



**HAL**  
open science

## Le Tri Croisé de Monte Carlo : une boîte à outils pour l'aide à la décision coopérative

Frej Limayem, Bernard Yannou

### ► To cite this version:

Frej Limayem, Bernard Yannou. Le Tri Croisé de Monte Carlo : une boîte à outils pour l'aide à la décision coopérative. *Revue Internationale de CFAO et Informatique Graphique*, 2001, 16 (3), pp.275-295. hal-00748747

**HAL Id: hal-00748747**

**<https://hal.science/hal-00748747v1>**

Submitted on 16 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Limayem F. , Yannou B., (2001), *Le Tri Croisé de Monte Carlo : une boîte à outils pour l'aide à la décision coopérative*. Revue Internationale de CFAO et Informatique Graphique, vol. 16 (juin 2001)(3): p. 275-295.**

---

## **Le Tri Croisé de Monte Carlo : une boîte à outils pour l'aide à la décision coopérative**

**Frej Limayem      Bernard Yannou**

*Laboratoire Productique Logistique  
École Centrale Paris  
92295 Châtenay-Malabry, France  
E-mail : limayem@pl.ecp.fr  
yannou@pl.ecp.fr*

---

*RÉSUMÉ. Les méthodes de tri croisé sont des méthodes d'aide à la décision coopérative puisqu'elles permettent d'aboutir à une pondération de critères ou d'objectifs en séance de groupe. Le présent travail propose une généralisation des méthodes de tri croisé de la littérature à la prise en compte de l'imprécision avec la méthode du Tri Croisé de Monte Carlo (TCMC). Plus généralement, il s'agit d'une boîte à outils d'aide à la décision coopérative qui, pour un problème de pondération donné utilise la méthode la plus appropriée et propose un chiffrage de la cohérence des données d'entrée du groupe ainsi que des conseils pour réduire cette incohérence. Enfin, l'article préconise une utilisation du TCMC pour mettre en œuvre une procédure de vote à distance et asynchrone (par réseau), fonctionnalité pouvant être intégrée au sein d'un outil de groupware d'une entreprise. La méthode est illustrée par le cas de la conception optimale d'un clavier ergonomique.*

*ABSTRACT. Pairwise Comparisons approaches belong to cooperative decision making methods since they allow criteria or objective weighting in group decision making. This contribution presents the Monte Carlo Pairwise Comparisons method (MCPC) which generalizes existing Pairwise Comparisons methods in order to handle imprecision. More generally, it introduces an aiding toolbox in cooperative decision making which associates to a given weighting problem the appropriate Pairwise Comparisons approach. Besides, this toolbox provides an estimation of decision maker inputs consistency as well as advices in order to improve this consistency. Finally, an application of MCPC in the context of a distant asynchronous vote (through the net) procedure is proposed. Such a functionality can easily take place in a company groupware tool. The method is discussed through the optimal design of an ergonomic keyboard.*

*MOTS-CLÉS : aide à la décision multicritère, tri croisé, Monte Carlo, conception coopérative, protocole de vote, pondération.*

*KEY WORDS: multicriteria decision making, Pairwise Comparisons, Monte Carlo, cooperative design, vote protocol, weighting.*

---

## 1. Introduction

Pouvoir pondérer, seul ou en groupe, un ensemble d'éléments est une activité très fréquente en Management par la Valeur ou en gestion de projet et les conséquences de ces pondérations sont souvent considérables car ces dernières interviennent, la plupart du temps, dans les processus de décision des entreprises. Citons quelques cas classiques de pondération :

- la valorisation d'objectifs en phase 3 (Analyse Fonctionnelle) d'une action Analyse de la Valeur, ou la pondération des besoins client dans la première matrice d'une approche Q.F.D. (Quality Function Deployment),
- la pondération de critères de choix dans un processus de décision,
- la pondération de probabilités d'occurrence ou de coefficients de gravité en sûreté de fonctionnement,
- la pondération de durées de tâches lors d'un projet temporellement contraint,
- la pondération des coûts des parties d'un projet pour mener une Conception à Coût Objectif (C.C.O.).

Que l'on décide d'effectuer cette pondération, seul ou en groupe pour bénéficier de multiples expertises, on se trouve rapidement dans l'embarras lorsqu'il s'agit de distribuer 100% entre un nombre important d'éléments (la difficulté commence déjà à 3 ou 4). Les méthodes dites de *tri croisé* interviennent alors pour simplifier le processus en proposant de décomposer le problème en plusieurs comparaisons binaires d'éléments.

Dans la version la plus répandue du *tri croisé*, décrite dans la plupart des manuels d'Analyse de la Valeur, la méthode consiste à remplir une *demi-matrice de comparaisons* de manière qualitative. A la case  $(i,j)$  de la demi-matrice ( $i$  pour la ligne,  $j$  pour la colonne, avec  $j > i$ ), on fait figurer l'intitulé de l'élément le plus important (élément  $i$  ou élément  $j$ ) assorti d'un coefficient compris entre 0 et 3 selon que cet élément est jugé *égal* (0), *légèrement supérieur* (1), *supérieur* (2) ou *très supérieur* (3) à l'autre élément (exemple : « $j, 2$ » signifie que l'élément  $j$  est *supérieur* à l'élément  $i$ ). Dans un second temps, le poids de chacun des éléments est calculé comme étant le rapport des points qu'il a récoltés sur le total des points distribués à tous les éléments. Bien qu'arbitraires, de telles échelles exprimant une différence d'importance (0 à 3 ou autres) sont fréquemment utilisées dans la pratique par les méthodologues de l'Analyse de la Valeur ou du Q.F.D. (*Quality Function Deployment*). Les auteurs ont déjà critiqué cette méthode de *tri croisé élémentaire* dans [LIM 97] comme étant une *méthode inexacte* (définition donnée ultérieurement) car elle permet effectivement de hiérarchiser qualitativement les éléments par ordre d'importance mais elle ne donne pas des pondérations fiables (exactes) permettant d'être prises en compte dans des processus de valorisation, de décision ou de répartition de ressources.

Une autre méthode de *tri croisé* dénommée CABQ décrite dans [BEL 90] et présente dans plusieurs logiciels du marché se propose de corriger quelques travers du *tri croisé élémentaire*. A la case  $(i,j)$  de la demi-matrice, l'utilisateur

dispose d'un nombre fixe de points (en pratique 10) à répartir entre chacun des deux éléments  $i$  et  $j$  (exemple : 4 points pour  $i$  et 6 points pour  $j$ ) afin d'estimer la *part d'importance relative* de chacun d'entre eux. Là encore, le poids d'un élément est calculé au prorata des points qui lui ont été attribués. Comme nous le verrons au chapitre suivant, cette méthode qui permet la hiérarchisation des éléments comparés est elle aussi *inexacte* au sens d'une pondération fiable.

