}x_{33} \end{array}\right\} \text{ est une base de } V_1 \otimes V_2^* \otimes V_0,$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 := x_{11}y_{11} \\ h_2 := x_{11}y_{21} \\ h_3 := x_{11}y_{31} \\ h_4 := x_{21}y_{11} \\ h_5 := x_{21}y_{21} \\ h_6 := x_{21}y_{31} \\ h_7 := x_{31}y_{11} \\ h_8 := x_{31}y_{21} \\ h_9 := x_{31}y_{31} \end{array}\right\} \text{ est une base de } D \otimes V^* \otimes V \cong D \otimes (sl(V) \oplus V_0),$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 := x_{12}(y_{22}y_{11} - y_{21}y_{12}) \\ s_2 := x_{12}(y_{32}y_{11} - y_{31}y_{12}) \\ s_3 := x_{22}(y_{32}y_{11} - y_{31}y_{12}) \\ s_4 := x_{12}(y_{32}y_{21} - y_{31}y_{22}) \\ s_5 := x_{22}(y_{32}y_{21} - y_{31}y_{22}) \\ s_6 := x_{32}(y_{32}y_{21} - y_{31}y_{22}) \\ s_7 := x_{22}(y_{22}y_{11} - y_{21}y_{12}) \\ s_8 := x_{32}(y_{22}y_{11} - y_{21}y_{12}) \\ s_9 := x_{32}(y_{32}y_{11} - y_{31}y_{12}) \end{array}\right\} \text{ est une base de } e_2 \otimes (f_{n-1}^* \wedge f_n^*) \otimes \Lambda^2(V) \otimes V^* \subset k[W]_3,$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1 := y_{12}(x_{22}x_{11} - x_{21}x_{12}) \\ t_2 := y_{12}(x_{32}x_{11} - x_{31}x_{12}) \\ t_3 := y_{22}(x_{32}x_{11} - x_{31}x_{12}) \\ t_4 := y_{12}(x_{32}x_{21} - x_{31}x_{22}) \\ t_5 := y_{22}(x_{32}x_{21} - x_{31}x_{22}) \\ t_6 := y_{32}(x_{32}x_{21} - x_{31}x_{22}) \\ t_7 := y_{22}(x_{22}x_{11} - x_{21}x_{12}) \\ t_8 := y_{32}(x_{22}x_{11} - x_{21}x_{12}) \\ t_9 := y_{32}(x_{32}x_{11} - x_{31}x_{12}) \end{array}\right\} \text{ est une base de } (e_1 \wedge e_2) \otimes f_{n-1}^* \otimes \Lambda^2(V^*) \otimes V \subset k[W]_3.$$

Alors

$$N := \langle f_1, \ldots, f_9, h_1, \ldots, h_9, s_1, \ldots, s_6, t_1, \ldots, t_6 \rangle \subset k[W]$$

est un G-module qui engendre l'idéal I. On note $R := k[W]/I$. On a le

Lemme 2.1.54. $\dim(\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R)) \geq 12$.

Démonstration. D'après [GS, Macaulay2], une famille de générateurs du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$ est donnée dans la table 2.3. On note Φ_i le morphisme donné par la $i+1$-ème colonne de cette matrice. On vérifie que les douze morphismes suivants sont G-équivariants et linéairement indépendants :

- Φ_1
- Φ_{20},
- Φ_{21},
- Φ_{22},
- Φ_{23},
- Φ_{24},
- $-x_{13}\Phi_{12} + x_{23}\Phi_{16} + x_{33}\Phi_{18}$,
- $y_{13}\Phi_{13} + y_{23}\Phi_{14} + y_{33}\Phi_{19}$,
- $y_{12}\Phi_8 - y_{22}\Phi_9 - y_{32}\Phi_{10}$,
- $y_{13}\Phi_8 - y_{23}\Phi_9 - y_{33}\Phi_{10}$,
- $x_{12}\Phi_{11} - x_{22}\Phi_{15} - x_{32}\Phi_{17}$,
- $x_{13}\Phi_{11} - x_{23}\Phi_{15} - x_{33}\Phi_{17}$.

Il s'ensuit que $\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R)$ est de dimension au moins 12. □

On reprend les notations de la section 1.2. On a $\dim(N) = 29$ et donc d'après le lemme 1.2.6, on a $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 29 - \mathrm{rg}(\rho^*)$. Puis, d'après le lemme 2.1.54, on a $\mathrm{rg}(\rho^*) \leq 17$ et donc il suffit de montrer que $\mathrm{rg}(\rho^*) \geq 17$ pour prouver la proposition 2.1.53.
Pour $i = 1, \ldots, 9$, on définit $\psi_i \in \mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$ par

$$\begin{cases} \psi_i(f_j \otimes 1) = \delta_i^j & \text{pour } j = 1, \ldots, 9, \\ \psi_i(h_j \otimes 1) = 0 & \text{pour } j = 1, \ldots, 9, \\ \psi_i(s_j \otimes 1) = \psi_i(t_j \otimes 1) = 0 & \text{pour } j = 1, \ldots, 6, \end{cases}$$

x31y13+x21y23+x11y33	0	x31	x21	x11	0	0	0	0	0	0	y33	0	0
x32y13+x22y23+x12y33	0	x32	x22	x12	0	0	0	0	0	0	0	-y33	0
x33y13+x23y23+x13y33	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x31y12+x21y22+x11y32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y32	0	-x31
x32y12+x22y22+x12y32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-y32	-x32
x33y12+x23y22+x13y32	0	0	0	0	y32	y22	y12	0	0	0	0	0	-x33
x31y11+x21y21+x11y31	0	0	0	0	0	0	0	x31	-x21	-x11	y31	0	0
x32y11+x22y21+x12y31	0	0	0	0	0	0	0	x32	-x22	-x12	0	-y31	0
x33y11+x23y21+x13y31	0	0	0	0	y31	y21	y11	x33	-x23	-x13	0	0	0
x11y11	0	0	0	0	0	0	0	x11	0	0	y11	0	0
x11y21	0	0	0	0	0	0	0	0	-x11	0	y21	0	0
x11y31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-x11	y31	0	0
x21y11	0	0	0	0	0	0	0	x21	0	0	0	0	0
x21y21	0	0	0	0	0	0	0	0	-x21	0	0	0	0
x21y31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-x21	0	0	0
x31y11	0	0	0	0	0	0	0	x31	0	0	0	0	0
x31y21	0	0	0	0	0	0	0	0	-x31	0	0	0	0
x31y31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-x31	0	0	0
-x12y12y21+x12y11y22	0	0	0	0	0	0	0	x12y22	x12y12	0	0	y12y21-y11y22	x12y21
-x12y12y31+x12y11y32	0	0	0	0	0	0	0	x12y32	0	x12y12	0	y12y31-y11y32	x12y31
-x22y12y31+x22y11y32	0	0	0	0	0	0	0	x22y32	0	x22y12	0	0	x22y31
-x12y22y31+x12y21y32	0	0	0	0	0	0	0	0	-x12y32	x12y22	0	y22y31-y21y32	0
-x22y22y31+x22y21y32	0	0	0	0	0	0	0	0	-x22y32	x22y22	0	0	0
-x32y22y31+x32y21y32	0	0	0	0	0	0	0	0	-x32y32	x32y22	0	0	0
-x12x21y12+x11x22y12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x22y12	x21y12	x12x21-x11x22
-x12x31y12+x11x32y12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-x22y22-x12y32	-x21y22-x11y3	x12x31-x11x32
-x12x31y22+x11x32y22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x32y22	x31y22	0
-x22x31y12+x21x32y12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x22x31-x21x32
-x22x31y22+x21x32y22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-x22x31y32+x21x32y32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	-y23	0	-y13	0	0	
0	0	y23	0	y13	0	
0	0	0	0	0	0	
-x21	-y22	0	-y12	0	-x11	
-x22	0	y22	0	y12	-x12	
-x23	0	0	0	0	-x13	
0	-y21	0	-y11	0	0	
0	0	y21	0	y11	0	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	x12y12
0	0	0	0	0	0	x12y22
0	0	0	0	0	0	x12y32
0	-y11	0	0	0	0	x22y12
0	-y21	0	0	0	0	x22y22
0	-y31	0	0	0	0	x22y32
0	0	0	-y11	0	0	-x22y22-x12y32
0	0	0	-y21	0	0	x32y22
0	0	0	-y31	0	0	x32y32
-x12y11	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-x12y11	0
0	0	-y12y31	0	0	-x22y11	0
x12y31	0	0	0	0	-x12y21	0
x22y31	0	-y22y31	0	0	-x22y21	0
x32y31	0	0	0	-y22y31+y21y32	-x32y21	0
0	x12y12	x11y12	0	0	0	0
0	0	0	x12y12	x11y12	0	0
x12x31-x11x32	0	0	x12y22	x11y22	0	0
0	x22y22+x12y32	x21y22	x22y12	x21y12	0	0
x22x31-x21x32	-x32y22	-x31y2	x22y22	x21y22	0	0
0	-x32y32	-x31y3	x22y32	x21y32	x22x31-x21x32	0

0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
0	0	0	0	
x13y13y21-x13y11y23	x12y13y21-x12y11y23	x13y12y21-x13y11y22	0	
x13y13y31-x13y11y33	x12y13y31-x12y11y33	x13y12y31-x13y11y32	0	
x23y13y31-x23y11y33	x22y13y31-x22y11y33	x23y12y31-x23y11y32	0	
x13y23y31-x13y21y33	x12y23y31-x12y21y33	x13y22y31-x13y21y32	0	
x23y23y31-x23y21y33	x22y23y31-x22y21y33	x23y22y31-x23y21y32	0	
x33y23y31-x33y21y33	x32y23y31-x32y21y33	x33y22y31-x33y21y32	0	
0	0	0	x13x21y13-x11x23y13	
0	0	0	-x13x21y23+x11x23y23	
0	0	0	x13x31y23-x11x33y23	
0	0	0	x13x21y33-x11x23y33	
0	0	0	-x13x31y33+x11x33y33	
0	0	0	x23x31y33-x21x33y33	

TABLE 2.3 – Générateurs du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5
$f_i,\ 1 \leq i \leq 9$	0	0	0	0	0
$h_1 := x_{11}y_{11}$	$x_{11}y_{13}$	$x_{12}y_{13}$	$x_{13}y_{11}$	$x_{13}y_{12}$	$x_{13}y_{13}$
$s_1 := x_{12}(y_{22}y_{11} - y_{21}y_{12})$	0	0	0	0	0
$t_1 := y_{12}(x_{22}x_{11} - x_{21}x_{12})$	0	0	0	0	0

γ_1	γ_2	δ_1	δ_2
0	0	0	0
0	0	0	0
$x_{11}(y_{22}y_{13} - y_{23}y_{12})$	$x_{13}(y_{22}y_{13} - y_{23}y_{12})$	0	0
0	0	$y_{11}(x_{22}x_{13} - x_{23}x_{12})$	$y_{13}(x_{22}x_{13} - x_{23}x_{12})$

Table 2.4 –

où δ_i^j est le symbole de Kronecker.
Ensuite, on définit les neuf éléments $\phi_1, \ldots, \phi_5, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ de $\mathrm{Hom}^G(N, R)$ dans la table 2.4 de la façon suivante : pour chaque colonne 2 à 10, la première ligne indique le nom du morphisme et chaque autre ligne donne l'image dans R de l'élément de N donné dans la première colonne. Et les images de $f_1, \ldots, f_9, h_1, s_1, t_1$ déterminent entièrement chaque morphisme par G-équivariance.
Enfin, on identifie ces morphismes à des éléments de $\mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$ via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}^G(N, R) \cong \mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$. Par ailleurs, [GS, Macaulay2] nous donne les relations suivantes entre les générateurs du R-module I/I^2 définis précédement :

$$\begin{cases} r_1 := -h_1 \otimes y_{21} + h_2 \otimes y_{11}, \\ r_2 := -f_1 \otimes y_{21} + h_2 \otimes y_{33} + h_5 \otimes y_{23} + h_8 \otimes y_{13}, \\ r_3 := -f_4 \otimes y_{21} + h_2 \otimes y_{32} + h_5 \otimes y_{22} + h_8 \otimes y_{12}, \\ r_4 := -f_7 \otimes y_{21} + h_2 \otimes y_{31} + h_5 \otimes y_{21} + h_8 \otimes y_{11}, \\ r_5 := -f_8 \otimes x_{21} + h_4 \otimes y_{32} + h_5 \otimes y_{22} + h_6 \otimes y_{12}, \\ r_6 := -f_9 \otimes x_{21} + h_4 \otimes y_{33} + h_5 \otimes y_{23} + h_6 \otimes y_{13}, \\ r_7 := f_6 \otimes x_{12}y_{11} - f_9 \otimes x_{12}y_{12} - s_1 \otimes x_{23} - s_7 \otimes x_{13}, \\ r_8 := -f_1 \otimes x_{22}y_{12} + f_2 \otimes x_{21}y_{12} + t_1 \otimes y_{33} - t_2 \otimes y_{13}, \\ r_9 := f_5 \otimes x_{12}y_{11} - f_9 \otimes x_{12}y_{12} - s_1 \otimes x_{22} - s_7 \otimes x_{12}, \\ r_{10} := -h_1 \otimes x_{32}y_{22} - h_2 \otimes (x_{22}y_{22} + x_{12}y_{32}) + s_1 \otimes x_{31} - t_7 \otimes y_{21} + t_8 \otimes y_{11}. \end{cases}$$

Remarque 2.1.55. Ces relations ne suffisent pas à engendrer le module des relations entre les générateurs de I/I^2.

Le lemme qui suit achève la preuve de la proposition 2.1.53 :

Lemme 2.1.56. $\mathrm{rg}(\rho^*) \geq 17$.

Démonstration. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \ldots, \lambda_9, \alpha_1, \ldots, \alpha_5, \epsilon_1, \epsilon_2, \beta_1, \beta_2) \in k^{17}$ tel que

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 9 \\ i \neq 3}} \lambda_i \rho^*(\psi_i) + \sum_{1 \leq j \leq 5} \alpha_j \rho^*(\phi_j) + \epsilon_1 \rho^*(\gamma_1) + \epsilon_2 \rho^*(\gamma_2) + \beta_1 \rho^*(\delta_1) + \beta_2 \rho^*(\delta_2) = 0. \tag{2.12}$$

On évalue (2.12) en $r_1 \otimes 1$, on obtient :

$$\alpha_2 x_{12}(y_{11}y_{23} - y_{13}y_{21}) + \alpha_4 x_{13}(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}) + \alpha_5 x_{13}(y_{11}y_{23} - y_{13}y_{21}) = 0.$$

Donc $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.
On évalue (2.12) en $r_2 \otimes 1,\ r_3 \otimes 1,\ r_4 \otimes 1,\ r_5 \otimes 1,\ r_6 \otimes 1$ successivement, on obtient $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$.
On évalue (2.12) en $r_7 \otimes 1$, on obtient $\lambda_6 = \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$.
On évalue (2.12) en $r_8 \otimes 1$, on obtient $\lambda_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$.
On évalue (2.12) en $r_9 \otimes 1$, on obtient $\lambda_5 = 0$.
On évalue (2.12) en $r_{10} \otimes 1$, on obtient $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$.
Donc $\{\rho^*(\psi_i),\ 1 \leq i \leq 9, i \neq 3\} \cup \{\rho^*(\phi_1), \ldots, \rho^*(\phi_5), \rho^*(\gamma_1), \rho^*(\gamma_2), \rho^*(\delta_1), \rho^*(\delta_2)\}$ est une famille libre de cardinal 17 dans $\mathrm{Im}(\rho^*)$. □

On déduit du lemme 1.2.2 et de la proposition 2.1.53 le

Corollaire 2.1.57. *Le schéma $\mathcal{H}$ est singulier en Z_0.*

2.2 Cas de $GL(V)$ opérant dans $\mu^{-1}(0)$

On considère le cas particulier suivant :

- $V_1 = V_2 =: E$ et $d := \dim(E)$,
- $W := \mathrm{Hom}(E,V) \times \mathrm{Hom}(V,E) = \mathrm{Hom}(E,V) \times \mathrm{Hom}(E,V)^*$,
- $G' := GL(E)$ vu comme sous-groupe de $GL(V_1) \times GL(V_2)$ via le plongement diagonal,
- $B' := (B_1 \times B_2) \cap GL(E)$, où B_1 et B_2 ont été définis dans la section 1.4.1.

L'opération de $GL(V_1) \times GL(V_2) \times G$ dans W induit une opération de $G' \times G$ dans W. On note

$$\mathfrak{g}' = \mathrm{End}(E)$$

l'algèbre de Lie de G' et

$$\mathfrak{g}'^{\leq n} = \{f \in \mathrm{End}(E) \mid \mathrm{rg}(f) \leq n\}.$$

On a vu dans la section 2.1.1 que $W/\!/G \cong \mathfrak{g}'^{\leq n}$ comme G'-variété. Nous allons étudier

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}} := \mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu^{-1}(0))$$

le schéma de Hilbert invariant pour l'opération de G dans $\mu^{-1}(0)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ sa composante principale. Dans la section 2.2.1, on décrit l'application moment $\mu\colon W \to \mathrm{End}(V)$ ainsi que sa fibre en 0. Dans la section 2.2.2, on étudie le morphisme de passage au quotient $\mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/\!/G$. On appelle $\mu^{-1}(0)/\!/G$ la réduction symplectique de W. On verra que $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est irréductible et on pourra donc parler de la fonction de Hilbert h_s de la fibre générique de ν. Dans la section 2.2.3, on établit un résultat de réduction qui permet de ramener la détermination de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ à celle de $\mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W)$; ce dernier a été étudié dans la section 2.1. Dans la section 2.2.4, on montre que $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ admet plusieurs composantes irréductibles lorsque $d \geq 2n$. Enfin, on étudie en détail $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ lorsque $n = 1$ dans la section 2.2.5.

2.2.1 L'application moment

Des rappels concernant les variétés symplectiques, les applications moment et les résolutions symplectiques sont donnés dans la section A.2.

Soit $\phi : (u_1, u_2) \mapsto \mathrm{tr}(u_2 \circ u_1)$ qui est une forme quadratique sur W non-dégénérée et $G' \times G$-invariante et soit Ω la forme symplectique sur W définie par :

$$\forall u_1, v_1 \in \mathrm{Hom}(E,V),\ \forall u_2, v_2 \in \mathrm{Hom}(V,E),\ \Omega((u_1,u_2),(v_1,v_2)) := \phi(v_1,u_2) - \phi(u_1,v_2). \tag{2.13}$$

Alors $G' \times G$ opère symplectiquement dans (W,Ω), c'est-à dire que l'opération de $G' \times G$ préserve Ω. On vérifie qu'une application moment pour l'opération de G dans (W,Ω) est donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \mu & : & W & \to & \mathfrak{g}^* \\ & & (u_1,u_2) & \mapsto & (\phi\colon\ h \mapsto \phi(h \circ u_1, u_2)) \end{array} \tag{2.14}$$

où l'on rappelle que l'on note $\mathfrak{g} = \mathrm{End}(V)$ l'algèbre de Lie de G. Puis, on a l'isomorphisme G-équivariant

$$\begin{array}{l} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^* \\ h \mapsto (h' \mapsto \mathrm{tr}(h \circ h')) \end{array}$$

et donc $\mu\colon W \to \mathfrak{g}$ est donnée par :

$$\forall (u_1,u_2) \in W,\ \mu(u_1,u_2) = u_1 \circ u_2. \tag{2.15}$$

Remarque 2.2.1. On fera par la suite l'abus de désigner cette application μ comme l'application moment pour l'opération de G dans (W, Ω) bien qu'il en existe une infinité qui se déduisent de μ par translation par un élément de $\mathfrak{g}^G \cong k$.

L'application moment coïncide avec le morphisme de passage au quotient $W \to W/\!/G'$. En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est le nilcône $\mathcal{N}(W, G')$ (cf définition 2.1.1) et on déduit de [KS11, Theorem 9.1] que le schéma $\mu^{-1}(0)$ est toujours réduit. La G-équivariance et la G'-invariance de μ impliquent que $\mu^{-1}(0)$ est un fermé $G' \times G$-stable de W, on pourra donc considérer le quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$. On a bien sûr

$$\mu^{-1}(0) = \{(u_1, u_2) \in W \mid u_1 \circ u_2 = 0\}.$$

Déterminons les composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)$ et leurs dimensions. Soit $m \in \{0, \ldots, d\}$, on définit le fermé

$$X'_m := \left\{ (u_1, u_2) \in W \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Im}(u_2) \subset \mathrm{Ker}(u_1), \\ \mathrm{rg}(u_2) \leq \min(n, m), \\ \dim(\mathrm{Ker}(u_1)) \geq \max(d-n, m). \end{array} \right\}.$$

La preuve de la proposition 2.2.2 (resp. du corollaire 2.2.3) est analogue à celle de la proposition 2.1.2 (resp. du corollaire 2.1.3).

Proposition 2.2.2. *Chaque X'_m est un fermé irréductible de $\mu^{-1}(0)$ et les composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)$ sont :*

$$\begin{cases} X'_0, \ldots, X'_d & \text{si } d \leq n, \\ X'_{d-n}, \ldots, X'_n & \text{si } n < d < 2n, \\ X'_n & \text{si } d \geq 2n. \end{cases}$$

Corollaire 2.2.3. *Si $m \leq n$ ou $m \geq d-n$, alors $\dim(X_m) = m(d-m) + dn$ et donc*

$$\dim(\mu^{-1}(0)) = \begin{cases} nd + \frac{1}{4}d^2 & \text{si } d < 2n \text{ et } d \text{ est pair}, \\ nd + \frac{1}{4}(d^2-1) & \text{si } d < 2n \text{ et } d \text{ est impair}, \\ 2nd - n^2 & \text{si } d \geq 2n. \end{cases}$$

2.2.2 Etude du morphisme de passage au quotient

Dans cette section, on décrit géométriquement la réduction symplectique $\mu^{-1}(0)/\!/G$. On note

$$N := \min\left(E\left(\frac{d}{2}\right), n\right)$$

où l'on rappelle que $E(x)$ désigne la partie entière inférieure de x. On introduit les notations suivantes qui nous seront utiles pour les preuves de la proposition 2.2.5 et du lemme 2.2.10.

Notation 2.2.4. Pour $l = 0, \ldots, N$, on note

- $u_1^l \in \mathrm{Hom}(E, V)$ le morphisme défini par la matrice $\begin{bmatrix} 0_{l,d-l} & I_l \\ 0_{n-l,d-l} & 0_{n-l,l} \end{bmatrix}$,
- $u_2^l \in \mathrm{Hom}(V, E)$ le morphisme défini par la matrice $\begin{bmatrix} I_l & 0_{l,n-l} \\ 0_{d-l,l} & 0_{d-l,n-l} \end{bmatrix}$,
- $f^l \in \mathrm{End}(E)^{\leq N}$ l'endomorphisme défini par la matrice $\begin{bmatrix} 0_{l,d-l} & I_l \\ 0_{d-l,d-l} & 0_{d-l,l} \end{bmatrix}$.

On va utiliser des résultats sur la combinatoire des orbites nilpotentes dans les algèbres de Lie semi-simples pour lesquels on renvoie à [CM93]. On rappelle que l'on a une correspondance bijective entre les partitions $(d_1 \geq \ldots \geq d_k)$ de n' et les orbites nilpotentes $\mathcal{O}_{[d_1,\ldots,d_k]}$ de $\mathfrak{g}'$ ([CM93, §3.1]). On a vue que $\mu^{-1}(0)$ est réduit, donc $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est réduit et on a la

Proposition 2.2.5. $\mu^{-1}(0)/\!/G = \overline{\mathcal{O}_{[2^N, 1^{d-2N}]}}$.

Démonstration. Si $f \in \mu^{-1}(0)/\!/G \subset \mathfrak{g}'^{\leq n}$, alors il existe $(u_1, u_2) \in \mu^{-1}(0)$ tel que $f = u_2 \circ u_1$ et donc $f \circ f = (u_2 \circ u_1) \circ (u_2 \circ u_1) = u_2 \circ (u_1 \circ u_2) \circ u_1 = 0$. Donc f est conjuguée à f^l pour un certain $l \leq N$ et on a donc l'inclusion $\mu^{-1}(0)/\!/G \subset \overline{\mathcal{O}_{[2^N,1^{d-2N}]}}$. Réciproquement, soit $f \in \overline{\mathcal{O}_{[2^N,1^{d-2N}]}}$; quitte à conjuguer f par un élément de G', on peut supposer que $f = f^l$ pour un certain $l \leq N$. On vérifie alors que $u_1^l \circ u_2^l = 0$ et $u_2^l \circ u_1^l = f^l$, ce qui achève la preuve de cette proposition. □

Remarque 2.2.6. Nous verrons dans la section A.2 que la variété $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est symplectique et admet toujours des résolutions symplectiques.

Corollaire 2.2.7. *Le quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$ se décompose en $N+1$ orbites pour l'opération de G' :*

$$U_i := \mathcal{O}_{[2^i,1^{d-2i}]}, \quad \textit{pour } i = 0, \dots, N.$$

Les adhérences de ces orbites sont imbriquées de la façon suivante :

$$\{0\} = \overline{U_0} \subset \cdots \subset \overline{U_N} = \mu^{-1}(0)/\!/G.$$

La géométrie de l'adhérence d'une orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}'$ est décrite dans [KP79] et [KP81]. En particulier $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est normale ([KP79]), de dimension $2N(d-N)$ ([CM93, Corollary 6.1.4]) et son lieu singulier est $\overline{U_{N-1}}$ ([KP81, §3.2]). On sait que ν est plat sur U_N qui est un ouvert dense de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et donc $\mathcal{H}_s^{\text{prin}} = \overline{\gamma^{-1}(U_N)}$.

Remarque 2.2.8. Si $d = 1$, alors $\mathcal{H}_s$ est le point réduit correspondant au sous-schéma fermé $\mu^{-1}(0) \subset W$ et γ est un isomorphisme.

La dimension de la fibre de ν en un point de U_N est :

$$\begin{cases} nd - \frac{1}{4}d^2 & \text{si } d < 2n \text{ et } d \text{ est pair,} \\ nd - \frac{1}{4}(d^2-1) & \text{si } d < 2n \text{ et } d \text{ est impair,} \\ n^2 & \text{si } d \geq 2n. \end{cases}$$

Notation 2.2.9. Si $d < 2n$, on note

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} M & 0_{n-N,N} \\ 0_{N,n-N} & I_N \end{bmatrix}, \ M \in GL_{n-N}(k) \right\} \cong GL_{n-N}(k)$$

qui est un sous-groupe réductif de G.

Lemme 2.2.10. *La fibre de ν en un point de U_N est isomorphe à*

$$\begin{cases} G/H & \textit{si } d < 2n \textit{ et } d \textit{ est pair,} \\ G & \textit{si } d \geq 2n. \end{cases}$$

Démonstration. On rappelle que u_1^N, u_2^N et f^N ont été défini dans la notation 2.2.4. On reprend ici des arguments similaires à ceux utilisés lors de la preuve du lemme 2.1.6. Si $d < 2n$ et d est pair, alors $N = \frac{d}{2}$ et on vérifie que $\mathrm{Stab}_G((u_1^N, u_2^N)) = H$. Or H est un sous-groupe réductif de G, on a donc l'équivalence :

$$G.(u_1^N, u_2^N) \text{ est fermée dans } \mu^{-1}(0) \Leftrightarrow C_G(H).(u_1^N, u_2^N) \text{ est fermée dans } \mu^{-1}(0).$$

Puis $C_G(H) = \left\{ \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \lambda I_{n-N} \end{bmatrix}, \ M \in GL_N(k), \ \lambda \in \mathbb{G}_m \right\}$. Donc

$$C_G(H).(u_1^N, u_2^N) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \ M \in GL_N(k) \right\}$$

est un fermé de $\mu^{-1}(0)$, et donc $G.(u_1^N, u_2^N)$ est l'unique orbite fermée contenue dans $\nu^{-1}(f^N)$. Enfin $\dim(G/H) = n^2 - (n-N)^2 = N(2n-N)$ ce qui est aussi la dimension de la fibre générique de ν. Donc $\nu^{-1}(f^N) \cong G/H$.

Si $d \geq 2n$, alors $N = n$ et a on vérifie que $\mathrm{Stab}_G((u_1^N, u_2^N)) = Id$ et donc $\nu^{-1}(f^N)$ contient une unique orbite fermée isomorphe à G. Or $\dim(G) = n^2$ est la dimension de la fibre générique de ν. Donc $\nu^{-1}(f^N) \cong G$. □

Remarque 2.2.11. Si $d < 2n$ et d impair, alors la situation se complique car la fibre de ν en un point de l'orbite ouverte n'est plus irréductible. On considérera donc uniquement par la suite les cas $d \geq 2n$ et ($d < 2n$ et d pair).

Proposition 2.2.12. *La fonction de Hilbert h_s de la fibre générique du morphisme de passage au quotient $\nu : \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ est donnée par :*

$$\forall M \in \mathrm{Irr}(G),\ h_s(M) = \begin{cases} \dim(M) & \textit{si } d \geq 2n, \\ \dim(M^H) & \textit{si } d < 2n \textit{ et } d \textit{ est pair.} \end{cases}$$

La fibre $\mu^{-1}(0)$ est un sous-schéma fermé $G' \times G$-stable de W, donc d'après [Bri10, Lemma 3.3], le schéma $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ est un sous-schéma fermé G'-stable de $\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(W)$. Ensuite, d'après les propositions 2.1.14 et 2.2.12, les fonctions de Hilbert h_W et h_s coïncident lorsque ($d \geq 2n$) ou ($d < n$ et d pair). Donc, dans ces deux cas, $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ s'identifie à un sous-schéma fermé de $\mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W)$ et ce dernier a été étudié dans la section 2.1.

2.2.3 Réduction au cas classique pour la composante principale

Construction d'un morphisme équivariant vers $\mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d - N, E)$

On souhaite déterminer $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ en procédant comme dans la section 2.1, c'est-à-dire en utilisant le principe de réduction pour se ramener à un schéma de Hilbert invariant plus simple. Dans la section 1.5.1, on a construit un morphisme G'-équivariant

$$\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(W) \to \mathrm{Gr}(h_s(V), E) \times \mathrm{Gr}(d - h_s(V^*), E). \tag{2.16}$$

D'après la proposition 2.2.12, on a $h_s(V) = h_s(V^*) = N$, donc la restriction du morphisme (2.16) à $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ donne un morphisme G'-équivariant

$$\rho_s :\ \mathcal{H}_\mathrm{s} \to \mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d - N, E). \tag{2.17}$$

On note

$$O_i := \{(L_1, L_2) \in \mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d - N, E) \mid \dim(L_1 \cap L_2) = N - i\} \text{ pour } i = 0, \ldots, N.$$

Alors les O_i sont les $N + 1$ orbites pour l'opération de G' dans $\mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d - N, E)$ et on a :

$$\overline{O_0} \subset \overline{O_1} \subset \cdots \subset \overline{O_N} = \mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d - N, E).$$

En particulier, O_N est l'unique orbite ouverte et

$$O_0 = \mathcal{F}_{N,d-N} := \{(L_1, L_2) \in \mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d - N, E) \mid L_1 \subset L_2\},$$

qui est une variété de drapeaux partiels, est l'unique orbite fermée. La variété $\mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d - N, E)$ n'étant pas G'-homogène, on ne peut pas ramener l'étude de $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ à l'étude de la fibre de ρ_s en un point comme nous l'avons fait dans la section 1.5.1. Cependant, nous allons voir que ρ_s envoie la composante principale $\mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ dans O_0. Nous allons donc pouvoir ramener l'étude de $\mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ à celle de la fibre de ρ_s en un point de O_0. La définition qui suit nous sera utile ultérieurement :

Définition 2.2.13. On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}_{N,d-N} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathrm{Gr}(N, E) & & \mathrm{Gr}(d - N, E) \end{tikzcd}$$

où p_1 et p_2 sont les projections naturelles. On note T_1 (resp. T_2) le tiré en arrière du fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(N, E)$ (resp. de $\mathrm{Gr}(d - N, E)$).

Réduction au cas classique pour la composante principale de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$

On suppose que ($d \geq 2n$) ou bien que ($d < 2n$ et d pair). Soient $x_0 := (L_1, L_2) \in O_0$ et $P := \mathrm{Stab}_{G'}(x_0)$ le sous-groupe parabolique de G' qui stabilise x_0. On note

- $W' := \mathrm{Hom}(E/L_2, V) \times \mathrm{Hom}(V, L_1)$ qui est un $P \times G$-module qui s'identifie naturellement à un sous-espace vectoriel de W contenu dans $\mu^{-1}(0)$,
- $\nu' : W' \to W'/\!/G$ le morphisme de passage au quotient,
- $h_{W'}$ la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν',
- $\mathcal{H}' := \mathrm{Hilb}^G_{h_{W'}}(W')$ et $\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}$ sa composante principale.

On remarque que $h_s = h_{W'}$. Le but de cette section est de démontrer la

Proposition 2.2.14. *On a un isomorphisme de G'-variétés*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong G' \times^P \mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}.$$

Nous aurons besoin du

Lemme 2.2.15. *Le morphisme ρ_s envoie $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ dans O_0.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 1.5.19. □

Le morphisme ρ_s est G'-équivariant, il munit donc $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ d'une structure de fibration G'-homogène. Soit F_s la fibre schématique du morphisme ρ_s en x_0. L'opération de P dans $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ induite par l'opération de G' dans $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ préserve F_s par G'-équivariance. D'après (1.26), on dispose d'un isomorphisme G'-équivariant :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong G' \times^P F_s.$$

Donc, pour déterminer $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$, on est ramené à déterminer F_s comme P-schéma. On commence par déterminer F'_s la fibre schématique de $\rho_s : \mathcal{H}_{\mathrm{s}} \to \mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d-N, E)$ en x_0 comme P-schéma.

Lemme 2.2.16. *La fibre F'_s est isomorphe au schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}'$ et l'opération de P dans F'_s coïncide, via cet isomorphisme, avec l'opération de P dans $\mathcal{H}'$ induite par l'opération de P dans W'.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 1.5.5. □

Comme $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ est une variété de dimension $2N(d-N)$, on en déduit que F_s est une variété de dimension N^2. Ensuite, d'après le lemme 2.2.16, la fibre F_s est isomorphe à une sous-variété de $\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}$. Or $\dim(\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}) = N^2$ donc on a un isomorphisme de P-variétés :

$$F_s \cong \mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}$$

et la proposition 2.2.14 s'ensuit.

Remarque 2.2.17. Le schéma $\mathcal{H}'$ est P-stable et s'identifie à un sous-schéma fermé de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$, donc on a l'inclusion de G'-schémas $G' \times^P \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}_{\mathrm{s}}$.

D'après la proposition 2.2.14, la variété $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ est lisse si et seulement si $\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}$ est lisse, et alors γ est une résolution de $\mu^{-1}(0)/\!/G$. On va utiliser les résultats de la section 2.1 pour démontrer le

Corollaire 2.2.18. *1. Si d est pair et $d \leq n+1$, alors*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong \mathrm{Hom}(\underline{E}/T, T)$$

où T est le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(N, E)$ et $\underline{E}$ est le fibré trivial de fibre E au dessus de $\mathrm{Gr}(N, E)$.

2. *Si $n = 1$ et $d \geq 3$, alors*
$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong \mathrm{Hom}(\underline{E}/T_2, T_1)$$
où T_1, T_2 et $\underline{E}$ sont les fibrés au dessus de $\mathcal{F}_{1,d-1}$ de la définition 2.2.13.

3. *Si $n = 2$ et $d \geq 4$, alors*
$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong Bl_0(\mathrm{Hom}(\underline{E}/T_2, T_1))$$
est l'éclatement de la section nulle du fibré $\mathrm{Hom}(\underline{E}/T_2, T_1))$, où T_1, T_2 et $\underline{E}$ sont les fibrés au dessus de $\mathcal{F}_{2,d-2}$ de la définition 2.2.13.

En particulier, dans chacun de ces cas la variété $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ est lisse et donc le morphisme de Hilbert-Chow γ est une résolution de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.