Une méthode de *tri croisé* se définit tout simplement comme l'algorithme qui, à partir des éléments d'une *matrice de comparaisons* permet de prédire les poids les plus vraisemblables. Plus généralement, pour  $n$  éléments à pondérer, une méthode de *tri croisé* consiste à remplir une matrice d'estimations des *importances relatives*  $c_{ij} = (p_i/p_j)$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $p_i$  et  $p_j$  représentant respectivement les poids des éléments  $i$  et  $j$ . Lorsque les comparaisons symétriques sont inverses l'une de l'autre ( $c_{ij} = 1/c_{ji}$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ ), la matrice des comparaisons est dite réciproque et seules  $n \cdot (n-1)/2$  comparaisons sont alors nécessaires (c'est le cas des deux méthodes présentées auparavant). Il est également possible d'exprimer une comparaison binaire par une *part d'importance relative*  $c_{ij} = (p_i/(p_i + p_j))$ . La notion de *part d'importance relative* est souvent plus intuitive car lorsque  $(p_i/(p_i + p_j))$  est estimé à 30%, cela signifie que  $p_i$  représente 30% relativement au total  $(p_i + p_j)$  et, par conséquent,  $p_j$  représente relativement 70%<sup>1</sup> (c'est le cas de la méthode CABQ).

Après avoir défini la *propriété d'exactitude* pour une méthode de *tri croisé* dans la chapitre 2, le chapitre 3 est consacré à une brève revue de la littérature dédiée aux méthodes de *tri croisé*. Ensuite, au chapitre 4, une liste de dix fonctionnalités définit les attentes auxquelles doit répondre, à notre avis, une méthode de *tri croisé*. En réponse à ce besoin, le chapitre suivant présente la méthode du *Tri Croisé de Monte Carlo* (TCMC) qui permet de généraliser toute méthode exacte de *tri croisé* à la prise en compte de l'imprécision, tout en intégrant les dix fonctionnalités évoquées au sein d'une même plate-forme logicielle. La pratique de cette méthode est illustrée au chapitre 6 par un cas d'étude réel lors de la conception ergonomique optimale d'un clavier d'ordinateur avec deux ergonomes. Enfin, la conclusion est consacrée à une récapitulation des principaux apports du TCMC, notamment sa flexibilité et sa simplicité d'utilisation pour l'aide à la décision coopérative.

## 2. L'exactitude d'une méthode de *tri croisé*

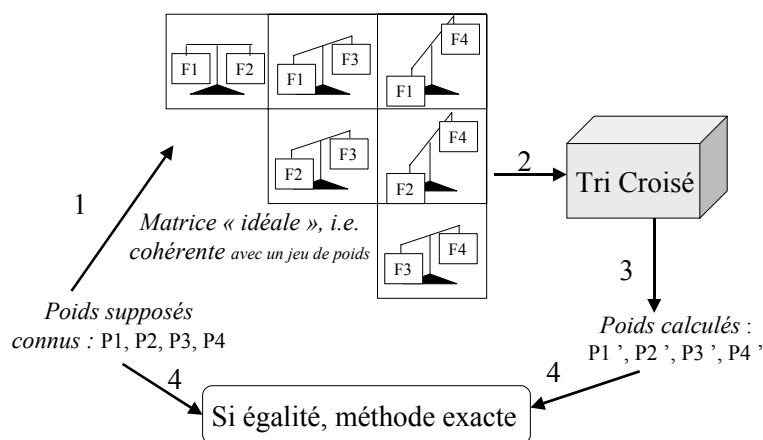
Nous proposons la définition suivante de l'*exactitude* d'une méthode de *tri croisé* :

« Une méthode de *tri croisé* est dite exacte si, pour n'importe quelle matrice de comparaisons bâtie à partir d'un jeu initial de poids, supposés connus (et totalisant 100%), l'algorithme de *tri croisé* considéré conduit à ce même jeu initial de poids. »

En d'autres termes, si on connaît d'avance la solution exacte correspondant à un jeu de paramètres d'entrée, la méthode de *tri croisé* doit nous la prédire exactement sans occasionner de distorsion. Cette propriété est résumée en figure 1.

---

<sup>1</sup> Le passage d'une représentation à l'autre est trivial.



**Figure 1 :** Vérification de l'exactitude d'une méthode de tri croisé en 4 phases

Par commodité, la matrice des comparaisons bâtie à partir d'un jeu de poids initiaux est caractérisée d'« idéale ». En effet, elle est idéale dans le sens où toutes les comparaisons élémentaires sont cohérentes entre elles, relativement à un jeu de poids existants. Lorsque les comparaisons expriment un rapport d'importance ( $c_{ij} = (p_i/p_j)$ ), la notion de cohérence, évoquée ici, est équivalente à la transitivité des comparaisons, c'est-à-dire :  $c_{ik} \times c_{kj} = c_{ij}, \forall i, j, k = 1, \dots, n$ . En toute généralité, le remplissage des comparaisons de la matrice se faisant de manière intuitive, la matrice n'a aucune chance d'être cohérente car nous sommes en présence d'un système de  $n^2$  équations<sup>2</sup> à  $n$  inconnues<sup>3</sup>. Le système est en toute logique mathématique surcontraint et sans solution. Les algorithmes de *tri croisé* doivent donc gérer cette incohérence et ils le font d'ailleurs tous puisque des matrices de comparaison violant la relation d'ordre « > » (exemple : une matrice exprimant que  $p_1 > p_2 > p_3 > p_1$ ) doivent pouvoir être prises en compte pour le calcul de poids consensuels. Il est très simple algorithmiquement de détecter ces incohérences cycliques et les deux méthodes précédemment citées le font lorsqu'elles sont informatisées. En revanche, l'absence d'incohérences cycliques (respect de la relation d'ordre) ne garantit pas la condition de transitivité présentée ci-dessus. Par exemple dans le cas de rapports d'importance, bien que les comparaisons  $c_{12} = 2; c_{23} = 2; c_{13} = 3$  respectent la relation d'ordre  $p_1 > p_2 > p_3$ , la transitivité numérique n'est pas vérifiée ( $c_{12} \times c_{23} \neq c_{13}$ ). Dans la pratique, peu de méthodes répandues au sein de logiciels d'Analyse de la Valeur ou d'aide à la décision multicritère proposent un indicateur de « non idéalité » de la matrice d'entrée ou de *cohérence* des données d'entrée (nous en reparlerons par la suite).

L'exemple qui suit caractérise l'inexactitude des deux méthodes évoquées précédemment. Pour le jeu suivant de poids initiaux (supposés connus) :  $P_1 = 11\%, P_2 = 11\%, P_3 = 18\%, P_4 = 60\%$ , les poids prédits sont respectivement  $P_1 = 0\%, P_2 = 0\%, P_3 = 30,8\%, P_4 = 69,2\%$  pour la méthode de *tri croisé élémentaire* et  $P_1 = 17,3\%, P_2 = 17,3\%, P_3 = 24,5\%, P_4 = 40,8\%$  pour la méthode

<sup>2</sup> En effet, chaque comparaison est une équation.

<sup>3</sup> Ou de  $n \cdot (n - 1) / 2$  équations à  $n$  inconnues dans le cas d'une matrice réciproque.

CABQ. Ainsi, en moyenne, la valeur absolue des écarts entre les poids calculés et les poids initiaux est de 11% dans le cas d'un *tri croisé élémentaire* et de 9,6% dans le cas de la méthode CABQ [BEL 90]. Dans le premier cas, cette différence provient du fait que le *tri croisé élémentaire* impose, de manière inhérente, un poids nul aux éléments les moins importants ( $P_1 = 0, P_2 = 0$ ). A l'opposé dans le deuxième cas, cette différence résulte du fait que la méthode CABQ écrase le poids de l'élément le plus important en le limitant à  $2/n$ . En effet, si on considère que le quota de points par comparaison binaire est de 10, le nombre maximum de points que peut récolter un élément est atteint en lui attribuant 10, pour chacune des comparaisons dans laquelle il intervient, soit  $10 \times (n-1)$  points. Le nombre total de points répartis sur les  $n \cdot (n-1)/2$  cases de la demi-matrice des comparaisons étant de  $10 \cdot n \cdot (n-1)/2$ , le poids maximum est donc de :

$$\frac{10 \times (n-1)}{10 \times \frac{n \times (n-1)}{2}} = \frac{2}{n}$$

Dans le cas présent, on ne peut atteindre  $P_4 = 2/n = 0,5$  que si on juge que le poids  $P_4$  est infiniment supérieur à tous les autres poids (les 10 points lui sont systématiquement attribués), ce qui est bien entendu irréaliste à la vue des poids supposés connus.

Ces écarts ainsi chiffrés sont pour le moins importants et injustifiés, comme nous le verrons au chapitre suivant.

### 3. La littérature du *tri croisé*

La littérature scientifique concernant le *tri croisé*<sup>4</sup> est loin d'être inexistante. Elle s'insère dans la thématique de l'aide à la décision multicritère bien que le principe de base du tri croisé consiste à comparer des éléments selon leur importance relative au regard d'un seul critère. Saaty [SAA 77] a généralisé cette approche mono-critère à plusieurs critères par une méthode à deux étapes. Dans un premier temps les  $m$  critères considérés sont pondérés aux regard d'un objectif de plus haut niveau. Ensuite les  $n$  éléments ou alternatives à comparer sont pondérés au regard de chacun des  $m$  critères. Cette procédure conduit à une pondération globale des éléments. Dans ce qui suit, quelques unes des nombreuses contributions au concept de *tri croisé* sont passées en revue.

Saaty [SAA 77] considère une matrice réciproque de comparaisons de type  $c_{ij} = (p_i/p_j)$ . Il démontre alors que la valeur propre maximale est réelle positive et que le vecteur propre correspondant donne les poids recherchés. Sa méthode de *tri croisé* est bien exacte. Cette méthode ne fonctionne que lorsque les cases de la matrice ne comportent qu'une seule comparaison (un seul jugement).

Dans les deux cas où 1) plusieurs personnes aimeraient émettre une *opinion* différente au niveau d'une comparaison ou 2) aucune personne ne se sent la compétence pour exprimer une opinion (la matrice comporte alors des trous), De Graan [DEG 80] et Lootsma [LOO 82] proposent une approche dite de régression logarithmique qui mène à une estimation sensée des poids (et exacte), à moins que

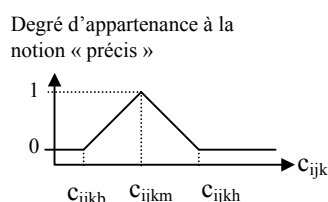
---

<sup>4</sup> *Pairwise Comparisons* en anglais

les trous de la matrice ne conduisent à un système insoluble. Dans ce qui suit, la notation  $c_{ijk}$  référence la  $k^{\text{ème}}$  opinion exprimée sur la comparaison  $c_{ij}$ .

Van Laarhoven et Pedrycz [VAN 83], ont proposé une extension de cette approche déterministe<sup>5</sup> en considérant chaque comparaison comme un nombre flou dont la fonction d'appartenance est triangulaire (voir les principes de la logique floue dans [ZAD 75] par exemple). Pour deux élément à comparer  $(i,j)$ , une fonction d'appartenance associée à toute valeur du rapport d'importance (il y en a une infinité) un degré d'appartenance à la notion « précis ». Une fonction d'appartenance triangulaire est ainsi définie par une valeur basse ( $c_{ijkb}$ ), une valeur modale ( $c_{ijkm}$ ) et une valeur haute ( $c_{ijkh}$ ) (voir figure 2). Les poids résultants sont également donnés sous forme de nombres flous triangulaires.

Boender et al. [BOE 89] ont proposé une amélioration de cette méthode. Cependant leur approche ne garantit pas que les poids flous triangulaires résultants vérifient la relation « valeur basse  $\leq$  valeur modale  $\leq$  valeur haute ».



**Figure 2 :** Dans [VAN 83], une comparaison binaire est représentée par un nombre flou triangulaire

Buckley propose une méthode qui évite cet écueil à condition de disposer d'une formulation analytique appropriée (comportant des opérateurs algébriques extensibles à la théorie des ensembles flous) des poids résultants [BUC 85].

#### 4. Les dix fonctionnalités d'une méthode de *tri croisé*

La liste qui suit détaille dix propriétés, que nous jugeons importantes pour aboutir à un outil complet et flexible de *tri croisé* dans l'optique d'une utilisation méthodologique, industrielle, ergonomique et de qualité :

- 1) La méthode doit être exacte (bien entendu),
- 2) Les comparaisons doivent pouvoir être exprimées avec une certaine imprécision.
- 3) Un calcul de poids doit être rendu avec un degré de cohérence variant de 0 à 100% (100% dans le cas d'une matrice parfaitement cohérente ou encore « idéale »). En effet, il faut que l'individu ou le groupe dispose d'une mesure de la cohérence globale de son jugement, afin de pouvoir en estimer la pertinence au sein du processus de prise de décision considéré.

<sup>5</sup> Dans cet article une « approche / méthode / algorithme *déterministe* » est une approche / méthode / algorithme de *tri croisé* qui ne prend pas en compte l'imprécision d'une comparaison.

4) Ce degré de cohérence est encore plus utile si l'individu ou le groupe est informé des comparaisons sur lesquelles il a été le plus incohérent (vis-à-vis de l'ensemble des données d'entrée) pour pouvoir, s'il le désire, réviser son jugement. Cette information peut aider à détecter, par exemple, un manque de pluridisciplinarité dans un groupe.

5) Les données de la matrice des comparaisons doivent pouvoir être incomplètes. En effet, il est parfois difficile de comparer des éléments de natures très différentes (éléments techniques et éléments esthétiques par exemple). De la même manière, il se peut qu'aucun expert du groupe de travail ne connaisse bien à la fois les deux éléments pour se prononcer.

6) Plusieurs opinions doivent pouvoir être exprimées au niveau d'une comparaison, ce nombre pouvant varier d'une comparaison à l'autre.

7) Lorsque l'ordre des éléments à comparer influe sur l'issue de cette comparaison, on doit pouvoir considérer indépendamment les deux arrangements :  $(i,j)$  et  $(j,i)$ . C'est le cas par exemple de tout ce qui est comparaison binaire par les sens : lorsqu'on goûte un vin  $i$  avant un vin  $j$ , le résultat peut être différent de la procédure inverse car le palais s'habitue au premier vin. Il en va de même pour le toucher ou la vue.

8) On doit pouvoir traiter le cas des tests en aveugle pour lesquels l'identité des éléments à comparer n'est pas révélée. Dans la mesure où on ne sait pas ce que l'on compare, on peut trouver des différences entre des éléments identiques. Sur des matrices de comparaison constituées de rapports d'importance, cela revient à autoriser que les comparaisons situées sur la diagonale ( $c_{ii}$ ) soient différentes de 1. Un degré de cohérence donne alors une idée du professionnalisme ou de la bonne foi d'un individu (effet « placebo »).