Démonstration. Les cas (d est pair et $d \leq n+1$) et ($n = 1$ et $d \geq 3$) découlent du corollaire 2.1.13. Le cas $n = 2$ et $d \geq 4$ découle du théorème 2.1.25. □

Remarque 2.2.19. Lorsque ($n = 1$ et $d \geq 2$) ou ($d = 2$ et $n \geq 2$), on a $\mu^{-1}(0)/\!/G = U_1 \cup \{0\}$. La proposition 1.5.23 s'applique et on retrouve les mêmes résultats que ceux donnés par le corollaire 2.2.18.

2.2.4 Réductibilité de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$

On suppose dans cette section que $d \geq 2n$, c'est-à-dire que $N = n$. Nous allons démontrer la

Proposition 2.2.20. *Le schéma $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est réductible.*

Soient
$$x_n := (\langle e_1, \ldots, e_n \rangle, \langle e_{n+1}, \ldots, e_d \rangle) \in O_n$$
un point de l'orbite ouverte de $\mathrm{Gr}(n, E) \times \mathrm{Gr}(d-n, E)$ et
$$W'' := \mathrm{Hom}(E/\langle e_{n+1}, \ldots, e_d \rangle, V) \times \mathrm{Hom}(V, \langle e_1, \ldots, e_n \rangle)$$
qui s'identifie naturellement à un G-sous-module de W. On a un isomorphisme de G-modules :
$$W'' \cong \mathrm{Hom}(\langle e_1, \ldots, e_n \rangle, V) \times \mathrm{Hom}(V, \langle e_1, \ldots, e_n \rangle). \tag{2.18}$$
On peut alors munir W'' de la forme symplectique Ω définie par 2.13 et considérer μ' l'application moment pour l'opération de G dans (W'', Ω) comme nous l'avons fait pour (W, Ω) dans la section 2.2.1.
Le lemme qui suit se démontre comme le lemme 1.5.5 :

Lemme 2.2.21. *La fibre schématique F_s'' du morphisme $\rho_s : \mathcal{H}_{\mathrm{s}} \to \mathrm{Gr}(n, E) \times \mathrm{Gr}(d-n, E)$ en x_n est isomorphe au schéma de Hilbert invariant $\mathrm{Hilb}_{h_s}^G(\mu'^{-1}(0))$.*

Remarque 2.2.22. La fonction de Hilbert h_s qui apparaît dans le lemme 2.2.21 ne coïncide pas en général avec la fonction de Hilbert de la fibre générique du morphisme de passage au quotient $\mu'^{-1}(0) \to \mu'^{-1}(0)/\!/G$.

D'après le lemme 2.2.15, le morphisme ρ_s envoie la composante principale $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ dans O_0. Donc, pour montrer la proposition 2.2.20, il suffit de s'assurer que $\mathrm{Hilb}_{h_s}^G(\mu'^{-1}(0))$ est non vide. Pour ce faire, on identifie W'' avec $\mathrm{Hom}(E', V) \times \mathrm{Hom}(V, E')$ via l'isomorphisme (2.18), où l'on note $E' := \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Alors W'' est naturellement muni d'une structure de $GL(E') \times G$-module et on a
$$\begin{aligned} k[W'']_2 = {} & (S^2(E') \otimes S^2(V^*)) \oplus (S^2(V) \otimes S^2(E'^*)) \\ & \oplus (\Lambda^2(E') \otimes \Lambda^2(V^*)) \oplus (\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(E'^*)) \\ & \oplus ((sl(E') \oplus M_0) \otimes (sl(V) \oplus V_0)) \text{ comme } GL(E') \times G\text{-module}, \end{aligned} \tag{2.19}$$
où M_0 désigne le $GL(E')$-module trivial.

Ensuite, soit J_0 l'idéal de $k[W'']$ engendré par $M_0 \otimes (sl(V) \oplus V_0) \subset k[W'']_2$. Alors $\mu'^{-1}(0) = \mathrm{Spec}(k[W'']/J_0)$ et donc on a une correspondance bijective, donnée par le morphisme de passage au quotient, entre les idéaux de $k[W'']$ contenant l'idéal J_0 et les idéaux de $k[\mu'^{-1}(0)] \cong k[W'']/J_0$:

$$\begin{array}{rccc} \pi & : & k[W''] & \to & k[\mu'^{-1}(0)] \\ & & I_1 & \mapsto & I_2 := \pi(I_1). \end{array} \tag{2.20}$$

Notation 2.2.23. On note I_0 l'idéal de $k[W'']$ engendré par $(sl(E') \otimes V_0) \oplus (M_0 \otimes V_0) \oplus (M_0 \otimes sl(V)) \subset k[W'']_2$.

L'idéal I_0 est homogène, $GL(E') \times G$-stable et contient l'idéal engendré par les G-invariants (resp. par les $GL(E')$-invariants) homogènes de degré positif de $k[W'']$. D'après ce qui précède, l'idéal I_0 s'identifie naturellement à un idéal de $k[\mu'^{-1}(0)]$ et on a la

Proposition 2.2.24. $I_0 \in \mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu'^{-1}(0))$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que I_0 a la bonne fonction de Hilbert, c'est-à-dire que

$$k[W'']/I_0 \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus \dim(M)}$$

comme G-module. Des arguments similaires à ceux utilisés dans les preuves des propositions 2.1.20 et 2.1.21 nous donnent la décomposition de $k[W'']/I_0$ comme $GL(E') \times G$-module :

$$k[W'']/I_0 \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda+} S^\lambda(E'^*) \otimes S^\lambda(V).$$

Comme $\dim(V) = \dim(E')$, on a $\dim(S^\lambda(V)) = \dim(S^\lambda(E'^*))$ pour tout $\lambda \in \Lambda+$ et le résultat s'ensuit. □

Remarque 2.2.25. L'idéal I_0 est un point fixe de $\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu'^{-1}(0))$ pour l'opération de $GL(E')$. On en déduit que $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ admet une composante irréductible distincte de $\mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ de dimension supérieure ou égale à $\dim(O_n) = 2n(d-n)$.

2.2.5 Etude du cas $\dim(V) = 1$

Dans cette section, on fixe $n = 1$ et $d \geq 2$. Alors $G = \mathbb{G}_m$ est le groupe multiplicatif, $\mu^{-1}(0)/\!/G = \overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}}$ et $\rho_s : \mathcal{H}_\mathrm{s} \to \mathbb{P}(E) \times \mathrm{Gr}(d-1, E)$ est le morphisme (2.17). On a vu que $\mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ est une variété lisse (corollaire 2.2.18). Nous allons utiliser les résultats des sections précédentes et de la section 2.1.2 pour déterminer $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ comme G'-schéma. On a la

Proposition 2.2.26. *On a un isomorphisme G'-équivariant*

$$\mathcal{H}_\mathrm{s} \cong \left\{(f, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}} \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 1}) \ \mid \ f \in L\right\}.$$

Le schéma $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ est donc la réunion de deux composantes irréductibles lisses C_1 et C_2 de dimension $2d-2$:

- $C_1 := \left\{(f, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}} \times \mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}}) \ \mid \ f \in L\right\} = \mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ *et* $\gamma : \mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin} \to \overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}}$ *est l'éclatement en* 0 *de* $\overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}}$,
- $C_2 := \left\{(0, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}} \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 1})\right\} \cong \mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 1})$.

Et l'intersection de ces deux composantes irréductibles est :
$C_1 \cap C_2 = \left\{(0, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}} \times \mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}})\right\} \cong \mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}})$.

Démonstration. D'après la proposition 2.1.16, on a une immersion fermée

$$\gamma \times \rho_s : \mathcal{H}_\mathrm{s} \hookrightarrow Y := \left\{(f, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2,1^{d-2}]}} \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 1}) \ \mid \ f \in L\right\}.$$

On vérifie que Y est la réunion des deux fermés irréductibles C_1 et C_2 qui sont tout deux de dimension $2d-2$. Le morphisme $\gamma \times \rho_s$ envoie $\mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ dans C_1 ; ce sont deux variétés de même dimension, donc $\gamma \times \rho_s : \mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin} \to C_1$ est un isomorphisme. Puis, on a vu dans la section 2.2.4 que $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ admet une deuxième composante irréductible de dimension au moins $2d-2$, ce qui est la dimension de C_2 et donc $\gamma \times \rho_s$ est un isomorphisme entre cette seconde composante de $\mathcal{H}$ et C_2. Enfin, on vérifie que $C_1 \cap C_2$ est bien ce qui est annoncé dans la proposition. □

Remarque 2.2.27. On vérifie que la composante C_2 de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est formée des idéaux homogènes de $k[\mu^{-1}(0)]$.

Lorsque $n \geq 2$ et $d \geq 2n$, les choses se compliquent car des composantes irréductibles de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ de grande dimension peuvent apparaître. Par exemple, pour $n = 2$ et $d \geq 4$, on vérifie que la composante formée des idéaux homogènes de $k[\mu^{-1}(0)]$ est de dimension $4d - 5$, alors que la composante principale est de dimension $4d - 8$. De plus, on a montré l'existence d'au moins deux composantes irréductibles pour $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$, mais il peut exister encore d'autres composantes irréductibles a priori.

Chapitre 3

Cas des autres groupes classiques

3.1 Cas de $O(V)$ opérant dans $V^{\oplus n'}$

On se place dans la situation 3 : on a $G := O(V)$, $G' := GL(V')$, $W := \mathrm{Hom}(V', V)$ et l'opération de $G' \times G$ dans W est donnée par (1.14).

3.1.1 Etude du morphisme de passage au quotient

Les résultats essentiels de cette section sont les propositions 3.1.4 et 3.1.6 qui décrivent les fibres et l'ouvert de platitude de ν. On suit dans cette section le même cheminement que dans la section 2.1.1.

D'après le premier théorème fondamental pour $O(V)$ (voir [Pro07, §11.2.1]) l'algèbre des invariants $k[W]^G$ est engendrée par les $(i \mid j)$, où pour chaque couple (i, j), $1 \leq i \leq j \leq n'$, on définit la forme bilinéaire symétrique $(i \mid j)$ sur $W \cong V^{\oplus n'}$ par :

$$\forall v_1, \ldots, v_{n'} \in V,\ (i \mid j) : (v_1, \ldots, v_{n'}) \mapsto \phi(v_i, v_j) \tag{3.1}$$

où l'on note ϕ la forme polaire associée à la forme quadratique q définie par (1.16). On a le morphisme naturel $G' \times G$-équivariant

$$\mathrm{Hom}(V', V) \to \mathrm{Hom}(S^2(V'), S^2(V)), w \mapsto S^2(w). \tag{3.2}$$

D'après [FH91, §19.5], il existe un G-module irréductible M (différent de V_0) tel que $S^2(V) \cong V_0 \oplus M$ comme G-module, et la représentation triviale V_0 est engendrée par la forme quadratique q. Le morphisme de passage au quotient ν est obtenu en composant le morphisme (3.2) et le morphisme G-invariant

$$\mathrm{Hom}(S^2(V'), S^2(V)) \to \mathrm{Hom}(S^2(V'), V_0) \cong S^2(V'^*)$$

induit par la projection $S^2(V) \to V_0$. On a donc

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathrm{Hom}(V', V) & \to & S^2(V'^*) \\ & w & \mapsto & {}^t w w \end{array}$$

où l'on note ${}^t w$ la transposée du morphisme w.
Et donc

$$W /\!\!/ G = S^2(V'^*)^{\leq n} := \left\{ Q \in S^2(V'^*) \ \mid \ \mathrm{rg}(Q) \leq n \right\}$$

est une variété déterminantielle symétrique.
Si $n' \leq n$, alors $W /\!\!/ G = S^2(V'^*)$ est un espace affine. Sinon, c'est une variété normale ([SB00, §3.2, Théorème 2]), de dimension $n'n - \frac{1}{2}n(n-1)$, de Cohen-Macaulay ([SB00, §3.4, Théorème 4]) et singulière le long du fermé $S^2(V'^*)^{\leq n-1}$ ([Wey03, §6.3]). De plus, $W /\!\!/ G$ est de Gorenstein si et seulement si $n' - n$ est impair ([Wey03, Corollary 6.3.7]).
On pose

$$N := \min(n', n).$$

L'opération de G' dans W induit une opération dans $W/\!/G$ telle que ν soit G'-équivariant :

$$\forall Q \in W/\!/G \subset S^2(V'^*),\ \forall g' \in G',\ g'.Q = {}^t g'^{-1} Q g'^{-1}.$$

Pour cette opération, $W/\!/G$ se décompose en $N+1$ orbites

$$U_i := \left\{ Q \in S^2(V'^*) \ \mid\ \mathrm{rg}(Q) = i \right\}$$

pour $i = 0, \dots, N$. Les adhérences de ces orbites sont imbriquées de la façon suivante :

$$\{0\} = \overline{U_0} \subset \overline{U_1} \subset \cdots \subset \overline{U_N} = W/\!/G.$$

En effet, pour chaque $i = 0, \dots, N$, on a $\overline{U_i} = S^2(V'^*)^{\leq i}$. En particulier, l'orbite U_N est un ouvert dense de $W/\!/G$.

On rappelle que l'on note $\mathcal{N}(W,G)$ le nilcône, c'est-à-dire la fibre schématique en 0 du morphisme ν. Dans [KS11], Kraft et Schwarz ont montré certaines propriétés géométriques du nilcône : il est irréductible si $n' < \frac{n}{2}$ et il est réduit si et seulement si $n' \leq \frac{n}{2}$. Pour simplifier, on considère dorénavant $\mathcal{N}(W,G)$ muni de sa structure réduite. Nous allons déterminer les composantes irréductibles de $\mathcal{N}(W,G)$ ainsi que leurs dimensions.
Soit $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{OGr}(m,V)$ le schéma (projectif) des sous-espaces isotropes pour la forme quadratique q et de dimension m dans V lorsqu'elle existe. On rappelle que q est non dégénérée, donc la dimension de n'importe quel sous-espace de V totalement isotrope maximal pour l'inclusion est $E(\frac{n}{2})$. Il s'ensuit que le schéma $\mathrm{OGr}(m,V)$ existe si et seulement si $m \in \{0, \dots, E(\frac{n}{2})\}$, et dans ce cas

$$\dim\left(\mathrm{OGr}\left(m,V\right)\right) = m(n-m) - \frac{1}{2}m(m+1).$$

Le schéma $\mathrm{OGr}(m,V)$ est réduit et homogène sous G. Il est irréductible, sauf lorsque n est pair et $m = \frac{n}{2}$, auquel cas $\mathrm{OGr}(m,V)$ est la réunion de deux composantes irréductibles isomorphes, chacune homogène pour l'opération de $SO(V)$ mais échangées par n'importe quel élément de $O(V)\backslash SO(V)$.

Proposition 3.1.1.
- *Si n est pair et $n' \geq \frac{n}{2}$ alors $\mathcal{N}(W,G)$ est la réunion de deux variétés, chacune de dimension $\frac{1}{2}n\,n' + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{4}n$.*
- *Si n est impair et $n' \geq \frac{n-1}{2}$ alors $\mathcal{N}(W,G)$ est une variété de dimension $\frac{1}{2}n'(n-1) + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{8}$.*
- *Si $n' < \frac{n}{2}$, alors $\mathcal{N}(W,G)$ est une variété de dimension $nn' - \frac{1}{2}n'(n'+1)$.*

Démonstration. On a

$$\mathcal{N}(W,G) = \left\{ w \in \mathrm{Hom}(V',V) \ \mid\ {}^t w w = 0 \right\}.$$

Or

$$\begin{aligned} {}^t w w = 0 &\Leftrightarrow \forall x, y \in V,\ {}^t x\, {}^t w w y = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(w) \text{ est un sous-espace vectoriel isotrope de } V. \end{aligned}$$

On pose $\alpha := \min\left(n', E(\frac{n}{2})\right)$ et soit

$$\mathcal{Z} := \{(w,L) \in \mathrm{Hom}(V',V) \times \mathrm{OGr}(\alpha,V) \ \mid\ \mathrm{Im}(w) \subset L\}$$

alors on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Z} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathcal{N}(W,G) & & \mathrm{OGr}(\alpha,V) \end{tikzcd}$$

où les p_i sont les projections naturelles. On fixe $L_0 \in \mathrm{OGr}(\alpha,V)$, alors $\mathcal{Z}$ est un fibré vectoriel G-homogène au dessus de $\mathrm{OGr}(\alpha,V)$ de fibre en L_0 isomorphe à $\mathrm{Hom}(V',L_0)$. Et donc

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{Z}) &= \dim\left(\mathrm{OGr}\left(\alpha,V\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Hom}\left(V',L_0\right)\right) \\ &= \alpha(n-\alpha) - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1) + \alpha n' \\ &= \alpha(n'+n-\alpha) - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1). \end{aligned}$$

Soient $\mathcal{Z}' := \{(w, L) \in \mathcal{Z} \mid \mathrm{rg}(w) = \alpha\}$ et $X := \{w \in \mathcal{N}(W, G) \mid \mathrm{rg}(w) = \alpha\}$ qui sont des ouverts denses de $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{N}(W, G)$ respectivement. Alors $p_1 : \mathcal{Z}' \to X$ est un isomorphisme. Si n est impair ou $n' < \frac{n}{2}$, alors $\mathcal{Z}$ est irréductible et donc $\mathcal{N}(W, G)$ est irréductible. En revanche, si n est pair et $n' \geq \frac{n}{2}$, alors $\mathcal{Z}$ est la réunion de deux variétés de même dimension et il en va de même pour $\mathcal{N}(W, G)$. Dans tous les cas, on a $\dim(\mathcal{N}(W, G)) = \dim(\mathcal{Z})$ et le résultat s'ensuit. □

Nous allons maintenant nous intéresser à la description géométrique des fibres de ν au dessus de chaque orbite U_i.

Notation 3.1.2. Soit $0 \leq r \leq N$, on note

$$J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n'-r} \\ 0_{n'-r,r} & 0_{n'-r,n'-r} \end{bmatrix}$$

où I_r est la matrice identité de taille r. La matrice J_r est symétrique de rang r et donc s'identifie naturellement à un élément de U_r.

On fixe $r \in \{0, \ldots, N\}$ et on définit $w_r := \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n'-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n'-r} \end{bmatrix} \in W$ et G_r le stabilisateur de w_r dans G. On vérifie que

$$G_r = \left\{ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \ M \in O_{n-r}(k) \right\} \cong O_{n-r}(k)$$

et $V = rV_0 \oplus E_r$ comme G_r-module, où E_r désigne la représentation standard de G_r et V_0 la représentation triviale de G_r. On note N_{w_r} la représentation slice de G_r en w_r (voir la définition 2.1.7), alors on a le

Lemme 3.1.3. *On a un isomorphisme de G_r-modules*

$$N_{w_r} \cong (n' - r)E_r \oplus r(n' - \frac{1}{2}(r-1))V_0.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.1.8. □

Soient F_1 et F_2 des espaces vectoriels de dimensions $n' - r$ et $r(n' - \frac{1}{2}(r-1))$ respectivement et dans lesquels G_r opère trivialement. D'après le lemme 3.1.3, on a un isomorphisme de G_r-modules

$$N_{w_r} \cong \mathrm{Hom}(F_1, E_r) \times F_2$$

et le morphisme de passage au quotient $\nu_N : N_{w_r} \to N_{w_r}/\!/G_r$ est donné par :

$$\begin{array}{rccc} \nu_N : & \mathrm{Hom}(F_1, E_r) \times F_2 & \to & S^2(F_1^*) \times F_2. \\ & (w, x) & \mapsto & ({}^t ww, x) \end{array}$$

Donc $\mathcal{N}(N_{w_r}, G_r) := \nu_N^{-1}(\nu_N(0)) = \nu_N^{-1}(0) \cong \nu'^{-1}_N(0)$, comme schéma, avec

$$\begin{array}{rccc} \nu'_N : & \mathrm{Hom}(F_1, E_r) & \to & S^2(F_1^*). \\ & w & \mapsto & {}^t ww \end{array}$$

On en déduit la

Proposition 3.1.4. *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme G-équivariant*

$$\nu^{-1}(J_r) \cong G \times^{G_r} \nu'^{-1}_N(0).$$

En particulier, si l'on note $H := G_N$, on a

$$\nu^{-1}(J_N) \cong \begin{cases} G & si\ n' \geq n, \\ G/H & si\ n' < n. \end{cases}$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la proposition 2.1.9. □

Corollaire 3.1.5. *Soit $r \in \{0, \dots, N\}$, alors la dimension de la fibre du morphisme ν en J_r vaut :*

- $n'n - \frac{1}{2}n'(n'+1)$ *lorsque* $2n' - r < n$,
- $\frac{1}{2}n'(n-r) + \frac{1}{8}(r+n)^2 - \frac{1}{4}(n+r)$ *lorsque* $2n' - r \geq n$ *et* $n - r$ *est pair,*
- $\frac{1}{2}n'(n-r-1) + \frac{1}{8}(r+n)^2 - \frac{1}{8}$ *lorsque* $2n' - r \geq n$ *et* $n - r$ *est impair.*

Pour chaque couple (n, n'), le corollaire 3.1.5 permet d'une part de calculer la dimension de la fibre générique de ν, d'autre part de déterminer l'ouvert de platitude de ν. En procédant comme pour la proposition 2.1.11, on montre la

Proposition 3.1.6. *La dimension de la fibre générique et l'ouvert de platitude de ν sont donnés par le tableau suivant :*

configuration	*dim. de la fibre générique*	*ouvert de platitude*
$n' < n$	$n'n - \frac{1}{2}n'(n'+1)$	$U_{n'} \cup \dots \cup U_{\max(2n'-n-1,0)}$
$n' = n$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	$U_n \cup U_{n-1}$
$n' > n$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	U_n

Corollaire 3.1.7. *Le morphisme ν est plat sur $W/\!/G$ tout entier si et seulement si $n \geq 2n' - 1$ et dans ce cas $W/\!/G = S^2(V'^*)$.*

Le corollaire qui suit est une conséquence de la proposition 1.1.6 et du corollaire 3.1.7.

Corollaire 3.1.8. *Si $n \geq 2n' - 1$, alors $\mathcal{H} \cong S^2(V'^*)$ et γ est un isomorphisme.*

On s'intéresse, dans la proposition qui suit (et qui se démontre comme la proposition 2.1.14), à la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν. On note comme précédement $H := G_N \cong O_{n-N}(k)$ le stabilisateur de w_N dans G.

Proposition 3.1.9. *La fonction de Hilbert de la fibre générique du morphisme ν est donnée par :*

$$\forall M \in \mathrm{Irr}(G),\ h_W(M) = \begin{cases} \dim(M) & \text{si } n' \geq n, \\ \dim(M^H) & \text{si } n' < n. \end{cases}$$

Remarque 3.1.10. Si $n = 1$, alors $G \cong \mathbb{Z}_2$ qui est le groupe d'ordre 2. Les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve du théorème 2.1.16 permettent de montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ est une variété lisse isomorphe à l'éclatement en 0 de $W/\!/G$ (mais cette méthode revient ici à utiliser un marteau pour écraser une mouche).

3.1.2 Etude du cas $\dim(V) = 2$

Dans toute cette section, on fixe $n = 2$. Alors on a $G \cong O_2(k)$, $W/\!/G = S^2(V'^*)^{\leq 2}$ et $\rho : \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(2, V'^*)$ est le morphisme de la section 1.5.1. On note

$$Y_0 := \{(Q, L) \in W/\!/G \times \mathbb{P}(W/\!/G) \mid Q \in L\} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W/\!/G)}(-1)$$

l'éclatement de $W/\!/G$ en l'origine et Y_1 l'éclatement de Y_0 le long de la transformée stricte de $S^2(V'^*)^{\leq 1}$. Nous verrons que Y_1 est isomorphe à l'éclatement de la section nulle du fibré $S^2(T)$ au dessus de $\mathrm{Gr}(2, V'^*)$ où T désigne le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(2, V'^*)$.

Nous allons démontrer le

Théorème 3.1.11.
- *Si $n' = 2$, alors $\mathcal{H} \cong Y_0$ et γ est l'éclatement de $W/\!/G$ en l'origine.*
- *Si $n' > 2$, alors $\mathcal{H} \cong Y_1$ et γ est une résolution des singularités de $W/\!/G$.*

En particulier $\mathcal{H}$ est toujours une variété lisse.

Remarque 3.1.12. Si $n' = 1$, alors $\mathcal{H} \cong W/\!/G$ et γ est un isomorphisme d'après le corollaire 3.1.8.

La stratégie adoptée pour démontrer le théorème 3.1.11 est la même que celle utilisée pour démontrer le théorème 2.1.25. On commence par établir le cas particulier $n' = 2$, puis on établit le cas $n' > 2$ à la fin de la section à l'aide du principe de réduction (voir la section 1.5.1) en se ramenant au cas $n' = 2$.

Représentations de $O_2(k)$

Des rappels concernant la théorie des représentations de $SO_n(k)$ et $O_n(k)$ ont été effectués dans la section 1.4.2. Cependant cette théorie est particulièrement simple pour $n = 2$. En effet, d'après [FH91, Exercise 18.2], on a un isomorphisme de groupes algébriques $SO_2(k) \cong \mathbb{G}_m$ et donc d'après (1.20), on a $O_2(k) \cong \mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{Z}_2$. Les $\mathbb{G}_m$-modules irréductibles sont tous de dimension 1 et si M est un $\mathbb{G}_m$-module irréductible, il existe un unique $d \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{G}_m,\ \forall m \in M,\ t.m = t^d m.$$

On note alors $M = \Gamma_{d\epsilon_1}$. Les $\mathbb{G}_m$-modules irréductibles sont donc paramétrés par les entiers relatifs :

$$d \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \Gamma_{d\epsilon_1}$$

et les $O_2(k)$-modules irréductibles sont :

- le module trivial Γ_0,
- le module signe noté ϵ,
- les modules $\Gamma_{i\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-i\epsilon_1}$, où $i > 0$, qui sont tous de dimension 2.

En particulier, la représentation standard de $O_2(k)$ (et de $SO_2(k)$) est isomorphe à $\Gamma_{-\epsilon_1} \oplus \Gamma_{\epsilon_1}$. Ensuite, par définition de la forme quadratique q, on a $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $\mathcal{B}$ est la base de V fixée dans la section 1.4.1. On va effectuer un changement de base dans V. Soit $\mathcal{B}_0 := \{v_1, v_2\}$ la base de V telle que $Mat_{\mathcal{B}_0}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B}_0$, on a

$$SO(V) \cong \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{G}_m \right\} \cong \mathbb{G}_m$$

et $\Gamma_{\epsilon_1} \cong \langle v_1 \rangle$, $\Gamma_{-\epsilon_1} \cong \langle v_2 \rangle$. Dans toute la section 3.1.2, on travaillera dans les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$ de V et V' respectivement. Nous aurons besoin par la suite d'expliciter des bases de certains $B' \times G$-sous-module de $k[W]$ et ce changement de base va nous permettre d'avoir des générateurs "simples" pour ces modules.

Points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'

On suppose pour le moment que $n' = 2$. Nous allons déterminer les points fixes de B' dans $\mathcal{H}$. On commence par écrire la décomposition de $k[W]_2$ comme $G' \times G$-module :

$$k[W]_2 \cong S^2(W^*) \cong (S^2(V') \otimes (\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1} \oplus \Gamma_0)) \oplus (\Lambda^2(V') \otimes \epsilon). \tag{3.3}$$

Notation 3.1.13. On note :

- J l'idéal engendré par les G-invariants homogènes de degré positif de $k[W]$,
- $D :=< e_1.e_1 >$ l'unique droite B'-stable de $S^2(V')$,
- I l'idéal de $k[W]$ engendré par $(S^2(V') \otimes \Gamma_0) \oplus (D \otimes (\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1})) \subset k[W]_2$.

Remarque 3.1.14. On a $J \cap k[W]_2 = S^2(V') \otimes \Gamma_0$ comme $G' \times G$-module et ce module engendre l'idéal J. L'idéal I est homogène, $B' \times G$-stable et contient l'idéal J.

Théorème 3.1.15. *L'idéal I est l'unique point fixe de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'.*

Démonstration. On raisonne comme dans la preuve du théorème 2.1.30 en considérant I_Z un point fixe de B' et en étudiant $k[W]/I_Z$ composante par composante :
• Composantes de degré 0 et 1 :
On a bien sûr $I_Z \cap k[W]_0 = \{0\}$ et $I_Z \cap k[W]_1 \neq k[W]_1$.
• Composante de degré 2 : on utilise la décomposition (3.3).

Pour avoir la décomposition souhaitée de $k[W]/I_Z$ comme G-module, on a nécessairement $k[W]_2 \cap I_Z \supseteq 3\Gamma_0 \oplus (\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1})$. En effet, le G-module $k[W]/I_Z$ contient déjà une copie de la représentation triviale (qui provient de la composante de degré 0), il ne peut donc pas en contenir d'autre. Ensuite, $k[W]_2$ contient 3 copies de $\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1}$ qui est un G-module de dimension 2, donc $k[W]_2 \cap I_Z$ contient au moins une copie de $\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1}$. Comme $k[W]_2 \cap I_Z$ est B'-stable, il contient $D \otimes ((\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1}))$ car D est l'unique droite B'-stable de $S^2(V')$. Il s'ensuit que I_Z contient $(S^2(V') \otimes V_0) \oplus (D \otimes ((\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1})))$ et donc $I_Z \supset I$. Le lemme qui suit implique que cette inclusion est en fait une égalité et achève ainsi la démonstration du théorème 3.1.15 :

Lemme 3.1.16. *L'idéal I a pour fonction de Hilbert h_W.*

Preuve du lemme : Il faut montrer que

$$k[W]/I \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus \dim(M)}$$

comme G-module. On a l'inclusion d'idéaux $J \subset I$, d'où l'isomorphisme de $B' \times G$-modules

$$k[W]/I \cong \frac{k[W]/J}{I/J}. \tag{3.4}$$

On commence par déterminer la décomposition de $k[W]/J$ en G-modules irréductibles. On note les éléments $w \in W$ sous forme matricielle via le choix des bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'$: $w = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ et on identifie $k[W]$ à $k[x_1, x_2, y_1, y_2]$.
Alors

$$J = (x_1x_2, y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

et $k[W]/J$ a pour base les images des monômes

$$\{x_1^p y_1^q, x_2^p y_2^q, x_1y_2;\ p, q \geq 0\} \subset k[W]$$

dans $k[W]/J$. On a donc une décomposition de $k[W]/J$ en droites $SO(V)$-stables. On en déduit la décomposition de $k[W]/J$ en G-modules irréductibles :

représentation	droite(s) des vecteurs de plus haut poids	multiplicité dans $k[W]/J$
Γ_0	$\langle 1 \rangle$	1
ϵ	$\langle x_1y_2 \rangle$	1
$\Gamma_{j\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-j\epsilon_1}$	$\left\langle x_1^p y_1^{j-p} \right\rangle,\ j \geq 1,\ 0 \leq p \leq j$	$j+1$

Ensuite, on a $I = J + (x_1^2, x_2^2)$ donc l'idéal I/J est engendré par les images des éléments x_1^2 et x_2^2 modulo J. Donc, l'image du monôme $x_1^p y_1^{j-p}$ dans $k[W]/J$ est dans I/J si et seulement si $j \geq 2$ et $p \geq 2$. On en déduit, via l'isomorphisme (3.4), que chaque G-module irréductible apparaît avec une multiplicité égale à sa dimension dans $k[W]/I$. □

Remarque 3.1.17. On a $\mathrm{Stab}_{G'}(I) = B'$, donc l'unique orbite fermée de $\mathcal{H}$ est isomorphe à $G'/B' \cong \mathbb{P}^1$.

Le corollaire qui suit découle du lemme 1.2.1 et du théorème 3.1.15 :

Corollaire 3.1.18. *Le schéma $\mathcal{H}$ est connexe.*

Espace tangent de $\mathcal{H}$ en Z_0

On note $Z_0 := \mathrm{Spec}(k[W]/I)$. Nous allons démontrer la

Proposition 3.1.19. $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 3$.

On identifie $k[W]$ à $k[x_1, x_2, y_1, y_2]$ comme dans la preuve du lemme 3.1.16 et on explicite des bases de certains $B' \times G$-modules qui apparaissent dans $k[W]_2$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 := x_1x_2 \\ f_2 := y_1y_2 \\ f_3 := x_1y_2 + x_2y_1 \end{array}\right\} \text{ est une base de } S^2(V') \otimes \Gamma_0,$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 := x_1^2 \\ h_2 := x_2^2 \\ h_3 := y_1^2 \\ h_4 := y_2^2 \\ h_5 := x_1y_1 \\ h_6 := x_2y_2 \end{array}\right\} \text{ est une base de } S^2(V') \otimes (\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1}).$$

On reprend les notations de la section 1.2. Soit $R := k[W]/I$ et soit

$$N := \langle f_1, f_2, f_3, h_1, h_2 \rangle \subset k[W]$$

qui est un $B' \times G$-module qui engendre l'idéal I. D'après [GS, Macaulay2], les relations entre les générateurs ci-dessus du R-module I/I^2 sont données dans la table 3.1.

```
| x1x2      -y1 x1  -y2 -x2 -x1y2 0    x2y2  |
| y1y2      0   0   0   0   0     0    0     |
| x2y1+x1y2 x1  0   x2  0   0     0    0     |
| x1^2      -y2 -x2 0   0   x2y2  y2^2 0     |
| x2^2      0   0   -y1 x1  0     y1^2 -x1y2 |
```

Table 3.1 – Relations entre les générateurs de I/I^2

En particulier, on a les relations suivantes données par les colonnes 2 et 5 respectivement :

$$\begin{cases} r_1 := x_1 \otimes f_3 - y_1 \otimes f_1 - y_2 \otimes h_1, \\ r_2 := x_2 \otimes f_1 - x_1 \otimes h_2. \end{cases}$$

On a $\dim(N) = 5$ et donc d'après le lemme 1.2.6, on a $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 5 - \mathrm{rg}(\rho^*)$. D'après le lemme 1.2.1, la variété $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ contient au moins un point fixe pour l'opération de B', donc $Z_0 \in \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ et donc $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) \geq \dim(\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}) = 3$. Donc, pour montrer la proposition 3.1.19, il suffit de montrer le

Lemme 3.1.20. $\mathrm{rg}(\rho^*) \geq 2$.

Démonstration. Pour $i = 1, 2, 3$, on définit $\psi_i \in \mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$ par

$$\begin{cases} \psi_i(h_j \otimes 1) = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \\ \psi_i(f_j \otimes 1) = \delta_i^j \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker. Les ψ_i forment une famille libre de $\mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$, nous allons voir que $\{\rho^*(\psi_1), \rho^*(\psi_3)\}$ est une famille libre de $\mathrm{Hom}_R^G(R \otimes \mathcal{R}, R)$ ce qui démontrera le lemme. Soient $\lambda_1, \lambda_3 \in k$ tels que

$$\lambda_1 \rho^*(\psi_1) + \lambda_3 \rho^*(\psi_3) = 0.$$

On évalue cette relation en r_2, on obtient :

$$\lambda_1 \psi_1(\rho(1 \otimes r_2)) + \lambda_3 \psi_3(\rho(1 \otimes r_2)) = \lambda_1 \psi_1(r_2) + \lambda_3 \psi_3(r_2) = \lambda_1 x_2 = 0.$$

De même, on évalue cette relation en r_1, on obtient :

$$\lambda_3 x_1 - \lambda_1 y_1 = 0.$$

On en déduit que $(\lambda_1, \lambda_3) = (0, 0)$ et donc $\{\rho^*(\psi_1), \rho^*(\psi_3)\}$ est bien une famille libre. □

x1x2	0	0	0	x2	x1	x2y2	0	0	0	0
y1y2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x2y1+x1y2	0	x2	x1	y2	y1	y2^2	0	0	0	0
x1^2	0	0	0	2x1	0	0	y1^2	0	0	0
x2^2	0	0	0	0	2x2	0	0	y2^2	x2y2	x1y2

TABLE 3.2 – Générateurs du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$

Remarque 3.1.21. D'après [GS, Macaulay2], une famille de générateurs du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$ est donnée dans la table 3.2.
On note Φ_i le morphisme associé à la colonne $i+1$. On vérifie que les trois morphismes Φ_1, $\Phi_7+\Phi_8$ et $\frac{1}{2}(y_1\Phi_4 + y_2\Phi_5)$ sont G-équivariants et linéairement indépendants. Ils forment donc une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R)$ et on en déduit, comme dans la remarque 2.1.36, que

$$\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R) \cong D^* \oplus \left(D^* \otimes \frac{S^2(V')}{D}\right)$$

comme B'-module.

On déduit du lemme 1.2.2 et et de ce qui précède le

Corollaire 3.1.22. $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ *est une variété lisse de dimension* 3.

Construction d'un morphisme équivariant $\delta : \mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!/G)$

Le lemme qui suit découle de la théorie classique des invariants comme les lemmes 1.5.1 et 2.1.38.

Lemme 3.1.23. *Le* $k[W]^G$*-module* $k[W]_{(\Gamma_{2\epsilon_1}\oplus\Gamma_{-2\epsilon_1})}$ *est engendré par* $\mathrm{Hom}^G(\Gamma_{2\epsilon_1}\oplus\Gamma_{-2\epsilon_1}, k[W]_2)$.

Puis, on a l'isomorphisme de G'-modules

$$\mathrm{Hom}^G((\Gamma_{2\epsilon_1}\oplus\Gamma_{-2\epsilon_1}), k[W]_2) \cong S^2(V').$$

La proposition 1.3.1 donne un morphisme G'-équivariant

$$\mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(2, S^2(V'^*)).$$

Et $V'^* \otimes \det(V') \cong V'$, donc $S^2(V'^*) \otimes \det^2(V) \cong S^2(V')$ et donc

$$\mathrm{Gr}(2, S^2(V'^*)) \cong \mathbb{P}(S^2(V')) \cong \mathbb{P}(S^2(V'^*)) = \mathbb{P}(W/\!/G)$$

comme G'-variété. On obtient donc un morphisme G'-équivariant

$$\delta : \mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!/G). \tag{3.5}$$

On rappelle que l'on note

$$Y_0 := \{(Q, L) \in W/\!/G \times \mathbb{P}(W/\!/G) \mid Q \in L\} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W/\!/G)}(-1)$$

l'éclatement en 0 de $W/\!/G$. On vérifie alors que le morphisme $\gamma \times \delta$ envoie $\mathcal{H}$ dans Y_0. Puis, en procédant comme pour la proposition 2.1.41, on montre que le morphisme $\gamma \times \delta : \mathcal{H} \to Y_0$ est un isomorphisme G'-équivariant.

Cas $n' > 2$

Pour tout $L \in \mathbb{P}(W/\!/G)$, on définit $\mathrm{Im}(L)$ comme dans la notation 2.1.42. On considère la variété

$$\mathcal{Z} := \{(Q, L, E) \in W/\!/G \times \mathbb{P}(W/\!/G) \times \mathrm{Gr}(2, V'^*) \mid Q \in L \text{ et } \mathrm{Im}(L) \subset E\}.$$

On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Z} \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ Y_0 & & \mathrm{Gr}(2, V'^*) \end{tikzcd}$$

où q_1 et q_2 sont les projections naturelles. En particulier, avec les notations du début de la section, on vérifie que $\mathcal{Z} \cong S^2(T)$.

Lemme 3.1.24. *On a un isomorphisme de variétés $Y_1 \cong \mathcal{Z}$ et via cet isomorphisme, l'éclatement $Y_1 \to Y_0$ s'identifie au morphisme $q_1 : \mathcal{Z} \to Y_0$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.1.43. □

On raisonne alors comme dans la section 2.1.4 : on identifie Y_1 à $\mathcal{Z}$ grâce au lemme 3.1.24, on montre l'existence d'un isomorphisme G'-équivariant $\mathcal{H} \cong Y_1$, on identifie $\mathcal{H}$ à Y_1 via cet isomorphisme et on montre que γ est la composition des éclatements $Y_1 \to Y_0 \to W/\!\!/G$. En particulier, γ est toujours une résolution de $W/\!\!/G$.

3.1.3 Etude du cas $\dim(V) = 3$

Dans toute cette section, on fixe $n = 3$. On a $G \cong O_3(k)$, $W/\!\!/G = S^2(V'^*)^{\leq 3}$ et $\rho : \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(3, V'^*)$ est le morphisme de la section 1.5.1. Nous allons démontrer le

Théorème 3.1.25. *Si $n' \geq 3$, alors le schéma $\mathcal{H}$ est singulier.*

Remarque 3.1.26. Si $n' \leq 2$, alors $\mathcal{H} \cong W/\!\!/G$ est une variété lisse et γ est un isomorphisme d'après le corollaire 3.1.8.

Lorsque $n' = 3$, la non-lissité de $\mathcal{H}$ est donnée par le corollaire 3.1.37. Le cas général $n' \geq 3$ se déduit du cas particulier $n' = 3$ grâce au principe de réduction (proposition 1.5.6). Nous allons procéder comme pour la démonstration du théorème 2.1.44, cependant les choses vont s'avérer un peu plus compliquées ici car nous allons voir que $\mathcal{H}$ possède deux points fixes pour B'.

Représentations de $O_3(k)$

Comme pour le cas $n = 2$, la théorie des représentation de $O_n(k)$ est particulièrement simple lorsque $n = 3$. D'après [FH91, §10.4], on a un isomorphisme de groupes algébriques $SO_3(k) \cong PSL_2(k)$, où $PSL_2(k) := SL_2(k)/\{\pm I_2\}$. Et donc, $O_3(k) \cong PSL_2(k) \times \mathbb{Z}_2$ d'après (1.20).
Les représentations irréductibles de $SL_2(k)$ sont paramétrées par les entiers naturels : $d \in \mathbb{N} \leftrightarrow V(d)$, où $V(d) := k[x, y]_d$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré d. En particulier, on a $\dim(V(d)) = d + 1$. Les représentations irréductibles de $SO_3(k)$ sont donc paramétrées par les entiers naturels pairs : $d \in 2\mathbb{N} \leftrightarrow V(d)$. On note M_0 (resp. ϵ) la représentation triviale (resp. la représentation signe) de $\mathbb{Z}_2$. Les représentations irréductibles de $O_3(k)$ sont :
• $V(d) \otimes M_0$, avec d pair, de dimension $d + 1$,
• $V(d) \otimes \epsilon$, avec d pair, de dimension $d + 1$.
Si $g \in O_3(k)$, on note $\overline{g}$ l'image de g dans $O_3(k)/SO_3(k) \cong \mathbb{Z}_2$ et alors $\epsilon(\overline{g}) = \det(g)$. Pour alléger les notations, on fera l'abus d'écrire $V(d)$ pour désigner la représentation $V(d) \otimes M_0$. Avec ces notations, $V(0)$ est la représentation triviale de $O_3(k)$ et $SO_3(k)$, $V(2)$ est la représentation standard de $SO_3(k)$ et $V(2) \otimes \epsilon$ est la représentation standard de $O_3(k)$.
On rappelle enfin que l'on dispose de la formule de Clebsch-Gordan ([FH91, Exercise 11.11]) pour décomposer les produits tensoriels de représentations de $SL_2(k)$.

Points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'

On suppose dorénavant que $n' = 3$. On souhaite montrer que $\mathcal{H}$ est singulier. Pour ce faire, on commence par déterminer les points fixes de B' dans $\mathcal{H}$. On a :

$$k[W]_1 \cong V' \otimes V(2) \otimes \epsilon, \tag{3.6}$$

$$k[W]_2 \cong (S^2(V') \otimes (V(4) \oplus V(0))) \oplus (\Lambda^2(V') \otimes V(2)), \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} k[W]_3 \cong & (S^3(V') \otimes (V(6) \oplus V(2)) \otimes \epsilon) \oplus (S^{2,1}(V') \otimes (V(4) \oplus V(2)) \otimes \epsilon) \\ & \oplus (\Lambda^3(V') \otimes V(0) \otimes \epsilon), \end{aligned} \tag{3.8}$$

comme $G' \times G$-modules.

On reprend les notations de la section 1.4.2 et on considère les différents poids présents dans le G'-module $S^{2,1}(V')$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 2\epsilon_1 + \epsilon_2 & & \\
 & \epsilon_1 + 2\epsilon_2 \arrow[ur] & & 2\epsilon_1 + \epsilon_3 \arrow[ul] & \\
 & & \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
 & 2\epsilon_2 + \epsilon_3 \arrow[ur] & & \epsilon_1 + 2\epsilon_3 \arrow[ul] & \\
 & & \epsilon_2 + 2\epsilon_3 \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Le poids $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ est présent avec multiplicité 2 et tous les autres poids avec multiplicité 1. Les flèches indiquent comment opère B' dans $S^{2,1}(V')$: deux poids λ_1 et λ_2 peuvent être reliés par une suite de flèches si et seulement si il existe un élément $b' \in B'$ tel que, si l'on note v_i un vecteur de poids λ_i, alors $b'.v_1 = \alpha v_2 + \dots$ pour un certain $\alpha \neq 0$. On note $\mathcal{P}$ le plan B'-stable de $S^{2,1}(V')$ engendré par les deux droites T'-stables associées aux poids $2\epsilon_1 + \epsilon_2$ et $2\epsilon_1 + \epsilon_3$. On vérifie que le plan T'-stable associé au poids $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ contient une unique droite L telle que pour tout $v \in L$, pour tout $b' \in B'$, $b'.v \in \mathcal{P} \oplus L$. On note $E_1 := \mathcal{P} \oplus L$ et E_2 le sous-espace de $S^{2,1}(V')$ engendré par les trois droites T'-stables associées aux poids $2\epsilon_1 + \epsilon_2$, $2\epsilon_1 + \epsilon_3$ et $\epsilon_1 + 2\epsilon_2$. Les espaces E_1 et E_2 sont les deux seuls B'-sous-module de $S^{2,1}(V')$ de dimension 3 contenant $\mathcal{P}$.

Notation 3.1.27. On note :

- J l'idéal engendré par les G-invariants homogènes de degré positif de $k[W]$,
- $D := \langle e_1.e_1 \rangle \subset S^2(V')$ l'unique droite B'-stable de $S^2(V')$,
- I_i l'idéal engendré par $(D \otimes V(4)) \oplus (S^2(V') \otimes V(0)) \subset k[W]_2$ et par $(E_i \otimes V(4)) \subset k[W]_3$ pour $i = 1, 2$.

Remarque 3.1.28. On a $J \cap k[W]_2 = S^2(V') \otimes V(0)$ comme $G' \times G$-module et ce module engendre l'idéal J. Les idéaux I_1 et I_2 sont homogènes, $B' \times G$-stable et contiennent J.

Nous allons montrer le

Théorème 3.1.29. *Les idéaux I_1 et I_2 sont les deux points fixes de B' dans $\mathcal{H}$.*

Pour ce faire, nous aurons besoin du

Lemme 3.1.30. *Pour chaque $i \geq 1$, on a les isomorphismes de G-modules suivants :*

1. $S^i(V) \cong V(2i) \oplus V(2i-4) \oplus \dots \oplus V(0)$ *si i est pair,*
2. $S^i(V) \cong (V(2i) \oplus V(2i-4) \oplus \dots \oplus V(2)) \otimes \epsilon$ *si i est impair,*

3. $S^{i,1}(V) \cong (V(2i) \oplus V(2i-2) \oplus \cdots \oplus V(2)) \otimes \epsilon$ *si* i *est pair,*

4. $S^{i,1}(V) \cong V(2i) \oplus V(2i-2) \oplus \cdots \oplus V(2)$ *si* i *est impair.*

Démonstration. On remarque que $O(V)/SO(V) \cong \mathbb{Z}_2$ opère dans $S^i(V)$ trivialement lorsque i est pair, et par le signe lorsque i est impair. Il suffit donc de montrer que, pour chaque $i \geq 1$, on a les isomorphismes de $SO(V)$-modules suivants :

1. $S^i(V) \cong V(2i) \oplus V(2i-4) \oplus \cdots \oplus V(0)$ si i est pair,
2. $S^i(V) \cong V(2i) \oplus V(2i-4) \oplus \cdots \oplus V(2)$ si i est impair,
3. $S^{i,1}(V) \cong V(2i) \oplus V(2i-2) \oplus \cdots \oplus V(2)$.

Les isomorphismes (1) et (2) sont donnés dans [FH91, Exercise 11.14]. Ensuite, soit $i \geq 1$ un entier pair, alors

$$S^i(V) \otimes V \cong S^{i+1}(V) \oplus S^{i,1}(V)$$

comme $GL(V)$-module. On utilise l'isomorphisme (1) et la formule de Clebsch-Gordan pour décomposer $S^i(V) \otimes V$ en $SO(V)$-modules irréductibles :

$$\begin{aligned} S^i(V) \otimes V \cong & (V(2i) \oplus V(2i-4) \oplus \cdots \oplus V(0)) \otimes V(2) \\ \cong & (V(2i) \oplus V(2i-2) \oplus \cdots \oplus V(2)) \\ & \oplus (V(2i+2) \oplus V(2i-2) \oplus V(2i-6) \oplus \cdots \oplus V(2)). \end{aligned}$$

On utilise alors l'isomorphisme (2) pour décomposer $S^{i+1}(V)$ et le résultat s'ensuit. La démarche est analogue dans le cas où i est impair. □

Preuve du théorème 3.1.29. On raisonne comme dans la preuve du théorème 2.1.30 en considérant I_Z un point fixe de B' et en étudiant $k[W]/I_Z$ composante par composante :
• Composantes de degré 0 et 1 :
On a bien sûr $I_Z \cap k[W]_0 = \{0\}$ et $I_Z \cap k[W]_1 \neq k[W]_1$.
• Composante de degré 2 : on utilise la décomposition (3.7).
Pour avoir la décomposition souhaitée de $k[W]/I_Z$ comme G-module, on a nécessairement $k[W]_2 \cap I_Z \supseteq 6V(0) \oplus V(4)$. En effet, le G-module $k[W]/I_Z$ contient déjà une copie de la représentation triviale (qui provient de la composante de degré 0), il ne peut donc pas en contenir d'autre. Ensuite, $k[W]_2$ contient 6 copies de $V(4)$ qui est un G-module de dimension 5, donc $k[W]_2 \cap I_Z$ contient au moins une copie de $V(4)$. Comme $k[W]_2 \cap I_Z$ est B'-stable, il contient $D \otimes V(4)$ car D est l'unique droite B'-stable de $S^2(V')$. Il s'ensuit que I_Z contient $(S^2(V') \otimes V(0)) \oplus (D \otimes V(4))$.
• Composante de degré 3 : on utilise la décomposition (3.8).
On remarque que $k[W]_3$ contient huit copies de $V(4) \otimes \epsilon$ qui est un G-module de dimension 5, donc nécessairement $I_Z \cap k[W]_3 \supset 3V(4) \otimes \epsilon$. On reprend les notations du début de la section 3.1.3. On vérifie que l'idéal engendré par $(D \otimes V(4)) \oplus (S^2(V') \otimes V(0)) \subset k[W]_2$ contient $\mathcal{P} \otimes V(4) \otimes \epsilon$. Comme $k[W]_3 \cap I_Z$ est B'-stable, il contient $E_i \otimes V(4) \otimes \epsilon$, pour $i = 1$ ou 2, car on a vu que E_1 et E_2 sont les seuls espaces B'-stables de dimension 3 dans $S^{2,1}(V')$ contenant $\mathcal{P}$. Donc I_Z contient nécessairement I_1 ou I_2. Le lemme qui suit achève la preuve du théorème 3.1.29 :

Lemme 3.1.31. *Les idéaux* I_1 *et* I_2 *ont pour fonction de Hilbert* h_W.

Preuve du lemme : On considère l'idéal J défini dans la notation 3.1.27. D'après le lemme 3.1.30, pour chaque $i \geq 2$, on a les inclusions :
(3.9)

$$\begin{cases} k[W]_i/(J \cap k[W]_i) \supset (S^i(V') \otimes V(2i)) \oplus (S^{i-1,1}(V') \otimes V(2i-2)) \text{ si } i \text{ est pair,} \\ k[W]_i/(J \cap k[W]_i) \supset (S^i(V') \otimes V(2i) \otimes \epsilon) \oplus (S^{i-1,1}(V') \otimes V(2i-2) \otimes \epsilon) \text{ si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

En effet, l'idéal J est engendré par les copies de $V(0)$ dans $k[W]_2$ et donc, si p est un entier tel que $V(2p) \subset J \cap k[W]_i$, alors nécessairement $p \leq i-2$. On dispose donc, pour chaque $i \geq 1$, d'une minoration de la dimension de $k[W]_i/(J \cap k[W]_i)$ par

$$Q(i) := \dim((S^i(V') \otimes V(2i)) \oplus (S^{i-1,1}(V') \otimes V(2i-2))) = 3i^3 + \frac{5}{2}i^2 + \frac{3}{2}i + 2.$$

Ensuite, [GS, Macaulay2] nous fournit le polynôme de Hilbert P_J et la fonction de Hilbert classique f_J de l'idéal J :

$$\begin{cases} P_J(X) = 3X^3 + \frac{5}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 2, \\ \forall n \notin \{0,3\},\ f_J(n) = P_J(n) \text{ et } f_J(0) = 1,\ f_J(3) = 111. \end{cases}$$

Il s'ensuit que les inclusions (3.9) sont en fait des égalités pour $i = 2$ et $i \geq 4$. Pour $i = 3$, on a

$$k[W]_3/(J \cap k[W]_3) \cong (S^3(V') \otimes V(6) \otimes \epsilon) \oplus (S^{2,1}(V') \otimes V(4) \otimes \epsilon) \oplus \Lambda^3(V') \otimes \epsilon.$$

On note K l'idéal de $k[W]$ engendré par $(D \otimes V(4)) \oplus (S^2(V') \otimes V(0)) \subset k[W]_2$. Alors $(K \cap k[W]_2)/(J \cap k[W]_2) \cong D \otimes V(4)$ comme $B' \times G$-module. Donc $(K/J)^U$ est un idéal de $(k[W]/J)^U$ engendré par un unique élément de $(k[W]_2/k[W]_2 \cap J)^U$ et donc, pour tout $i \geq 1$, la multiplicité du G-module $V(2i) \otimes \left(\epsilon^{\otimes i}\right)$ dans $k[W]_i/(K \cap k[W]_i)$ est égale à

$$\dim(S^i(V')) - \dim(S^{i-2}(V')) = 2i + 1 = \dim(V(2i) \otimes \epsilon^{\otimes i}).$$

Ensuite, on fixe $j \in \{1,2\}$, alors I_j est l'idéal de $k[W]$ engendré par K et par le $B' \times G$-module $E_j \otimes V(4) \otimes \epsilon \subset k[W]_3$, donc le nombre de copies de $V(2i) \otimes \left(\epsilon^{\otimes i}\right)$ dans $k[W]_i/(K \cap k[W]_i)$ est le même que dans $k[W]_i/(I_j \cap k[W]_i)$. On calcule le polynôme de Hilbert Q_j et la fonction de Hilbert g_j de l'idéal I_j avec [GS, Macaulay2] :

$$\begin{cases} Q_j(X) = 8X^2 + 2, \\ \forall n \geq 4,\ g_j(n) = Q_j(n) \text{ et } g_j(0) = 1,\ g_j(1) = 9,\ g_j(2) = 34,\ g_j(3) = 75. \end{cases}$$

Et donc, la multiplicité du G-module $V(2i)$ dans $k[W]/I_j$ est :

$$\begin{cases} 2i + 1 = \dim(V(2i)) \text{ si } i \text{ est pair}, \\ \frac{g(i+1)-(2i+3)^2}{2i+1} = 2i + 1 = \dim(V(2i)) \text{ si } i \text{ est impair}, \end{cases}$$

et la multiplicité du G-module $V(2i) \otimes \epsilon$ dans $k[W]/I_j$ est :

$$\begin{cases} \frac{g(i+1)-(2i+3)^2}{2i+1} = 2i + 1 = \dim(V(2i)) \text{ si } i \text{ est pair}, \\ 2i + 1 = \dim(V(2i) \otimes \epsilon) \text{ si } i \text{ est impair}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'idéal I_j a la bonne fonction de Hilbert. □

Remarque 3.1.32. On a $\mathrm{Stab}_{G'}(I_1) = \mathrm{Stab}_{G'}(I_2) = B'$, donc chacune des deux orbites fermées de $\mathcal{H}$ est isomorphe à G'/B'.

I_2 est un point de $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$

Le but de cette section est de montrer la

Proposition 3.1.33. *L'idéal I_2 appartient à $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$.*

Cette proposition nous permettra ensuite de montrer que $\mathcal{H}$ est singulier en I_2. On note $w \in W$ sous la forme $w = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ et on identifie $k[W]$ à $k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3]$. On commence par expliciter des bases de certains $B' \times G$-modules qui apparaissent dans $k[W]$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 \\ z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 \end{array}\right\} \text{ est une base de } S^2(V') \otimes V(0) \subset k[W]_2,$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_3 \\ x_1x_3 \end{array}\right\} \text{ est une base de } D \otimes S^2(V) \subset k[W]_2,$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(x_1y_2 - x_2y_1) \\ x_2(x_1y_2 - x_2y_1) \\ x_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\ x_1(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_2(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_3(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1(x_2y_3 - x_3y_2) \\ x_2(x_2y_3 - x_3y_2) \\ x_3(x_2y_3 - x_3y_2) \\ x_1(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_2(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_3(x_1z_2 - x_2z_1) \\ x_1(x_1z_3 - x_3z_1) \\ x_2(x_1z_3 - x_3z_1) \\ x_3(x_1z_3 - x_3z_1) \\ x_1(x_2z_3 - x_3z_2) \\ x_2(x_2z_3 - x_3z_2) \\ x_3(x_2z_3 - x_3z_2) \\ y_1(x_1y_2 - x_2y_1) \\ y_2(x_1y_2 - x_2y_1) \\ y_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\ y_1(x_1y_3 - x_3y_1) \\ y_2(x_1y_3 - x_3y_1) \\ y_3(x_1y_3 - x_3y_1) \\ y_1(x_2y_3 - x_3y_2) \\ y_2(x_2y_3 - x_3y_2) \\ y_3(x_2y_3 - x_3y_2) \end{array}\right\} \text{ est une famille génératrice de } E_2 \otimes S^{2,1}(V).$$

On en déduit des générateurs de l'idéal I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 = (&y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3, \\ &x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3, z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3, \\ &y_3(x_1y_2 - x_2y_1), y_2(x_1y_3 - x_3y_1), y_3(x_1y_3 - x_3y_1), \\ &y_2(x_2y_3 - x_3y_2), y_3(x_2y_3 - x_3y_2)). \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.1.6, le morphisme de Hilbert-Chow est un isomorphisme au dessus de $U_3 \subset W/\!\!/G$, donc il existe un unique $Z_{Id} \in \mathcal{H}$ tel que $\gamma(Z_{Id}) = I_d$. On note L l'idéal de Z_{Id} dans $k[W]$. D'après le lemme 1.1.3, on a :

$$\begin{aligned} L = (&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1,\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1,\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1, \\ &x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3, z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3). \end{aligned}$$

Soit I un idéal de $k[W]$ correspondant à un point de $\mathcal{H}$. On va construire une famille plate d'idéaux $(L_t)_{t \in \mathbb{A}^1_k}$ de $k[W]$ telle que $L_1 = L$ et $L_0 = I_2$. Par définition de la composante principale $\mathcal{H}^{\text{prin}}$ de $\mathcal{H}$, on en déduira que I_2 est un point de $\mathcal{H}^{\text{prin}}$.

On commence par calculer une base de Gröbner $\mathcal{G}_L$ de l'idéal L à l'aide de [GS, Macaulay2] :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_L = \{&z_1^2+z_2^2+z_3^2-1, y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3, x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3,\\ &y_1^2+y_2^2+y_3^2-1, x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, x_3^2+y_3^2+z_3^2-1,\\ &x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3, x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, x_2^2+y_2^2+z_2^2-1,\\ &x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, x_1^2-y_2^2-y_3^2-z_2^2-z_3^2+1, x_2y_1y_2-x_1y_2^2-x_3z_1z_3+x_1z_3^2,\\ &y_2z_1z_2-y_1z_2^2+y_3z_1z_3-y_1z_3^2+y_1, x_2z_1z_2-x_1z_2^2+x_3z_1z_3-x_1z_3^2+x_1,\\ &x_2y_1z_2-x_1y_2z_2+x_3y_1z_3-x_1y_3z_3, y_2^2z_1+y_3^2z_1-y_1y_2z_2-y_1y_3z_3-z_1,\\ &x_2y_2z_1+x_3y_3z_1-x_1y_2z_2-x_1y_3z_3, x_3y_2y_3-x_2y_3^2+x_3z_2z_3-x_2z_3^2+x_2,\\ &x_3y_1y_3-x_1y_3^2+x_3z_1z_3-x_1z_3^2+x_1, x_2y_1y_3-x_1y_2y_3+x_2z_1z_3-x_1z_2z_3,\\ &x_3y_2^2-x_2y_2y_3+x_3z_2^2-x_2z_2z_3-x_3, x_3y_1y_2-x_1y_2y_3+x_3z_1z_2-x_1z_2z_3,\\ &x_3y_2z_1z_3-x_2y_3z_1z_3-x_3y_1z_2z_3+x_1y_3z_2z_3+x_2y_1z_3^2-x_1y_2z_3^2-x_2y_1+x_1y_2,\\ &y_3^2z_2^2-2y_2y_3z_2z_3+y_2^2z_3^2-y_2^2-y_3^2-z_2^2-z_3^2+1,\\ &x_3y_3z_2^2-x_3y_2z_2z_3-x_2y_3z_2z_3+x_2y_2z_3^2-x_2y_2-x_3y_3,\\ &y_3^2z_1z_2-y_2y_3z_1z_3-y_1y_3z_2z_3+y_1y_2z_3^2-y_1y_2-z_1z_2,\\ &x_3y_3z_1z_2-x_2y_3z_1z_3-x_3y_1z_2z_3+x_2y_1z_3^2-x_2y_1\}.\end{aligned}$$

On fixe $(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{Z}^3$ et soit

$$\begin{array}{rccc}\theta_{n_1,n_2,n_3} & : & \mathbb{G}_m & \to & T'\\ & & t & \mapsto & (t^{n_1},t^{n_2},t^{n_3})\end{array} \tag{3.10}$$

un sous-groupe à un paramètre du tore T'. Par définition de l'opération de T' dans W, on a :

$$\forall t\in\mathbb{G}_m,\ \forall w=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}\in W,\ \theta_{n_1,n_2,n_3}(t).w=\begin{bmatrix}t^{-n_1}x_1 & t^{-n_2}y_1 & t^{-n_3}z_1\\ t^{-n_1}x_2 & t^{-n_2}y_2 & t^{-n_3}z_2\\ t^{-n_1}x_3 & t^{-n_2}y_3 & t^{-n_3}z_3\end{bmatrix}.$$

Pour $t\in\mathbb{G}_m$ fixé, l'opération de $\theta_{n_1,n_2,n_3}(t)$ dans W induit un automorphisme $\sigma_{n_1,n_2,n_3,t}$ de $k[W]$ défini par :

$$\forall i=1,2,3,\ \begin{cases}\sigma_{n_1,n_2,n_3,t}(x_i)=t^{n_1}x_i,\\ \sigma_{n_1,n_2,n_3,t}(y_i)=t^{n_2}y_i,\\ \sigma_{n_1,n_2,n_3,t}(z_i)=t^{n_3}z_i.\end{cases}$$

On note L_t l'image de l'idéal L par cet automorphisme. Soit $g\in k[W]$, on l'écrit $g=\sum_i u_im_i$, où les m_i sont des monômes de $k[W]$ et les u_i sont des éléments de $\mathbb{G}_m$. On définit

$$\tilde{g}:=t^m g(t^{n_1}x_1,\dots,t^{n_3}z_3)\in k[W]$$

avec m le plus petit entier relatif tel que, lorsque l'on décompose $\tilde{g}$ en une somme de monômes : $\tilde{g}=\sum_i u_it^{N_i}m_i'$, chaque entier N_i qui apparaît est supérieur ou égal à 0. On dispose alors d'une description explicite de l'idéal L_t :

$$L_t=\{\tilde{g}\mid g\in L\}.$$

D'après [Eis95, Exercise 15.25], si $\{g_1,\dots,g_r\}$ est une base de Gröbner de l'idéal L, alors $L_t=(\tilde{g_1},\dots,\tilde{g_r})$. En particulier, on a $L_1=L$. On note L_0 l'idéal de $k[W]$ obtenu en posant $t=0$ pour chaque élément de L_t. Alors, d'après [Eis95, Theorem 15.17], la famille d'idéaux $(L_t)_{t\in\mathbb{A}^1_k}$ est une famille plate au dessus de $\mathbb{A}^1_k$.
Pour démontrer que $I_2\in\mathcal{H}^{\text{prin}}$, il suffit donc de trouver un triplet $(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{Z}^3$ tel que l'on ait $L_0=I_2$. On vérifie que le triplet $(-3,-2,-1)$ convient.

Remarque 3.1.34. On souhaiterait procéder de manière analogue pour montrer que $I_1\in\mathcal{H}^{\text{prin}}$, malheureusement il n'existe aucun triplet (n_1,n_2,n_3) tel que l'on ait $L_0=I_1$.

Espace tangent de $\mathcal{H}$ en I_2

On note $Z_2 := \mathrm{Spec}(k[W]/I_2)$. On a la

Proposition 3.1.35. $\dim(T_{Z_2}\mathcal{H}) \geq 7$.

Démonstration. D'après [GS, Macaulay2], une famille d'éléments du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$ est donnée dans la table 3.3.

-x2y1y3+x1y2y3	0	x2y1-x1y2	-x1y3	x2y3	y2y3	y1y3	0	x2z1z3-x1z2z3
-x3y1y2+x1y2y3	0	-x1y2	x3y1-x1y3	x3y2	y2y3	0	y1y2	x3z1z2-x1z2z3
-x3y1y3+x1y3^2	0	x3y1-2x1y3	0	x3y3	y3^2	0	y1y3	x3z1z3-x1z3^2
-x3y2^2+x2y2y3	0	-x2y2	2x3y2-x2y3	0	0	-y2y3	y2^2	x3z2^2-x2z2z3
-x3y2y3+x2y3^2	0	x3y2-2x2y3	x3y3	0	0	-y3^2	y2y3	x3z2z3-x2z3^2
x1^2+x2^2+x3^2	0	0	0	0	2x1	-2x2	-2x3	0
y1^2+y2^2+y3^2	0	-2y3	-2y2	-2y1	0	0	0	0
z1^2+z2^2+z3^2	1	0	0	0	0	0	0	0
x1y1+x2y2+x3y3	0	-x3	-x2	-x1	y1	-y2	-y3	0
x1z1+x2z2+x3z3	0	0	0	0	z1	-z2	-z3	0
y1z1+y2z2+y3z3	0	-z3	-z2	-z1	0	0	0	0
x2^2	0	0	0	0	0	-2x2	0	0
x3^2	0	0	0	0	0	0	-2x3	0
x1x2	0	0	0	0	x2	-x1	0	0
x1x3	0	0	0	0	x3	0	-x1	0
x2x3	0	0	0	0	0	-x3	-x2	0

x2y3z1-x1y3z2	x3y2z1-x2y3z1-x3y1z2+x1y3z2	0
x2y3z1-x2y1z3-x1y2z3	x1y2z3	0
x3y3z1-2x1y3z3	-x3y1z3+2x1y3z3	0
x2y3z2-2x2y2z3	x2y2z3	0
x3y3z2-2x2y3z3	-x3y2z3+2x2y3z3	0
0	0	0
-2y3z3	2y3z3	0
0	0	0
-x3z3	x3z3	0
0	0	0
-z3^2	z3^2	0
0	0	y2^2
0	0	y3^2
0	0	y1y2
0	0	y1y3
0	0	y2y3

TABLE 3.3 – Quelques éléments du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$

On note Φ_i le morphisme donné par la $i+1$-ème colonne de cette matrice. On vérifie alors que les sept morphismes suivants sont G-équivariants et linéairement indépendants :

- Φ_1,
- $z_3\Phi_2 + z_2\Phi_3 + z_1\Phi_4$,
- $y_1\Phi_5 - y_2\Phi_6 - y_3\Phi_7$,
- $z_1\Phi_5 - z_2\Phi_6 - z_3\Phi_7$,
- Φ_8,
- $\Phi_9 + \Phi_{10}$,
- Φ_{11}.

Il s'ensuit que $\mathrm{Hom}_R^G(I_2/I_2^2, R)$ est de dimension au moins 7 et le résultat découle alors de l'isomorphisme $T_{Z_2}\mathcal{H} \cong \mathrm{Hom}_R^G(I_2/I_2^2, R)$. $\square$

Remarque 3.1.36. Une étude des relations entre les générateurs du R-module I/I^2 similaire à celle réalisée dans la section 2.1.5 permet de montrer que $\dim(T_{Z_2}\mathcal{H}) \leq 8$. Je ne sais malheureusement pas si $\dim(T_{Z_2}\mathcal{H})$ vaut 7 ou 8.

Corollaire 3.1.37. *Le schéma $\mathcal{H}$ est singulier en Z_2.*

Démonstration. On a $\dim(\mathcal{H}^{\text{prin}}) = 6$ et donc $\mathcal{H}$ est lisse en Z_2 si et seulement si $\dim(T_{Z_2}\mathcal{H}) = 6$, ce qui est faux d'après la proposition 3.1.35. □

3.2 Cas de $SO(V)$ opérant dans $V^{\oplus n'}$

On se place dans la situation 4 : on a $G := SO(V) = O(V) \cap SL(V)$, $G' := GL(V')$, $W := \mathrm{Hom}(V', V)$ et l'opération de $G' \times G$ dans W est donnée par (1.14).

Lorsque $n = 2$, on a $G \cong \mathbb{G}_m$ et alors l'étude du schéma de Hilbert invariant pour l'opération de G dans W a déjà été effectuée dans la section 2.1.2. On supposera donc que $n \geq 3$ par la suite.

3.2.1 Etude du morphisme de passage au quotient

D'après le premier théorème fondamental pour $SO(V)$ (voir [Pro07, §11.2.1]) l'algèbre des invariants $k[W]^G$ est engendrée par les $(i \mid j)$, $1 \leq i \leq j \leq n'$, définis par (3.1), et par les $[i_1, \ldots, i_n]$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n'$, définis par (1.30). Le morphisme de passage au quotient $\nu : W \to W/\!/G$ s'exprime donc en fonction des morphismes de passage au quotient $W \to W/\!/O(V)$ et $W \to W/\!/SL(V)$ étudiés dans les sections 3.1.1 et 1.5.2 respectivement. Plus précisément

$$\begin{array}{rccl} \nu : & \mathrm{Hom}(V', V) & \to & S^2(V'^*) \times \Lambda^n(V'^*) \\ & w & \mapsto & ({}^t ww,\ L_1 \wedge \ldots \wedge L_n) \end{array}$$

où les L_i sont définis dans la notation 1.5.13. On a donc un diagramme commutatif

(3.11)
$$\begin{tikzcd} & W/\!/SL(V) & \\ W \arrow[ur] \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr] & W/\!/G \arrow[u, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & \\ & W/\!/O(V) & \end{tikzcd}$$

où les p_i sont les projections naturelles et les deux flèches diagonales sont les morphismes de passage au quotient.
Si $n' < n$, alors $\Lambda^n(V'^*) = \{0\}$, donc $W/\!/G = W/\!/O(V)$ et ν est le morphisme de passage au quotient $W \to W/\!/O(V)$ de la section 3.1.1.
Si $n' = n$, alors $\Lambda^n(V'^*) \cong \mathbb{A}^1_k$ et $\nu : w \mapsto ({}^t ww, \det(w))$. On a donc

$$W/\!/G = \left\{(Q, x) \in S^2(V'^*) \times \mathbb{A}^1_k \mid \det(Q) = x^2\right\}$$

et donc $p_1 : W/\!/G \to S^2(V'^*)$ est un revêtement double de $S^2(V'^*)$ dont le lieu de ramification est $S^2(V'^*)^{\leq n-1}$. On vérifie, grâce au critère jacobien, que le lieu singulier de $W/\!/G$ est $\{(Q, x) \in W/\!/G \mid \mathrm{rg}(Q) \leq n-2\}$.
Enfin, si $n' > n$ et $D := O(V)/G \cong \mathbb{Z}_2$. On a l'inclusion $p_1^* : k[W]^{O(V)} \hookrightarrow k[W]^G$ qui induit un isomorphisme $k[W]^{O(V)} \cong (k[W]^G)^D$. Donc $W/\!/O(V) \cong (W/\!/G)/\!/D$ et p_1 s'identifie au morphisme de passage au quotient $W/\!/G \to (W/\!/G)/\!/D$. Or D est un groupe d'ordre 2 qui opère librement dans l'ouvert $\{(Q, x) \in W/\!/G \mid \mathrm{rg}(Q) = n \text{ et } x \neq 0\}$ en multipliant x par ± 1 et qui opère trivialement dans le complémentaire. Il s'ensuit que p_1 est un revêtement double de $W/\!/O(V)$ dont le lieu de ramification est $\{(Q, 0) \in W/\!/G \mid \mathrm{rg}(Q) \leq n-1\}$. J'ignore malheureusement quel est le lieu singulier de $W/\!/O(V)$ lorsque $n' > n$. Néanmoins, des calculs pour des petites valeurs de n suggèrent que le lieu singulier est $\{(Q, 0) \in W/\!/G \mid \mathrm{rg}(Q) \leq n-2\}$.