9) A l'ère du travail distribué (*groupware, internet*), il faut pouvoir permettre à plusieurs personnes de travailler à un même *tri croisé* de manière répartie et asynchrone par l'intermédiaire du réseau.

10) Les algorithmes exacts de *tri croisé* présents dans la littérature ne couvrent pas de manière exhaustive les différents protocoles de tri existants dans la pratique (tri en aveugle, vote à distance asynchrone, etc). Une plate-forme de *tri croisé* devrait permettre de décrire le problème à résoudre et de choisir, de manière transparente, le meilleur algorithme pour y parvenir, ceci dans un souci de transparence pour l'utilisateur.

## 5. Le Tri Croisé de Monte Carlo

D'un point de vue probabiliste, traduire une imprécision se fait en terme d'incertitude. La notion de courbe de densité de probabilité diffère de celle de fonction d'appartenance de la théorie des ensembles flous [WOO 89]. D'un côté il s'agit de concevoir qu'une valeur de comparaison donnée a un degré d'appartenance à la notion « précis » et de l'autre il s'agit d'estimer sa fréquence d'occurrence relativement à toutes les valeurs de comparaison possibles.

Comme il a été vu précédemment, l'extension du *tri croisé* à la prise en compte de l'imprécision est principalement basée sur la théorie des ensembles flous.



D'autre part, elle se limite à un nombre restreint d'approches déterministes, notamment l'approche basée sur la régression logarithmique en utilisant des courbes d'imprécision triangulaires (voir [BOE 89]), ainsi que les approches conduisant à une formulation analytique appropriée des poids (voir [BUC 85]).

L'approche probabiliste proposée dans cet article permet, quant à elle, d'étendre toute approche déterministe de *tri croisé*, en se basant sur une simulation de Monte Carlo [BUS 66].

Les variables d'entrée de l'algorithme du *Tri Croisé de Monte Carlo* (TCMC) sont :

- des comparaisons définies par une courbe de densité de probabilité (d'intégrale 1),

Les variables de sortie de l'algorithme sont :



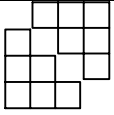
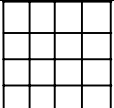
- des poids définis par une courbe de densité de probabilité,
- la valeur modale (la plus probable) assortie d'une estimation d'erreur absolue,
- un degré de cohérence,
- les comparaisons les plus incohérentes classées par ordre de priorité et assorties d'un sens de variation (augmentation ou diminution) pour améliorer la cohérence,

L'algorithme du TCMC se décompose en cinq étapes :

- 1) Choix d'une méthode déterministe parmi quatre dépendant du type de problème à résoudre (voir tableau 1).
- 2) Génération de  $N$  matrices de comparaisons par tirages aléatoires des comparaisons élémentaires respectant les courbes de densité de probabilité,
- 3) Calcul des  $N$  vecteurs de poids solutions par la méthode choisie,
- 4) Reconstitution des courbes de densité de probabilité des poids,
- 5) Analyse de cohérence (degré de cohérence, comparaisons les plus incohérentes et recommandations en vue d'augmenter la cohérence).

Ces étapes ne seront, pour ainsi dire, pas détaillées dans cet article. Toutefois, il est intéressant de remarquer que le type de problème détermine sans ambiguïté le choix de la méthode déterministe de *tri croisé*. Le nombre de tirages  $N$  varie traditionnellement entre une centaine de tirages et quelques milliers. Cette valeur, qui dépend de différents facteurs non détaillés ici, conditionne l'erreur absolue de la valeur modale des poids.

Enfin, l'algorithme du TCMC fournit un indicateur de cohérence générique indépendant de la méthode déterministe de *tri croisé* utilisée, pour permettre une évaluation de la cohérence des comparaisons d'entrée (aspect non détaillé ici). Il en est de même de l'algorithme de détermination des comparaisons les plus incohérentes. Pour une description plus détaillée de l'algorithme du TCMC, le lecteur peut se reporter à [LIM 00].

Type de problème	Méthode déterministe de <i>tri croisé</i>	Bibliographie	Remplissage matrice	Nombre opinions par comp.
- un seul individu - consensus en séance de groupe	Valeurs propres	[SAA 77]		1
- plusieurs opinions en groupe - vote asynchrone en réseau	Régression logarithmique $n \cdot (n-1)/2$	[DEG 80] [LOO 82]		0, 1, ou n
- plusieurs opinions en groupe - vote asynchrone en réseau... - ... dans le cas où l'ordre de comparaison entre deux éléments a de l'importance	Régression logarithmique $n \cdot (n-1)$	[DEG 80] [LOO 82]		0, 1, ou n
- test en aveugle (pour un seul individu ou consensus en séance de groupe)	Moyenne géométrique généralisée	[KOC 99]		1

**Tableau 1 :** *Etape 1 du TCMC : le choix du type de problème conditionne le choix de la méthode déterministe de tri croisé*

## 6. Le cas d'étude du clavier ergonomique

Nous avons choisi d'illustrer les fonctionnalités du *Tri Croisé de Monte Carlo* au travers du cas réel de la conception optimale d'un clavier d'ordinateur ergonomique. Un des auteurs a en effet contribué à proposer des innovations d'ergonomie tridimensionnelle sur un clavier (voir la figure 3 et le brevet [YAN 98]). Disposant de nouvelles formes de pavés de touches<sup>6</sup>, il fallait repenser la répartition des lettres, ou plus généralement de symboles alphanumériques, sur les touches. Ce problème de répartition optimale est un problème ancien puisque le standard français *Azerty* est issu du standard américain *Qwerty* qui a été conçu en 1873 pour ralentir la frappe<sup>7</sup> ! Depuis lors des tentatives expérimentales de répartition optimale ont échoué à s'imposer comme standards ; citons le clavier *Dvorak* aux Etats-Unis et le clavier *Marsan* en France, bien connus des spécialistes de l'ergonomie. Ces claviers ont pourtant en commun des propriétés remarquables : la distance parcourue par les doigts est 2,5 fois inférieure (les lettres les plus utilisées se trouvent sur la rangée de garde), un rééquilibrage entre main droite et main gauche ainsi qu'entre les doigts selon leur endurance est réalisé, l'alternance de frappe main droite / main gauche est grandement améliorée, etc...

<sup>6</sup> Il y a notamment des touches activables par les pouces ainsi que des touches intégrées à des repose-paumes fonctionnels en cours de frappe et réglables en translation.

<sup>7</sup> En effet, les machines à écrire mécaniques emmêlaient leurs marteaux lorsque deux frappes consécutives étaient trop rapprochées.