Lemme 3.2.1. *On suppose que $n' > n$ et on note $U := \{Q \in S^2(V'^*) \mid \mathrm{rg}(Q) = n\}$ l'orbite ouverte de $W/\!/O(V)$, alors $p_1 : p_1^{-1}(U) \to U$ est le revêtement universel.*

Démonstration. Soit $\tilde{U}$ l'image réciproque de U par le morphisme de passage au quotient $q : W \to W/\!/O(V)$. D'après [SB00, §2.1, Theorem 6], le morphisme q est un $O(V)$-fibré principal au dessus de l'ouvert U. On a donc la suite exacte de groupes suivante :

$$\pi_1(\tilde{U}) \longrightarrow \pi_1(U) \longrightarrow \pi_0(O(V)) \longrightarrow \pi_0(\tilde{U}). \tag{3.12}$$

Or, $\tilde{U} = \{w \in W \mid \mathrm{rg}(w) = n\}$, donc la codimension de $\tilde{U}$ dans W est $n' - n + 1 \geq 2$, et donc $\pi_1(\tilde{U}) \cong \pi_1(W) \cong \{0\}$. On en déduit que $\pi_1(U) \cong \pi_0(O(V)) \cong \mathbb{Z}_2$ et le résultat en découle. □

Si $n' \geq n$, alors la variété $W/\!/G$ est normale ([SB00, §3.2, Théorème 2]) et de Gorenstein ([SB00, §4.4, Théorème 4]) puisque G est semi-simple et connexe. Si $n' < n$, alors $W/\!/G = S^2(V'^*)$ est un espace affine.
On note

$$N := \min(n', n).$$

L'opération de G' dans W induit une opération dans $W/\!/G$ telle que ν soit G'-équivariant. Pour cette opération, on vérifie que $W/\!/G$ se décompose en $N+1$ orbites :

$$U_i := \{(Q, x) \in W/\!/G \mid \mathrm{rg}(Q) = i\}$$

pour $i = 0, \ldots, N$. Les adhérences de ces orbites sont imbriquées de la façon suivante :

$$\{0\} = \overline{U_0} \subset \overline{U_1} \subset \cdots \subset \overline{U_N} = W/\!/G.$$

En effet, pour chaque $i = 0, \ldots, N-1$, on a $\overline{U_i} = \{(Q, 0) \mid Q \in S^2(V'^*)^{\leq i}\} \cong S^2(V'^*)^{\leq i}$ et $p_1 : U_N \to \{Q \in S^2(V'^*) \mid \mathrm{rg}(Q) = N\}$ est G'-équivariant donc U_N est l'unique orbite ouverte de $W/\!/G$. La discussion précédente et le corollaire 3.1.5 permettent de déduire la

Proposition 3.2.2. *La dimension de la fibre générique et l'ouvert de platitude de ν sont donnés dans le tableau suivant :*

configuration	*dim. de la fibre générique*	*ouvert de platitude*
$n' < n$	$n'n - \frac{1}{2}n'(n'+1)$	$U_{n'} \cup \cdots \cup U_{\max(2n'-n-1,0)}$
$n' = n$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	$U_n \cup U_{n-1}$
$n' > n$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	U_n

Corollaire 3.2.3. *Le morphisme ν est plat sur $W/\!/G$ tout entier si et seulement si $n \geq 2n' - 1$ et dans ce cas $W/\!/G = S^2(V'^*)$.*

Le corollaire qui suit est une conséquence immédiate de la proposition 1.1.6 et du corollaire 3.2.3 :

Corollaire 3.2.4. *Si $n \geq 2n' - 1$, alors $\mathcal{H} \cong S^2(V'^*)$ et γ est un isomorphisme.*

Notation 3.2.5. Si $n' < n$, on note

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} M & 0_{n-n',n'} \\ 0_{n',n-n'} & I_{n'} \end{bmatrix},\ M \in SO_{n-n'}(k) \right\} \cong SO_{n-n'}(k)$$

qui est un sous-groupe de G.

Pour déterminer la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν, on a besoin du

Lemme 3.2.6. *La fibre de ν en un point de U_N est isomorphe à*

$$\begin{cases} G/H & \text{si } n' < n, \\ G & \text{si } n' \geq n \end{cases}$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.2.10. □

Grâce au lemme 3.2.6 et à la proposition 3.2.2, on montre la

Proposition 3.2.7. *La fonction de Hilbert de la fibre générique de ν est donnée par :*

$$\forall M \in \mathrm{Irr}(G),\ h_W(M) = \begin{cases} \dim(M^H) & \text{si } n' < n, \\ \dim(M) & \text{si } n' \geq n. \end{cases}$$

3.2.2 Etude du cas $\dim(V) = 3$

Dans toute cette section, on fixe $n' = n = 3$. On a $G \cong SO_3(k)$, le quotient $W/\!\!/G$ est un revêtement double de $S^2(V'^*)$ ramifié en $S^2(V'^*)^{\leq 2}$. Nous allons démontrer le

Théorème 3.2.8. *Le schéma $\mathcal{H}$ est connexe et singulier.*

Remarque 3.2.9. Si $n' \leq 2$, alors $\mathcal{H} \cong W/\!\!/G$ est une variété lisse et γ est un isomorphisme d'après le corollaire 3.2.4.

La connexité de $\mathcal{H}$ est donnée par la proposition 3.2.17 et la non-lissité de $\mathcal{H}$ est donnée par le corollaire 3.2.21. Remarquons que, contrairement aux exemples traités précédement, on ne dispose pas du principe de réduction lorsque $G = SO(V)$ et donc les propriétés géométriques de $\mathcal{H}$ lorsque $n' > 3$ ne se déduisent pas du cas $n' = 3$ a priori. On renvoie au début de la section 3.1.3 pour des rappels concernant les représentations de $SO_3(k)$.

Points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'

Nous allons procéder comme pour les démonstrations des théorèmes 2.1.44 et 3.1.25. On commence par déterminer les points fixes de B' dans $\mathcal{H}$. On a :

$$k[W]_1 \cong V' \otimes V(2), \tag{3.13}$$

$$k[W]_2 \cong (S^2(V') \otimes (V(4) \oplus V(0))) \oplus (\Lambda^2(V') \otimes V(2)), \tag{3.14}$$

comme $G' \times G$-modules.

Notation 3.2.10. On note :

- J l'idéal engendré par les G-invariants homogènes de degré positif de $k[W]$,
- $D_1 := \langle e_1 \rangle \subset V'$ l'unique droite B'-stable de V',
- $D_2 := \langle e_1.e_1 \rangle \subset S^2(V')$ l'unique droite B'-stable de $S^2(V')$,
- I_1 l'idéal engendré par $D_1 \otimes V(2) \subset k[W]_1$ et par $(S^2(V') \otimes V(0)) \subset k[W]_2$,
- I_2 l'idéal engendré par $(D_2 \otimes V(4)) \oplus (S^2(V') \otimes V(0)) \oplus (\Lambda^2(V') \otimes V(2)) \subset k[W]_2$.

Remarque 3.2.11. On a $J \cap k[W]_2 = S^2(V') \otimes V(0)$ et $J \cap k[W]_3 = \Lambda^3(V') \otimes V(0)$ comme $G' \times G$-modules et ces modules engendrent l'idéal J. Les idéaux I_1 et I_2 sont homogènes, $B' \times G$-stables et contiennent l'idéal J.

Nous allons montrer le

Théorème 3.2.12. *Les idéaux I_1 et I_2 sont les deux points fixes de B' dans $\mathcal{H}$.*

Pour ce faire, nous aurons besoin du

Lemme 3.2.13. *Pour chaque $i \geq 1$, on a les isomorphismes de G-modules suivants :*

1. $S^i(V) \cong V(2i) \oplus V(2i-4) \oplus \cdots \oplus V(0)$ *si i est pair,*
2. $S^i(V) \cong V(2i) \oplus V(2i-4) \oplus \cdots \oplus V(2)$ *si i est impair,*
3. $S^{i,1}(V) \cong V(2i) \oplus V(2i-2) \oplus \cdots \oplus V(2)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 3.1.30. □

Preuve du théorème 3.2.12. On raisonne comme dans la preuve du théorème 2.1.30 en considérant I_Z un point fixe de B' et en étudiant $k[W]/I_Z$ composante par composante :
• Composante de degré 0 : on a bien sûr $I_Z \cap k[W]_0 = \{0\}$.
• Composante de degré 1 : on utilise la décomposition (3.13).
Si $I_Z \cap k[W]_1 = k[W]_1$, alors $k[W]/I_Z = V(0)$ ne donne pas la décomposition souhaitée comme G-module.

Si $I_Z \cap k[W]_1$ contient deux copies de $V(2)$, alors $k[W]/I_Z$ est un quotient de $k[V(2)]$ comme G-module. Mais $S^2(V(2)) = V(4) \oplus V(0)$ et $k[W]_0/(I_Z \cap k[W]_0) = V(0)$ donc nécessairement $k[W]_2/(I_Z \cap k[W]_2) \subset V(4)$. Il s'ensuit que, pour chaque $i \geq 0$, $k[W]_i/(I_Z \cap k[W]_i) \subset V(2i)$ et donc I_Z ne peut pas avoir la bonne fonction de Hilbert. Donc $I_Z \cap k[W]_1$ contient au plus une copie de $V(2)$.

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$: $I_Z \cap k[W]_1 = \{0\}$.
• Composante de degré 2 : on utilise la décomposition (3.14).
On a $k[W]_2 \cap I_Z \supset (S^2(V') \otimes V(0)) \oplus (\Lambda^2(V') \otimes V(2))$. En effet, le G-module $k[W]/I_Z$ contient déjà une copie de la représentation triviale $V(0)$ (l'image des constantes), il ne peut donc pas en contenir d'autres. De même, comme $I_Z \cap k[W]_1 = \{0\}$, le G-module $k[W]/I_Z$ contient déjà 3 copies de la représentation standard $V(2)$ qui est de dimension 3 et donc il ne peut pas en contenir d'autres. Ensuite, $k[W]_2$ contient 6 copies de $V(4)$ qui est de dimension 5, donc nécessairement, $I_Z \cap k[W]_2$ contient une copie de $V(4)$. Comme $I_Z \cap k[W]_2$ est B'-stable, il contient $D_2 \otimes V(4)$ car D_2 est l'unique droite B'-stable de $S^2(V')$. Donc I_Z contient I_2. Le lemme qui suit montre que cette inclusion est nécessairement une égalité :

Lemme 3.2.14. *L'idéal I_2 a pour fonction de Hilbert h_W.*

Preuve du lemme : On note $J_2 \subset I_2$ l'idéal engendré par $(S^2(V') \otimes V(0)) \oplus (\Lambda^2(V') \otimes V(2)) \subset k[W]_2$, alors $k[W]_2/(J_2 \cap k[W]_2) \cong S^2(V') \otimes V(4)$. Mais $k[W] \cong k[V(2)^{\oplus 3}] \cong k[V(2)]^{\otimes 3}$ comme G-module et $V(2) \otimes V(2) \cong V(4) \oplus V(2) \oplus V(0)$, donc deux copies quelconques de la représentation standard de G dans $k[W]_1$ sont orthogonales dans $k[W]_2/J_2$, c'est-à-dire que l'image du G-module $V(2) \otimes V(2) \subset k[W]_2$ dans $k[W]/J_2$ est isomorphe à $V(4)$. On déduit alors de [Bri85, Lemme 4.1] que l'on a un isomorphisme de $G' \times G$-modules

$$k[W]/J_2 \cong \bigoplus_{i \geq 0} S^i(V') \otimes V(2i).$$

Donc $(I_2 \cap k[W]_2)/(J_2 \cap k[W]_2) \cong D_2 \otimes V(4)$ comme $B' \times G$-module. Soit U le sous-groupe unipotent de G défini dans la section 1.4.1. Alors $(I_2/J_2)^U$ est un idéal de $(k[W]/J_2)^U$ engendré par un unique élément de $(k[W]_2/k[W]_2 \cap J_2)^U$ et donc la multiplicité du G-module $V(2i)$ dans $k[W]/I_2$ est :

$$\dim(S^i(V')) - \dim(S^{i-2}(V')) = 2i + 1 = \dim(V(2i)).$$

Et donc l'idéal I_2 a la bonne fonction de Hilbert. □

$\underline{2^{nd} \text{ cas}}$: $I_Z \cap k[W]_1 = V(2)$.
Comme $I_Z \cap k[W]_1$ est B'-stable, on a $I_Z \cap k[W]_1 = D_1 \otimes V(2)$ car D_1 est l'unique droite B'-stable de V'. On a nécessairement $I_Z \cap k[W]_2 \supset S^2(V') \otimes V(0)$ d'après l'étude de la composante de degré 0 de I_Z. Donc I_Z contient I_1. Le lemme qui suit montre que cette inclusion est en fait une égalité :

Lemme 3.2.15. *L'idéal I_1 a pour fonction de Hilbert h_W.*

Preuve du lemme : On note $V'' := V'/D_1$ et $W' := \mathrm{Hom}(V'', V)$ alors $\dim(V'') = 2$ et

$$k[W']_2 \cong (S^2(V'') \otimes (V(4) \oplus V(0))) \oplus (\Lambda^2(V'') \otimes V(2))$$

comme $B' \times G$-module.
On note J_1 l'idéal de $k[W']$ engendré par $S^2(V'') \otimes V(0) \subset k[W']_2$, alors $k[W]/I_1 \cong k[W']/J_1$ comme $B' \times G$-module. D'après le lemme 3.2.13, pour chaque $i \geq 2$, on a

$$k[W']_i/(J_1 \cap k[W']_i) \supset (S^i(V'') \otimes V(2i)) \oplus (S^{i-1,1}(V'') \otimes V(2i-2)). \tag{3.15}$$

En effet, l'idéal J_1 est engendré par les copies de $V(0)$ dans $k[W']_2$ et donc, si p est un entier tel que $V(2p) \subset J_1 \cap k[W]_i$, alors nécessairement $p \leq i - 2$. On dispose donc, pour chaque $i \geq 1$, d'une minoration de la dimension de $k[W']_i/(J_1 \cap k[W']_i)$ par

$$Q(i) := \dim((S^i(V'') \otimes V(2i)) \oplus (S^{i-1,1}(V'') \otimes V(2i-2))) = 4i^2 + 2.$$

Ensuite, un calcul direct avec [GS, Macaulay2] donne le polynôme de Hilbert P_{J_1} et la fonction de Hilbert f_{J_1} de l'idéal J_1 :

$$\begin{cases} P_{J_1}(X) = 4X^2 + 2, \\ \forall n \geq 1,\ f_{J_1}(n) = P_{J_1}(n) \text{ et } f_{J_1}(0) = 1. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'inclusion (3.15) est en fait une égalité. On est maintenant en mesure de calculer les multiplicités de chaque G-module irréductible qui apparaît dans $k[W]/I_1$: pour chaque $i \geq 0$, la représentation $V(2i)$ apparaît $i+1$ fois dans $k[W]_i/(I_1 \cap k[W]_i)$ et i fois dans $k[W]_{i+1}/(I_1 \cap k[W]_{i+1})$. Et donc la multiplicité de $V(2i)$ dans $k[W]/I_1$ est $2i + 1 = \dim(V(2i))$. □

Remarque 3.2.16. On vérifie que $\mathrm{Stab}_{G'}(I_1) = \mathrm{Stab}_{G'}(I_2)$ est le sous-groupe parabolique de G' qui stabilise la droite $D_1 \subset V'$. Il est donc maximal, de dimension 7, et les deux orbites fermées de $\mathcal{H}$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^2$.

Connexité de $\mathcal{H}$

Nous allons montrer la

Proposition 3.2.17. *Le schéma $\mathcal{H}$ est connexe.*

D'après le lemme 1.2.1, il suffit de montrer que les deux points fixes I_1 et I_2 de B' sont dans $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. Pour ce faire, nous allons procéder comme dans la section 3.1.3 et construire deux familles plates d'idéaux $(L_t)_{t \in \mathbb{A}^1_k}$ de $k[W]$ telles que la première famille vérifie $L_0 = I_1$ et la seconde famille vérifie $L_0 = I_2$.

On note $w \in W$ sous la forme $w = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ et on identifie $k[W]$ à $k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3]$.

On commence par expliciter des bases de certains $B' \times G$-modules qui apparaissent dans $k[W]$:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} \text{ est une base de } D_1 \otimes V(2) \subset k[W]_1,$$

$$\left.\begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 \\ z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 \end{matrix}\right\} \text{ est une base de } S^2(V') \otimes V(0) \subset k[W]_2,$$

$$\left.\begin{matrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_1y_3 - x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_2z_3 - x_3z_2 \\ x_1z_3 - x_3z_1 \\ x_1z_2 - x_2z_1 \\ z_2y_3 - z_3y_2 \\ z_1y_3 - z_3y_1 \\ z_1y_2 - z_2y_1 \end{matrix}\right\} \text{ est une base de } \Lambda^2(V') \otimes V(2) \subset k[W]_2,$$

$$\left.\begin{matrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_1x_2 \\ x_2x_3 \\ x_1x_3 \end{matrix}\right\} \text{ est une base de } D_2 \otimes S^2(V) \subset k[W]_2.$$

On en déduit des générateurs des idéaux I_1 et I_2 :

$$\begin{aligned}
I_1 = (&x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1^2+y_2^2+y_3^2,\ z_1^2+z_2^2+z_3^2,\ z_1y_1+z_2y_2+z_3y_3),\\
I_2 = (&x_1^2-x_3^2,\ x_2^2,\ x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_1x_3,\\
&x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ y_1^2+y_2^2+y_3^2,\ z_1^2+z_2^2+z_3^2,\\
&x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3,\ x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3,\ z_1y_1+z_2y_2+z_3y_3,\\
&x_2y_3-x_3y_2,\ x_1y_3-x_3y_1,\ x_1y_2-x_2y_1,\\
&x_2z_3-x_3z_2,\ x_1z_3-x_3z_1,\ x_1z_2-x_2z_1,\\
&z_2y_3-z_3y_2,\ z_1y_3-z_3y_1,\ z_1y_2-z_2y_1).
\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.1.6, le morphisme de Hilbert-Chow est un isomorphisme au dessus de $U_3 \subset W/\!\!/G$, donc il existe un unique $Z_{Id} \in \mathcal{H}$ tel que $\gamma(Z_{Id}) = (Id, 1)$. On note L l'idéal de Z_{Id} dans $k[W]$. D'après le lemme 1.1.3, on a :

$$\begin{aligned}
L = (&x_1^2+x_2^2+x_3^2-1,\ y_1^2+y_2^2+y_3^2-1,\ z_1^2+z_2^2+z_3^2-1,\\
&x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3, z_1y_1+z_2y_2+z_3y_3,\\
&x_1(y_2z_3-y_3z_2)-x_2(y_1z_3-y_3z_1)+x_3(y_1z_2-y_2z_1)-1).
\end{aligned}$$

On calcule une base de Gröbner de l'idéal L avec [GS, Macaulay2] :

$$\left.\begin{array}{l}
y_3z_2-y_2z_3+x_1\\
y_3z_1-y_1z_3-x_2\\
y_2z_1-y_1z_2+x_3\\
x_3z_2-x_2z_3-y_1\\
x_3z_1-x_1z_3+y_2\\
x_2z_1-x_1z_2-y_3\\
x_3y_2-x_2y_3+z_1\\
x_3y_1-x_1y_3-z_2\\
x_2y_1-x_1y_2+z_3\\
y_1^2+y_2^2+y_3^2-1\\
z_1^2+z_2^2+z_3^2-1\\
x_2^2+y_2^2+z_2^2-1\\
x_3^2+y_3^2+z_3^2-1\\
y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3\\
x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3\\
x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\\
x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3\\
x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3\\
x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\\
x_1^2-y_2^2-y_3^2-z_2^2-z_3^2+1
\end{array}\right\}\ \text{base de Gröbner de l'idéal } L.$$

On fixe $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ et soit θ_{n_1,n_2,n_3} un sous-groupe à un paramètre du tore T' comme défini par (3.10). Pour tout $t \in \mathbb{G}_m$, on définit alors l'idéal L_t comme dans la section 3.1.3.

Pour démontrer la proposition 3.2.17, il suffit de trouver deux triplets $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ tels que l'on obtienne $L_0 = I_1$ dans un cas et $L_0 = I_2$ dans l'autre cas.
On pose $(n_1, n_2, n_3) = (-3, -1, -1)$, alors pour chaque $t \in \mathbb{G}_m$, on obtient les générateurs suivants

de l'idéal L_t :

$$\left.\begin{array}{l}
t(y_3z_2 - y_2z_3) + x_1 \\
t(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2 \\
t(y_2z_1 - y_1z_2) + x_3 \\
x_3z_2 - x_2z_3 - t^3y_1 \\
x_3z_1 - x_1z_3 + t^3y_2 \\
x_2z_1 - x_1z_2 - t^3y_3 \\
x_3y_2 - x_2y_3 + t^3z_1 \\
x_3y_1 - x_1y_3 - t^3z_2 \\
x_2y_1 - x_1y_2 + t^3z_3 \\
y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - t^2 \\
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - t^2 \\
x_2^2 + t^4y_2^2 + t^4z_2^2 - t^6 \\
x_3^2 + t^4y_3^2 + t^4z_3^2 - t^6 \\
y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 \\
x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 \\
x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\
x_2x_3 + t^4(y_2y_3 + z_2z_3) \\
x_1x_3 + t^4(y_1y_3 + z_1z_3) \\
x_1x_2 + t^4(y_1y_2 + z_1z_2) \\
x_1^2 + t^4(-y_2^2 - y_3^2 - z_2^2 - z_3^2) + t^6
\end{array}\right\} \text{générateurs de l'idéal } L_t.$$

Si l'on pose $t = 0$, alors on retrouve les générateurs de l'idéal I_1, autrement dit $L_0 = I_1$. De même, si l'on considère $(n_1, n_2, n_3) = (-3, -2, -2)$, alors on obtient une famille plate d'idéaux $(L_t)_{t\in\mathbb{A}^1_k}$ telle que $L_0 = I_2$. La proposition 3.2.17 s'ensuit.

Dimensions des espaces tangents de $\mathcal{H}$ en Z_1 et Z_2

Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $R_i := k[W]/I_i$ et $Z_i := \mathrm{Spec}(k[W]/I_i)$. Nous allons montrer la

Proposition 3.2.18. *On a* $\dim(T_{Z_1}\mathcal{H}) = 6$ *et* $\dim(T_{Z_2}\mathcal{H}) = 8$.

- Montrons que $\dim(T_{Z_1}\mathcal{H}) = 6$. On vérifie que

$$I_1/I_1^2 \cong ((D_1 \otimes V(2)) \oplus (S^2(V'/D_1) \otimes V(0))) \otimes R_1$$

comme $R_1, B' \times G$-module. Le résultat découle alors du lemme 1.2.5.

- Montrons que $\dim(T_{Z_2}\mathcal{H}) = 8$. On procède comme dans la preuve de la proposition 2.1.53. Soient

$$\left\{\begin{array}{l}
f_1 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\
f_2 := y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \\
f_3 := z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, \\
f_4 := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \\
f_5 := y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3, \\
f_6 := x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3, \\
g_{11} := x_2y_3 - x_3y_2, \\
g_{12} := x_3y_1 - x_1y_3, \\
g_{13} := x_1y_2 - x_2y_1, \\
g_{21} := x_2z_3 - x_3z_2, \\
g_{22} := x_3z_1 - x_1z_3, \\
g_{23} := x_1z_2 - x_2z_1, \\
g_{31} := z_3y_2 - y_3z_2, \\
g_{32} := z_1y_3 - z_3y_1, \\
g_{33} := z_2y_1 - z_1y_2, \\
h_1 := x_1^2 - x_3^2, \\
h_2 := x_1x_2, \\
h_3 := x_2^2, \\
h_4 := x_2x_3, \\
h_5 := x_1x_3,
\end{array}\right.$$

des générateurs de l'idéal I_2 et soit $N \subset k[W]$ le $B' \times G$-module engendré par ces générateurs.

Lemme 3.2.19. $\dim(\mathrm{Hom}^G_{R_2}(I_2/I_2^2, R_2)) \geq 8$.

Démonstration. D'après [GS, Macaulay2], une famille de générateurs du R_2-module $\mathrm{Hom}_{R_2}(I_2/I_2^2, R_2)$ est donnée dans la table 3.4.

x1^2+x2^2+x3^2	2x2	2x1	2x3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y1^2+y2^2+y3^2	0	0	0	2y2	0	2y1	0	2y3	0	0	0	0	0	0	0
z1^2+z2^2+z3^2	0	0	0	0	2z2	0	0	0	2z1	0	2z3	0	0	0	0
x1y1+x2y2+x3y3	y2	y1	y3	x2	0	x1	0	x3	0	0	0	0	0	0	0
x1z1+x2z2+x3z3	z2	z1	z3	0	x2	0	0	0	x1	0	x3	0	0	0	0
y1z1+y2z2+y3z3	0	0	0	z2	y2	z1	0	z3	y1	0	y3	0	0	0	0
x1^2-x3^2	0	2x1	-2x3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-z2^2-2z3^2	-y2z2-2y3z3	-y2^2-2y3^2
x1x2	x1	x2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z1z2	y1z2	y1y2
x2^2	2x2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z2^2	y2z2	y2^2
x2x3	x3	0	x2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z2z3	y2z3	y2y3
x1x3	0	x3	x1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z1z3	y1z3	y1y3
-x2y1+x1y2	-y1	y2	0	x1	0	-x2	x3	0	0	0	0	0	0	0	0
-x3y1+x1y3	0	y3	-y1	0	0	-x3	-x2	x1	0	0	0	0	0	0	0
-x3y2+x2y3	y3	0	-y2	-x3	0	0	x1	x2	0	0	0	0	0	0	0
-x3z2+x2z3	z3	0	-z2	0	-x3	0	0	0	0	x1	x2	0	0	0	0
-x2z1+x1z2	-z1	z2	0	0	x1	0	0	0	-x2	x3	0	0	0	0	0
-x3z1+x1z3	0	z3	-z1	0	0	0	0	0	-x3	-x2	x1	0	0	0	0
-y3z2+y2z3	0	0	0	z3	-y3	0	-z1	-z2	0	y1	y2	x1	0	0	0
-y2z1+y1z2	0	0	0	-z1	y1	z2	-z3	0	-y2	y3	0	x3	0	0	0
-y3z1+y1z3	0	0	0	0	0	z3	z2	-z1	-y3	-y2	y1	-x2	0	0	0

TABLE 3.4 – Générateurs du R_2-module $\mathrm{Hom}_{R_2}(I_2/I_2^2, R_2)$

On note Φ_i le morphisme donné par la $i+1$-ème colonne de cette matrice. On vérifie que les huit morphismes suivants sont G-équivariants et linéairement indépendants :

- Φ_7,
- Φ_{10},
- Φ_{12},
- Φ_{13},
- Φ_{14},
- Φ_{15},
- $y_2\Phi_1 + y_1\Phi_2 + y_3\Phi_3$,
- $z_2\Phi_1 + z_1\Phi_2 + z_3\Phi_3$.

Il s'ensuit que $\mathrm{Hom}^G_{R_2}(I_2/I_2^2, R_2)$ est de dimension au moins 8. □

On reprend les notations de la section 1.2. On a $\dim(N) = 20$ et donc, d'après le lemme 1.2.6, on a $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 20 - \mathrm{rg}(\rho^*)$. D'après le lemme 3.2.19, il suffit de montrer que $\mathrm{rg}(\rho^*) \geq 12$ pour montrer la proposition 3.2.18.
Pour $i = 1, \ldots, 6$, on définit $\psi_i \in \mathrm{Hom}^G_{R_2}(R_2 \otimes N, R_2)$ par

$$\begin{cases} \psi_i(f_j \otimes 1) = \delta_i^j, & \text{pour } j = 1, \ldots, 6, \\ \psi_i(h_j \otimes 1) = 0, & \text{pour } j = 1, \ldots, 5, \\ \psi_i(g_{jk} \otimes 1) = 0, & \text{pour } j, k = 1, \ldots, 3, \end{cases}$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker. De même, pour $1 \leq j,k \leq 3$, on définit $\phi_{jk} \in \mathrm{Hom}^G_{R_2}(R_2 \otimes N, R_2)$ par

$$\begin{cases} \phi_{jk}(f_i \otimes 1) = 0, & \text{pour } i = 1, \ldots, 6, \\ \phi_{jk}(h_i \otimes 1) = 0, & \text{pour } i = 1, \ldots, 5, \\ \phi_{jk}(g_{p,l} \otimes 1) = & \begin{cases} x_l\delta_j^p & \text{si } k = 1, \\ y_l\delta_j^p & \text{si } k = 2, \\ z_l\delta_j^p & \text{si } k = 3. \end{cases} \end{cases}$$

On identifie ces morphismes à des éléments de $\mathrm{Hom}^G(N,R)$ via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}^G(N,R) \cong \mathrm{Hom}^G_R(R\otimes N,R)$. Enfin, soient

$$\begin{cases} r_1 := -y_1\otimes f_1 + 2x_1\otimes f_4 - y_1\otimes h_1 - 2y_2\otimes h_2 + y_1\otimes h_3 - 2y_3\otimes h_5, \\ r_2 := y_2\otimes f_1 - y_2\otimes h_1 - y_2\otimes h_3 - 2y_3\otimes h_4 + 2x_3\otimes g_{11}, \\ r_3 := z_1\otimes f_1 - z_1\otimes h_1 - z_1\otimes h_3 - 2z_3\otimes h_4 + 2x_3\otimes g_{21}, \\ r_4 := -z_2\otimes f_4 + y_2\otimes f_6 + z_3\otimes g_{11} - y_3\otimes g_{21} + x_1\otimes g_{33}, \\ r_5 := x_3\otimes f_2 - y_3\otimes f_4 + y_2\otimes g_{11} + y_1\otimes g_{12}, \\ r_6 := x_3\otimes f_3 - z_3\otimes f_6 + z_2\otimes g_{21} + z_1\otimes g_{22}, \\ r_7 := x_2\otimes f_5 - y_2\otimes f_6 - z_3\otimes g_{11} + z_1\otimes g_{13}, \end{cases}$$

des relations entre les générateurs du R_2-module I_2/I_2^2. Le lemme qui suit achève la preuve de la proposition 3.2.18 :

Lemme 3.2.20. $\mathrm{rg}(\rho^*) \geq 12$.

Démonstration. Les ψ_i et les ϕ_{jk} forment une famille libre de $\mathrm{Hom}^G_{R_2}(R_2\otimes N, R_2)$. Nous allons voir que la famille

$$\{\rho^*(\psi_i),\ i=1,\dots,6\} \cup \{\rho^*(\phi_{jk}),\ j,k\in\{1,2,3\}\}$$

engendre un sous-espace de dimension au moins 12 dans $\mathrm{Hom}^G_{R_2}(R_2\otimes\mathcal{R}, R_2)$.
Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_6,\gamma_{11},\dots,\gamma_{33}\in k$ tels que

$$\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\rho^*(\psi_i) + \sum_{j,k=1}^{3}\gamma_{jk}\rho^*(\phi_{jk}) = 0. \tag{3.16}$$

On évalue (3.16) en $r_1\otimes 1$, on obtient :

$$(2\lambda_4x_1 - \lambda_1y_1 = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_4 = 0).$$

On évalue (3.16) en $r_2\otimes 1$, on obtient :

$$(2\gamma_{11}x_3x_1 + 2\gamma_{12}x_3y_1 + 2\gamma_{13}x_3z_1 = 0) \Rightarrow (\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0).$$

On évalue (3.16) en $r_3\otimes 1$, on obtient :

$$(2\gamma_{21}x_3x_1 + 2\gamma_{22}x_3y_1 + 2\gamma_{23}x_3z_1 = 0) \Rightarrow (\gamma_{22} = \gamma_{23} = 0).$$

On évalue (3.16) en $r_4\otimes 1$, on obtient :

$$(y_2\lambda_6 + \gamma_{11}z_3x_1 - \gamma_{21}y_3x_1 + \gamma_{31}x_3x_1 + \gamma_{32}y_3x_1 + \gamma_{33}z_3x_1 = 0) \Rightarrow (\lambda_6 = 0,\ \gamma_{11} = -\gamma_{33} \text{ et } \gamma_{21} = \gamma_{32}).$$

De même, si on évalue (3.16) en $r_5\otimes 1$, $r_6\otimes 1$ et $r_7\otimes 1$, on obtient $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$. □

Corollaire 3.2.21. *Le schéma $\mathcal{H}$ est lisse en Z_1 et singulier en Z_2.*

Démonstration. On a vu dans la section 3.2.2 que $\mathcal{H}$ est connexe et en fait, on a même montré que Z_1 et Z_2 appartiennent à $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. Donc $\mathcal{H}$ est singulier en Z_i si et seulement $\dim(T_{Z_i}\mathcal{H}) > \dim(\mathcal{H}^{\mathrm{prin}})$. Or, on a $\dim(\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}) = 6$ et la proposition 3.2.18 permet alors de conclure. □

3.3 Cas de $Sp(V)$ opérant dans $V^{\oplus n'}$

On se place dans la situation 5 : on suppose que n est pair et on a $G := Sp(V)$, $G' := GL(V')$, $W := \mathrm{Hom}(V',V)$ et l'opération de $G'\times G$ dans W est donnée par (1.14).
Lorsque $n = 2$, on a $G \cong SL_2(k)$ et alors l'étude du schéma de Hilbert invariant pour l'opération de G dans W a déjà été effectuée dans la section 1.5.2.

3.3.1 Etude du morphisme de passage au quotient

Les résultats essentiels de cette section sont les propositions 3.3.5 et 3.3.7 qui décrivent les fibres et l'ouvert de platitude de ν. On suit dans cette section le même cheminement que dans les sections 2.1.1 et 3.1.1.

D'après le premier théorème fondamental pour $Sp(V)$ (voir [Pro07, §11.2.1]) l'algèbre des invariants $k[W]^G$ est engendrée par les $\langle i \mid j\rangle$, où pour chaque couple (i,j), $1 \leq i < j \leq n'$, on définit la forme bilinéaire antisymétrique $\langle i \mid j\rangle$ sur $W \cong V^{\oplus n'}$ par :

$$\forall v_1, \dots, v_{n'} \in V,\ \langle i \mid j\rangle :\ (v_1, \dots, v_{n'}) \mapsto \Omega(v_i, v_j) \tag{3.17}$$

où Ω est la forme symplectique définie par (1.17). On note $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $J := \begin{bmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(k)$ la matrice avec $\frac{n}{2}$ blocs A sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Alors J est la matrice de Ω relativement à la base $\mathcal{B}$. On a le morphisme naturel $G' \times G$-équivariant

$$\mathrm{Hom}(V', V) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2(V'), \Lambda^2(V)),\ w \mapsto \Lambda^2(w). \tag{3.18}$$

D'après [FH91, §17.2], on a $\Lambda^2(V) \cong V_0 \oplus \Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V)$ comme G-module si $n \geq 4$ (sinon, $\Lambda^2(V) \cong V_0$) et la représentation triviale V_0 est engendrée par la forme symplectique Ω. Le morphisme de passage au quotient ν est obtenu en composant le morphisme (3.18) et le morphisme G-invariant

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^2(V'), \Lambda^2(V)) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2(V'), V_0) \cong \Lambda^2(V'^*)$$

induit par la projection $\Lambda^2(V) \to V_0$. On a donc

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathrm{Hom}(V', V) & \to & \Lambda^2(V'^*) \\ & w & \mapsto & {}^t w J w \end{array}$$

et

$$W/\!\!/G = \Lambda^2(V'^*)^{\leq n} := \left\{ Q \in \Lambda^2(V'^*) \ \mid\ \mathrm{rg}(Q) \leq n \right\}$$

est une variété déterminantielle antisymétrique.