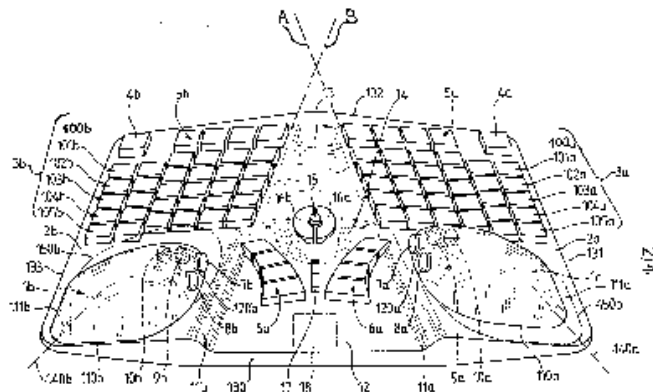


FIG. 2

Figure 3 : Le clavier ergonomique du brevet [YAN 98]

En reprenant ce problème de répartition optimale de lettres avec l'aide de programmes d'optimisation, nous espérons trouver de meilleurs résultats et proposer un nouveau standard français. Ce fut le cas avec une étude qui vient de s'achever et qui a permis d'aboutir à une proposition de clavier français (voir figure 4) qui est 52% meilleur que le standard *Azerty* et 20% meilleur que le clavier manuellement optimisé *Marsan*. Cette étude, consignée dans [WAG 01], a utilisé un algorithme d'optimisation mathématique nouvellement apparu : « les systèmes de colonies de fourmis », pour trouver une meilleure solution (donnée en figure 4). Cet algorithme nécessite la mise en œuvre d'une fonction d'évaluation permettant de calculer une note globale pour un clavier candidat. Cette fonction d'évaluation, détaillée dans [WAG 01] est obtenue à partir de 6 notes de pénalité  $n_{i, \text{clavier courant}}$  exprimant le non respect de 6 critères ergonomiques présents dans les travaux de Marsan (voir [MAR 87]). Ces 6 notes de pénalité étant exprimées dans des unités différentes, le choix a été fait de les rendre sans dimension en les divisant par la note correspondante du clavier standard *Azerty*. Ces notes sont visibles sur la figure 4, une valeur inférieure à 1 signifiant une plus grande ergonomie que le clavier *Azerty*. La fonction d'évaluation d'un clavier est donc donnée par une moyenne pondérée de ces pénalités adimensionnelles par la formule suivante :

$$Note = \sum_{i=1}^6 p_i \frac{n_{i, \text{clavier courant}}}{n_{i, AZERTY}}$$

	1	2	3	4	5		0	6	7	8	9	0	.	/
µ	W	G	J	V	Ç		1	Ret	+	[	{	}	]	%
#	w	g	«	j	v	ç	2	rSh	-	È	Ê	É	&	^
Z	B	F	M	L	Q	ISh	3	rSp	O	A	E	I	U	'
z	b	f	m	l	q	ISp	4	rAGr	o	a	e	i	u	,
P	N	S	R	T	D		5		~	À	:		?	!
p	n	s	r	t	d				=	à	@	;	:	!
Y	K	X	C	H	Ù	IAGr								
y	k	x	c	h	ù									
				,					.					

accessibility	number of keys	alternation	sameFinger	leaps	direction	global note	Rules
Criterion							Value
accessibility (Accessibilité)							0.4774
number of keys (Nombre de touches)							0.9904
alternation (Alternance des mains)							0.657
sameFinger (Éviter l'utilisation consécutive d'un même doigt)							0.2389
leaps (Éviter les grands pas)							0.2246
direction (Sens de frappe)							0.3732
global note							0.4788

**Figure 4 :** La meilleure répartition de lettres pour un clavier français proposée dans [WAG 01]

La pondération de ces pénalités, qui n'était pas fixée dans les travaux de Marsan, a donc été cruciale pour le résultat. Elle a été réalisée par l'intermédiaire du TCMC au cours d'une séance mettant en jeu deux ergonomes connaissant l'ergonomie de la frappe, dénommés *décideur n°1* et *décideur n°2*, et un animateur.

1	Potentiel d'amélioration du critère « <b>accessibilité et charge</b> » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{1,clavier\ courant}$ mesure l'écart entre l'utilisation réelle de chacun des doigts et un profil d'utilisation idéale.	13,3%
2	Potentiel d'amélioration du critère « <b>nombre de touches</b> » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{2,clavier\ courant}$ mesure le nombre de frappes de touches nécessaire à l'activation d'un symbole.	11,8%
3	Potentiel d'amélioration du critère « <b>alternance des mains</b> » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{3,clavier\ courant}$ mesure le pourcentage de frappes consécutives réalisées par une même main.	26,6%
4	Potentiel d'amélioration du critère « <b>utilisation d'un même doigt</b> » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{4,clavier\ courant}$ mesure le pourcentage de frappes consécutives réalisées par un même doigt.	19,3%
5	Potentiel d'amélioration du critère « <b>grands pas</b> » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{5,clavier\ courant}$ mesure le pourcentage de frappes consécutives réalisées par deux doigts différents d'une même main sur des rangées de touches différentes (obligeant une torsion du poignet).	15,3%
6	Potentiel d'amélioration du critère « <b>sens de frappe</b> » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{6,clavier\ courant}$ mesure le pourcentage de frappes consécutives réalisées par deux doigts d'une même main dans le sens pouce vers auriculaire (sens contraire au réflexe de tapotage).	13,7%

**Tableau 2 :** Pondération finale adoptée pour les 6 pénalisations ergonomiques du clavier [WAG 01]

Il a été demandé aux deux décideurs de s'exprimer indépendamment sur l'importance relative des 6 pénalités adimensionnées au travers du remplissage

d'une demi-matrice de comparaison. Ils étaient autorisés à omettre certaines comparaisons binaires (ce qu'a fait le décideur 2) et à modéliser ou pas les incertitudes sur le chiffrage (ils ont souvent pris des triangles symétriques avec 10% d'intervalle d'incertitude). Les 6 éléments à comparer leur ont été présentés comme des « potentialités d'amélioration ergonomique par rapport au clavier *Azerty* » (voir tableau 2).

Un premier tour de chiffrage des pondérations a donc eu lieu sans que les deux décideurs ne se soient vraiment entretenus sur un chiffrage précis. Les deux matrices de comparaison et les poids résultats de chaque décideur sont donnés dans la figure 5 en annexe. Le premier constat est que leurs résultats sont assez similaires pour les poids {2, 3, 4, 6}, le décideur 1 donnant plus d'importance au critère 5 de « grand pas » et le décideur 2 donnant à l'inverse plus d'importance au critère 1 « d'accessibilité ». Une autre différence réside dans le fait que le décideur 2 est très cohérent avec lui-même (avec 96,7%) alors que le décideur 1 est moins cohérent avec 92,8%. Chaque décideur a eu accès au résultat de l'autre et des résultats pour le groupe ont été produits. Des poids sont proposés pour le groupe en figure 6 et la cohérence du groupe est estimée à 77,8%. On a ainsi affaire à deux jugements assez, voire très, intrinsèquement cohérents (c'est souvent le cas pour des spécialistes) mais assez incohérents entre eux. Les décideurs ont deux types de conseils qu'ils ont bien entendu loisir de suivre ou pas. D'une part, ils peuvent améliorer leur cohérence personnelle en suivant prioritairement les conseils sur les « comparaisons à changer » de la figure 5, ou améliorer la cohérence du groupe en suivant les conseils sur les « comparaisons à changer » de la figure 6.

Le décideur 1 qui s'est avéré très indépendant décide de ne pas se laisser influencer par l'autre décideur ou le groupe, mais accepte de revoir son jugement pour améliorer sa cohérence personnelle. Suivant en cela les conseils de la figure 5, il décide de diminuer la valeur de la comparaison (1, 5) de 10%<sup>8</sup> et d'augmenter la valeur de la comparaison (4, 6) de 10%. Il en résulte une grande amélioration de cohérence personnelle (98,1% en figure 6) pour une faible modification personnelle des poids.

Le décideur 2, qui avait une bonne cohérence personnelle, s'est lui laissé influencé par les résultats du groupe. Le logiciel lui conseille (voir figure 6) de diminuer l'importance de l'élément 1 par rapport à l'élément 5 (ce qui différencie bien les deux décideurs) ainsi que l'importance de 1 par rapport à 6. Cette dernière suggestion lui est également faite pour aller dans le sens de plus de cohérence personnelle. En définitive, le décideur 2 décide de :

- diminuer systématiquement l'importance de l'élément 1,
- augmenter systématiquement l'importance de l'élément 5 sauf par rapport à l'élément 3 (car conseil inverse en figure 5).

	2	3	4	5	6
1	-8%	-5%	-5%	-16%	-4%
2				-8%	
3				-2%	
4				-8%	
5					+8%

**Tableau 3 :** *Modifications de la matrice de comparaison du décideur 2*

<sup>8</sup> Ou encore de diminuer l'importance relative de l'élément 1 relativement à l'élément 5 de 10%.

Les modifications opérées par le décideur 2 sont résumées dans le tableau 3. En définitive, la figure 7 montre que la cohérence de son jugement personnel n'est quasiment pas dégradée alors que la cohérence du groupe s'améliore considérablement en passant de 77,8% à 90,6%. D'un commun accord, les deux décideurs décident de ne plus modifier leur jugement et les résultats du groupe donnés en figure 8 sont adoptés comme résultats définitifs, le compromis étant jugé satisfaisant par les deux décideurs.

## 7. Conclusion

Le *Tri Croisé de Monte Carlo* est une méthode de pondération permettant de généraliser tout type de méthode déterministe de *tri croisé* à la prise en compte de l'imprécision. A partir d'une description fonctionnelle du type de problème à résoudre (séance de groupe avec multiples opinions, utilisation individuelle, session de vote asynchrone à travers un réseau ou encore test en aveugle, etc), la méthode identifie en interne l'algorithme de *tri croisé* déterministe le plus approprié (voir Tableau 1). Le TCMC démontre une très grande souplesse d'utilisation en permettant de ne pas se prononcer sur certaines comparaisons ou au contraire en émettant plusieurs opinions par comparaison, ainsi qu'en spécifiant tout type de courbe de densité de probabilité pour une comparaison. Enfin, une boucle d'asservissement au degré de cohérence des comparaisons d'entrée est rendue possible avec des conseils (et non des obligations) de modification des comparaisons détectées comme étant les plus incohérentes (relativement au reste des comparaisons). Les degrés de cohérence et les conseils de modification des comparaisons sont donnés à la fois pour aller dans le sens de l'amélioration de la cohérence d'un jugement personnel ou pour être plus cohérent avec le groupe. L'observation des stratégies personnelles de révision du jugement des décideurs peut être très instructive pour un animateur de groupe.

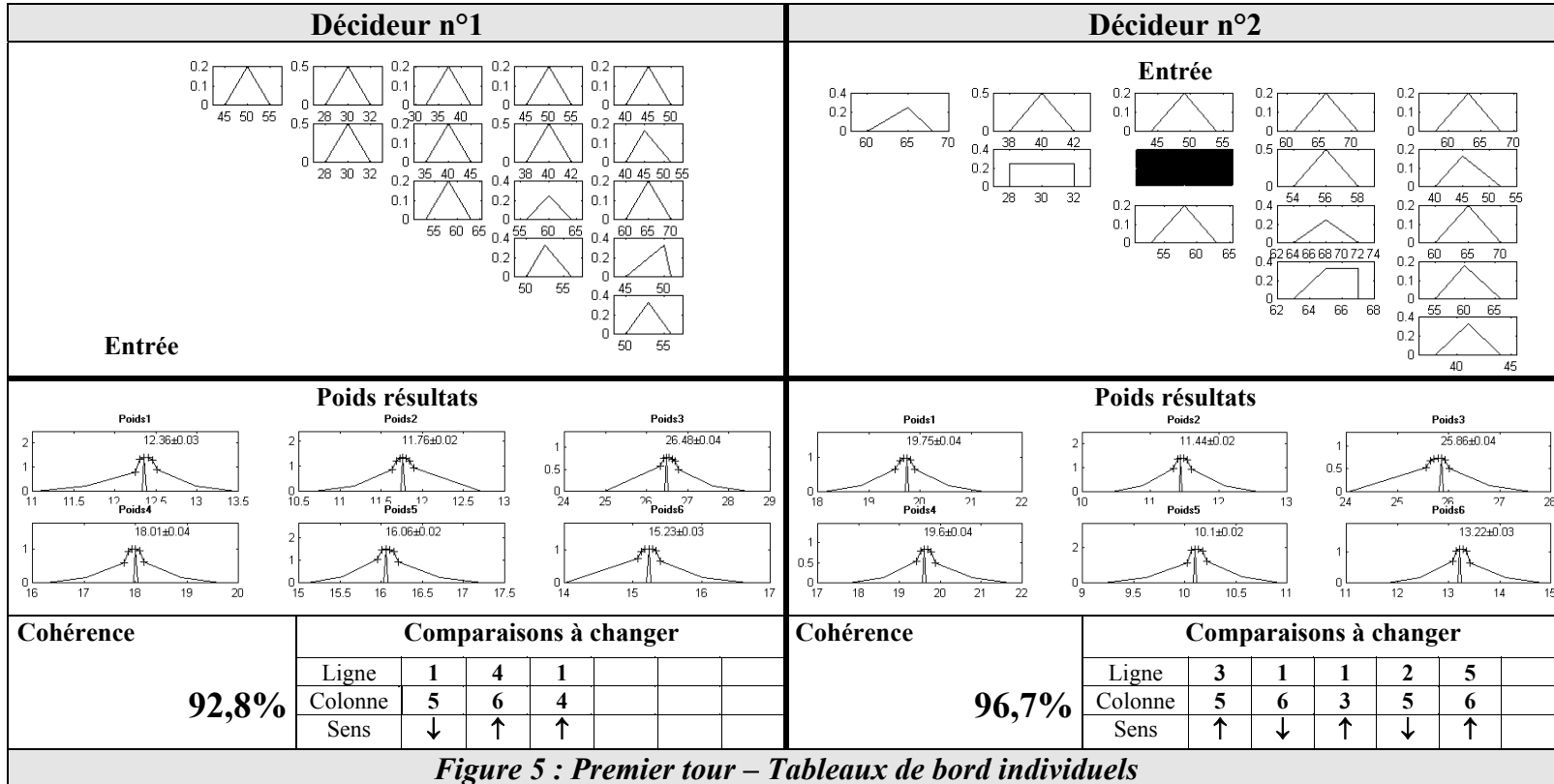
La maquette actuelle du TCMC a été développée dans un environnement Matlab 5.3. Une version commerciale est en train de voir le jour.