Remarque 3.3.1. Si $Q \in W/\!\!/G$, alors Q s'identifie naturellement à une application bilinéaire antisymétrique et donc son rang est pair.

Si $n' \leq n$, alors $W/\!\!/G = \Lambda^2(V'^*)$ est un espace affine. Sinon, c'est une variété normale ([SB00, §3.2, Théorème 2]), de dimension $n'n - \frac{1}{2}n(n+1)$, singulière le long du fermé $\Lambda^2(V'^*)^{\leq n-2}$ ([Wey03, 6.4]) et de Gorenstein ([SB00, §4.4, Théorème 4]) car G est semi-simple et connexe. On pose

$$N := \min\left(E\left(\frac{n'}{2}\right), \frac{n}{2}\right).$$

L'opération de G' dans W induit une opération dans $W/\!\!/G$ telle que ν soit G'-équivariant :

$$\forall Q \in W/\!\!/G \subset \Lambda^2(V'^*),\ \forall g' \in G',\ g'.Q = {}^t g'^{-1} Q g'^{-1}.$$

Pour cette opération, $W/\!\!/G$ se décompose en $N+1$ orbites :

$$U_i := \left\{ Q \in \Lambda^2(V'^*) \ \mid\ \mathrm{rg}(Q) = 2i \right\}$$

pour $i = 0, \dots, N$. Les adhérences de ces orbites sont imbriquées de la façon suivante :

$$\{0\} = \overline{U_0} \subset \overline{U_1} \subset \cdots \subset \overline{U_N} = W/\!\!/G.$$

En effet, pour chaque $i = 0, \dots, N$, on a $\overline{U_i} = \Lambda^2(V'^*)^{\leq i}$. En particulier, l'orbite U_N est un ouvert dense de $W/\!\!/G$.

Dans [KS11], Kraft et Schwarz montrent que $\mathcal{N}(W, G)$ est toujours irréductible et réduit ([KS11, Theorem 9.1]). Nous allons retrouver le fait que le nilcône $\mathcal{N}(W, G)$ est irréductible et déterminer

sa dimension. Soit $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{IGr}(m, V)$ la variété (projective) des sous-espaces isotropes pour Ω de dimension m dans V. On rappelle que Ω est non dégénérée, donc la dimension de n'importe quel sous-espace de V totalement isotrope maximal pour l'inclusion est $\frac{n}{2}$. Il s'ensuit que la variété $\mathrm{IGr}(m, V)$ existe si et seulement si $m \in \{0, \dots, \frac{n}{2}\}$, et dans ce cas

$$\dim(\mathrm{IGr}(m, V)) = m(n-m) - \frac{1}{2}m(m-1).$$

La variété $\mathrm{IGr}(m, V)$ est homogène sous G.

Proposition 3.3.2. *Le nilcône $\mathcal{N}(W, G)$ est une variété de dimension*

- $nn' - \frac{1}{2}n'(n'-1)$ *si* $n' \leq n(\Omega)$,
- $\frac{1}{2}nn' + \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n$ *sinon.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la proposition 3.1.1. □

On s'intéresse maintenant à la description géométrique des fibres de ν au dessus de chaque orbite U_i.

Notation 3.3.3. Pour $0 \leq r \leq N$, on note

$$J_{2r} = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & A & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice avec r blocs A sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. La matrice J_{2r} est antisymétrique de rang $2r$ et donc s'identifie naturellement à un élément de U_r.

On fixe $r \in \{0, \dots, N\}$ et on définit $w_r := \begin{bmatrix} I_{2r} & 0_{2r,n'-2r} \\ 0_{n-2r,2r} & 0_{n-2r,n'-2r} \end{bmatrix} \in W$ et G_r le stabilisateur de w_r dans G. On vérifie alors que

$$G_r = \left\{ \begin{bmatrix} I_{2r} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},\ M \in Sp_{n-2r}(k) \right\} \cong Sp_{n-2r}(k)$$

et $V = 2rV_0 \oplus E_r$ comme G_r-module, où E_r désigne la représentation standard de G_r et V_0 la représentation triviale de G_r. On note N_{w_r} la représentation slice de G en w_r (voir la définition 2.1.7), alors on a le

Lemme 3.3.4. *On a un isomorphisme de G_r-modules*

$$N_{w_r} \cong (n'-2r)E_r \oplus r(2n'-2r-1)V_0.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.1.8. □

Soient F_1 et F_2 des espaces vectoriels de dimensions $n'-2r$ et $r(2n'-2r-1)$ respectivement et dans lesquels G_r opère trivialement. D'après le lemme 3.3.4, on a un isomorphisme de G_r-modules

$$N_{w_r} \cong \mathrm{Hom}(F_1, E_r) \times F_2$$

et le morphisme de passage au quotient $\nu_N :\ N_{w_r} \to N_{w_r}/\!/G_r$ est donné par :

$$\begin{array}{rccc} \nu_N : & \mathrm{Hom}(F_1, E_r) \times F_2 & \to & \Lambda^2(F_1^*) \times F_2 \\ & (w, x) & \mapsto & ({}^t w J' w, x) \end{array}$$

où $J' \in \mathcal{M}_{n-2r}(k)$ est la matrice avec $\frac{n}{2} - r$ blocs A sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Et donc

$$\mathcal{N}(N_{w_r}, G_r) := \nu_N^{-1}(\nu_N(0)) = \nu_N^{-1}(0) \cong {\nu'_N}^{-1}(0)$$

avec

$$\begin{array}{rccc} \nu'_N : & \mathrm{Hom}(F_1, E_r) & \to & \Lambda^2(F_1^*) \\ & w & \mapsto & {}^t w J' w. \end{array}$$

Proposition 3.3.5. *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme G-équivariant*

$$\nu^{-1}(J_{2r}) \cong G \times^{G_r} {\nu'_N}^{-1}(0).$$

En particulier, si l'on note $H := G_N$, on a

$$\nu^{-1}(J_N) \cong \begin{cases} G & \text{si } n' \geq n, \\ G/H & \text{si } n' < n \text{ et } n' \text{ pair}, \\ G \times^H E_r & \text{si } n' < n \text{ et } n' \text{ impair}. \end{cases}$$

Corollaire 3.3.6. *Soit $r \in \{0, \ldots, N\}$, alors la dimension de la fibre du morphisme ν au dessus de J_{2r} vaut :*

- $n'n - \frac{1}{2}n'(n'-1)$ *lorsque* $n' - r \leq \frac{n}{2}$,
- $\frac{1}{2}n'(n-2r) + \frac{1}{8}(n+2r)^2 + \frac{1}{4}(n+2r)$ *sinon.*

On rappelle que $N := \min\left(E\left(\frac{n'}{2}\right), \frac{n}{2}\right)$. En procédant comme pour la proposition 2.1.11, on montre la

Proposition 3.3.7. *La dimension de la fibre générique et l'ouvert de platitude de ν sont donnés dans le tableau suivant :*

configuration	*dim. de la fibre générique*	*ouvert de platitude*
$n' < n$	$n'n - \frac{1}{2}n'(n'-1)$	$U_N \cup \cdots \cup U_{\max(n' - \frac{n}{2} - 1, 0)}$
$n' = n$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$U_N \cup U_{N-1}$
$n' > n$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	U_N

Corollaire 3.3.8. *Le morphisme ν est plat sur $W/\!/G$ tout entier si et seulement si $n + 2 \geq 2n'$ et dans ce cas $W/\!/G = \Lambda^2(V'^*)$.*

Le corollaire qui suit est une conséquence de la proposition 1.1.6 et du corollaire 3.3.8 :

Corollaire 3.3.9. *Si $n+2 \geq 2n'$, alors $\mathcal{H} \cong \Lambda^2(V'^*)$ est une variété lisse et γ est un isomorphisme.*

On s'intéresse, dans la proposition qui suit (et qui se démontre comme la proposition 2.1.14), à la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν. On note comme précédement $H := G_N \cong Sp_{n-2N}(k)$ le stabilisateur de w_N dans G.

Proposition 3.3.10. *La fonction de Hilbert de la fibre générique de ν est donnée par :*

$$\forall M \in \mathrm{Irr}(G),\ h_W(M) = \begin{cases} \dim(M) & \text{si } n' \geq n, \\ \dim(M^H) & \text{si } n' < n \text{ et } n' \text{ est pair}, \\ \dim\left((M \otimes k[E_r])^H\right) & \text{si } n' < n \text{ et } n' \text{ est impair}. \end{cases}$$

3.3.2 Description de l'algèbre du nilcône

Dans cette section, on décrit l'algèbre du nilcône de ν comme $G' \times G$-module lorsque $n' = n$ en procédant comme dans la section 2.1.3.

Notation 3.3.11. On note J l'idéal engendré par les G-invariants homogènes de degré positif de $k[W]$.

L'idéal J est $G' \times G$-stable par définition. Avec les notations de la section 1.4.2, on a

$$k[W]_2 \cong (S^2(V') \otimes \Gamma_{2\epsilon_1}(V)) \oplus (\Lambda^2(V') \otimes (V_0 \oplus \Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V))). \tag{3.19}$$

comme $G' \times G$-module. Donc $J \cap k[W]_2 = \Lambda^2(V') \otimes V_0$ comme $G' \times G$-module et ce module engendre l'idéal J.

On rappelle que l'on a défini les sous-groupes B', T', U' de G' (resp. B, T, U de G) dans la section 1.4.1. Soient $N' := \frac{n}{2}$ et $1 \leq p \leq N'$. D'après le formule de Cauchy-Littlewood ([Ful97, §8.3, Corollary 3]), on a un isomorphisme de $G' \times GL(V)$-modules

$$k[W]_p \cong \bigoplus_{|\lambda|=p} S^\lambda(V') \otimes S^\lambda(V)^* \tag{3.20}$$

où $|\lambda| := \sum_i r_i$. Puis, d'après [FH91, Theorem 17.5], le $GL(V)$-module $\Lambda^p V^*$ contient une unique copie du G-module $\Gamma_{\epsilon_1+\ldots+\epsilon_p}(V)$. On fixe $x_p \in k[W]_p^{U' \times U}$ un vecteur de plus haut poids du $G' \times G$-module $\Lambda^p V' \otimes \Gamma_{\epsilon_1+\ldots+\epsilon_p}(V)$. La proposition qui suit est prouvée dans [KS11, §9] :

Proposition 3.3.12. *On a un isomorphisme de $T' \times T$-algèbres*

$$k[x_1, \ldots, x_{N'}] \cong (k[W]/J)^{U' \times U}.$$

Proposition 3.3.13. *Soit $\lambda = r_1\epsilon_1 + \ldots + r_{N'}\epsilon_{N'} \in \Lambda+$, alors la composante isotypique associée au G-module $\Gamma_\lambda(V)$ dans $k[W]/J$ est*

$$S^\lambda(V') \otimes \Gamma_\lambda(V).$$

De plus, la représentation $\Gamma_\lambda(V)$ apparaît dans $k[W]_p/(J \cap k[W]_p)$ si et seulement si $p = \sum_i r_i$.

Démonstration. La démarche est la même que dans la preuve de la proposition 2.1.21. Les monômes forment une base de $k[x_1, \ldots, x_{N'}]$ et chaque monôme engendre une droite $T' \times T$-stable. Soit $p_1, \ldots, p_{N'}$ des entiers positifs, alors le poids (λ', λ) du monôme $x_1^{p_1} \ldots x_{N'}^{p_{N'}}$ est

$$(\ p_{N'}\epsilon_{N'} + (p_{N'} + p_{N'-1})\epsilon_{N'-1} + \ldots + (p_{N'} + \ldots + p_1)\epsilon_1,\ p_{N'}\epsilon_{N'} + \ldots + (p_{N'} + \ldots + p_1)\epsilon_1)$$

et le poids λ détermine uniquement ce monôme. Le résultat annoncé s'ensuit. □

On en déduit le

Corollaire 3.3.14. *Si I_Z un idéal G-stable homogène de $k[W]$ contenant J et qui a pour fonction de Hilbert h, alors la fonction de Hilbert classique de I est donnée par :*

$$\forall p \geq 0,\ f_I(p) = \sum_{\substack{r_1 \geq \ldots \geq r_{N'} \geq 0, \\ r_1 + \ldots + r_{N'} = p}} h(\Gamma_{r_1\epsilon_1+\ldots+r_{N'}\epsilon_{N'}}(V)) \dim(\Gamma_{r_1\epsilon_1+\ldots+r_{N'}\epsilon_{N'}}(V)).$$

3.3.3 Etude du cas $\dim(V) = 4$

Dans toute cette section, on fixe $n = 4$. On a $G \cong Sp_4(k)$, $W/\!/G = \Lambda^2(V'^*)^{\leq 4}$ et $\rho\colon\ \mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(4, V'^*)$ est le morphisme de la section 1.5.1. On note

$$Y_0 := \{(Q, L) \in W/\!/G \times \mathbb{P}(W/\!/G)\ \mid\ Q \in L\} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W/\!/G)}(-1)$$

l'éclatement de $W/\!/G$ en l'origine et Y_1 l'éclatement de Y_0 le long de la transformée stricte de $\Lambda^2(V'^*)^{\leq 2}$. Nous verrons à la fin de cette section que Y_1 est isomorphe à l'éclatement de la section nulle du fibré $\Lambda^2(T)$ au dessus de $\mathrm{Gr}(4, V'^*)$, où T désigne le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(4, V'^*)$.

Nous allons démontrer le

Théorème 3.3.15.
- *Si $n' = 4$, alors $\mathcal{H} \cong Y_0$ et γ est l'éclatement de $W/\!/G$ en l'origine.*
- *Si $n' > 4$, alors $\mathcal{H} \cong Y_1$ et γ est une résolution des singularités de $W/\!/G$.*

En particulier $\mathcal{H}$ est toujours une variété lisse.

Remarque 3.3.16. Si $n' \leq 3$, alors $\mathcal{H} \cong W/\!/G$ et γ est un isomorphisme d'après le corollaire 3.3.9.

Nous allons démontrer le théorème 3.3.15 en procédant comme pour les théorèmes 2.1.25 et 3.1.11.

Points fixes de $\mathcal{H}$ pour l'opération de B'

On suppose pour le moment que $n' = 4$ et on commence par déterminer les points fixes de B' dans $\mathcal{H}$.

Notation 3.3.17. On note

- $D := \langle e_1 \wedge e_2 \rangle$ l'unique droite B'-stable de $\Lambda^2(V')$,
- I l'idéal de $k[W]$ engendré par $(\Lambda^2(V') \otimes V_0) \oplus (D \otimes \Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V)) \subset k[W]_2$.

Remarque 3.3.18. L'idéal I est homogène, $B' \times G$-stable et contient l'idéal J.

Théorème 3.3.19. *L'idéal I est l'unique point fixe de B' dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. On raisonne comme dans la preuve du théorème 2.1.30 en considérant I_Z un point fixe de B' et en étudiant $k[W]/I_Z$ composante par composante.
• Composantes de degré 0 et 1 :
On a bien sûr $I_Z \cap k[W]_0 = \{0\}$ et $I_Z \cap k[W]_1 \neq k[W]_1$.
• Composante de degré 2 : on utilise la décomposition (3.19).
Pour avoir la décomposition souhaitée de $k[W]/I_Z$ comme G-module, on a nécessairement $k[W]_2 \cap I_Z \supseteq 6V_0 \oplus \Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V)$. En effet, le G-module $k[W]/I_Z$ contient déjà une copie de la représentation triviale (qui provient de la composante de degré 0), il ne peut donc pas en contenir d'autre. Ensuite, $k[W]_2$ contient 6 copies de $\Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V)$ qui est un G-module de dimension 5, donc $k[W]_2 \cap I_Z$ contient au moins une copie de $\Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V)$. Comme $k[W]_2 \cap I_Z$ est B'-stable, il contient $D \otimes \Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V)$ car D est l'unique droite B'-stable de $\Lambda^2(V')$. Il s'ensuit que I_Z contient $(\Lambda^2(V') \otimes V_0) \oplus (D \otimes \Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V))$ et donc $I_Z \supset I$. En particulier, $I_Z \supset J$ et donc d'après le corollaire 3.3.14, la fonction de Hilbert classique de I_Z est donnée par :

$$\forall p \geq 0,\ f_{I_Z}(p) = \sum_{\substack{r_1 \geq r_2 \geq 0 \\ r_1+r_2=p}} \dim(\Gamma_{r_1\epsilon_1+r_2\epsilon_2}(V))^2.$$

La formule des dimensions de Weyl permet de déduire que

$$\forall p \geq 0,\ f_{I_Z}(p) = \frac{1}{15120}p^9 + \frac{1}{560}p^8 + \frac{3}{140}p^7 + \frac{3}{20}p^6 + \frac{97}{144}p^5 + \frac{481}{240}p^4 + \frac{29683}{7560}p^3 + \frac{4069}{840}p^2 + \frac{473}{140}p + 1.$$

Par ailleurs, un calcul direct avec [GS, Macaulay2] nous donne la fonction de Hilbert classique f_I de l'idéal I :

$$\forall p \geq 0,\ f_I(p) = f_{I_Z}(p).$$

Donc $I_Z = I$ est l'unique point fixe de B'. □

Remarque 3.3.20. On a $\mathrm{Stab}_{G'}(I) = \left\{ \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{bmatrix};\ M_1, M_3 \in GL_2(k),\ M_2 \in \mathcal{M}_2(k) \right\}$, donc l'unique orbite fermée de $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathrm{Gr}(2, V')$.

Le corollaire qui suit découle du lemme 1.2.1 et du théorème 3.3.19.

Corollaire 3.3.21. *Le schéma $\mathcal{H}$ est connexe.*

Espace tangent de $\mathcal{H}$ en Z_0

On note $Z_0 := \mathrm{Spec}(k[W]/I)$. Nous allons démontrer la

Proposition 3.3.22. $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 6$.

On note $w \in W$ sous la forme $w = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{bmatrix}$ et on identifie $k[W]$ à $k[x_i, y_i, z_i, t_i,\ 1 \leq i \leq 4]$. On explicite des bases de certains $B' \times G$-modules qui apparaissent dans $k[W]_2$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 := -x_3y_1 - x_4y_2 + x_1y_3 + x_2y_4 \\ f_2 := -x_3z_1 - x_4z_2 + x_1z_3 + x_2z_4 \\ f_3 := -x_3t_1 - x_4t_2 + x_1t_3 + x_2t_4 \\ f_4 := -y_3z_1 - y_4z_2 + y_1z_3 + y_2z_4 \\ f_5 := -y_3t_1 - y_4t_2 + y_1t_3 + y_2t_4 \\ f_6 := -z_3t_1 - z_4t_2 + z_1t_3 + z_2t_4 \end{array}\right\} \text{ est une base de } \Lambda^2(V') \otimes V_0,$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 := x_1y_2 - x_2y_1 \\ h_2 := x_1y_3 - x_3y_1 \\ h_3 := x_1y_4 - x_4y_1 \\ h_4 := x_2y_3 - x_3y_2 \\ h_5 := x_3y_4 - x_4y_3 \\ h_6 := x_2y_4 - x_4y_2 \end{array}\right\} \text{ est une base de } D \otimes \Lambda^2(V).$$

On reprend les notations de la section 1.2. Soient $R := k[W]/I$ et

$$N := \langle f_1, \ldots, f_6, h_1, \ldots, h_5 \rangle \subset k[W]$$

qui est un $B' \times G$-module qui engendre l'idéal I. D'après [GS, Macaulay2], les relations entre les générateurs ci-dessus du R-module I/I^2 sont données dans la table 3.5.

-x2y1+x1y2	y3	x3	0	0	0	y4	0	x4	0	0	z3	-z4	0	0	t3	-t4	y3t3	x3t3	y3z3	x3z3	0	0	z4t3-z3t4	y4t3	x4t3	0	0	y4z3	x4z3
-x3y1+x1y3	-y2	-x2	y4	x4	y3	-y1	x3	-x1	-z4	z3	-z2	z1	-t4	t3	-t2	t1	-y2t3	-x2t3	-y2z3	-x2z3	y4t3+y3t4	x4t3+x3t4	-2z4t2+2z2t4	-y1t3	-x1t3	y4z3+y3z4	x4z3+x3z4	-y1z3	-x1z3
-x4y1+x1y4	0	0	-y3	-x3	0	-y2	0	-x2	z3	0	0	z2	t3	0	0	t2	0	0	0	0	-y3t3	-x3t3	z3t2-z2t3	-y2t3	-x2t3	-y3z3	-x3z3	-y2z3	-x2z3
-x3y2+x2y3	y1	x1	0	0	y4	0	x4	0	0	z4	z1	0	0	t4	t1	0	y1t3	x1t3	y1z3	x1z3	y4t4	x4t4	z4t1-z1t4	0	0	y4z4	x4z4	0	0
-x4y3+x3y4	0	0	y1	x1	y2	0	x2	0	-z1	z2	0	0	-t1	t2	0	0	0	0	0	0	y1t3+y2t4	x1t3+x2t4	z2t1-z1t2	0	0	y1z3+y2z4	x1z3+x2z4	0	0
-x3y1-x4y2+x1y3+x2y4	0	0	0	0	-y3	y1	-x3	x1	z4	0	z2	0	t4	0	t2	0	0	0	0	0	-y3t4	-x3t4	z4t2-z2t4	y1t3	x1t3	-y3z4	-x3z4	y1z3	x1z3
-x3z1-x4z2+x1z3+x2z4	0	0	0	0	0	0	0	0	-y4	-y3	-y2	-y1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-x3t1-x4t2+x1t3+x2t4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-y4	-y3	-y2	-y1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-y3z1-y4z2+y1z3+y2z4	0	0	0	0	0	0	0	0	x4	x3	x2	x1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-y3t1-y4t2+y1t3+y2t4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x4	x3	x2	x1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-z3t1-z4t2+z1t3+z2t4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 3.5 – Relations entre les générateurs de I/I^2

En particulier, on a les relations suivantes données par les colonnes 10 et 14 respectivement :

$$\begin{cases} r_1 := -z_3 \otimes h_2 + z_3 \otimes h_3 - z_1 \otimes h_5 + z_4 \otimes f_1 - y_4 \otimes f_2 + x_4 \otimes f_4, \\ r_2 := t_4 \otimes h_2 + t_3 \otimes h_3 - t_1 \otimes h_5 + t_4 \otimes f_1 - y_4 \otimes f_3 + x_4 \otimes f_5. \end{cases}$$

On a $\dim(N) = 11$ et donc d'après le lemme 1.2.6, on a $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) = 11 - \mathrm{rg}(\rho^*)$. D'après le lemme 1.2.1, la variété $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ contient au moins un point fixe pour l'opération de B', donc $Z_0 \in \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ et donc $\dim(T_{Z_0}\mathcal{H}) \geq \dim(\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}) = 6$. Donc pour montrer la proposition 3.3.22, il suffit de montrer le

Lemme 3.3.23. $\mathrm{rg}(\rho^*) \geq 5$.

Démonstration. Pour $i = 1, \ldots, 6$, on définit $\psi_i \in \mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$ par :

$$\begin{cases} \psi_i(1 \otimes f_j) = \delta_i^j & \text{pour } j = 1, \ldots, 6, \\ \psi_i(1 \otimes h) = 0 & \text{pour tout } h \in D \otimes \Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V), \end{cases}$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker. La famille $\{\psi_1, \ldots, \psi_6\}$ est libre dans $\mathrm{Hom}_R^G(R \otimes N, R)$. Nous allons voir que $\{\rho^*(\psi_1), \ldots, \rho^*(\psi_5)\}$ est une famille libre de $\mathrm{Hom}_R^G(R \otimes \mathcal{R}, R)$, ce qui démontrera

le lemme.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in k$ tels que

$$\lambda_1 \rho^*(\psi_1) + \ldots + \lambda_5 \rho^*(\psi_5) = 0. \tag{3.21}$$

On évalue (3.21) en $r_1 \otimes 1$, on obtient :

$$\lambda_1 z_4 - \lambda_2 y_4 + \lambda_4 x_4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0.$$

De même, on évalue (3.21) en $r_2 \otimes 1$, on obtient :

$$-\lambda_3 y_4 + \lambda_5 x_4 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_5 = 0.$$

Et donc $\{\rho^*(\psi_1), \ldots, \rho^*(\psi_5)\}$ est bien une famille libre. □

Remarque 3.3.24. D'après [GS, Macaulay2], une famille de générateurs du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$ est donnée dans la table 3.6.

-x2y1+x1y2	0	y1	y2	0	0	0	0	0	0	x1	x2	0	0	0	0	0	0	z2t1-z1t2
-x3y1+x1y3	0	0	y3	0	y1	0	0	0	0	0	x3	0	x1	0	0	0	0	-z4t2+z2t4
-x4y1+x1y4	0	0	y4	y1	0	0	0	0	0	0	x4	x1	0	0	0	0	0	z4t1-z1t4
-x3y2+x2y3	0	-y3	0	0	y2	0	0	0	0	-x3	0	0	x2	0	0	0	0	z3t2-z2t3
-x4y3+x3y4	0	0	0	y3	-y4	0	0	0	0	0	0	x3	-x4	0	0	0	0	z4t3-z3t4
-x3y1-x4y2+x1y3+x2y4	0	-y4	y3	y2	y1	0	0	0	0	-x4	x3	x2	x1	0	0	0	0	0
-x3z1-x4z2+x1z3+x2z4	0	-z4	z3	z2	z1	x4	x3	x2	x1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-x3t1-x4t2+x1t3+x2t4	0	-t4	t3	t2	t1	0	0	0	0	0	0	0	0	x4	x3	x2	x1	0
-y3z1-y4z2+y1z3+y2z4	0	0	0	0	0	y4	y3	y2	y1	z4	-z3	-z2	-z1	0	0	0	0	0
-y3t1-y4t2+y1t3+y2t4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t4	-t3	-t2	-t1	y4	y3	y2	y1	0
-z3t1-z4t2+z1t3+z2t4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 3.6 – Générateurs du R-module $\mathrm{Hom}_R(I/I^2, R)$

On note Φ_i le morphisme associé à la colonne $i+1$. On vérifie que les six morphismes suivants sont G-équivariants et linéairement indépendants :

- Φ_1,
- $-z_2\Phi_2 + z_1\Phi_3 - z_4\Phi_4 - z_3\Phi_5$,
- $-t_2\Phi_2 + t_1\Phi_3 - t_4\Phi_4 - t_3\Phi_5$,
- $-z_2\Phi_{10} + z_1\Phi_{11} - z_4\Phi_{12} - z_3\Phi_{13}$,
- $-t_2\Phi_{10} + t_1\Phi_{11} - t_4\Phi_{12} - t_3\Phi_{13}$.
- Φ_{18}.

Ils forment donc une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R)$ et on en déduit, comme dans la remarque 2.1.36, que

$$\mathrm{Hom}_R^G(I/I^2, R) \cong D^* \oplus \left(D^* \otimes \frac{\Lambda^2(V')}{D}\right)$$

comme B'-module.

On déduit du lemme 1.2.2 et de ce qui précède le

Corollaire 3.3.25. $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ *est une variété lisse de dimension* 6.

Construction d'un morphisme équivariant $\delta : \mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!/G)$

Le lemme qui suit découle de la théorie classique des invariants de manière analogue au lemme 1.5.1.

Lemme 3.3.26. *Le* $k[W]^G$*-module* $k[W]_{(\Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V))}$ *est engendré par* $\mathrm{Hom}^G(\Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V), k[W]_2)$.

Puis, on a l'isomorphisme de G'-modules

$$\mathrm{Hom}^G(\Gamma_{\epsilon_1+\epsilon_2}(V), k[W]_2) \cong \Lambda^2(V').$$

La proposition 1.3.1 donne un morphisme G'-équivariant

$$\mathcal{H} \to \mathrm{Gr}(5, \Lambda^2(V'^*)).$$

Et $\Lambda^2(V'^*) \otimes \det(V') \cong \Lambda^2(V')$, donc

$$\mathrm{Gr}(5, \Lambda^2(V'^*)) \cong \mathbb{P}(\Lambda^2(V')) \cong \mathbb{P}(\Lambda^2(V'^*)) = \mathbb{P}(W/\!/G)$$

comme G'-variété. On a donc un morphisme G'-équivariant

$$\delta : \mathcal{H} \to \mathbb{P}(W/\!/G). \tag{3.22}$$

On rappelle que l'on note

$$Y_0 := \{(Q, L) \in W/\!/G \times \mathbb{P}(W/\!/G) \mid Q \in L\} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W/\!/G)}(-1)$$

l'éclatement en 0 de $W/\!/G$. On vérifie que le morphisme $\gamma \times \delta$ envoie $\mathcal{H}$ dans Y_0. Puis, en procédant comme pour la proposition 2.1.41, on montre que le morphisme $\gamma \times \delta : \mathcal{H} \to Y_0$ est un isomorphisme G'-équivariant.

Cas $n' > 4$

On considère la variété

$$\mathcal{Z} := \{(Q, L, E) \in W/\!/G \times \mathbb{P}(W/\!/G) \times \mathrm{Gr}(4, V'^*) \mid Q \in L \text{ et } \mathrm{Im}(L) \subset E\}$$

où $\mathrm{Im}(L)$ est défini dans la notation 2.1.42. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Z} \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ Y_0 & & \mathrm{Gr}(4, V'^*) \end{tikzcd}$$

où q_1 et q_2 sont les projections naturelles. En particulier, avec les notations du début de la section 3.3.3, on vérifie que $\mathcal{Z} \cong \Lambda^2(T)$. Ensuite, on montre en procédant comme pour le lemme 2.1.43 que $Y_1 \cong \mathcal{Z}$ et que, via cet isomorphisme, l'éclatement $Y_1 \to Y_0$ s'identifie au morphisme $q_1 : \mathcal{Z} \to Y_0$. On raisonne alors comme dans la section 2.1.4 : on identifie Y_1 à $\mathcal{Z}$, on montre l'existence d'un isomorphisme G'-équivariant $\mathcal{H} \cong Y_1$, on identifie $\mathcal{H}$ à Y_1 via cet isomorphisme et enfin on montre que γ est la composition des éclatements $Y_1 \to Y_0 \to W/\!/G$. En particulier, γ est toujours une résolution de $W/\!/G$.

3.4 Cas de $O(V)$ et $SO(V)$ opérant dans $\mu^{-1}(0)$

On se place à nouveau dans la situation 3 et on considère le cas particulier où l' espace vectoriel V' est de dimension paire $n' = 2d$. Plus précisément, soit E un espace vectoriel de dimension d et soit $V' := E \oplus E^*$. Alors

$$\begin{aligned} W &= \mathrm{Hom}(V', V) \\ &= \mathrm{Hom}(E \oplus E^*, V) \\ &= \mathrm{Hom}(E, V) \times \mathrm{Hom}(V, E) \text{ puisque } V \cong V^* \text{ comme } G\text{-module}, \\ &= \mathrm{Hom}(E, V) \times \mathrm{Hom}(E, V)^*. \end{aligned}$$

On a $G = O(V)$ et on note $G^0 = SO(V)$ la composante neutre de G qui opère dans W par restriction de l'opération de G. Soient $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $J' := \begin{bmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n'}(k)$ la matrice avec d blocs A sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. On note Ω' la forme symplectique sur V' définie par J' et $G' := Sp(V')$ le sous-groupe de $GL(V')$ qui préserve Ω'. L'opération de $GL(V') \times G$ dans W induit une opération de $G' \times G$ dans W. On note

$$\mathfrak{g}' := \{M \in \mathrm{End}(V') \mid J'M + {}^tMJ' = 0\}$$

l'algèbre de Lie de G' et

$$\mathfrak{g}'^{\leq n} := \{M \in \mathfrak{g}' \mid \mathrm{rg}(M) \leq n\}.$$

Le groupe G' opère dans $\mathfrak{g}'$ par l'action adjointe et on a un isomorphisme G'-équivariant

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}' & \cong & S^2(V'^*) \\ M & \mapsto & J'M \end{array}$$

qui permet d'identifier $\mathfrak{g}'^{\leq n}$ au quotient $W/\!\!/G = S^2(V'^*)^{\leq n}$ étudié dans la section 3.1.1.

Notre but est d'étudier les schémas de Hilbert invariants

$$G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}} := \mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu^{-1}(0))$$

et

$$G^0\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}} := \mathrm{Hilb}^{G^0}_{h^0_s}(\mu^{-1}(0)).$$

L'étude de ces deux schémas étant fortement liée, nous faisons le choix de les considérer simultanément. On procède comme dans la section 2.2. Dans la section 3.4.1, on décrit l'application moment $\mu : W \to \mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G, ainsi que sa fibre en 0. Dans la section 3.4.2, on étudie les morphismes de passage au quotient $\nu : \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/\!\!/G$ et $\nu_0 : \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/\!\!/G^0$. Nous verrons que les réductions symplectiques $\mu^{-1}(0)/\!\!/G$ et $\mu^{-1}(0)/\!\!/G^0$ sont irréductibles et on pourra donc parler de la fonction de Hilbert h_s (resp. h^0_s) de la fibre générique de ν (resp. de ν_0). On note $G\text{-}\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}_{\mathrm{s}}$ et $G^0\text{-}\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}_{\mathrm{s}}$ les composantes principales de $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ et $G^0\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ respectivement. Dans la section 3.4.3, on établit un résultat de réduction qui permet de ramener la détermination de $G\text{-}\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}_{\mathrm{s}}$ au schéma de Hilbert invariant étudié dans la section 3.1. Le résultat essentiel de cette section est le corollaire 3.4.11.

3.4.1 L'application moment

On considère Ω la forme symplectique sur W définie dans la section 2.2.1, alors $G' \times G$ opère symplectiquement dans (W, Ω). D'après [Bec09, §4.2], l'application moment pour l'opération de G dans (W, Ω) est donnée par :

$$\begin{array}{cccc} \mu : & W & \to & \mathfrak{g} \\ & w & \mapsto & -\frac{1}{2} w J'^t w. \end{array}$$

Et donc

$$\mu^{-1}(0) = \{w \in W \mid wJ'^t w = 0\}.$$

Remarque 3.4.1. On vérifie que $Sp(V')$ est le plus grand sous-groupe de $GL(V')$ qui stabilise $\mu^{-1}(0)$ dans W et ce constat justifie a posteriori notre choix pour G'.

L'application moment coïncide (à un scalaire près) avec le morphisme de passage au quotient $W \to W/\!\!/G'$. En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est le nilcône $\mathcal{N}(W, G')$ et on déduit de [KS11, Theorem 9.1] que le schéma $\mu^{-1}(0)$ est une variété normale. La preuve de la proposition qui suit est analogue à celle de la proposition 3.3.2.

Proposition 3.4.2. *La variété $\mu^{-1}(0)$ est de dimension*

- $2dn - \frac{1}{2}n(n-1)$ *si* $n \leq d$,
- $dn + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d$ *sinon.*

3.4.2 Etude des morphismes de passage au quotient

Soient

$$\nu : \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/\!/G$$

et

$$\nu_0 : \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/\!/G^0$$

les morphismes de passage au quotient. Dans cette section, on décrit géométriquement les variétés $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$. On note h_s (resp. h_s^0) la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν (resp. de ν_0) et

$$N := \min(d, n).$$

On rappelle que l'on a une correspondance bijective entre les partitions $(d_1 \geq \ldots \geq d_k)$ de $n' = 2d$ dans lesquelles les d_i impairs sont présents avec multiplicité paire et les orbites nilpotentes $\mathcal{O}_{[d_1,\ldots,d_k]}$ de $\mathfrak{g}'$ (voir [CM93, §5.1]). La proposition qui suit se démontre comme la proposition 2.2.5.

Proposition 3.4.3. $\mu^{-1}(0)/\!/G = \overline{\mathcal{O}_{[2^N,1^{2(d-N)}]}}$.

Corollaire 3.4.4. *Le quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$ se décompose en $N+1$ orbites pour l'opération de G' :*

$$U_i := \mathcal{O}_{[2^i,1^{2(d-i)}]}, \quad \textit{pour } i = 0, \ldots, N.$$

Les adhérences de ces orbites sont imbriquées de la façon suivante :

$$\{0\} = \overline{U_0} \subset \cdots \subset \overline{U_N} = \mu^{-1}(0)/\!/G. \tag{3.23}$$

La géométrie de l'adhérence d'une orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}'$ est étudiée dans [KP82]. En particulier, la variété $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est normale (car $\mu^{-1}(0)$ est normale), de dimension $N(2d+1-N)$ ([CM93, Corollary 6.1.4]) et son lieu singulier est $\overline{U_{N-1}}$ ([KP82, Theorem 2]).