## 8. Bibliographie

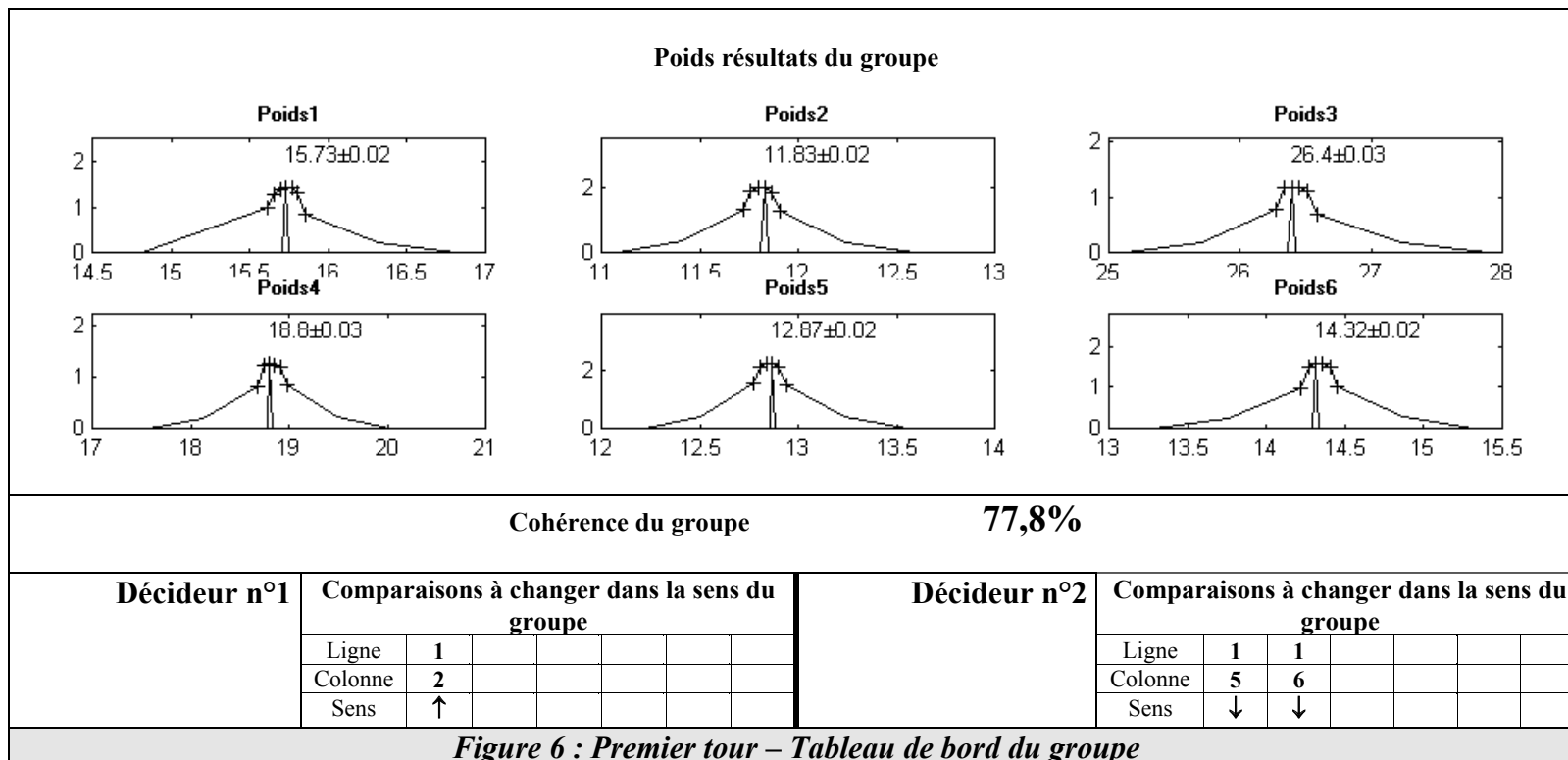
- [BEL 90] Bellut S., *La compétitivité par la maîtrise des coûts - conception à coûts objectifs et analyse de la valeur*, Paris, AFNOR gestion, 1990.
- [BOE 89] Boender C. G. E., et al., "Multi-criteria decision analysis with fuzzy Pairwise Comparisons", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 29, 1989, p. 133-143.
- [BUC 85] Buckley J. J., "Fuzzy hierarchical analysis", *Fuzzy sets and systems*, vol. 17, 1985, p. 233-247.
- [BUS 66] Buslenko N. P., et al., *The Monte Carlo Method - The Method of Statistical Trials*, in International series of monographs in pure and applied mathematics, Pergamon Press Ed., vol. 87, 1966.
- [DEG 80] De Graan J. G., "Extensions to the multiple criteria analysis of T. L. Saaty", *Report National Institute of Water Supply*, Voorburg, The Netherlands, 1980.
- [KOC 99] Koczkodaj W.W., Orłowski M., "Computing a consistent approximation to a generalized Pairwise Comparisons matrix", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 37, 1999, p. 79-85.