On s'intéresse maintenant à la géométrie de la variété $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$. On considère le morphisme G'-équivariant $p_1 : \mu^{-1}(0)/\!/G^0 \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ qui apparaît dans le diagramme (3.11). Si $d < n$, alors $\mu^{-1}(0) \subset \mathrm{Hom}(V', V)^{\leq d}$ et donc p_1 est un isomorphisme. En revanche, si $d \geq n$, alors $\mu^{-1}(0) \cap \{w \in W \mid \mathrm{rg}(w) = n\}$ est non vide et donc p_1 est un revêtement double de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ dont le lieu de ramification est $\overline{\mathcal{O}_{[2^{n-1},1^{2(d-n+1)}]}}$ (en particulier les dimensions de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$ coïncident). Malheureusement, j'ignore quel est le lieu singulier de $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$, on sait seulement qu'il est de codimension au moins 2. D'après [CM93, §6.1], on a $\pi_1(\mathcal{O}_{[2^n,1^{2(d-n)}]}) \cong \mathbb{Z}_2$ et donc, si $d \geq n$, le morphisme p_1 est le revêtement universel de $\mathcal{O}_{[2^n,1^{2(d-n)}]}$.
Dans tous les cas, la variété quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$ est normale et se décompose en $N+1$ orbites U_i, $i = 0, \ldots, N$, qui sont imbriquées comme dans (3.23). On fait ici l'abus d'utiliser les mêmes notations pour désigner les orbites de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et de $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$ mais on sera attentif à toujours préciser le contexte.

Remarque 3.4.5. Nous verrons dans la section A.2 que les variétés $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$ sont symplectiques. Nous verrons aussi que $\mu^{-1}(0)/\!/G$ admet des résolutions symplectiques si et seulement si $d \leq n$.

La dimension de la fibre générique de ν (resp. de ν_0) est :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}n(n-1) & \text{si } d \geq n, \\ dn - \frac{1}{2}d(d+1) & \text{si } d < n. \end{cases}$$

Notation 3.4.6. Si $d < n$, on note

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} M & 0_{n-d,d} \\ 0_{d,n-d} & I_d \end{bmatrix}, \ M \in O_{n-d}(k) \right\} \cong O_{n-d}(k)$$

(qui est un sous-groupe réductif de G) et $H^0 \cong SO_{n-d}(k)$ la composante neutre de H (qui est un sous-groupe réductif de G^0).

Lemme 3.4.7. *La fibre de ν (resp. ν_0) en un point de U_N est isomorphe à*

$$\begin{cases} G \ (\textit{resp. } G^0) & \textit{si } d \geq n, \\ G/H \ (\textit{resp. } G^0/H^0) & \textit{si } d < n. \end{cases}$$

On en déduit la

Proposition 3.4.8. *La fonction de Hilbert h_s (resp. h_s^0) de la fibre générique de ν (resp. de ν_0) est donnée par :*

$$\forall M \in \mathrm{Irr}(G),\ h_s(M) = \begin{cases} \dim(M) & \textit{si } d \geq n, \\ \dim(M^H) & \textit{si } d < n. \end{cases}$$

$$\left(\textit{resp. } \forall M \in \mathrm{Irr}(G^0),\ h_s^0(M) = \begin{cases} \dim(M) & \textit{si } d \geq n, \\ \dim(M^{H^0}) & \textit{si } d < n. \end{cases}\right)$$

La fibre $\mu^{-1}(0)$ est un sous-schéma fermé $G' \times G$-stable de W, donc le schéma G-$\mathcal{H}_\mathrm{s}$ est un sous-schéma fermé G'-stable de $\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(W)$. Ensuite, d'après les propositions 3.1.9 et 3.4.8, les fonctions de Hilbert h_W et h_s coïncident lorsque $d \geq n$ ou $d < \frac{n}{2}$ et alors G-$\mathcal{H}_\mathrm{s}$ s'identifie à un sous-schéma fermé de $\mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W)$; ce dernier a été étudié dans la section 3.1. De même, lorsque $d \geq n$ ou $d < \frac{n}{2}$, le schéma G^0-$\mathcal{H}_\mathrm{s}$ s'identifie à un sous-schéma fermé de $\mathrm{Hilb}^{G^0}_{h_W}(W)$; ce dernier a été étudié dans la section 3.2.

Remarque 3.4.9. Il n'y a pas de relation d'inclusion entre G-$\mathcal{H}_\mathrm{s}$ et G^0-$\mathcal{H}_\mathrm{s}$ en général.

3.4.3 Construction de morphismes équivariants et réduction

On souhaite déterminer G-$\mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ en procédant comme nous l'avons fait pour $GL(V)$ dans la section 2.2.3, c'est-à-dire en utilisant le principe de réduction pour se ramener à une variété plus simple. On n'a malheureusement pas de résultat semblable pour G^0-$\mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ puisque, comme nous l'avons vu dans la section 1.5.1, on ne dispose pas du principe de réduction lorsque $G = SO(V)$.
Dans la section 1.5.1, on a construit un morphisme G'-équivariant

$$\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(W) \to \mathrm{Gr}(h_s(V), V'^*). \tag{3.24}$$

D'après la proposition 3.4.8, on a $h_s(V) = N$. La restriction du morphisme (3.24) à G-$\mathcal{H}_\mathrm{s}$ donne donc un morphisme G'-équivariant

$$\rho_s :\ G\text{-}\mathcal{H}_\mathrm{s} \to \mathrm{Gr}(N, V'^*). \tag{3.25}$$

On rappelle que l'on note Ω' la forme symplectique sur V' définie par la matrice J' au début de la section 3.4. On a $V' \cong V'^*$ comme G'-module et donc Ω' s'identifie à une forme symplectique sur V'^*. Soient

$$N' := E\left(\frac{N}{2}\right)$$

et

$$O_i := \{L \in \mathrm{Gr}(N, V'^*) \mid \Omega'_{|L} \text{ est de rang } 2i\} \text{ où } i = 0, \ldots, N'.$$

Alors les O_i sont les orbites pour l'opération de G' dans $\mathrm{Gr}(N, V'^*)$ et on a :

$$O_0 \subset \overline{O_1} \subset \cdots \subset \overline{O_{N'}} = \mathrm{Gr}(N, V'^*).$$

En particulier, $O_{N'}$ est l'unique orbite ouverte et

$$O_0 = \mathrm{IGr}(N, V'^*),$$

qui est la grassmannienne isotrope introduite dans la section 3.3.1, est l'unique orbite fermée de $\mathrm{Gr}(N, V'^*)$.

Soient :

- $L_0 \in O_0$ et $P := \mathrm{Stab}_{G'}(L_0)$ le sous-groupe parabolique de G' qui préserve L_0,

- $W' := \mathrm{Hom}(V'/L_0^\perp, V)$ et $\nu' :\ W' \to W'/\!/G$ le morphisme de passage au quotient,
- $h_{W'}$ la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν',
- $G\text{-}\mathcal{H}' := \mathrm{Hilb}^G_{h_{W'}}(W')$ et $G\text{-}\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}$ sa composante principale.

On remarque que $h_s = h_{W'}$. En procédant comme pour la proposition 2.2.14, on montre la

Proposition 3.4.10. *On a isomorphisme de G'-variétés $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong G' \times^P (G\text{-}\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}})$.*

On déduit de la proposition 3.4.10 et des résultats de la section 3.1 le

Corollaire 3.4.11. • *Si $d \leq \frac{n+1}{2}$, alors*

$$G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong S^2(T),$$

où T est le fibré tautologique de $\mathrm{IGr}(d, V'^*)$.
• *Si $d \geq n = 2$, alors*

$$G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong Bl_0(S^2(T)),$$

où T est le fibré tautologique de $\mathrm{IGr}(2, V'^*)$ et $Bl_0(S^2(T))$ désigne l'éclatement de la section nulle du fibré $S^2(T)$.

Démonstration. Le cas $d \leq \frac{n+1}{2}$ découle du corollaire 3.1.8.
Le cas $d \geq n = 2$ découle du théorème 3.1.11. □

Remarque 3.4.12. Si $n = 1$, alors on a $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong S^2(T)$, où T est le fibré tautologique de $\mathrm{IGr}(1, V'^*) = \mathbb{P}(V'^*)$.

Remarque 3.4.13. Dans la section 2.2.4, nous avons montré l'existence d'une deuxième composante irréductible pour $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ en nous ramenant à montrer qu'un certain schéma de Hilbert invariant $\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu'^{-1}(0))$ était toujours non-vide. On ne peut malheureusement pas obtenir de résultat analogue ici. La raison est que, dans notre situation, le schéma $\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu'^{-1}(0))$ peut être vide. Par exemple si $G = O_2(k)$, nous allons voir dans la section 3.4.4 que $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est une variété.

Remarque 3.4.14. Si $d < \frac{n}{2}$, alors comme nous l'avons suggéré dans le remarque 1.5.3, on peut construire un morphisme G'-équivariant $G^0\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}} \to \mathrm{Gr}(d, V'^*)$ et obtenir un résultat de réduction pour $SO(V)$ analogue à celui obtenu pour $O(V)$ dans la proposition 3.4.10. Néanmoins, lorsque $d < \frac{n}{2}$, on a

$$G\text{-}\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}} \cong W'/\!/O(V) \cong W'/\!/SO(V) \cong G^0\text{-}\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}$$

et on n'obtient donc rien de nouveau dans ce cas.

3.4.4 Etude du cas $\dim(V) = 2$

Dans cette section, on fixe $n = 2$ et $d \geq 2$. Alors $\mu^{-1}(0)/\!/G = \overline{\mathcal{O}_{[2^2, 1^{2d-4}]}}$ et $\rho_s :\ G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}} \to \mathrm{Gr}(2, V'^*)$ est le morphisme (3.25). On a vu que $\mathrm{Gr}(2, V'^*)$ se décompose en deux orbites $O_0 \cup O_1$ pour l'opération de G'.

Lemme 3.4.15. *Le morphisme ρ_s envoie $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ dans O_0.*

Démonstration. Soit $L_1 \in O_1$ un point de l'orbite ouverte, on va montrer que la fibre schématique de ρ_s en L_1 est vide. On note $V'' := V'/L_1^\perp$ et $W'' := \mathrm{Hom}(V'', V)$, alors $W'' \cong V \oplus V^*$ comme G-module. On munit W'' de la forme symplectique Ω définie par (2.13) et on considère $\mu' :\ W'' \to \mathfrak{g}$ l'application moment pour l'opération de G dans (W'', Ω) comme nous l'avons fait pour (W, Ω) dans la section 3.4.1. En procédant comme pour le lemme 1.5.5, on montre que la fibre schématique de ρ_s en L_1 est isomorphe au schéma de Hilbert invariant $\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu'^{-1}(0))$.
Il s'agit donc de montrer que ce schéma de Hilbert invariant est vide. Dans le cas contraire, il existe un idéal homogène I_0 de $k[\mu'^{-1}(0)]$ tel que $k[\mu'^{-1}(0)]/I_0 \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus \dim(M)}$ comme G-module. On note I l'image réciproque de I_0 par le morphisme de passage au quotient $k[W''] \to k[\mu'^{-1}(0)]$. On a

$$k[W'']_2 \cong (S^2(V'') \otimes (V_0 \oplus (\Gamma_{2\epsilon_1} \oplus \Gamma_{-2\epsilon_1}))) \oplus (\Lambda^2(V'') \otimes \epsilon)$$

comme $GL(V'')\times G$-module. L'idéal I contient nécessairement $(S^2(V'')\otimes V_0)\oplus(\Lambda^2(V'')\otimes\epsilon)$ puisque $k[W'']/I$ contient déjà une copie de V_0 (l'image des constantes dans le quotient) et $\Lambda^2(V'')\cong V_0$ comme $Sp(V'')$-module. Donc $k[W'']_2/(I\cap k[W'']_2)$ est un quotient du $G'\times G$-module $S^2(V'')\otimes(\Gamma_{2\epsilon_1}\oplus\Gamma_{-2\epsilon_1})$. Mais alors, un raisonnement analogue à celui effectué dans la preuve du lemme 3.2.14 permet de montrer qu'un tel quotient ne contient aucune copie de la représentation signe ϵ. Le résultat s'ensuit puisque le G-module $k[\mu'^{-1}(0)]/I_0\cong k[W'']/I$ est supposé contenir chaque représentation irréductible de G avec une multiplicité égale à sa dimension. □

Donc, avec les notations de la section 3.4.3, on a un morphisme G'-équivariant $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}\to G'/P$, et donc d'après (1.26) on a un isomorphisme G'-équivariant

$$G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}\cong G'\times^P F$$

où F est la fibre schématique de ρ_s en L_0. Ainsi, pour déterminer $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$, il suffit de déterminer F. En procédant comme pour le lemme 1.5.5, on montre le

Lemme 3.4.16. *La fibre F est isomorphe au schéma de Hilbert invariant $G\text{-}\mathcal{H}'$ et l'opération de P dans F coïncide, via cet isomorphisme, avec l'opération de P dans $G\text{-}\mathcal{H}'$ induite par l'opération de P dans W'.*

D'où la

Proposition 3.4.17. *On a un isomorphisme G'-équivariant $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}\cong G'\times^P(G\text{-}\mathcal{H}')$.*

Enfin, on a vu dans la section 3.1.2 que $G\text{-}\mathcal{H}'$ est une variété, donc $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est une variété. En particulier, on a $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}=G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ et donc, d'après le corollaire 3.4.11, on a $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}\cong Bl_0(S^2(T))$.

3.5 Cas de $Sp(V)$ opérant dans $\mu^{-1}(0)$

On se place à nouveau dans la situation 5 et on considère le cas particulier $W=\mathrm{Hom}(E,V)\times\mathrm{Hom}(E,V)^*$ comme dans la section 3.4. Soient $O(V')$ le sous-groupe de $GL(V')$ qui préserve une forme quadratique non-dégénérée q' sur V' et $G':=SO(V')$ sa composante neutre. L'opération de $GL(V')\times G$ dans W induit une opération de $G'\times G$ dans W. On note

$$\mathfrak{g}':=\Lambda^2(V')$$

l'algèbre de Lie de G' et

$$\mathfrak{g}'^{\leq n}:=\Lambda^2(V')^{\leq n}.$$

Le quotient $W/\!/G=\mathfrak{g}'^{\leq n}$ a été étudié dans la section 3.3.1.

Le but de cette section est d'étudier le schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}:=\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu^{-1}(0))$. Nous allons procéder comme dans les sections 2.2 et 3.4. Lorsque $d>n$ ou ($d\leq n$ et d est impair), nous verrons que $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est irréductible et donc h_s est bien définie. En revanche, lorsque $d\leq n$ et d est pair, nous verrons que $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est la réunion de deux composantes irréductibles. Cette situation ne s'était jamais produite jusqu'à présent et on ne peut alors plus parler de la fibre générique du morphisme de passage au quotient. Pour surmonter cette difficulté, on va considérer indépendamment les deux composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et associer à chacune d'elles un schéma de Hilbert invariant. Les principaux résultats de cette section sont la proposition 3.5.11 et son corollaire 3.5.12. Le cas particulier $n=2$ et $d=3$ a été traité par Becker dans [Bec10].

3.5.1 L'application moment

On considère Ω la forme symplectique sur W définie dans la section 2.2.1. Le groupe $G'\times G$ opère symplectiquement dans (W,Ω) et l'application moment pour l'opération de G dans (W,Ω) est donnée par [Bec09, Proposition 3.1] :

$$\begin{array}{rccc}\mu & : & W & \to & \mathfrak{g}\\ & & w & \mapsto & \frac{1}{2}w({}^tw)J\end{array}$$

et donc

$$\mu^{-1}(0)=\{w\in W\mid w({}^tw)=0\}.$$

Remarque 3.5.1. On vérifie que le plus grand sous-groupe de $GL(V')$ qui stabilise $\mu^{-1}(0)$ dans W est $O(V')$. Cependant, pour des raisons d'ordre pratique (étude des orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}'$), on préfère considérer l'opération de $SO(V')$.

Le morphisme de passage au quotient $W \to W/\!/O(V')$ est donné par $w \mapsto w({}^t w)$. On en déduit que les schémas $\mu^{-1}(0)$ et $\mathcal{N}(W, O(V'))$ sont isomorphes. En particulier, le schéma $\mu^{-1}(0)$ est réduit si et seulement si $d \geq n$ et il est irréductible et normal lorsque $d > n$ ([KS11, Theorem 9.1]). La preuve de la proposition qui suit est analogue à celle de la proposition 3.1.1.

Proposition 3.5.2. *Le schéma $\mu^{-1}(0)$ est*

- *une variété de dimension $2dn - \frac{1}{2}n(n+1)$ si $d > n$,*
- *la réunion de deux fermés irréductibles de dimension $dn + \frac{1}{2}d(d-1)$ sinon.*

3.5.2 Etude du morphisme de passage au quotient

On note

$$\nu : \ \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/\!/G$$

le morphisme de passage au quotient et

$$N := \min(d, n).$$

Dans cette section, nous allons décrire géométriquement le quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et voir que, contrairement aux situations étudiées jusqu'à présent, il n'est pas toujours irréductible.

On a une correspondance entre certaines partitions de $n' = 2d$ et les orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}'$ (voir [CM93, §5.1]). Soit $(d_1 \geq \ldots \geq d_k)$ une partition de n' telle que au moins l'un des d_i est impair et les d_i pairs sont présents avec une multiplicité paire. A une telle partition, on associe une unique orbite nilpotente de $\mathfrak{g}'$ que l'on note $\mathcal{O}_{[d_1,\ldots,d_k]}$. On peut aussi considérer une partition "très paire" $(d_1 \geq \ldots \geq d_k)$ de n', c'est-à-dire une partition telle que tous les d_i sont pairs et présents avec multiplicité paire. A une telle partition, il correspond cette fois deux orbites nilpotentes distinctes que l'on note $\mathcal{O}^I_{[d_1,\ldots,d_k]}$ et $\mathcal{O}^{II}_{[d_1,\ldots,d_k]}$. Ces deux orbites sont échangées par l'opération de n'importe quel élément de $O(V')\backslash SO(V')$. Le résultat qui suit est démontré dans [Bec09, Proposition 3.6] :

Proposition 3.5.3. *On a l'égalité ensembliste*

$$\mu^{-1}(0)/\!/G = \begin{cases} \overline{\mathcal{O}_{[2^n, 1^{2(d-n)}]}} & \text{si } d > n, \\ \overline{\mathcal{O}_{[2^{d-1}, 1^2]}} & \text{si } d < n \text{ et } d \text{ est impair}, \\ \overline{\mathcal{O}^I_{[2^d]}} \cup \overline{\mathcal{O}^{II}_{[2^d]}} & \text{si } d \leq n \text{ et } d \text{ est pair}. \end{cases}$$

Remarque 3.5.4. Le schéma $\mu^{-1}(0)/\!/G$ n'est pas toujours réduit. Par exemple si $n = 2$ et $d = 1$, on vérifie que $\mu^{-1}(0)/\!/G \cong \mathrm{Spec}(k[x]/(x^2))$ qui n'est pas réduit. Dorénavant, on considère toujours $\mu^{-1}(0)$ et $\mu^{-1}(0)/\!/G$ munis de leurs structures réduites pour simplifier.

Corollaire 3.5.5. *Les orbites pour l'opération de G' dans le quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$ sont :*

- $U_i := \mathcal{O}_{[2^i, 1^{2(d-i)}]}$ *pour $i = 0, 2, 4, \ldots, n$, si $d > n$,*
- $U_i := \mathcal{O}_{[2^i, 1^{2(d-i)}]}$ *pour $i = 0, 2, 4, \ldots, d-1$, si $d < n$ et d impair,*
- $U_i := \mathcal{O}_{[2^i, 1^{2(d-i)}]}$ *pour $i = 0, 2, 4, \ldots, d-2$ et $U^I_d := \mathcal{O}^I_{[2^d]}$, $U^{II}_d := \mathcal{O}^{II}_{[2^d]}$, si $d \leq n$ et d pair.*

Les adhérences de ces orbites sont imbriquées de la façon suivante :

$$\begin{cases} \{0\} = \overline{U_0} \subset \overline{U_2} \subset \cdots \subset \overline{U_n} & \text{lorsque } d > n, \\ \{0\} = \overline{U_0} \subset \overline{U_2} \subset \cdots \subset \overline{U_{d-1}} & \text{lorsque } d < n \text{ et } d \text{ est impair}, \\ \{0\} = \overline{U_0} \subset \overline{U_2} \subset \cdots \subset \overline{U_{d-2}} \subset \overline{U^I_d} \text{ et } \overline{U_{d-2}} \subset \overline{U^{II}_d} & \text{lorsque } d \leq n \text{ et } d \text{ est pair}. \end{cases}$$

Donc, si $d \leq n$ et d pair, le quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est la réunion des adhérences des deux orbites nilpotentes U^I_d et U^{II}_d. L'intersection des adhérences de ces deux orbites est $\overline{U_{d-2}}$. En revanche, lorsque $(d > n)$ ou $(d \leq n$ et d est impair), le quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est irréductible. La géométrie de l'adhérence d'une orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}'$ est étudiée dans [Hes79] et [KP82].

Proposition 3.5.6. *Si $d > n$, alors la variété $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est normale, de dimension $2dn - n(n+1)$ et son lieu singulier est $\overline{U_{n-2}}$.*
Si $d \leq n$, alors chaque composante irréductible de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est normale et de dimension $d(d-1)$. Le lieu singulier de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est $\overline{U_{d-2}}$ (resp. $\overline{U_{d-3}}$) lorsque d est pair (resp. d est impair).

Démonstration. La normalité des composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ est donnée par [Hes79, Criterion 2]. Leur dimension est donnée par [CM93, Corollary 6.1.4]. Enfin, le lieu singulier est donné par [KP82, Theorem 2]. □

Remarque 3.5.7. Nous verrons dans la section A.2 que les composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ sont symplectiques et mais qu'elles admettent des résolutions symplectiques si et seulement si $d \leq n+1$.

Si $d < n$ et d impair, alors la fibre générique de ν est réductible ce qui rend plus compliqué la détermination de sa fonction de Hilbert. On exclura donc toujours ce cas par la suite. Il reste deux cas de figure à considérer :
• *Cas $d > n$.* La fibre de ν en un point de l'orbite ouverte est irréductible de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. On note h_s la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν,

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}} := \mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu^{-1}(0))$$

et $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ la composante principale de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$.
• *Cas $d \leq n$ et d pair.* On note X^I, X^{II} les deux composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)$ et $Y^I := \overline{U_d^I}$, $Y^{II} := \overline{U_d^{II}}$ les deux composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)/\!/G$. Quitte à échanger X^I et X^{II}, on a $X^I/\!/G = Y^I$ et $X^{II}/\!/G = Y^{II}$. On note $\nu_I : X^I \to Y^I$ et $\nu_{II} : X^{II} \to Y^{II}$ les morphismes de passage au quotient. On vérifie que la dimension de la fibre de ν_I (resp. de ν_{II}) en un point de l'orbite ouverte de Y^I (resp. de Y^{II}) est $dn - \frac{1}{2}d(d-1)$. Le groupe $O(V')$ opère transitivement sur $U_d^I \cup U_d^{II}$ donc les fibres génériques de ν_I et ν_{II} sont isomorphes. En particulier, elles ont la même dimension et la même fonction de Hilbert h_s. On note

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\mathrm{s}} := \mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu^{-1}(0)), \\ \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^I := \mathrm{Hilb}^G_{h_s}(X^I), \\ \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II} := \mathrm{Hilb}^G_{h_s}(X^{II}). \end{cases}$$

Enfin, on note $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}}$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}}$ les composantes principales de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^I$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II}$ respectivement. Comme X^I et X^{II} sont des fermés de $\mu^{-1}(0)$, on a l'inclusion $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^I \cup \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{s}}$, mais celle-ci est stricte a priori.

Notation 3.5.8. Si $d < n$ et d est pair, on note

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} M & 0_{n-d,d} \\ 0_{d,n-d} & I_d \end{bmatrix},\ M \in Sp_{n-d}(k) \right\} \cong Sp_{n-d}(k)$$

qui est un sous-groupe réductif de G.

Lemme 3.5.9. *Si $d > n$, la fibre de ν en un point de U_n est isomorphe à G.*
Si $d = n$, la fibre de ν_I (resp. de ν_{II}) en un point de U_n^I (resp. de U_n^{II}) est isomorphe à G.
Si $d < n$ et d est pair, la fibre de ν_I (resp. de ν_{II}) en un point de U_n^I (resp. de U_n^{II}) est isomorphe à G/H.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.2.10. □

D'où la

Proposition 3.5.10. *Soit $M \in \mathrm{Irr}(G)$, alors*

- $h_s(M) = \dim(M)$ *si $d \geq n$,*
- $h_s(M) = \dim(M^H)$ *si $d < n$ et d est pair.*

Le fermé $\mu^{-1}(0)$ est $G' \times G$-stable dans W, donc le schéma $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est un sous-schéma fermé G'-stable de $\mathrm{Hilb}^G_{h_s}(W)$. Ensuite, d'après les propositions 3.3.10 et 3.5.10, les fonctions de Hilbert h_W et h_s coïncident lorsque $d \geq n$ ou $d < \frac{n}{2}$ et alors $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ s'identifie à un sous-schéma fermé de $\mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W)$; ce dernier a été étudié dans la section 3.3. De même, lorsque $d = n$ ou ($d < \frac{n}{2}$ et d est pair), les schémas $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^I$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II}$ s'identifient à des sous-schémas fermés de $\mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W)$.

3.5.3 Construction d'un morphisme équivariant et réduction

Dans cette section, on procède comme dans les sections 2.2.3 et 3.4.3 pour montrer que l'étude des composantes principales $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}}$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}}$ se ramène à l'étude du schéma de Hilbert invariant effectuée dans la section 3.3.

Dans la section 1.5.1, on a construit un morphisme G'-équivariant

$$\mathrm{Hilb}_{h_s}^{G}(W) \to \mathrm{Gr}(h_s(V), V'^*). \tag{3.26}$$

D'après la proposition 3.5.10, on a $h_s(V) = N$. La restriction du morphisme (3.26) à $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ donne un morphisme G'-équivariant

$$\rho_s : \mathcal{H}_{\mathrm{s}} \to \mathrm{Gr}(N, V'^*). \tag{3.27}$$

On rappelle que l'on note q' la forme quadratique non-dégénérée sur V' préservée par $O(V')$. On a $V' \cong V'^*$ comme $O(V')$-module et donc q' s'identifie à une forme quadratique non-dégénérée sur V'^*. Pour $i = 0, \dots, N$, on note

$$O_i := \{L \in \mathrm{Gr}(N, V'^*) \mid q'_{|L} \text{ est de rang } i\}.$$

Si $d > n$, alors les O_i sont les $n+1$ orbites pour l'opération de G' dans $\mathrm{Gr}(n, V')$. En revanche, si $d \leq n$ et d est pair, alors les O_i sont des G'-orbites pour $i = 1, \dots, d$ mais $O_0 = \mathrm{OGr}(d, V')$, qui est la grassmannienne isotrope introduite dans la section 3.1.1, est la réunion de deux G'-orbites que l'on note O_0^I et O_0^{II} et qui sont échangées par l'opération de n'importe quel élément de $O(V')\backslash SO(V')$. Dans tous les cas, on a :

$$\mathrm{OGr}(N, V') = \overline{O_0} \subset \overline{O_1} \subset \cdots \subset \overline{O_N} = \mathrm{Gr}(N, V').$$

Ensuite, soient :

- $L_0 \in \mathrm{OGr}(N, V'^*)$ et $P := \mathrm{Stab}_{G'}(L_0)$ le sous-groupe parabolique de G' qui préserve L_0,
- $W' := \mathrm{Hom}(V'/L_0^{\perp}, V)$ et $\nu' : W' \to W'/\!/G$ le morphisme de passage au quotient,
- $h_{W'}$ la fonction de Hilbert de la fibre générique de ν',
- $\mathcal{H}' := \mathrm{Hilb}_{h_{W'}}^{G}(W')$ et $\mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}$ sa composante principale.

On remarque que $h_s = h_{W'}$. Par ailleurs, lorsque $d \leq n$ et d est pair, on vérifie que le morphisme ρ_s envoie $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}}$ dans l'une des deux composantes irréductibles de O_0 et $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}}$ dans l'autre composante. Quitte à échanger O_0^I et O_0^{II}, on peut supposer que ρ_s envoie $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}}$ dans O_0^I et $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}}$ dans O_0^{II}. En procédant comme pour la proposition 2.2.14, on montre la

Proposition 3.5.11. *On a les isomorphismes de G'-variétés suivants :*

- *si $d > n$, alors*
$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong G' \times^P \mathcal{H}'^{\mathrm{prin}},$$
- *si ($d \leq n$ et d est pair) et $L_0 \in O_0^I$ (resp. $L_0 \in O_0^{II}$), alors*
$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}} \cong G' \times^P \mathcal{H}'^{\mathrm{prin}} \textit{(resp. } \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}} \cong G' \times^P \mathcal{H}'^{\mathrm{prin}}\textit{)}.$$

On déduit de la proposition 3.5.11 et des résultats de la section 3.3 le

Corollaire 3.5.12.
- *Si $d \leq \frac{n}{2} + 1$ et d est pair, alors*
$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}} \cong \Lambda^2(T_I) \textit{ et } \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}} \cong \Lambda^2(T_{II}),$$
où T_I (resp. T_{II}) est le fibré tautologique de O_0^I (resp. de O_0^{II}).

- *Si $d = n = 4$, alors*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}} \cong Bl_0(\Lambda^2(T_I)) \text{ et } \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}} \cong Bl_0(\Lambda^2(T_{II})),$$

où $Bl_0(\Lambda^2(T_I))$ (resp. $Bl_0(\Lambda^2(T_{II}))$) désigne l'éclatement de la section nulle du fibré $\Lambda^2(T_I)$ (resp. du fibré $\Lambda^2(T_{II})$).

- *Si $d > n = 2$, alors*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong \Lambda^2(T),$$

où T est le fibré tautologique de $\mathrm{OGr}(2, V'^*)$.

- *Si $d > n = 4$, alors*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong Bl_0(\Lambda^2(T))$$

qui est l'éclatement de la section nulle du fibré $\Lambda^2(T)$, où T est le fibré tautologique de $\mathrm{OGr}(4, V'^*)$.

Démonstration. Les cas $d \leq \frac{n}{2} + 1$ et $d > n = 2$ découlent du corollaire 3.3.9.
Les cas $d \geq n = 4$ découlent du théorème 3.3.15. □

Remarque 3.5.13. On ne peut malheureusement pas procéder comme nous l'avons fait dans la section 2.2.4 pour déterminer si $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est ou non réductible (pour les mêmes raisons que celles données dans la remarque 3.4.13). A priori, $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ peut admettre plusieurs composantes irréductibles. Cependant, si $n = 2$ nous allons voir dans la section 3.5.4 que $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est toujours une variété.

3.5.4 Etude du cas $\dim(V) = 2$

Dans cette section, on fixe $d \geq n = 2$. Alors $G \cong Sp_2(k) = SL_2(k)$,
$\mu^{-1}(0)/\!/G = \begin{cases} \overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}} & \text{si } d \geq 3, \\ \overline{\mathcal{O}^I_{[2^2]}} \cup \overline{\mathcal{O}^{II}_{[2^2]}} & \text{si } d = 2, \end{cases}$ et $\rho_s : \mathcal{H}_{\mathrm{s}} \to \mathrm{Gr}(2, V'^*)$ est le morphisme (3.27). Nous allons utiliser les résultats des sections précédentes et de la section 1.5.2 pour déterminer $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ comme G'-schéma.

Proposition 3.5.14. *Si $d \geq 3$, alors $\mathcal{H}_{\mathrm{s}} = \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ est une variété lisse isomorphe à*

$$Bl_0(\overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}}) := \left\{(f, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}} \times \mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}}) \ \mid \ f \in L\right\}$$

et le morphisme de Hilbert-Chow γ s'identifie à l'éclatement $Bl_0(\overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}}) \to \overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}}$.
Si $d = 2$, alors $\mathcal{H}_{\mathrm{s}} = \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}} \cup \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}}$ est la réunion de deux variétés lisses isomorphes à $Bl_0(\overline{\mathcal{O}^I_{[2^2]}})$ et $Bl_0(\overline{\mathcal{O}^{II}_{[2^2]}})$ respectivement. De plus, l'intersection $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}} \cap \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}}$ est l'ensemble des idéaux homogènes de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$. Enfin, la restriction de γ sur $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}}$ (resp. sur $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}}$) s'identifie à l'éclatement de $\overline{\mathcal{O}^I_{[2^2]}}$ (resp. de $\overline{\mathcal{O}^{II}_{[2^2]}}$) en 0.

Démonstration. Les cas $d = 2$ et $d \geq 3$ se traitent de manière analogue. On considère le cas où $d \geq 3$. D'après le théorème 1.5.11, on a une immersion fermée

$$\gamma \times \rho_s : \mathcal{H}_{\mathrm{s}} \hookrightarrow Y := \left\{(f, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}} \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 2}) \ \mid \ f \in L\right\}.$$

On vérifie que Y est la réunion de deux variétés C_1 et C_2 définies par :

$$C_1 := Bl_0(\overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}}),$$
$$C_2 := \left\{(f, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}} \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 2}) \mid f = 0\right\} \cong \mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 2}).$$

Ces deux variétés sont de dimension $4d-6$ et $4d-4$ respectivement. Le morphisme $\gamma \times \rho_s$ envoie $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ dans C_1 ; ce sont deux variétés de même dimension, donc $\gamma \times \rho_s : \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \to C_1$ est un isomorphisme.

Ensuite, on vérifie que la composante C_2 est formée des idéaux homogènes de $k[W]$ (c'est une conséquence de la proposition 3.3.13). On a un isomorphisme G'-équivariant

$$\mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 2}) \cong \mathrm{Gr}(2, V'^*) \tag{3.28}$$

qui permet d'identifier tout point de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}'^{\leq 2})$ avec un sous-espace de V'^* de dimension 2. Via cette identification, l'idéal I_L de $k[W]$ associé au point $(0, L) \in C_2$ est l'idéal engendré par les G-invariants homogènes de degré positif de $k[W]$ ainsi que par le G-module $L^\perp \otimes V \subset k[W]_1$. Nous allons montrer que I_L est un point de $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ si et seulement si $L \in \mathrm{OGr}(2, V'^*)$. Le résultat en découlera puisque $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}})$ s'identifie à $\mathrm{OGr}(2, V'^*)$ via l'isomorphisme (3.28) et que $\left\{(f, L) \in \overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}} \times \mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}_{[2^2,1^{2d-4}]}}) \mid f = 0\right\}$ est une sous-variété de C_1.
On note $W' := \mathrm{Hom}(V'/L^\perp, V)$, alors

$$k[W']_2 \cong S^2(V'/L^\perp) \otimes S^2(V) \oplus \Lambda^2(V'/L^\perp) \otimes \Lambda^2(V)$$

comme G-module. On note I' l'idéal de $k[W']$ engendré par $\Lambda^2(V'/L^\perp) \otimes \Lambda^2(V) \subset k[W']_2$. On a

$$k[W']/I' \cong k[W]/I_L \cong \bigoplus_{M \in \mathrm{Irr}(G)} M^{\oplus \dim(M)}$$

comme G-module. Donc

$$\begin{aligned} I_L \in \mathcal{H}_\mathrm{s} &\Leftrightarrow I_L \supset V_0' \otimes S^2(V) \\ &\Leftrightarrow q'_{|L} = 0 \\ &\Leftrightarrow L \in \mathrm{OGr}(2, V'^*) \end{aligned}$$

et le résultat s'ensuit. □

Remarque 3.5.15. Lorsque $d = 3$ et $n = 2$, Becker avait déjà montré dans [Bec10] que $\mathcal{H}_\mathrm{s} = \mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$ est une variété lisse.

Remarque 3.5.16. Dans la preuve de la proposition 3.5.14, on a montré que si $d > n = 2$, alors les idéaux homogènes de $\mathcal{H}_\mathrm{s}$ sont contenus dans $\mathcal{H}_\mathrm{s}^\mathrm{prin}$. En reprenant les arguments de la fin de la preuve, on vérifie que cette assertion est vraie plus généralement si $d > n \geq 2$.

Questions ouvertes

Dans ce mémoire, nous avons déterminé plusieurs familles infinies de schémas de Hilbert invariants pour l'opération des groupes algébriques classiques dans certains schémas affines. Plus précisément, nous avons étudié d'une part le cas dit "classique" :
• $G = GL_n(k)$ opère dans $W = V^{\oplus n_1} \oplus V^{*\oplus n_2}$, ou bien
• $G = SL_n(k)$, $O_n(k)$, $SO_n(k)$ ou $Sp_{2n}(k)$ opère dans $W = V^{\oplus n'}$,
où V est la représentation standard de G, et V^* est sa duale ;
d'autre part le cas dit "symplectique" :
• $G = GL_n(k)$, $O_n(k)$, $SO_n(k)$ ou $Sp_{2n}(k)$ opère dans la fibre en 0 de l'application moment.
On note h_W la fonction de Hilbert de la fibre générique du morphisme $W \to W//G$ et

$$\mathcal{H} := \mathrm{Hilb}^G_{h_W}(W),$$

le schéma de Hilbert invariant associé au G-schéma affine W et à la fonction de Hilbert h_W. Nous avons pu déterminer $\mathcal{H}$ pour des petites valeurs de n, mais le cas général reste ouvert et paraît très compliqué. Les schémas de Hilbert invariants semblent donc respecter la loi de Murphy qui se traduit ici par : «Plus n est grand, plus $\mathcal{H}$ est pathologique».

Cas classique

Soit G' le sous-groupe algébrique réductif de $\mathrm{Aut}^G(W)$ défini dans la section 1.4.1, et B' un sous-groupe de Borel de G'. Si $n' = n = 3$ et $G = GL_n(k)$, $O_n(k)$ ou $SO_n(k)$, on a montré que $\mathcal{H}$ est singulier (théorèmes 2.1.44, 3.1.25 et 3.2.8) en déterminant l'espace tangent aux points fixes de B'.

Question 1. *Est-ce que $\mathcal{H}$ est réduit, irréductible ?*

Question 2. *Est-ce que la composante principale $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ est lisse ?*

On remarque que ces deux questions sont liées. En effet, si $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ est lisse alors nécessairement $\mathcal{H}$ est réductible et/ou non-réduit. Pour répondre à la question 1, une stratégie possible serait de calculer l'espace de base de la déformation verselle aux points fixes de B' (voir par exemple [Ste03, §3]). Lorsque $G = O_3(k)$ ou $GL_3(k)$, je pense que la composante des idéaux homogènes de $\mathcal{H}$ donne une composante irréductible distincte de $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$, et donc que $\mathcal{H}$ est réductible.
Dans tous les exemples de ce mémoire (à l'exception du cas $G = O_3$ qui reste à déterminer), le schéma $\mathcal{H}$ est connexe. Il est de plus toujours singulier dès lors que $W//G$ admet au moins 4 orbites pour l'opération de G'. D'où la

Question 3. *Si $G = GL_n(k)$, $O_n(k)$, $SO_n(k)$, et si $n \geq 4$ (ou si $G = Sp_{2n}(k)$, et si $n \geq 3$), est-ce que $\mathcal{H}$ est toujours connexe et singulier ?*

Des calculs effectués pour $GL_4(k)$ et $Sp_6(k)$ (et qui ne figurent pas dans ce mémoire par égard pour le lecteur) laissent penser que la réponse à la question 3 est positive. Pour montrer la connexité, on peut essayer de procéder comme dans la section 3.2.2 : on détermine les points fixes de B' puis on utilise des bases de Gröbner pour construire des chaînes de courbes rationnelles entre les points fixes. Pour montrer que $\mathcal{H}$ est singulier, il suffit (par un argument de semi-continuité) de calculer la dimension de l'espace tangent aux points fixes de B'. Malheureusement, la méthode calculatoire employée dans ce mémoire est inapplicable lorsque n est grand. Quelles que soient les méthodes employées pour répondre à la question 3, il sera sans doute nécessaire de commencer par répondre à la

Question 4. *Quels sont les points fixes de B' dans $\mathcal{H}$?*

Plus précisément, on aimerait avoir une description de chacun de ces points fixes en termes de $B' \times G$-sous-modules de $k[W]$.

Conjecture 1. *Si I est un point fixe de B' dans $\mathcal{H}$, alors l'idéal I est engendré par ses composantes homogènes de degré $\leq n$.*

Conjecture 2. *Si $G = GL_n(k)$, alors $\mathcal{H}$ admet un unique point fixe de B', et B' est son groupe d'isotropie.*

Par ailleurs, dans le cas du schéma de Hilbert multigradué de Haiman et Sturmfels ([HS04]), de nombreux exemples pathologiques ont pu être déterminés en partie grâce à une description combinatoire de celui-ci ([CEVV09, CS10, AST11, ...]). Une telle description combinatoire pour $\mathcal{H}$ (ou au moins pour les points fixes de B') serait très précieuse mais reste à expliciter.

Signalons enfin que quelques cas particuliers ont été mis sous silence dans ce mémoire. Par exemple, si $G = GL_3(k)$, les cas ($n_1 = 2$ et $n_2 \geq 3$) et ($n_2 = 2$ et $n_1 \geq 3$) n'ont pas été traités. La raison en est que la fonction de Hilbert est alors compliquée, et l'on ne peut donc pas appliquer le principe de réduction pour se ramener à un cas plus simple déjà traité. On peut toutefois supposer que les méthodes employées pour traiter les autres cas s'appliquent encore.

Cas symplectique

Soient $W = V^{\oplus d} \oplus V^{*\oplus d}$, où d est entier positif, $\mu^{-1}(0)$ la fibre en 0 de l'application moment $\mu\colon W \to Lie(G)$, h_s la fonction de Hilbert de la fibre générique du morphisme $\mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)//G$, et

$$\mathcal{H}_{\mathrm{s}} := \mathrm{Hilb}^G_{h_s}(\mu^{-1}(0)).$$

On a vu que $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est toujours réductible lorsque $G = GL_n(k)$ et $d \geq 2n$ (proposition 2.2.20).

Question 5. *Si $G = O_n(k)$, $SO_n(k)$ ou $Sp_{2n}(k)$ et si $d \geq n$, est-ce que $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est réductible ?*

Question 6. *Est-ce que la composante principale $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ est toujours lisse ?*

Lorsque $n \geq 3$, je pense que $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est réductible par analogie avec le cas des groupes finis. Pour le prouver, il suffirait par exemple de montrer que la fibre du morphisme ρ (défini dans les sections 3.4.3 et 3.5.3) en un point de l'orbite ouverte est non-vide. Malheureusement, je n'ai pas été capable de déterminer cette fibre en général. Quant à la lissité de $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$, le principe de réduction nous dit qu'elle est équivalente à la lissité de $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ dans le cas classique.

Comme dans le cas classique, on a été amené à négliger certains cas. Par exemple si $G = GL_n(k)$, $d < 2n$ et d est impair, alors on ne connaît pas h_s ; je n'ai donc pas pu déterminer des exemples de schémas de Hilbert invariants pour cette configuration (à l'exception du cas trivial $d = 1$).

Enfin, il serait intéresser de déterminer $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ pour l'opération de $SL_n(k)$ dans $\mu^{-1}(0) \subset V^{\oplus d} \oplus V^{*\oplus d}$. Ce cas n'a pas été traité dans ce mémoire (excepté pour $n = 2$) essentiellement par manque de temps.

Déterminer la composante principale à l'aide de la théorie des plongements des espaces homogènes sphériques

Dans le cas classique, la variété $W//G$ est normale et, dans chaque cas, il est connu qu'elle admet une orbite ouverte pour l'opération de B'. De même, dans le cas symplectique, les composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)//G$ sont normales et elles admettent une orbite ouverte pour l'opération de B' d'après [Pan94, §4.2 et §4.3]. Autrement dit, tous les quotients que l'on a regardé dans ce mémoire sont des *variétés sphériques* (ou des réunions de variétés sphériques dans la section 3.5). On rappelle qu'une G'-variété X est dite *sphérique* si X est normale et si X contient une orbite ouverte pour l'opération de B'. En particulier, un espace G'-homogène U est sphérique s'il contient une orbite ouverte pour l'opération de B'. On dit que X est un *plongement sphérique* de U

si X est une variété sphérique qui admet une G'-orbite ouverte isomorphe à U. A tout plongement sphérique, on peut associer un objet combinatoire appelé *éventail colorié* qui classifie le plongement. En particulier, si $G' = B'$ est un tore, alors on retrouve la théorie des variétés toriques. Pour une introduction à la théorie des plongements sphériques, le lecteur peut par exemple consulter [Tim11].

Tous les quotients qui apparaissent dans ce mémoire sont des plongements sphériques connus (variétés déterminantielles, adhérences d'orbites nilpotentes,...) et on peut donc aisément déterminer l'éventail colorié associé. Par ailleurs, le morphisme de Hilbert-Chow $\gamma : \mathcal{H}^{\mathrm{prin}} \to W/\!\!/G$ est G'-équivariant, birationnel et propre. Donc $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ contient une orbite ouverte qui est un espace homogène sphérique. On souhaite utiliser la théorie des plongements sphériques pour déterminer $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. Malheureusement, on ne sait pas si $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ est normale et il faut donc considérer sa normalisation $\widetilde{\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}}$; celle-ci est un plongement sphérique de l'orbite ouverte de $W/\!\!/G$. Le morphisme $\widetilde{\gamma} : \widetilde{\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}} \to W/\!\!/G$ obtenu en composant γ avec le morphisme de normalisation $\widetilde{\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}} \to \mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ vérifie les mêmes propriétés que γ. Si $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ admet une unique orbite fermée F isomorphe à G'/B', on montre que l'éventail colorié de $\widetilde{\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}}$ est entièrement déterminé par celui de $W/\!\!/G$. En général, la situation est plus compliquée, mais on peut encore espérer décrire (au moins partiellement) l'éventail colorié de $\widetilde{\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}}$ à partir de celui de $W/\!\!/G$.

Cette méthode offre une approche possible pour étudier la composante principale $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ lorsque $\mathcal{H}$ est réductible ou non-réduit. Cependant, il semble que l'on ne puisse pas faire mieux que de décrire la normalisation de $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$. D'où la

Question 7. *Est-ce que $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ est normale ?*

On peut bien sûr reprendre tout ce qui précède en remplaçant W par $\mu^{-1}(0)$ et $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}$ par $\mathcal{H}^{\mathrm{prin}}_{\mathrm{s}}$. Je pense que cette approche du schéma de Hilbert invariant par la théorie des plongements des espaces homogènes sphériques est prometteuse et j'espère la développer ultérieurement.

Annexe A

Résolutions crépantes de $W//G$ et résolutions symplectiques de $\mu^{-1}(0)//G$

A.1 Résolutions crépantes de $W//G$

A.1.1 Généralités

Soit X une variété de Cohen-Macaulay, alors X admet un faisceau dualisant (unique à isomorphisme près) que l'on note ω_X. On dit que X est de Gorenstein si X est de Cohen-Macaulay et si ω_X est inversible. Si de plus X est lisse, alors son faisceau dualisant coïncide avec son faisceau canonique $\mathcal{O}_X(K_X)$. Toutes les variétés quotients $W//G$ étudiées dans les situations 1 à 5 sont de Cohen-Macaulay, mais elles ne sont pas toujours de Gorenstein. De plus, ce sont toutes des cônes affines, c'est-à-dire que $\mathbb{G}_m$ opère dans $W//G$ avec un unique point fixe (appelé sommet du cône et noté 0) et pas d'autre orbite fermée. Le lemme qui suit nous fournit un critère pour déterminer si un cône affine est de Gorenstein.

Lemme A.1.1. *Soit X un cône affine de Cohen-Macaulay. Alors on a l'équivalence*

$$X \text{ est de Gorenstein } \Leftrightarrow \omega_X \cong \mathcal{O}_X.$$

Démonstration. L'implication $\Leftarrow$ est immédiate. Montrons l'autre implication. L'opération de $\mathbb{G}_m$ dans X munit la k-algèbre $R := k[X]$ d'une graduation :

$$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$$

où $\mathbb{G}_m$ opère dans R_i par $t.f = t^i f$ pour tout $t \in \mathbb{G}_m$ et pour tout $f \in R_i$.
De même, le R-module $M := \omega_X(X)$ est un R-module gradué :

$$M = \bigoplus_{j \geq 0} M_j \text{ avec pour tous } i, j \geq 0,\ R_i.M_j \subset M_{i+j}.$$

On souhaite montrer que $M \cong R$ comme R-module. On note $R_+ := \bigoplus_{i \geq 1} R_i$ l'idéal maximal homogène de R et soit $\psi :\ M \to M/R_+M \cong k$ le morphisme de passage au quotient. Il existe $\tilde{m} \in M$, homogène, tel que $\psi(\tilde{m}) = 1$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & R & \to & M \\ & & r & \mapsto & r.\tilde{m} \end{array}$$

Alors ϕ est clairement un morphisme injectif de R-modules gradués et ϕ induit un isomorphisme $R/R_+ \to M/R_+M$. Donc, d'après le lemme de Nakayama gradué ([Eis95, Exercise 4.6]), le morphisme ϕ est surjectif, donc c'est un isomorphisme de R-modules et le résultat s'ensuit. □

Soient X une variété de Gorenstein et $f :\ Y \to X$ une résolution des singularités de X. La résolution f est dite crépante si f préserve le faisceau dualisant de X, c'est-à-dire si $f^*(\omega_X) \cong \omega_Y$,

où ω_X (resp. ω_Y) est le faisceau dualisant de X (resp. de Y). Signalons qu'une variété X n'admet pas toujours de résolution crépante et lorsqu'elle en admet, il peut en exister plusieurs non isomorphes. On conseille au lecteur qui aimerait en savoir plus sur les résolutions crépantes de consulter l'article d'exposition [Rei85].

On souhaite déterminer les liens entre le morphisme de Hilbert-Chow $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ et les résolutions crépantes (lorsqu'elles existent) de $W/\!/G$ dans les situations 1,2,3 et 5. Nous aurons besoin du

Lemme A.1.2. *Soient X une variété singulière, normale et de Gorenstein, et Y_1, Y_2 des variétés lisses telles que l'on ait :*

$$\begin{tikzcd} Y_2 \arrow[d, "f_2"] \arrow[dd, bend right, "g"'] \\ Y_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X \end{tikzcd}$$

où g et f_1 sont des résolutions de X.
Si g est crépante, alors f_1 est crépante et f_2 est un isomorphisme.

Démonstration. La formule de ramification nous donne les égalités suivantes dans les groupes des classes de diviseurs $Cl(Y_1)$ et $Cl(Y_2)$ respectivement :

$$K_{Y_1} = f_1^*(K_X) + E_1,$$
$$K_{Y_2} = f_2^*(K_{Y_1}) + E_2,$$

où E_1 (resp. E_2) est un diviseur à support dans le lieu exceptionnel de f_1 (resp. de f_2). On en déduit que

$$K_{Y_2} = g^*(K_X) + f_2^*(E_1) + E_2. \tag{1.1}$$

Or, g est crépante par hypothèse, donc

$$f_2^*(E_1) + E_2 = 0. \tag{1.2}$$

Puis, le poussé en avant préserve l'équivalence linéaire, donc

$$f_{2*}(f_2^*(E_1) + E_2) = f_{2*}(f_2^*(E_1)) + f_{2*}(E_2) = E_1.$$

Mais

$$f_{2*}(f_2^*(E_1) + E_2) = f_{2*}(0) = 0$$

d'après (1.2).
Il s'ensuit que $E_1 = 0$, et donc f_1 est crépante. L'égalité (1.2) implique alors que $E_2 = 0$. Enfin, f_2 est un morphisme birationnel et surjectif entre deux variété lisses dont le diviseur de ramification est trivial, c'est donc un isomorphisme d'après [Deb01, §1.41]. □

Remarque A.1.3. Ce lemme justifie pourquoi les résolutions crépantes sont parfois qualifiées de *résolutions minimales.*

A.1.2 Situation 1

On se place dans la situation 1 et on reprend les notations de la section 1.5.2. On suppose que la variété $W/\!/G$ est singulière, c'est-à-dire que $1 < n < n' - 1$. On a vu que $W/\!/G$ est de Gorenstein et que $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ est une résolution des singularités de $W/\!/G$. Malheureusement, on a la

Proposition A.1.4. *La résolution γ n'est pas crépante.*

Démonstration. On identifie $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!\!/G$ à l'éclatement $f : \ Bl_0(W/\!\!/G) \to W/\!\!/G$ grâce au théorème 1.5.11, et on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Bl_0(W/\!\!/G) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "p"] & \\ W/\!\!/G & & \mathbb{P}(W/\!\!/G) \arrow[ul, dotted, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

où p est la projection naturelle et σ est la section nulle. Le diviseur exceptionnel de f, noté D_f, s'identifie à $\mathbb{P}(W/\!\!/G)$ grâce à σ. La formule d'adjonction ([Har77, Proposition 8.20]) donne :

$$\omega_{D_f} \cong \omega_{Bl_0(W/\!\!/G)} \otimes \mathcal{O}(D_f) \otimes \mathcal{O}_{D_f}.$$

On rappelle que $Bl_0(W/\!\!/G)$ est naturellement plongée dans $\Lambda^n V'^* \times \mathbb{P}(\Lambda^n V'^*)$. D'après [Har77, Proposition 6.18], on a $\mathcal{O}(-D_f) \cong \mathcal{I}_{D_f}$, où $\mathcal{I}_{D_f}$ est le faisceau d'idéaux de D_f dans $Bl_0(W//G)$. Mais D_f est l'image de la section nulle dans $Bl_0(W/\!\!/G)$, donc $\mathcal{I}_{D_f|D_f} \cong \mathcal{O}_{D_f}(1)$. Il s'ensuit que

$$\omega_{D_f} \cong \omega_{Bl_0(W/\!\!/G)} \otimes \mathcal{O}_{D_f}(-1).$$

On suppose que f est crépante, alors

$$\omega_{Bl_0(W/\!\!/G)} \cong f^*(\omega_{W/\!\!/G}) \cong f^*(\mathcal{O}_{W/\!\!/G}) \cong \mathcal{O}_{Bl_0(W/\!\!/G)}$$

où le deuxième isomorphisme découle du lemme A.1.1.
On a donc $\omega_{D_f} \cong \mathcal{O}_{D_f}(-1)$. Mais $D_f \cong \mathbb{P}(W/\!\!/G) = \mathrm{Gr}(n, V'^*)$ et donc

$$\omega_{D_f} \cong \omega_{\mathrm{Gr}(n,V'^*)} \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(n,V'^*)}(-n').$$

Or, $n' > 1$, ce qui contredit l'hypothèse que f est crépante. □

A.1.3 Situation 2

On se place dans la situation 2 et on reprend les notations de la section 2.1. On suppose que la variété déterminantielle $W/\!\!/G = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq n}$ est singulière, c'est-à-dire que $n_1, n_2 > n$. On a vu que $W/\!\!/G$ est de Cohen-Macaulay et que $\gamma : \ \mathcal{H} \to W/\!\!/G$ est une résolution des singularités de $W/\!\!/G$ lorsque $n \leq 2$. On s'intéresse aux résolutions crépantes (éventuelles) de $W/\!\!/G$, donc la première chose à faire est de déterminer pour quelles valeurs de n, n_1, n_2 la variété $W/\!\!/G$ est de Gorenstein. La proposition qui suit est un résultat connu ([Sva74, Theorem 5.5.6]). On en redonne ici une preuve dans le but d'être complet.

Proposition A.1.5. *La variété $W/\!\!/G$ est de Gorenstein si et seulement si $n_1 = n_2$.*

Démonstration. Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ opère dans $W/\!\!/G = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq n}$ par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{G}_m, \ \forall f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^{\leq n}, \ \alpha.f := \alpha f$$

Donc $W/\!\!/G$ est un cône affine et donc, d'après le lemme A.1.1, il suffit de déterminer pour quelles valeurs de $n, \ n_1, \ n_2$ le faisceau dualisant $\omega_{W/\!\!/G}$ est trivial.
On note i l'immersion ouverte $U_n \hookrightarrow W/\!\!/G$. Si $\omega_{W/\!\!/G}$ est trivial, alors $\omega_{U_n} = i^*\omega_{W/\!\!/G}$ est trivial. Réciproquement, si ω_{U_n} est trivial, alors comme $(W/\!\!/G)\backslash U_n$ est de codimension ≥ 2, le faisceau réflexif $\omega_{W/\!\!/G}$ est trivial. On est donc ramené à déterminer pour quelles valeurs de n, n_1, n_2 le fibré canonique ω_{U_n} est trivial.
Soient $J_n = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,n_1-n} \\ 0_{n_2-n,n} & 0_{n_2-n,n_1-n} \end{bmatrix} \in U_n$ et

$$\begin{aligned} H &:= \mathrm{Stab}_{G'}(J_n) \\ &= \left\{ \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ B_1 & C_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B_2 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \right) \middle| \begin{array}{l} A \in GL_n(k), C_1 \in GL_{n_1-n}(k), C_2 \in GL_{n_2-n}(k), \\ B_1 \in M_{n_1-n,n}(k), B_2 \in M_{n,n_2-n}(k) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Le fibré ω_{U_n} est G'-linéarisé sur $U_n \cong G'/H$, donc l'espace total du fibré ω_{U_n} est G'-isomorphe à la variété

$$E_{\chi_0} := G' \times^H \mathbb{A}^1_k$$

où H opère $\mathbb{A}^1_k$ par un caractère $\chi_0 \in \mathcal{X}(H)$; celui-ci est le caractère de H dans $\Lambda^m(T_{J_n}U_n)$, où $T_{J_n}U_n$ est l'espace tangent à U_n en J_n et $m := \dim(U_n)$.

<u>Fait :</u> le caractère $\chi_0 \in \mathcal{X}(H)$ est donné par

$$\begin{array}{rccc} \chi_0 : & H & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \\ & \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ B_1 & C_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B_2 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\right) & \mapsto & \det(A)^{n_1-n_2}\det(C_1)^{-n}\det(C_2)^n. \end{array}$$

Comme χ_0 est entièrement déterminé par sa restriction à n'importe quel sous-groupe de Levi de H, on fixe

$$L := \left\{ \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\right) \middle| \, A \in GL_n(k), C_1 \in GL_{n_1-n}(k), C_2 \in GL_{n_2-n}(k) \right\}$$

un tel sous-groupe de Levi. L'espace tangent $T_{J_n}U_n$ s'identifie à $\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}$ comme L-module, où $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}$ sont les algèbres de Lie de G' et H respectivement. On commence donc par déterminer $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}$ comme L-modules. Soient

$$\begin{aligned} E_1 &:= \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subset V_1, \\ E_2 &:= \langle f_1, \dots, f_n \rangle \subset V_2, \\ F_1 &:= \langle e_{n+1}, \dots, e_{n_1} \rangle \subset V_1, \\ F_2 &:= \langle f_{n+1}, \dots, f_{n_2} \rangle \subset V_2, \end{aligned}$$

qui sont des L-sous-modules de V_1 et V_2. On a les isomorphismes de L-modules suivants :

$$\begin{aligned} V_1 &\cong E_1 \oplus F_1, \\ V_2 &\cong E_2 \oplus F_2, \\ E_1 &\cong E_2, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}' \cong& \mathrm{End}(V_1) \oplus \mathrm{End}(V_2) \\ \cong& \mathrm{End}(E_1) \oplus \mathrm{End}(F_1) \oplus \mathrm{Hom}(E_1, F_1) \oplus \mathrm{Hom}(F_1, E_1) \\ & \oplus \mathrm{End}(E_2) \oplus \mathrm{End}(F_2) \oplus \mathrm{Hom}(E_2, F_2) \oplus \mathrm{Hom}(F_2, E_2), \\ \mathfrak{h} \cong& \mathrm{End}(E_1) \oplus \mathrm{Hom}(E_1, F_1) \oplus \mathrm{End}(F_1) \\ & \oplus \mathrm{Hom}(F_2, E_2) \oplus \mathrm{End}(F_2). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$T_{J_n}U_n \cong \mathrm{End}(E_1) \oplus \mathrm{Hom}(E_2, F_2) \oplus \mathrm{Hom}(F_1, E_1)$$

comme L-module. D'où

$$\begin{aligned} \Lambda^m(T_{J_n}U_n) \cong& \Lambda^{n^2}(\mathrm{End}(E_1)) \otimes \Lambda^{n(n_2-n)}(\mathrm{Hom}(E_2, F_2)) \otimes \Lambda^{n(n_1-n)}(\mathrm{Hom}(F_1, E_1)) \\ \cong& (\Lambda^n(E_2^*))^{\otimes n_2-n} \otimes (\Lambda^{n_2-n}(F_2))^{\otimes n} \otimes (\Lambda^n(E_1))^{\otimes n_1-n} \otimes (\Lambda^{n_1-n}(F_1^*))^{\otimes n} \\ \cong& (\Lambda^n(E_2^*))^{\otimes n_2-n} \otimes (\Lambda^n(E_1))^{\otimes n_1-n} \otimes (\Lambda^{n_2-n}(F_2))^{\otimes n} \otimes (\Lambda^{n_1-n}(F_1^*))^{\otimes n} \\ \cong& (\Lambda^n(E_1))^{\otimes n_1-n_2} \otimes (\Lambda^{n_2-n}(F_2))^{\otimes n} \otimes (\Lambda^{n_1-n}(F_1^*))^{\otimes n} \end{aligned}$$

comme L-module. Le fait annoncé s'ensuit.

On revient maintenant à la démonstration de la proposition A.1.5. On cherche pour quelles valeurs de n, n_1, n_2 la G'-variété E_{χ_0} est l'espace total du fibré trivial de U_n. D'après [KKV89, Proposition 3.2], on a la suite exacte de groupes suivante :

$$X(G) \xrightarrow{res} X(H) \xrightarrow{\epsilon} \mathrm{Pic}(G'/H) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Pic}(G')$$

avec

- $\mathrm{Pic}(G')$ et $\mathrm{Pic}(G'/H)$ les groupes de Picard de G' et G'/H respectivement,
- $X(G')$ et $X(H)$ les groupes des caractères de G' et de H respectivement,
- res l'homomorphisme de restriction,
- p^* l'homomorphisme induit par le morphisme de passage au quotient $p\colon\ G' \to G'/H$,
- ϵ l'homomorphisme canonique qui à un caractère $\chi \in X(H)$ associe le fibré en droites E_χ qui est défini comme précédement.

Or $\mathrm{Pic}(G') = 0$ donc $\mathrm{Pic}(G'/H) \cong X(H)/X(G')_{|H}$. Il s'ensuit que ω_{U_n} est trivial si et seulement si $\chi_0 \in X(G')_{|H} = \langle \det(A)\det(C_1), \det(A)\det(C_2)\rangle$, c'est-à-dire si et seulement si $n_1 = n_2$. □

On suppose dorénavant que $n_1 = n_2$, alors la variété $W/\!\!/G$ est de Gorenstein d'après la proposition A.1.5, et l'on va en construire des résolutions crépantes. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & R_1 \arrow[dl, "p_{12}"'] \arrow[dr, "p_{11}"] & & R_2 \arrow[dl, "p_{21}"'] \arrow[dr, "p_{22}"] & \\
\mathrm{Gr}(n, V_1^*) & & W/\!\!/G & & \mathrm{Gr}(n, V_2)
\end{tikzcd}$$

où

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{(M, L_1) \in W/\!\!/G \times \mathrm{Gr}(n, V_1^*) \ \mid\ L_1^\perp \subset \mathrm{Ker}(M)\}\,,\\
R_2 &:= \{(M, L_2) \in W/\!\!/G \times \mathrm{Gr}(n, V_2) \ \mid\ \mathrm{Im}(M) \subset L_2\}\,,
\end{aligned}$$

et les p_{ij} sont les projections naturelles. On note T_1 le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(n, V_1^*)$, alors R_1 s'identifie à l'espace total du fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(\underline{V_1}/T_1^\perp, \underline{V_2}) \cong T_1 \otimes \underline{V_2}$ au dessus de $\mathrm{Gr}(n, V_1^*)$. De même, si l'on note T_2 le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(n, V_2)$, alors R_2 s'identifie à l'espace total du fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(\underline{V_1}, T_2) \cong \underline{V_1^*} \otimes T_2$ au dessus de $\mathrm{Gr}(n, V_2)$.

Les variétés R_1 et R_2 sont lisses et donc les morphismes p_{11} et p_{21} sont des résolutions des singularités de $W/\!\!/G$. Le lieu exceptionnel $X_1 := p_{11}^{-1}(\overline{U_{n-1}})$ (resp. $X_2 := p_{21}^{-1}(\overline{U_{n-1}})$) de p_{11} (resp. de p_{21}) est de codimension $n_2 - n + 1 \geq 2$ (resp. $n_1 - n + 1 \geq 2$). Donc les résolutions p_{11} et p_{21} sont crépantes.

On considère maintenant $R := R_1 \times_{W/\!\!/G} R_2$. Alors

$$\begin{aligned}
R &= \{(M, L_1, L_2) \in W/\!\!/G \times \mathrm{Gr}(n, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(n, V_2) \mid L_1^\perp \subset \mathrm{Ker}(M) \text{ et } \mathrm{Im}(M) \subset L_2\}\\
&\cong \mathrm{Hom}(\underline{V_1}/T_1^\perp, T_2)\\
&\cong T_1 \otimes T_2
\end{aligned}$$

qui est l'espace total d'un fibré vectoriel au dessus de $\mathrm{Gr}(n, V_1^*) \times \mathrm{Gr}(n, V_2)$, donc une variété lisse. On a le diagramme cartésien :

(1.3)
$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_2"] \arrow[dd, "\phi"] & \\
R_1 \arrow[dr, "p_{11}"'] & & R_2 \arrow[dl, "p_{21}"] \\
 & W/\!\!/G &
\end{tikzcd}$$

où ϕ, ϕ_1 et ϕ_2 sont les projections naturelles. En particulier, ϕ est une résolution de $W/\!\!/G$ qui domine p_{11} et p_{21}.

Proposition A.1.6. *Si $n \leq 2$, alors la résolution $\gamma\colon\ \mathcal{H} \to W/\!\!/G$ n'est pas crépante.*

Démonstration. Les morphismes ϕ_1 et ϕ_2 sont surjectifs mais ne sont jamais des isomorphismes (car $n < n_1, n_2$), donc d'après le lemme A.1.2, la résolution ϕ n'est jamais crépante. Donc, toujours d'après le lemme A.1.2, si une résolution de $W/\!/G$ se factorise par ϕ, alors elle n'est pas crépante.
Si $n = 1$, alors γ s'identifie à ϕ grâce à la proposition 2.1.16.
Si $n = 2$, alors d'après le théorème 2.1.25, la résolution γ s'identifie à $\phi \circ q$, où q est l'éclatement de la section nulle dans $R \cong T_1 \otimes T_2$.
Dans les deux cas, on en déduit que γ n'est pas crépante. □

A.1.4 Situation 3

On se place dans la situation 3 et on reprend les notations de la section 3.1. On suppose que la variété déterminantielle symétrique $W/\!/G = S^2(V'^*)^{\leq n}$ est singulière et de Gorenstein, c'est-à-dire que $n' - n = 2p + 1$ pour un certain entier p. Lorsque $n = 2$, on a vu que $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ est une résolution. Nous allons montrer la

Proposition A.1.7. *Si $n = 2$, alors γ n'est pas crépante.*

Démonstration. On commence par construire une résolution de $S^2(V'^*)^{\leq n}$ pour un n général. Soient

$$R := \{(Q, L) \in S^2(V'^*)^{\leq n} \times \mathrm{Gr}(n, V'^*) \mid \mathrm{Im}(Q) \subset L\},$$

et p_1, p_2 les projections naturelles sur $S^2(V'^*)^{\leq n}$ et $\mathrm{Gr}(n, V'^*)$ respectivement. Le morphisme p_2 permet d'identifier R à l'espace total du fibré vectoriel $S^2(T)$, où T est le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(n, V'^*)$. Il s'ensuit que R est une variété lisse et donc p_1 est une résolution de $S^2(V'^*)^{\leq n}$.
D'après le théorème 3.1.11, lorsque $n = 2$ on a

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[d, "q"] \arrow[dd, bend right=60, "\gamma"'] \\ R \arrow[d, "p_1"] \\ S^2(V'^*)^{\leq n} \end{tikzcd}$$

où q est l'éclatement de la section nulle dans $R \cong S^2(T)$. En particulier, q n'est pas un isomorphisme et donc, d'après le lemme A.1.2, la résolution γ n'est pas crépante. □

Remarque A.1.8. On peut montrer que $p_1 : R \to S^2(V'^*)^{\leq n}$ n'est jamais crépante. En particulier, si $n = 1$, alors $\mathcal{H} \cong R$ et γ, qui s'identifie à p_1, n'est donc pas crépante.

A.1.5 Situation 5

On se place dans la situation 5 et on reprend les notations de la section 3.3. On suppose que la variété déterminantielle antisymétrique $W/\!/G = \Lambda^2(V'^*)^{\leq n}$ est singulière, c'est-à-dire que $n' > n$. On a vu que $\Lambda^2(V'^*)^{\leq n}$ est toujours de Gorenstein, donc lorsque $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ est une résolution, il est naturel de se demander si celle-ci est crépante. Si $n = 2$, alors $Sp_2(k) = SL_2(k)$ et donc γ n'est pas crépante d'après la proposition A.1.4. Il reste à traiter le cas $n = 4$. La proposition qui suit se démontre de manière analogue à la proposition A.1.7 (il suffit essentiellement de remplacer partout $S^2(V'^*)^{\leq n}$ par $\Lambda^2(V'^*)^{\leq n}$).

Proposition A.1.9. *Si $n = 4$, alors γ n'est pas crépante.*

Remarque A.1.10. J'ignore si les variétés quotient $W/\!/G$ qui apparaissent dans ce mémoire admettent ou non des résolutions crépantes (à l'exception de R_1 et de R_2 pour la variété déterminantielle).

A.2 Résolutions symplectiques de $\mu^{-1}(0)/\!/G$

A.2.1 Généralités

L'article d'exposition [Fu06a] fournit une introduction détaillée aux variétés symplectiques et à leurs résolutions. Soit X une variété normale dont la partie lisse X_{reg} admet une forme symplectique Ω telle que pour n'importe quelle résolution $f:\ Y \to X$, la 2-forme $f^*(\Omega)$ s'étend en une 2-forme sur Y tout entier. On dit alors que (X,Ω) est une variété symplectique. Si de plus $f^*(\Omega_X)$ s'étend en une forme symplectique, alors la résolution f est dite symplectique. Si (X,Ω) est une variété symplectique, il doit être souligné que X n'admet pas toujours de résolution symplectique, et que lorsqu'elle en admet, il peut en exister plusieurs non-isomorphes.

Soit maintenant (X,Ω) une variété symplectique dans laquelle un groupe réductif G opère symplectiquement, c'est-à-dire que l'opération de G préserve Ω. Il existe une application G-équivariante $\mu:\ X \to \mathfrak{g}^*$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, telle que :

$$\forall x \in X,\ \forall \xi \in T_xX,\ \forall M \in \mathfrak{g}, D\mu_x(\xi)(M) = \Omega(\xi, Mx).$$

Une telle application μ est appelée application moment pour l'opération de G dans (X,Ω) et est définie à un élément près de $(\mathfrak{g}^*)^G$.

On rappelle le résultat suivant dû à Kostant, Kirillov et Souriau (voir par exemple [Fu06a, §2.2] pour plus de détails) :

Proposition A.2.1. *La normalisation de l'adhérence d'une orbite nilpotente dans une algèbre de Lie semi-simple complexe est une variété symplectique.*

On en déduit que les composantes irréductibles des quotients $\mu^{-1}(0)/\!/G$ étudiés dans les sections 2.2, 3.4 et 3.5 sont des variétés symplectiques. On note $p_1:\ \mu^{-1}(0)/\!/G^0 \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ le morphisme considéré dans la section 3.4.2. Si $d < n$, alors p_1 est un isomorphisme. Si $d \geq n$, alors c'est un revêtement double ramifié.