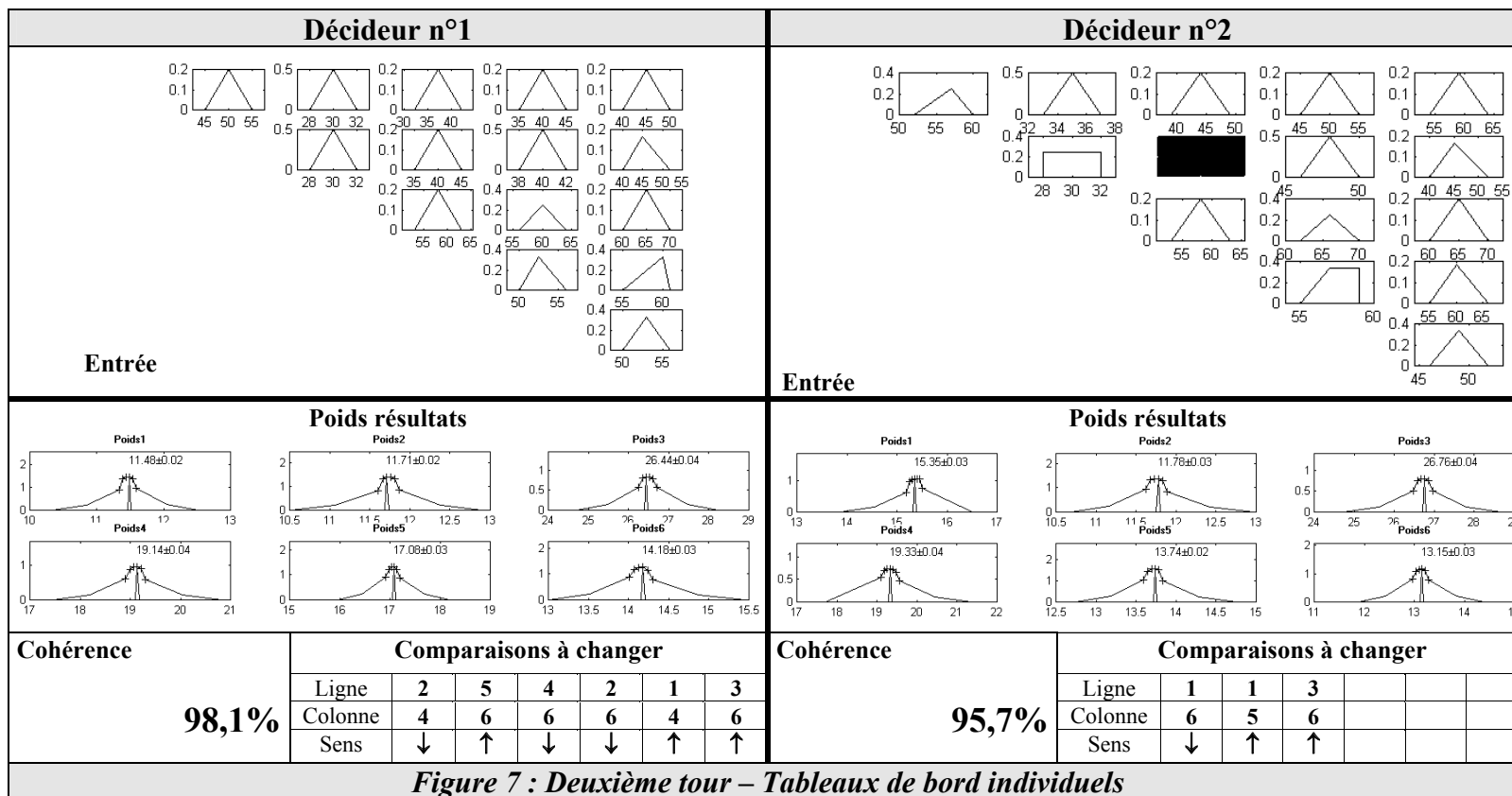
- [LIM 97] Limayem F., Yannou, B., "Comment quantifier le besoin ?", *La Valeur*, n°74, 1997, p. 18-22.
- [LIM 00] Limayem F., Yannou, B., "A Monte Carlo Approach to Handle Imprecision in Pairwise Comparisons", *IDMME2000 : Third International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, Montréal, 2000.
- [LOO 82] Lootsma F. A., "Performance evaluation of nonlinear optimization methods via multi-criteria decision analysis and via linear model analysis", *Nonlinear Optimization*, M.J.D. Powell ed. London, 1982, p. 419-453.
- [MAR 87] Marsan C., « Claviers alphanumériques ergonomiques pour machines à écrire et similaires », Brevet d'invention n° 87-03267, déposé le 03 mars 1987 à l'Institut National de la Propriété Industrielle, France.
- [SAA 77] Saaty T. L., "A scaling method for priorities in hierarchical structures", *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 15, 1977, p. 234-281.
- [VAN 83] Van Laarhoven P. J. M., Pedrycz W., "A fuzzy extension of Saaty's priority theory", *Fuzzy sets and systems*, vol. 11, 1983, p. 229-241.
- [WAG 01] Wagner M.O., Yannou B., Kehl S., Feillet D., Eggert J., « Ergonomic Modelling and Optimization of the Keyboard Arrangement with an Ant Colony Optimization Algorithm », Technical report 01-02 A, Ecole Centrale Paris, Laboratoire Productique-Logistique, august 2001.
- [WOO 89] Wood K. L., Antonsson E. K., Beck J. L., "Comparing fuzzy and probability calculus for representing imprecision in preliminary engineering design", *Design Theory and Methodology Conference*, Montréal, Canada, 1989, p. 99-105.
- [YAN 98] Yannou B., Hossenlopp P., Clavier alphanumérique ergonomique, Brevet d'invention n° 98-04588, déposé le 10 avril 1998, délivré le 23 juin 2000 sous le numéro de publication 2 777 222, 1998.
- [ZAD 75] Zadeh L. A., "The concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning", *Information Sciences*, Vol. 8, 1975, p. 199-249.

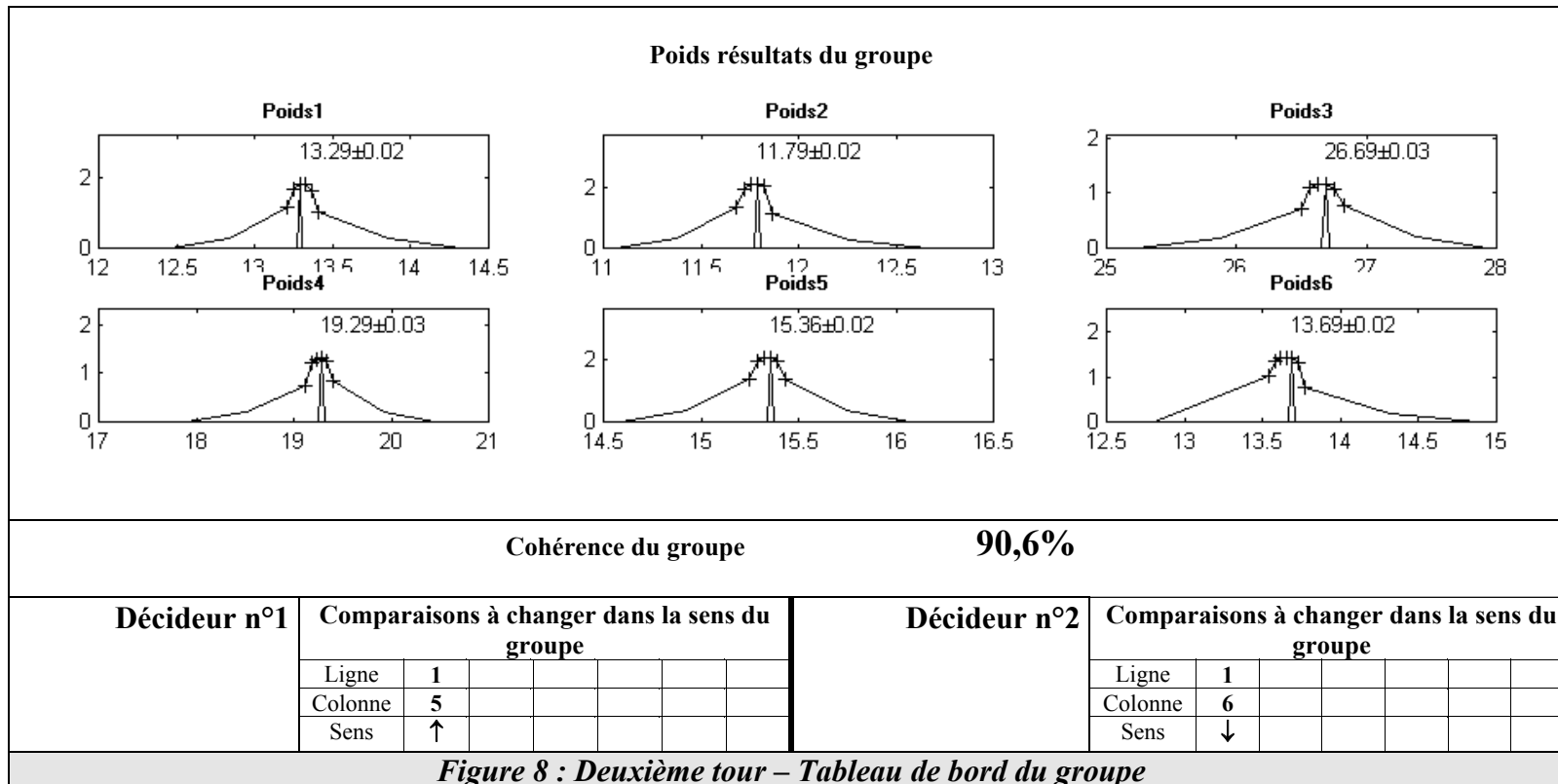
9. Annexes











*Figure 8 : Deuxième tour – Tableau de bord du groupe*