Lemme A.2.2. *La variété $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$ est symplectique.*

Démonstration. Le cas $d < n$ est trivial, on peut donc supposer que $d \geq n$. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mu^{-1}(0)/\!/G^0 \arrow[r, "p_1"'] & \mu^{-1}(0)/\!/G \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

où f est une résolution de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et f' est une résolution de $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$ qui fait commuter le diagramme (une telle résolution existe toujours). On tire en arrière par p_1 la forme symplectique Ω sur $\mathcal{O}_{[2^n,1^{d-2n}]} \subset \mu^{-1}(0)/\!/G$. On obtient une forme symplectique Ω' sur $p_1^{-1}(\mathcal{O}_{[2^n,1^{d-2n}]})$ qui s'étend sur l'ouvert lisse de $\mu^{-1}(0)/\!/G^0$ de manière unique. En effet, le complémentaire de l'orbite ouverte est de codimension au moins 2. Ensuite, $f \circ h$ est une résolution de la variété symplectique $\mu^{-1}(0)/\!/G$, donc $(f \circ h)^*(\Omega)$ se prolonge en une 2-forme non sur X' tout entier. Comme le diagramme (1.4) commute, $(f \circ h)^*(\Omega)$ coïncide avec $f'^*(\Omega')$ sur l'ouvert $f'^{-1}(p_1^{-1}(\mathcal{O}_{[2^n,1^{d-2n}]}))$ et le résultat s'ensuit. □

Les résolutions symplectiques des adhérences d'orbites nilpotentes ont été étudiées par Fu et Namikawa dans [Fu03a], [Fu03b], [Fu06b], [FN04] et [Nam04]. Malheureusement, les résolutions symplectiques des revêtements finis de degré pair d'orbites nilpotentes sont peu connues, et j'ignore si $\mu^{-1}(0)/\!/SO(V)$ admet ou non des résolutions symplectiques. Dans ce qui suit, on détermine les liens entre le morphisme de Hilbert-Chow $\gamma:\ \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ (lorsque celui-ci est une résolution) et les résolutions symplectiques (éventuelles) de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.

A.2.2 Situation 2

On reprend les notations de la section 2.2. On a vu que $\mu^{-1}(0)/\!/G = \overline{\mathcal{O}_{[2^N,1^{d-2N}]}}$ et donc $\mu^{-1}(0)/\!/G$ admet toujours une résolution symplectique ([Fu03a, Corollary 3.16]). Plus précisément, on distingue deux cas :

• Si $N = \frac{d}{2}$ (c'est-à-dire si d est pair et si $\frac{d}{2} \leq n$), alors $\mu^{-1}(0)/\!/G$ admet une unique résolution symplectique (à isomorphisme près) $\phi\colon\ R \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ où

$$R := \{(f, L) \in \mu^{-1}(0)/\!/G \times \mathrm{Gr}(N, E) \mid \mathrm{Im}(f) \subset L \subset \mathrm{Ker}(f)\}$$

et ϕ est la première projection ([Fu06b, §2]). On note T le fibré tautologique de $\mathrm{Gr}(N, E)$ et $\underline{E}$ le fibré trivial de fibre E au dessus de $\mathrm{Gr}(N, E)$, alors $R \cong \mathrm{Hom}(\underline{E}/T, T)$ qui est le fibré cotangent de $\mathrm{Gr}(N, E)$. Le corollaire 2.2.18 nous permet de déduire la

Proposition A.2.3. *Si d est pair et $d \leq n+1$, alors $\gamma\colon\ \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ est l'unique résolution symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.*
En revanche, si $n = 2$ et $d = 4$, alors $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong Bl_0(\mathrm{Hom}(\underline{E}/T, T))$, et donc γ n'est pas la résolution symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ (mais γ se factorise par celle-ci).

• Si $N < \frac{d}{2}$ (c'est-à-dire si $\frac{d}{2} > n$ ou si d est impair), alors $\mu^{-1}(0)/\!/G$ admet exactement deux résolutions symplectiques non-isomorphes ([Fu06b, §2]) données par :

$$\begin{tikzcd}
T^*\mathrm{Gr}(N,E) \arrow[dr, "\phi_1"'] & & T^*\mathrm{Gr}(d-N,E) \arrow[dl, "\phi_2"] \\
& \mu^{-1}(0)/\!/G &
\end{tikzcd}$$

où

- $T^*\mathrm{Gr}(N, E) = \{(f, L_1) \in \mu^{-1}(0)/\!/G \times \mathrm{Gr}(N, E) \mid \mathrm{Im}(f) \subset L_1\}$ est le fibré cotangent de $\mathrm{Gr}(N, E)$,
- $T^*\mathrm{Gr}(d-N, E) = \{(f, L_2) \in \mu^{-1}(0)/\!/G \times \mathrm{Gr}(d-N, E) \mid L_2 \subset \mathrm{Ker}(f)\}$ est son dual,
- les morphismes ϕ_i sont les projections sur le premier facteur.

Soient $\mathcal{F}_{N,d-N}$ la variété de drapeaux partiels introduite dans la section 2.2.3, $\underline{E}$ le fibré trivial de fibre E au dessus de $\mathcal{F}_{N,d-N}$ et T_1, T_2 les fibrés vectoriels de la définition 2.2.13. On considère

$$\begin{aligned} R :&= \left\{(f, L_1, L_2) \in \mu^{-1}(0)/\!/G \times \mathrm{Gr}(N, E) \times \mathrm{Gr}(d-N, E) \mid \mathrm{Im}(f) \subset L_1 \subset L_2 \subset \mathrm{Ker}(f)\right\} \\ &\cong \mathrm{Hom}(\underline{E}/T_2, T_1) \end{aligned}$$

qui est une composante irréductible (lisse) du produit fibré de $T^*\mathrm{Gr}(N, E)$ et $T^*\mathrm{Gr}(d-N, E)$ au dessus de $\mu^{-1}(0)/\!/G$. La première projection $\phi\colon\ R \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ est une résolution de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ et c'est la résolution minimale qui domine les deux résolutions symplectiques de $\mu^{-1}(0)/\!/G$. Le corollaire 2.2.18 nous permet de déduire la

Proposition A.2.4. *Si $n = 1$ et $d \geq 3$, alors $\gamma\colon\ \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ s'identifie à $\phi\colon\ R \to \mu^{-1}(0)/\!/G$. Si $n = 2$ et $d \geq 5$, alors γ se factorise par ϕ mais $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ n'est pas isomorphe à R. Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant :*

(1.5)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma"'] & & \\
& R \arrow[dl] \arrow[dd, "\phi"] \arrow[dr] & \\
T^*\mathrm{Gr}(N,E) \arrow[dr, "\phi_1"'] & & T^*\mathrm{Gr}(d-N,E) \arrow[dl, "\phi_2"] \\
& \mu^{-1}(0)/\!/G &
\end{tikzcd}$$

où f est l'éclatement de la section nulle dans $R \cong \mathrm{Hom}(\underline{E}/T_2, T_1)$.

A.2.3 Situation 3

On reprend les notations de la section 3.4. On a vu que $\mu^{-1}(0)/\!/G = \overline{\mathcal{O}_{[2^N,1^{2(d-N)}]}}$, et donc $\mu^{-1}(0)/\!/G$ admet une résolution symplectique si et seulement si $N = d$ ([Fu03a, Proposition 3.19]), c'est-à-dire si $d \leq n$. Dans ce cas, $\mu^{-1}(0)/\!/G$ admet une unique résolution symplectique ; celle-ci est donnée par $T^*\mathrm{IGr}(d, V'^*)$, le fibré cotangent de $\mathrm{IGr}(d, V'^*)$ (c'est une conséquence de [Fu03a, Main Theorem] et de [FN04, Proposition 3.5]).

Pour pouvoir comparer cette résolution symplectique avec celles données par le corollaire 3.4.11, il faut exprimer le fibré $T^*\mathrm{IGr}(d, V'^*)$ en fonction du fibré tautologique T de $\mathrm{IGr}(d, V'^*)$. La variété $\mathrm{IGr}(d, V'^*)$ est G'-homogène, donc il existe un sous-groupe parabolique $P \subset G'$ tel que $\mathrm{IGr}(d, V'^*) \cong G'/P$. On note $\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie de P, alors l'espace tangent à G'/P au point base est isomorphe à $\mathfrak{g}'/\mathfrak{p}$ comme P-module. On note $E_0 \subset V'^*$ le sous-espace de dimension d stabilisé par P. Un calcul similaire à celui effectué dans la preuve de la proposition A.1.5 permet de montrer que $\mathfrak{g}'/\mathfrak{p} \cong S^2(E_0^*)$ comme P-module. Il s'ensuit que

$$T^*\mathrm{IGr}(d, V'^*) \cong S^2(T).$$

Le corollaire 3.4.11 nous permet de déduire la

Proposition A.2.5. *Si $d \leq \frac{n+1}{2}$, alors $\gamma\colon G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ est la résolution symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.*
En revanche, si $d = n = 2$, alors $G\text{-}\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \cong Bl_0(S^2(T))$ et donc γ n'est pas la résolution symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ (mais γ se factorise par celle-ci).

A.2.4 Situation 5

On reprend les notations de la section 3.5. On a vu que

$$\mu^{-1}(0)/\!/G = \begin{cases} \overline{\mathcal{O}_{[2^n,1^{2(d-n)}]}} & \text{si } d > n, \\ \overline{\mathcal{O}_{[2^{d-1},1^2]}} & \text{si } d < n \text{ et } d \text{ est impair}, \\ \overline{\mathcal{O}^I_{[2^d]} \cup \mathcal{O}^{II}_{[2^d]}} & \text{si } d \leq n \text{ et } d \text{ est pair}. \end{cases}$$

On a le critère suivant, dû à Fu ([Fu03a, Proposition 3.20]), pour savoir si l'adhérence d'une orbite nilpotente dans $\mathfrak{g}'$ admet une résolution symplectique :

Proposition A.2.6. *La variété symplectique $\overline{\mathcal{O}_{[k_1,\dots,k_r]}}$ admet une résolution symplectique si et seulement si :*

- *ou bien il existe un entier pair $q \neq 2$ tel que les q premières parts de $[k_1, \dots, k_r]$ sont impaires et toutes les autres parts sont paires,*
- *ou bien il existe exactement deux parts impaires dans $[k_1, \dots, k_r]$ qui sont en position $2m-1$ et $2m$ pour un certain $m \geq 1$.*

On en déduit que les composantes irréductibles de $\mu^{-1}(0)/\!/G$ admettent des résolutions symplectiques si et seulement si $d \leq n+1$. On distingue alors les deux cas suivants :
• Si $d \leq n$ et d est pair, alors $Y_I = \overline{\mathcal{O}^I_{[2^d]}}$ (resp. $Y_{II} = \overline{\mathcal{O}^{II}_{[2^d]}}$) admet une unique résolution symplectique (à isomorphisme près) $\phi_I : T^*\mathrm{OGr}^I(d, V'^*) \to Y_I$ (resp. $\phi_{II} : T^*\mathrm{OGr}^{II}(d, V'^*) \to Y_{II}$) d'après [FN04, Proposition 3.5] et [Fu03a, Main Theorem]. On déduit du corollaire 3.5.12 la

Proposition A.2.7. *Si $d \leq \frac{n}{2} + 1$ et d est pair, alors $\gamma\colon \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}} \to Y_I$ (resp. $\gamma\colon \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}} \to Y_{II}$) est l'unique résolution symplectique de Y_I (resp. de Y_{II}).*
En revanche, si $d = n = 4$ alors $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}} \cong Bl_0(\Lambda^2(T_I))$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}} \cong Bl_0(\Lambda^2(T_{II}))$) et donc $\gamma\colon \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{I,\mathrm{prin}} \to Y_I$ (resp. $\gamma\colon \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{II,\mathrm{prin}} \to Y_{II}$) n'est pas la résolution symplectique de Y_I (resp. de Y_{II}), mais γ se factorise par celle-ci.

• Si $3 \leq d \leq n+1$ et d impair, alors $\mu^{-1}(0)/\!/G = \overline{\mathcal{O}_{[2^{d-1},1^2]}}$ admet exactement deux résolutions symplectiques non isomorphes ([Fu06b, §2]) données par :

$$\begin{tikzcd} T^*\mathrm{OGr}^I(d,V'^*) \arrow[dr, "\phi_1"'] & & T^*\mathrm{OGr}^{II}(d,V'^*) \arrow[dl, "\phi_2"] \\ & \mu^{-1}(0)/\!/G & \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{OGr}^I(d,V'^*)$ et $\mathrm{OGr}^{II}(d,V'^*)$ sont les deux composantes irréductibles de la grassmannienne isotrope introduite dans la section 3.1.1, et $T^*\mathrm{OGr}^I(d,V'^*)$ (resp. $T^*\mathrm{OGr}^{II}(d,V'^*)$) est le fibré cotangent de $\mathrm{OGr}^I(d,V'^*)$ (resp. de $\mathrm{OGr}^I(d,V'^*)$). On souhaite comparer ces résolutions symplectiques avec les résolutions obtenues dans la section 3.5.3. En raisonnant comme dans la situation 3, on montre que

$$T^*\mathrm{OGr}(d,V'^*) \cong \Lambda^2(T), \tag{1.6}$$

où T est le fibré tautologique de $\mathrm{OGr}(d,V'^*)$. On note T_I (resp. T_{II}) la restriction de T à $\mathrm{OGr}^I(d,V'^*)$ (resp. à $\mathrm{OGr}^{II}(d,V'^*)$). On déduit de (1.6) que

$$\begin{cases} T^*\mathrm{OGr}^I(d,V'^*) \cong \Lambda^2(T_I), \text{ et} \\ T^*\mathrm{OGr}^{II}(d,V'^*) \cong \Lambda^2(T_{II}). \end{cases}$$

Le corollaire 3.5.12 nous permet de déduire la

Proposition A.2.8. *Si ($d = 3$ et $n = 2$) ou ($d = 5$ et $n = 4$), alors la résolution $\gamma : \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}} \to \mu^{-1}(0)/\!/G$ n'est pas symplectique.*

Malheureusement, j'ignore si γ domine ou non les deux résolutions symplectiques de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.

Annexe B

Les points fixes de B' comme sous-schémas de W

On reprend les notations de la section 1.4.1. Dans tout ce qui suit, on considère les points de $\mathcal{H}(k)$ comme des sous-schémas fermés de W. On souhaite étudier les propriétés géométriques des déformations plates G-équivarientes de G dans W. Par définition du schéma de Hilbert invariant, les points fermés de $\mathcal{H}^{\text{prin}}$ sont précisément ces déformations dans les exemples que nous avons traités. Lorsque $G = SL_n(k)$ ou $\mathbb{G}_m$, on a déterminé la famille universelle $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$ (propositions 1.5.21 et 2.1.16), on connaît donc explicitement les (deux) classes d'isomorphisme des déformations plates de G dans W. Dans les autres situations, la famille universelle n'est pas connue. Néanmoins, nous allons voir que si l'on connaît les propriétés géométriques des points fixes de B', alors on peut en déduire certaines propriétés géométriques de tous les points de $\mathcal{H}(k)$.

Proposition. *On note (P) l'une des propriétés suivantes :*

- *être de Cohen-Macaulay,*
- *être normal,*
- *être réduit,*
- *être lisse.*

Si tous les points fixes de B' dans $\mathcal{H}(k)$ vérifient la propriété (P), alors tous les points de $\mathcal{H}(k)$ vérifient la même propriété (P).

Démonstration. D'après [Gro66, Théorème 12.1.1 et Théorème 12.1.6], l'ensemble

$$E := \{z \in \mathcal{X}(k) \mid \text{ la fibre schématique } \pi^{-1}(\pi(z)) \text{ ne vérifie pas } (P) \text{ au point } z\}$$

est un fermé de $\mathcal{X}(k)$. Ce fermé est bien sûr $G' \times G$-stable par homogénéité. Le morphisme π est G-invariant, affine et on a montré dans la preuve du lemme 1.1.3 que $(\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}})^G \cong \mathcal{O}_{\mathcal{H}}$. Donc, la famille universelle coïncide avec le morphisme de passage au quotient au sens de la théorie géométrique des invariants. Il s'ensuit que π envoie les fermés G-stables de $\mathcal{X}(k)$ dans des fermés de $\mathcal{H}(k)$, et donc $\pi(E)$ est un fermé de $\mathcal{H}(k)$. Le morphisme π étant G'-équivariant, le fermé $\pi(E)$ est G'-stable. En particulier, d'après le lemme 1.2.1, ou bien il contient au moins un point fixe de B' ou bien il est vide (auquel cas E est aussi vide). On a donc deux alternatives :

- tous les points de $\mathcal{H}(k)$ vérifient la propriété (P), ou bien
- il existe au moins un point fixe de B' dans $\mathcal{H}$ qui ne vérifie pas la propriété (P).

Et c'est précisément le résultat que nous avions annoncé. □

Motivés par cette proposition, nous allons étudier les propriétés géométriques des différents points fixes de B' dans $\mathcal{H}$. Tous les calculs qui suivent sont effectués à l'aide de [GS, Macaulay2].

B.1 Situation 2

B.1.1 Cas $\dim(V) = 2$

Avec les notations de la section 2.1.4, on a $I = (f_1, \dots, f_4, h_1, \dots, h_4)$. Cet idéal n'est pas premier : il contient $x_{11}y_{11}$ mais ne contient ni x_{11} ni y_{11}. On vérifie que l'idéal I est égal à son radical, autrement dit, le schéma affine $Z_0 = \mathrm{Spec}(k[W]/I)$ est réduit mais n'est pas irréductible. En fait, Z_0 est la réunion des quatre fermés irréductibles de dimension 4 dans W définis par les idéaux suivants de $k[W]$:

- $K_1 := (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$,
- $K_2 := (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$,
- $K_3 := (x_{11}, x_{21}, y_{22}y_{11} - y_{21}y_{12}, y_{22}x_{12} + y_{12}x_{22}, y_{21}x_{12} + y_{11}x_{22})$,
- $K_4 := (y_{11}, y_{21}, x_{22}x_{11} - x_{21}x_{12}, y_{22}x_{11} + y_{12}x_{21}, y_{22}x_{12} + y_{12}x_{22})$.

Pour $i = 1, \dots, 4$, on note $Z_0^{(i)} := \mathrm{Spec}(k[W]/K_i)$ la composante irréductible de Z_0 définie par l'idéal K_i. On a $Z_0^{(1)} = \mathrm{Hom}(V, V_2)$ et $Z_0^{(2)} = \mathrm{Hom}(V_1, V)$ qui sont des sous-espaces vectoriels de W. Et

$$Z_0^{(3)} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & v \end{bmatrix}, u_2 \right) \in W \mid \mathrm{rg}(u_2) \leq 1 \text{ et } u_2(v) = 0 \right\},$$
$$Z_0^{(4)} = \left\{ \left(u_1, \begin{bmatrix} 0 \\ \phi \end{bmatrix} \right) \in W \mid \mathrm{rg}(u_1) \leq 1 \text{ et } \phi \circ u_1 = 0 \right\},$$

qui sont des cônes affines singuliers uniquement en 0. On vérifie que ces quatre composantes irréductibles sont normales, de Cohen-Macaulay (en fait Z_0 lui-même est de Cohen-Macaulay), qu'elles contiennent une orbite ouverte de G mais qu'une orbite générale de B' est de codimension 1 dans chacune d'elles. On s'intéresse maintenant aux intersections des composantes irréductibles de Z_0 :

- $Z_0^{(1)} \cap Z_0^{(2)} = \{0\}$,
- $Z_0^{(2)} \cap Z_0^{(3)} = \langle e_2^* \rangle \otimes V$,
- $Z_0^{(1)} \cap Z_0^{(4)} = V^* \otimes \langle f_2 \rangle$,
- $Z_0^{(2)} \cap Z_0^{(4)} = \{u_1 \in \mathrm{Hom}(V_1, V) \mid \mathrm{rg}(u_1) \leq 1\}$ est un cône affine de dimension 3 singulier uniquement en 0,
- $Z_0^{(1)} \cap Z_0^{(3i)} = \{u_2 \in \mathrm{Hom}(V, V_2) \mid \mathrm{rg}(u_2) \leq 1\}$ est un cône affine de dimension 3 singulier uniquement en 0,
- $Z_0^{(3)} \cap Z_0^{(4)} = \{(v, \phi) \in V \times V^* \mid \phi(v) = 0\}$ est un cône affine de dimension 3 singulier uniquement en 0.

On en déduit que le lieu singulier de Z_0, noté $\mathrm{Sing}(Z_0)$, est la réunion de trois fermés irréductibles de codimension 1 dans Z_0 :

$$\mathrm{Sing}(Z_0) = (Z_0^{(1)} \cap Z_0^{(3)}) \cup (Z_0^{(2)} \cap Z_0^{(4)}) \cup (Z_0^{(3)} \cap Z_0^{(4)}).$$

B.1.2 Cas $\dim(V) = 3$

Avec les notations de la section 2.1.5, on a $I = (f_1, \dots, f_9, h_1, \dots, h_9, s_1, \dots, s_6, t_1, \dots, t_6)$. Cet idéal n'est pas premier : il contient $x_{11}y_{11}$ mais ne contient ni x_{11} ni y_{11}. On vérifie que I est égal à son radical, autrement dit le schéma affine $Z_0 = \mathrm{Spec}(k[W]/I)$ est réduit mais n'est pas irréductible. En fait, Z_0 est la réunion de huit fermés irréductibles de dimension 9. Les composantes irréductibles de Z_0 sont :

- $Z_0^{(1)} := \mathrm{Hom}(V, V_2)$,

- $Z_0^{(2)} := \mathrm{Hom}(V_1, V)$,
- $Z_0^{(3)} := \{(\begin{bmatrix}0 & 0 & v_3\end{bmatrix}, u_2) \in W \mid \mathrm{rg}(u_2) \leq 2 \text{ et } u_2(v_3) = 0\}$,
- $Z_0^{(4)} := \left\{\left(u_1, \begin{bmatrix}0\\0\\\phi_3\end{bmatrix}\right) \in W \mid \mathrm{rg}(u_1) \leq 2 \text{ et } \phi_3 \circ u_1 = 0\right\}$,
- $Z_0^{(5)} := \{(\begin{bmatrix}0 & v_2 & v_3\end{bmatrix}, u_2) \in W \mid \mathrm{rg}(u_2) \leq 1 \text{ et } u_2(v_2) = u_2(v_3) = 0\}$,
- $Z_0^{(6)} := \left\{\left(u_1, \begin{bmatrix}0\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}\right) \in W \mid \mathrm{rg}(u_1) \leq 1 \text{ et } \phi_2 \circ u_1 = \phi_3 \circ u_1 = 0\right\}$,
- $Z_0^{(7)} := \left\{\left(\begin{bmatrix}0 & v_2 & v_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}\right) \in W \;\middle|\; \begin{array}{c} v_2 \text{ et } v_3 \text{ sont colinéaires,} \\ \phi_2 \text{ et } \phi_3 \text{ sont colinéaires,} \\ \forall i, j,\ \phi_i(v_j) = 0, \end{array}\right\}$,
- $Z_0^{(8)} := \left\{\left(\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}\right) \in W \;\middle|\; \begin{array}{c} v_2 \text{ et } v_3 \text{ sont colinéaires,} \\ \phi_2 \text{ et } \phi_3 \text{ sont colinéaires,} \\ \forall i, j,\ \phi_i(v_j) = 0, \end{array}\right\}$.

On vérifie que ces huit composantes irréductibles sont normales, de Cohen-Macaulay (mais pas Z_0 lui-même), qu'elles contiennent une orbite ouverte de G mais qu'une orbite générale de B' est de codimension 3. On vérifie ensuite que le lieu singulier de Z_0, noté $\mathrm{Sing}(Z_0)$, est de codimension 1 dans Z_0 et que

$$\mathrm{Sing}(Z_0) = \bigcup_{i<j} (Z_0^{(i)} \cap Z_0^{(j)}).$$

B.2 Situations 3 à 5

B.2.1 Cas $\dim(V) = 2$ dans la situation 3

Avec les notations de la section 3.1.2, on a $I = (f_1, f_2, f_3, h_1, h_2)$. Cet idéal n'est pas réduit : il contient x_1^2 mais ne contient pas x_1. On vérifie que $I = (x_1, y_1, x_2^2) \cap (x_2, y_2, x_1^2)$, et donc $Z_0 = \mathrm{Spec}(k[W]/I)$ est la réunion des deux "droites épaisses" définies par les idéaux (x_1, y_1, x_2^2) et (x_2, y_2, x_1^2).

B.2.2 Cas $\dim(V) = 3$ dans les situations 3 et 4

On se place dans l'une des situations 3 ou 4 et pour $i = 1, 2$, on note $Z_i := \mathrm{Spec}(k[W]/I_i)$. On vérifie que l'idéal I_i n'est pas réduit mais que son radical est premier, ce qui signifie que Z_i est un schéma irréductible mais non réduit. Dans la situation 4 (mais pas dans la situation 3), le schéma Z_i est de Cohen-Macaulay. Enfin dans les situations 3 et 4, le schéma Z_i muni de sa structure réduite est un cône affine singulier uniquement en l'origine, normal et de Cohen-Macaulay.

B.2.3 Cas $\dim(V) = 4$ dans la situation 5

Avec les notations de la section 3.3.3, on a $I = (f_1, \ldots, f_6, h_1, \ldots, h_5)$. Cet idéal est premier ; il s'ensuit que $Z := \mathrm{Spec}(k[W]/I)$ est une variété. On vérifie que Z est normale, de Cohen-Macaulay et que son lieu singulier est de codimension 3.

Bibliographie

[AB05] V. Alexeev and M. Brion. Moduli of affine schemes with reductive group action. *J. Algebraic Geom.*, 14 :83–117, 2005.

[ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Volume I.* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 267. Springer-Verlag, New York, 1985.

[AST11] C. Aholt, B. Sturmfels, and R. Thomas. A Hilbert scheme in computer vision. arXiv : 1107.2875v1, 2011.

[Bec09] T. Becker. On the existence of symplectic resolutions of symplectic reductions. *Mathematische Zeitschrift*, 265 :343–363, 2009.

[Bec10] T. Becker. An example of an Sl_2-Hilbert scheme with multiplicities. arXiv : 1010.3622, 2010.

[BKR01] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 14 :535–554, 2001.

[Bor91] A. Borel. *Linear Algebraic Groups (second edition).* Graduate Texts in Mathematics, vol. 126. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Bri85] M. Brion. Représentations exceptionnelles des groupes semi-simples. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 2 :345–387, 1985.

[Bri10] M. Brion. Invariant Hilbert schemes. arXiv : 1102.0198, to appear in "*Handbook of Moduli*", 2010.

[Bud10] J. Budmiger. Deformation of orbits in minimal sheets. Available at : tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/49/25/15/PDF/Budmiger.pdf, 2010.

[CEVV09] D. Cartwright, D. Erman, M. Velasco, and B. Vitray. Hilbert schemes of 8 points. *Algebra Number Theory 3*, 7 :763–795, 2009.

[CF09] S. Cupit-Foutou. Wonderful varieties : A geometrical realization. arXiv :0907.2852v3, 2009.

[CM93] D. Collingwood and W. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras.* Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, vol. 296. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[CS10] D. Cartwright and B. Sturmfels. The Hilbert scheme of the diagonal in a product of projective spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 9 :1741–1771, 2010.

[Deb01] O. Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[EH01] D. Eisenbud and J. Harris. *The Geometry of Schemes.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 197. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Eis95] D. Eisenbud. *Commutative Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 150. Springer-Verlag, New York, 1995.

[FH91] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 129. Springer-Verlag, New York, 1991.

[FN04] B. Fu and Y. Namikawa. Uniqueness of crepant resolutions and symplectic singularities. *Ann. de l'institut Fourier*, 54 :1–19, 2004.

[Fu03a] B. Fu. Symplectic resolutions for nilpotent orbits. *Invent. Math.*, 151 :167–186, 2003.

[Fu03b] B. Fu. Symplectic resolutions for nilpotent orbits (II). *C. R. Acad. Sci. Paris*, 337 :277–281, 2003.

[Fu06a] B. Fu. A survey on symplectic singularities and resolutions. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 13 :209–236, 2006.

[Fu06b] B. Fu. Symplectic resolutions for nilpotent orbits (III). *C. R. Acad. Sci. Paris*, 342 :585–588, 2006.

[Ful97] W. Fulton. *Young Tableaux.* London Mathematical Society Student Texts, vol. 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Gro66] A. Grothendieck. *Eléments de géométrie algébrique IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas. Troisième partie.* Publications mathématiques de l'IHES, vol. 28. Bures-sur-Yvette, 1966.

[GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at http ://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 52. Springer-Verlag, New York, 1977.

[Hes79] W. Hesselink. The normality of closures of orbits in a Lie algebra. *Comment. Math. Helv.*, 54 :105–110, 1979.

[HS04] M. Haiman and B. Sturmfels. Multigraded Hilbert schemes. *J. Algebraic Geom.*, 13 :725–769, 2004.

[IN96] Y. Ito and I. Nakamura. McKay correspondence and Hilbert schemes. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(7) :135–138, 1996.

[IN99] Y. Ito and I. Nakamura. Hilbert schemes and simple singularities. In : *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996),* London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264 :151–233, 1999.

[Jan03] J. Jantzen. *Representations of Algebraic Groups (second edition).* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107. AMS, Providence, RI, 2003.

[Jan07] S. Jansou. Déformations des cônes de vecteurs primitifs. *Math. Ann.*, 338 :627–667, 2007.

[JR09] S. Jansou and N. Ressayre. Invariant deformations of orbits closures in $\mathfrak{sl}(n)$. *Represent. Theory*, 13 :50–62, 2009.

[KKV89] F. Knop, H. Kraft, and T. Vust. The Picard group of a G-variety. *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem., 13 :77–88, 1989.

[KP79] H. Kraft and C. Procesi. Closures of conjugacy classes of matrices are normal. *Invent. Math.*, 53 :227–247, 1979.

[KP81] H. Kraft and C. Procesi. Minimal singularities in GL_n. *Invent. Math.*, 62 :503–515, 1981.

[KP82] H. Kraft and C. Procesi. On the geometry of conjugacy classes in classical groups. *Comment. Math. Helvetici*, 57 :539–602, 1982.

[Kra84] H. Kraft. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie.* Aspects of Mathematics, D1. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1984.

[KS11] H. Kraft and G. W. Schwarz. Representations with a reduced null cone. arXiv : 1112.3634, to appear in *Progress in Mathematics*, 2011.

[LS08] M. Lehn and C. Sorger. A symplectic resolution for the binary tetrahedral group. arXiv :0810.3225, 2008.

[Mol06] A. I. Molev. Gelfand-Tsetlin bases for classical Lie algebras. In : *"Handbook of Algebra", (M. Hazewinkel, Ed.)*, 4 :109–170, 2006.

[Nam04] Y. Namikawa. Birational geometry of symplectic resolutions of nilpotent orbits. arXiv : 0404072v2, 2004.

[Pan94] D. Panyushev. Complexity and nilpotent orbits. *Manuscripta Math.*, 83 :223–237, 1994.

[Pro07] C. Procesi. *Lie Groups, an Approach through Invariants and Representations.* Universitext. Springer, New York, 2007.

[PVS10] S. Papadakis and B. Van Steirteghem. Equivarient degenerations of spherical modules for groups of type A. arXiv :1008.0911, to appear in "*Annales de l'Institut Fourier*", 2010.

[Rei85] M. Reid. Young person's guide to canonical singularities. *Algebraic geometry, Bowdoin, Proc. Sympos. Pure Math.*, 46, Part 1 :345–414, 1985.

[SB00] G. W. Schwarz and M. Brion. *Théorie des invariants et géométrie des variétés quotients.* Travaux en cours, vol. 61. Hermann, Paris, 2000.

[Sha94] I. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1. Varieties in projective space (second edition).* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Ste03] J. Stevens. *Deformations of Singularities.* Lescture Notes in Mathematics, vol. 1811. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Sva74] T. Svanes. Coherent cohomology on Schubert subschemes of flag schemes and applications. *Advances in math.*, 14, 1974.

[Tim11] D. Timashev. *Homogeneous Spaces and Equivariant Embeddings.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 138, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

[Wey03] J. Weyman. *Cohomology of vector bundles and Syzygies.* Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 149. Cambridge university press, Cambridge, 2003.

Résumé

Pour toute variété affine W munie d'une opération d'un groupe réductif G, le schéma de Hilbert invariant est un espace de modules qui classifie les sous-schémas fermés de W, stables par l'opération de G, et dont l'algèbre affine est somme directe de G-modules simples avec des multiplicités finies préalablement fixées.

Dans cette thèse, on étudie d'abord le schéma de Hilbert invariant, noté $\mathcal{H}$, qui paramètre les sous-schémas fermés $GL(V)$-stables Z de $W = V^{\oplus n_1} \oplus V^{*\oplus n_2}$ tels que $k[Z]$ est isomorphe à la représentation régulière de $GL(V)$ comme $GL(V)$-module. Si $\dim(V) \leq 2$, on montre que $\mathcal{H}$ est une variété lisse, et donc que le morphisme de Hilbert-Chow $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ est une résolution des singularités du quotient $W/\!/G$. En revanche, si $\dim(V) = 3$, on montre que $\mathcal{H}$ est singulier. Lorsque $\dim(V) \leq 2$, on décrit $\mathcal{H}$ par des équations et aussi comme l'espace total d'un fibré vectoriel homogène au dessus d'un produit de deux grassmanniennes.

On se place ensuite dans le cadre symplectique en prenant $n_1 = n_2$ et en remplaçant W par la fibre en 0 de l'application moment $\mu : W \to \mathrm{End}(V)$. On considère alors le schéma de Hilbert invariant $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ qui paramètre les sous-schémas contenus dans $\mu^{-1}(0)$. On montre que $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ est toujours réductible, mais que sa composante principale $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ est lisse lorsque $dim(V) \leq 2$. Dans ce cas, le morphisme de Hilbert-Chow est une résolution (parfois symplectique) des singularités du quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$. Lorsque $dim(V) \leq 2$, on décrit $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ comme l'espace total d'un fibré vectoriel homogène au-dessus d'une variété de drapeaux.

Enfin, on obtient des résultats similaires lorsque l'on remplace $GL(V)$ par un autre groupe classique ($SL(V)$, $SO(V)$, $O(V)$, $Sp(V)$) que l'on fait opérer d'abord dans $W = V^{\oplus n}$, puis dans la fibre en zéro de l'application moment.

Asbtract

Let W be an affine variety equipped with an action of a reductive group G. The invariant Hilbert scheme is a moduli space that classifies the G-stable closed subschemes of W such that the affine algebra is the direct sum of simple G-modules with previously fixed finite multiplicities.

In this thesis, we first study the invariant Hilbert scheme, denoted $\mathcal{H}$. It parametrizes the $GL(V)$-stable closed subschemes Z of $W = V^{\oplus n_1} \oplus V^{*\oplus n_2}$ such that $k[Z]$ is isomorphic to the regular representation of $GL(V)$ as $GL(V)$-module. If $\dim(V) \leq 2$, we show that $\mathcal{H}$ is a smooth variety, so that the Hilbert-Chow morphism $\gamma : \mathcal{H} \to W/\!/G$ is a resolution of singularities of the quotient $W/\!/G$. However, if $\dim(V) = 3$, we show that $\mathcal{H}$ is singular. When $\dim(V) \leq 2$, we describe $\mathcal{H}$ by equations and also as the total space of a homogeneous vector bundle over the product of two Grassmannians.

Then we consider the symplectic setting by letting $n_1 = n_2$ and replacing W by the zero fiber of the moment map $\mu : W \to \mathrm{End}(V)$. We study the invariant Hilbert scheme $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ that parametrizes the subschemes included in $\mu^{-1}(0)$. We show that $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ is always reducible, but that its main component $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ is smooth if $\dim(V) \leq 2$. In this case, the Hilbert-Chow morphism is a resolution of singularities (sometimes a symplectic one) of the quotient $\mu^{-1}(0)/\!/G$. When $\dim(V) = 3$, we describe $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{prin}}$ as the total space of a homogeneous vector bundle over a flag variety.

Finally, we get similar results when we replace $GL(V)$ by some other classical group ($SL(V)$, $SO(V)$, $O(V)$, $Sp(V)$) acting first on $W = V^{\oplus n}$, then on the zero fiber of the moment map.

Mots-clés

Schéma de Hilbert invariant, résolution des singularités, théorie des invariants, variété déterminantielle, orbite nilpotente, singularité symplectique, fibré vectoriel homogène.

Classification mathématique

13A50 14E15 14L24 14L30 14M12 14M17 20G05 20G20 53D20